

ÚVOD DO PREDMETU DESKRIPTÍVNA GEOMETRIA

Ľubica Valášková, Zuzana Tereňová,
Margita Vajsábllová, Katarína Mészárossová

ÚVOD DO PREDMETU DESKRIPTÍVNA GEOMETRIA

**Ľubica Valášková, Zuzana Tereňová,
Margita Vajsáblová, Katarína Mészárosová**

Všetky práva vyhradené. Nižaká časť textu nesmie byť použitá na ďalšie šírenie akoukoľvek formou bez predchádzajúceho súhlasu autorov alebo nakladateľstva.

© RNDr. Ľubica Valášková, PhD., RNDr. Zuzana Tereňová, PhD.,
RNDr. Margita Vajsábllová, PhD., RNDr. Katarína Mészárosová, PhD.

Recenzenti: doc. RNDr. Daniela Velichová, CSc.
doc. RNDr. Mária Kmeťová, PhD.

Schválila Edičná rada Stavebnej fakulty STU v Bratislave.

ISBN 978-80-227-4160-6

O B S A H

Úvod	5
Symbody a označenia	7
1 Ohniskové vlastnosti kužeľosečiek (Vajsáblová)	9
1.1 Elipsa	10
1.2 Hyperbola	12
1.3 Parabola	15
1.4 Vlastnosti dotyčníc kužeľosečky	16
Cvičenia	27
2 Základné pojmy zo stereometrie (Valášková)	31
2.1 Určenie priamok a rovín a ich vzájomná poloha	31
2.2 Uhly a vzdialenosti	34
2.3 Rovnobežnosť a kolmosť priamok a rovín	36
2.4 Jednoduché plochy a telesá	37
Cvičenia	41
3 Rovnobežné premietanie a perspektívna afinita (Valášková)	43
3.1 Rovnobežné premietanie	43
3.2 Základné vlastnosti rovnobežného premietania	45
3.3 Kolmé (pravouhlé) premietanie	47
3.4 Perspektívna afinita	48
3.5 Obraz kružnice v perspektívnej afinite (Tereňová)	54
Cvičenia	67
4 Mongeova projekcia 1. časť (Valášková)	69
4.1 Obraz bodu v Mongeovej projekcii	69
4.2 Bokorysňa	73
4.3 Obraz priamky v Mongeovej projekcii	76
4.4 Obraz roviny v Mongeovej projekcii	78
4.5 Hlavné a spádové priamky roviny, kolmica na rovinu	82
4.6 Polohové úlohy	85
4.7 Úlohy na hranolových plochách	95
Cvičenia	100
Mongeova projekcia 2. časť (Mészárosová, Tereňová)	104
4.8 Metrické úlohy	104
4.9 Otočenie roviny	117
4.10 Zobrazenie rovinného útvaru	126
4.11 Zobrazenie telies	132
4.12 Tretia priemetňa	137
Cvičenia (Tereňová)	143
Literatúra	148

ÚVOD

Skriptá Úvod do predmetu Deskriptívna geometria je určený pre budúcich študentov a študentov prvého ročníka bakalárskeho stupňa Stavebnej fakulty a Fakulty architektúry Slovenskej technickej univerzity. Učebný text obsahuje základné pojmy potrebné pre štúdium predmetu Deskriptívna geometria a svojím obsahom plne pokrýva obsah prípravného Kurzu deskriptívnej geometrie, ktorý prebieha pred nástupom študentov na štúdium na spomínaných fakultách a jeho hlavný cieľ je zhrnutie učiva zo stredných škôl, prípadne jeho doplnenie.

V prvej kapitole učebného textu sú podrobne spracované ohniskové vlastnosti kužeľosečiek, teória je doplnená dôkazmi, riešenými úlohami, a tiež zadaniami ďalších úloh.

V ďalšej časti skript je prehľad základných pojmov zo stereometrie, vlastnosti rovnobežného a špeciálne kolmého premietania, a tiež ich aplikácia v perspektívnej afinite. V problematike perspektívnej afinity sú uvedené jej vlastnosti, obraz rovinného útvaru a osobitne obraz kružnice v perspektívnej afinite a z nich vyplývajúce konštrukcie.

Obsahom štvrtej kapitoly učebného textu je zobrazovacia metóda Mongeova projekcia. Podrobne spracovaná teória a riešenie praktických úloh sú členené do dvoch častí, pričom prvá z nich sa zaoberá problematikou polohových úloh a druhá metrických úloh. Aplikácia predchádzajúcich metód je ukázaná na obraze telies a jednoduchých priamkových plôch v Mongeovej projekcii, a tiež ich rezov rovinou.

Veríme, že učebný text bude vhodná pomôcka pri štúdiu predmetu Deskriptívna geometria a želáme jeho čitateľom veľa úspechov.

Autorky

Bratislava, 2014

Symboly a označenia

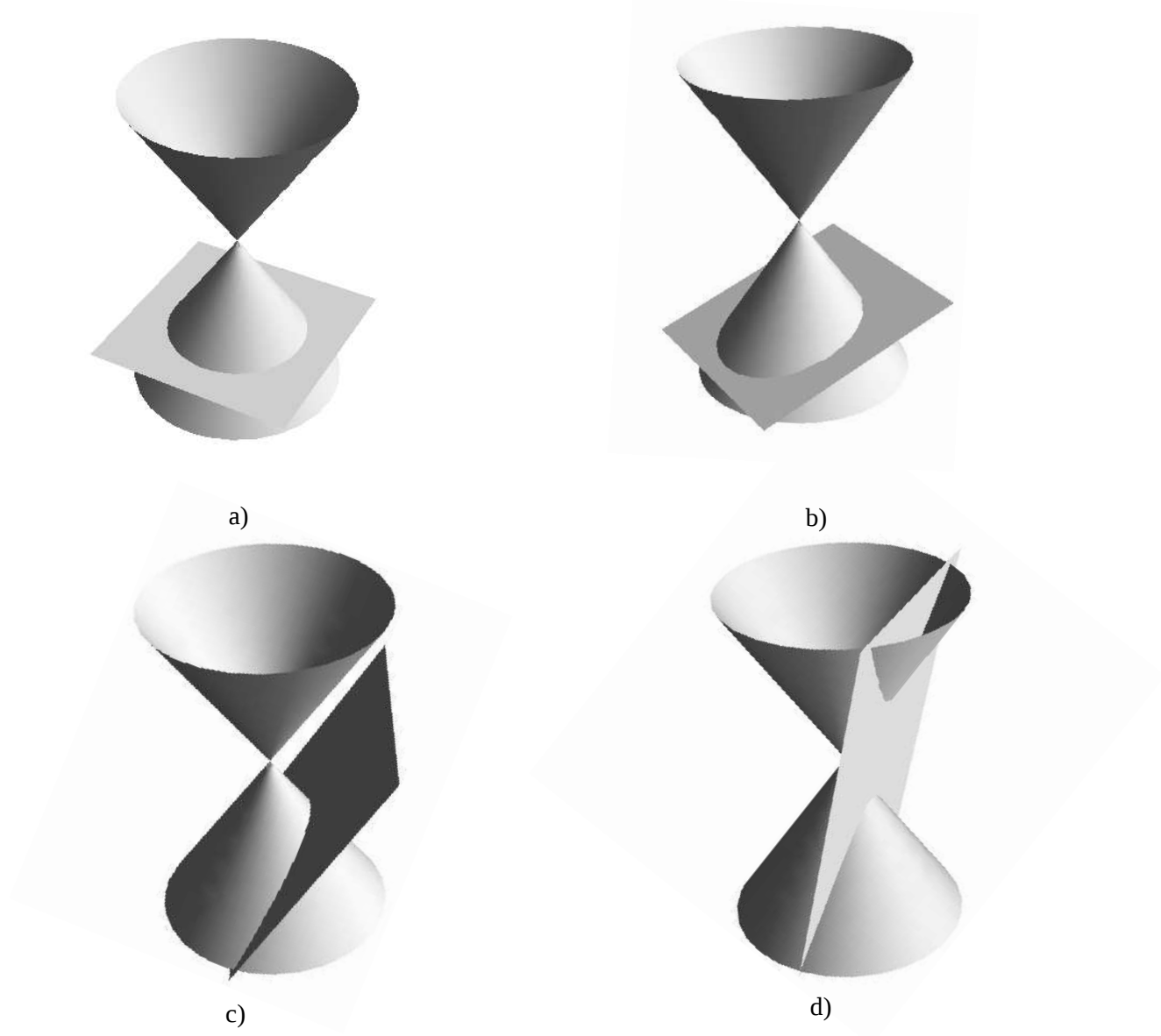
$\mathbb{E}^2$	dvojrozmerný euklidovský priestor (rovina)
$\mathbb{E}^3$	trojrozmerný euklidovský priestor
$\wedge$	logická spojka „a súčasne“
$A, B, C, \dots$	body
$a, b, c, \dots$	priamky
$\alpha, \beta, \gamma, \dots$	roviny
$m = AB$	priamka m je určená bodmi A, B ($A \neq B$)
$\alpha = ABC$	rovina α je určená bodmi A, B, C (A, B, C neležia na jednej priamke)
$\alpha = Ab$	rovina α je určená bodom A a priamkou b ($A \notin b$)
$\alpha = ab$	rovina α je určená priamkami a, b ($a \parallel b$ alebo $a \times b$)
$A \in b$	bod A leží na priamke b
$A \in \beta$	bod A leží v rovine β
$a \subset \beta$	priamka a leží v rovine β
$A = B$	body A, B sú totožné
$a = b$	priamky a, b sú totožné
$\alpha = \beta$	roviny α, β sú totožné
$a \parallel b$	priamky a, b sú rovnobežné
$a \parallel \beta$	priamka a je rovnobežná s rovinou β
$\alpha \parallel \beta$	roviny α, β sú rovnobežné
$a \times b$	priamky a, b sú rôznobežné
$a \times \beta$	priamka a je rôznobežná s rovinou β
$\alpha \times \beta$	roviny α, β sú rôznobežné
$a \perp b$	priamky a, b sú navzájom kolmé
$a \perp \beta$	priamka a je kolmá na rovinu β
$\alpha \perp \beta$	roviny α, β sú navzájom kolmé
$a \cap b = \{R\}$	priesečníkom priamok a, b je bod R
$a \cap \beta = \{R\}$	priesečníkom priamky a a roviny β je bod R
$\alpha \cap \beta = r$	priesečnicou rovín α a β je priamka r
$ AB $	vzdialenosť bodov A, B , resp. dĺžka úsečky AB
$ A, b $	vzdialenosť bodu A od priamky b
$ A, \beta $	vzdialenosť bodu A od roviny β
$ a, b $	vzdialenosť priamok a, b , ak $a \parallel b$

$ \alpha, \beta $	vzdialenosť rovín α, β , ak $\alpha \parallel \beta$
$\sphericalangle(a, b)$	uhol priamok a, b
$\sphericalangle(ABC)$	uhol priamok AB a BC
$\sphericalangle(a, \beta)$	uhol priamky a a roviny β
$\sphericalangle(\alpha, \beta)$	uhol rovín α, β
$ \sphericalangle(a, b) $	veľkosť uhla priamok a, b
$k(S; r)$	kružnica k so stredom v bode S a polomerom r
A_1	pôdorys bodu A
A_2	nárys bodu A
A_3	bokorys bodu A
(A)	sklopená poloha bodu A
A_o	otočená poloha bodu A
P^a	pôdorysný stopník priamky a
N^a	nárysný stopník priamky a
p^α	pôdorysná stopa roviny α
n^α	nárysná stopa roviny α
${}^1h^\alpha ({}^2h^\alpha)$	hlavná priamka roviny α prvej (druhej) osnovy
${}^1s^\alpha ({}^2s^\alpha)$	spádová priamka roviny α prvej (druhej) osnovy
(A, A')	usporiadaná dvojica afinne združených bodov

1 OHNISKOVÉ VLASTNOSTI KUŽELOSEČIEK

Názov kuželosečky naznačuje, že budeme hovoriť o krivkách, z ktorých každú je možné získať rezom rotačnej kužeľovej plochy rovinou. V histórii ako prvý si túto skutočnosť uvedomil Menechmos okolo roku 350 pr. n. l. a ich štúdiom sa zaoberali aj ďalší starovekí Gréci. Apolónius z Pergy zaviedol pomenovania „elipsa“, „parabola“ a „hyperbola“ vo svojich ôsmich knihách o kuželosečkách asi okolo roku 200 pr. n. l.

Kuželosečky rozdeľujeme na singulárne a regulárne. Ako je ukázané na Obr. 1.1, rezom rotačnej kužeľovej plochy rovinou, ktorá neprechádza jej vrcholom, je regulárna kuželosečka, a to kružnica (1.1a), elipsa (1.1b), parabola (1.1c) alebo hyperbola (1.1d). Singulárne kuželosečky: bod, priamka, 2 rovnobežné priamky, 2 rôznobežné priamky – sú rezy rotačnej kužeľovej (príp. valcovej) plochy rovinou, ktorá prechádza vrcholom kužeľovej plochy (príp. je rovnobežná s tvoriacou priamkou valcovej plochy). V tejto kapitole sa budeme venovať vlastnostiam jednotlivých regulárnych kuželosečiek a ich dotýčníc súvisiacich s ohniskami.



Obr. 1.1

1.1 Elipsa

Definícia 1.1.1: Elipsa je množina všetkých bodov v rovine, ktoré majú od dvoch pevných bodov 1F , 2F (ohnísk) konštantný súčet vzdialeností $2a$ väčší ako vzdialenosť ohnísk 1F a 2F .

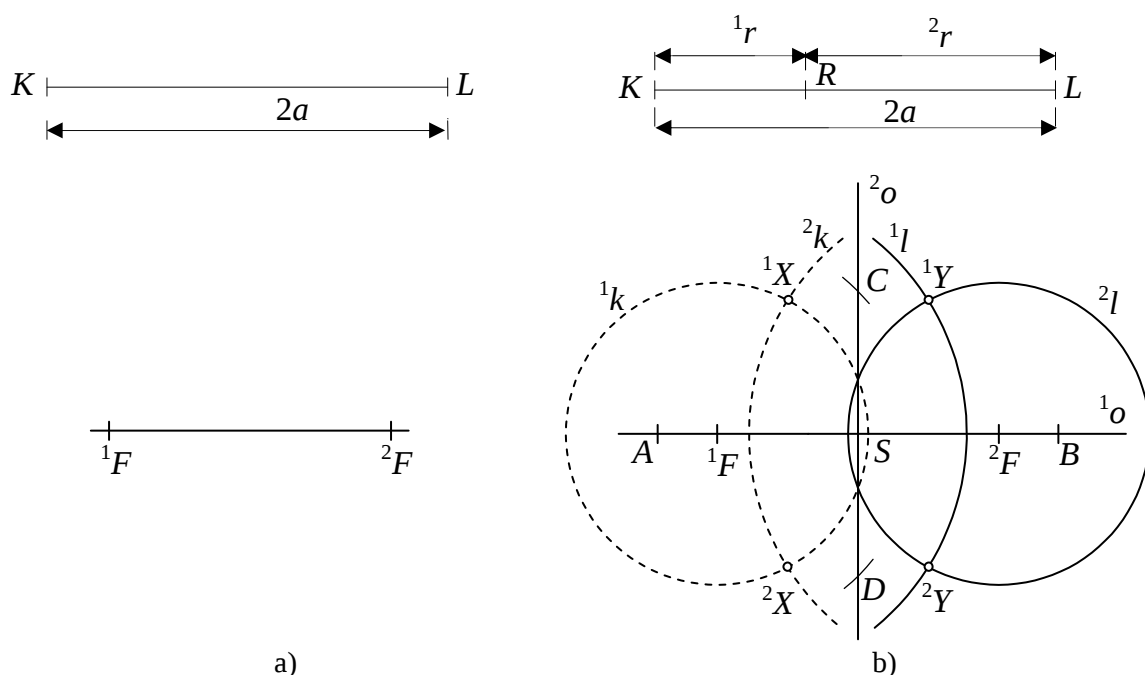
Poznámka: V prípade, že ohniská sú totožné, definícia vyjadruje body kružnice.

Z definície 1.1.1 môžeme body roviny vzhľadom na elipsu charakterizovať:

- bod X je na elipse $\Leftrightarrow |X{}^1F| + |X{}^2F| = 2a$, kde $2a > |{}^1F{}^2F|$,
- bod X je vonkajší bod elipsy $\Leftrightarrow |X{}^1F| + |X{}^2F| > 2a$,
- bod X je vnútorný bod elipsy $\Leftrightarrow |X{}^1F| + |X{}^2F| < 2a$.

Úloha 1.1.1: Zostrojte body elipsy, ktorá je daná ohniskami 1F , 2F a dĺžkou $2a > |{}^1F{}^2F|$ (Obr. 1.1.1a).

Riešenie (Obr. 1.1.1b): *Záhradnícka konštrukcia bodov elipsy.* Definícia elipsy hovorí, že súčet vzdialeností bodu elipsy od ohnísk 1F , 2F sa rovná dĺžke $2a$. Na pomocnej úsečke KL , ktorej dĺžka je $2a$, zvolíme bod R tak, aby jeho vzdialenosť od bodov K a L bola väčšia ako polovica rozdielu dĺžky úsečky ${}^1F{}^2F$ a dĺžky $2a$. Nech $|KR| = {}^1r$, $|LR| = {}^2r$, potom platí ${}^1r + {}^2r = 2a$. Zostrojíme teda kružnice ${}^1k({}^1F; {}^1r)$, ${}^2k({}^2F; {}^2r)$ a ${}^1l({}^1F; {}^2r)$, ${}^2l({}^2F; {}^1r)$. Priesečníky 1X , 2X kružníc 1k , 2k a priesečníky 1Y , 2Y kružníc 1l , 2l sú body elipsy, lebo spĺňajú podmienky definície. Voľbou ďalšieho bodu R na úsečke KL a opakovaním postupu konštrukcie zostrojíme ďalšie body elipsy.



Obr. 1.1.1

Zo záhradníckej konštrukcie bodov elipsy vyplýva, že elipsa je súmerná podľa stredu S úsečky ${}^1F{}^2F$, podľa priamky ${}^1F{}^2F$ a podľa osi úsečky ${}^1F{}^2F$, teda:

- S je **stred súmernosti elipsy**.
- Priamka ${}^1F{}^2F = {}^1o$ je os súmernosti elipsy a nazývame ju **hlavná os elipsy**.

- Os úsečky $^1F^2F$ je tiež os súmernosti elipsy, označujeme ju 2o a nazývame **vedľajšia os elipsy**.

Body elipsy na jej osiach nazývame vrcholy elipsy:

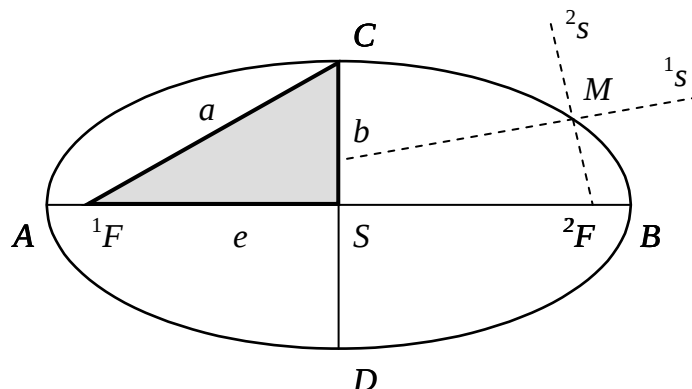
- **hlavné vrcholy A, B** zostrojíme nanesením úsečky s dĺžkou a od stredu S na hlavnú os elipsy. Ukážeme, že pre hlavné vrcholy A, B platí definícia 1.1.1:

$$|^1FA| = |^2FB|, \text{ teda } |^1FA| + |^2FA| = |^1FA| + |^1F^2F| + |^2FB| = |AB| = 2a.$$

- **vedľajšie vrcholy C, D** zostrojíme ako priesečníky vedľajšej osi s kružnicou, ktorej stred je ohnisko a polomer je a .

Ďalšie pojmy a označenia (Obr. 1.1.2):

- **dĺžka hlavnej polosi:** $a = |SA| = |SB|$,
- **dĺžka vedľajšej polosi:** $b = |SC| = |SD|$,
- **excentricita:** $e = |^1FS| = |^2FS|$,
- **charakteristický trojuholník elipsy:** Δ^1FSC je pravouhlý trojuholník, ktorého dĺžky odvesien sú e, b a dĺžka prepony je a , teda platí $a^2 = e^2 + b^2$,
- **sprievodič bodu elipsy** sa nazýva priamka (príp. úsečka) spájajúca bod elipsy s ohniskom, a tiež vzdialenosť tohto bodu od ohniska, sprievodiče označujeme $^1s, ^2s$.



Obr. 1.1.2

Tvar krivky v bode vyjadruje **oskulačná kružnica** (osculum je latinské slovo, ktoré znamená bozk). Oskulačná kružnica sa dotýka krivky v tomto bode a ich prvé krivosti v tomto bode sa rovnajú. Uvedieme vlastnosti a konštrukcie oskulačných kružníc vo vrchoch regulárnych kužeľosečiek. Ich polomery sú uvedené v [3].

Úloha 1.1.2: Zostrojte oskulačné kružnice vo vrchoch elipsy danej AB, CD (Obr. 1.1.3a).

Riešenie (Obr. 1.1.3b):

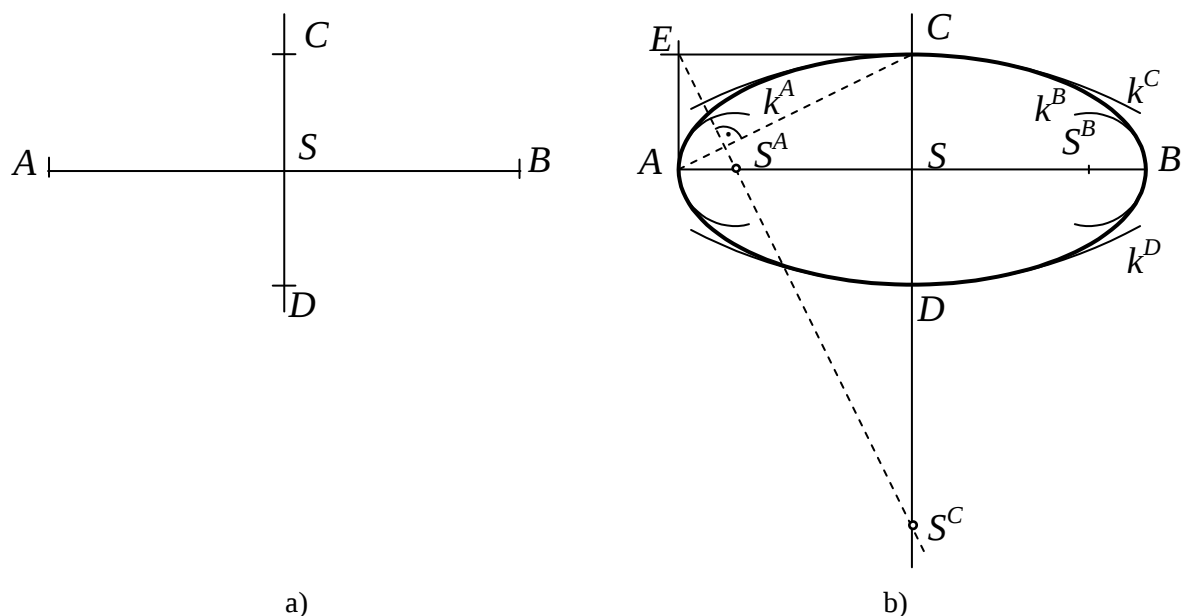
Polomer oskulačných kružníc v hlavných vrchoch A, B elipsy podľa [3] je:

$$r^A = r^B = \frac{b^2}{a}$$

a polomer oskulačných kružníc vo vedľajších vrchoch C, D elipsy podľa [3] je:

$$r^C = r^D = \frac{a^2}{b}.$$

Z toho vyplýva konštrukcia stredov týchto oskulačných kružníc. Nech E je priesečník dotyčníc elipsy vo vrcholoch A a C ($EC \parallel AB$, $EA \parallel CD$). Kolmica z bodu E na priamku AC pretína hlavnú os elipsy v bode S^A , čo je stred oskulačnej kružnice vo vrchole A a vedľajšiu os elipsy v bode S^C , čo je stred oskulačnej kružnice vo vrchole C . Potom oskulačná kružnica vo vrchole A je $k^A(S^A; r^A = |S^A A|)$ a oskulačná kružnica vo vrchole C je $k^C(S^C; r^C = |S^C C|)$. Oskulačné kružnice vo vrcholoch B a D zostrojíme využitím súmernosti elipsy podľa jej stredy S .



Obr.1.1.3

1.2 Hyperbola

Definícia 1.2.1: Hyperbola je množina všetkých bodov v rovine, ktorých absolútna hodnota rozdielu vzdialeností od dvoch pevných bodov 1F , 2F (ohnísk) je konštantná, rovná sa číslu $2a$ a je menšia ako vzdialenosť ohnísk 1F , 2F .

Z definície 1.2.1 môžeme body roviny vzhľadom na hyperbolu charakterizovať:

- bod X je na hyperbole $\Leftrightarrow ||X^1F| - |X^2F|| = 2a$, kde $2a < |^1F^2F|$,
- bod X je vonkajší bod hyperboly $\Leftrightarrow ||X^1F| - |X^2F|| < 2a$,
- bod X je vnútorný bod hyperboly $\Leftrightarrow ||X^1F| - |X^2F|| > 2a$.

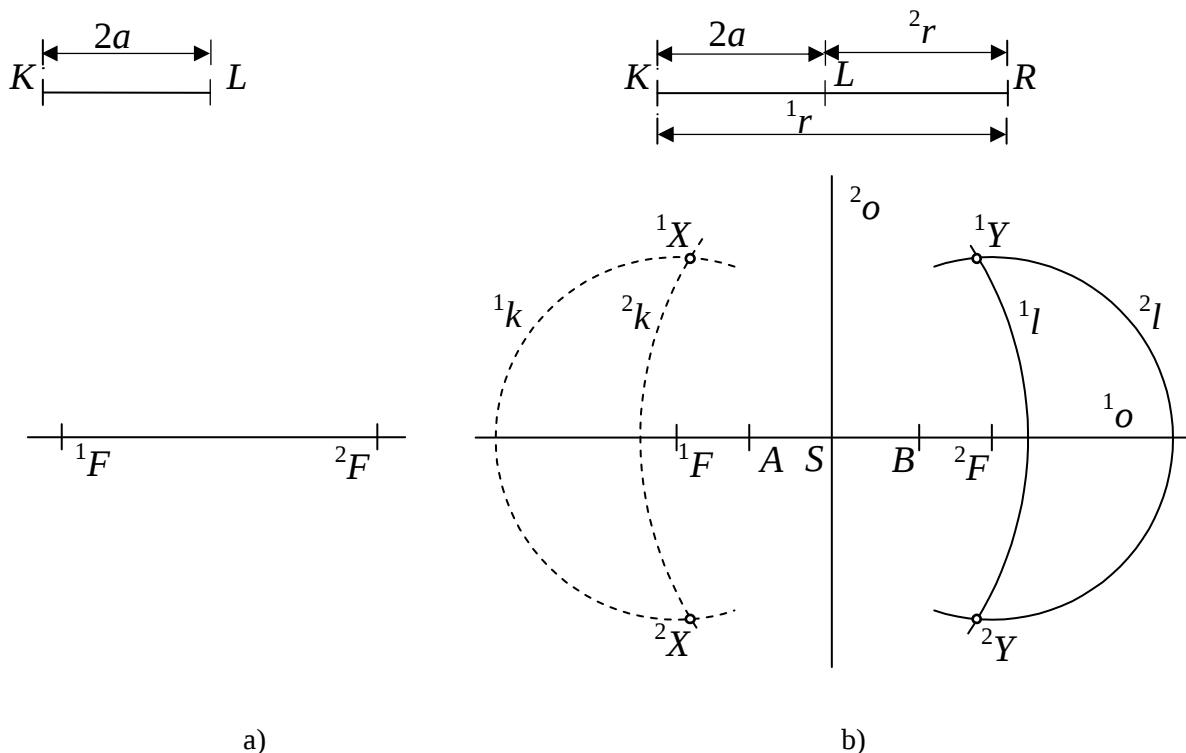
Úloha 1.2.1: Zostrojte hyperbolu danú ohniskami 1F , 2F a dĺžkou $2a < |^1F^2F|$ (Obr. 1.2.1a).

Riešenie (Obr. 1.2.1b):

Bodová konštrukcia hyperboly. Definícia hyperboly hovorí, že rozdiel vzdialeností jej bodu od ohnísk sa v absolútnej hodnote rovná dĺžke $2a$. Dĺžka pomocnej úsečky KL je $2a$, teda zvolíme bod R na priamke KL ležiaci mimo úsečky KL tak, aby dĺžka úsečky LR bola väčšia ako polovica rozdielu dĺžky úsečky $^1F^2F$ a dĺžky $2a$. Nech $|KR| = ^1r$, $|LR| = ^2r$, potom platí $|^1r - ^2r| = 2a$. Zostrojíme teda kružnice $^1k(^1F; ^1r)$, $^2k(^2F; ^2r)$ a $^1l(^1F; ^2r)$, $^2l(^2F; ^1r)$. Priesečníky 1X , 2X kružníc 1k , 2k a priesečníky 1Y , 2Y kružníc 1l , 2l sú body hyperboly, lebo spĺňajú podmienky definície (nakolko platí $|^1r - ^2r| = 2a$).

Z absolútnej hodnoty v definícii hyperboly vyplýva, že hyperbola pozostáva z dvoch vetiev, pre ich body platí:

- bod X leží na 1. vetve $\Leftrightarrow |X^1F| - |X^2F| = 2a$,
- bod X leží na 2. vetve $\Leftrightarrow |X^2F| - |X^1F| = 2a$.



Obr. 1.2.1

Z konštrukcie bodov hyperboly opísanej v úlohe 1.2.1 vyplýva, že hyperbola je súmerná podľa stredu S úsečky $^1F^2F$, a tiež podľa priamky $^1F^2F$ a podľa osi úsečky $^1F^2F$, teda:

- S je **stred súmernosti hyperboly**,
- priamka $^1F^2F = ^1o$ je os súmernosti hyperboly a nazývame ju **hlavná os hyperboly**,
- os úsečky $^1F^2F$ je tiež os súmernosti hyperboly, označujeme ju 2o a nazývame **vedľajšia os hyperboly**,
- nanesením dĺžky a zo stredu S na hlavnú os hyperboly dostaneme jej **vrcholy** A , B , pre ktoré ukážeme, že platí definícia:

$$|^1FA| = |^2FB|, \text{ teda } ||^1FA| - |^2FA|| = |AB| = 2a.$$

Ďalšie pojmy a označenia (Obr. 1.2.2):

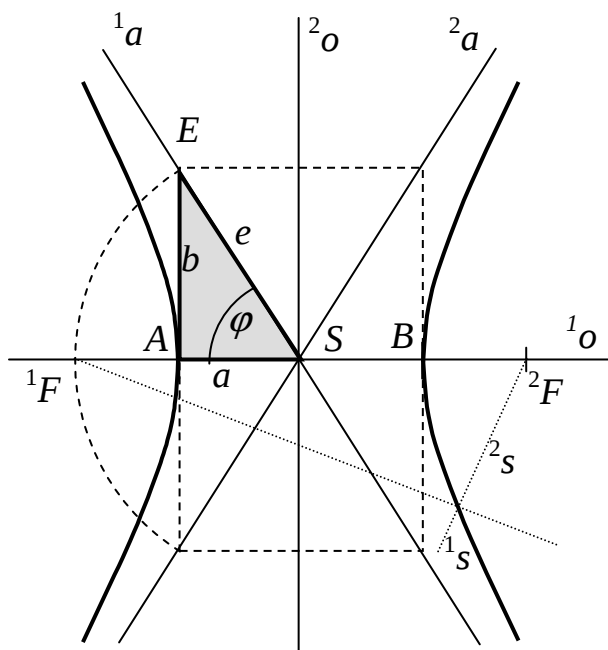
- **dĺžka hlavnej polosi:** $a = |SA| = |SB|$,
- **excentricita:** $e = |^1FS| = |^2FS|$,
- na vedľajšej osi hyperbola nemá žiadny bod, avšak **dĺžka vedľajšej polosi** b je definovaná ako číslo:

$$b = \sqrt{e^2 - a^2},$$

- teda b sa rovná dĺžke odvesny **charakteristického trojuholníka hyperboly** $\triangle ASE$, ktorý je pravouhlý, dĺžka prepony je e a ďalšej odvesny je a ,

- **sprievodič bodu hyperboly** sa nazýva priamka (príp. úsečka) spájajúca bod hyperboly s ohniskom, a tiež vzdialenosť tohto bodu od ohniska, sprievodiče označujeme 1s , 2s ,
- dotyčnice hyperboly v jej nevlastných bodoch¹ sa nazývajú **asymptoty hyperboly** – označujeme ich 1a , 2a , platí pre ne, že prechádzajú bodom S a s hlavnou osou zvierajú uhol φ , pre ktorý platí:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}.$$



Obr. 1.2.2

Úloha 1.2.2: Zostrojte asymptoty hyperboly, ktorá je daná ohniskami 1F , 2F a vrcholmi A, B (Obr. 1.2.3a), a tiež oskulačné kružnice v jej vrcholoch.

Riešenie (Obr. 1.2.3b):

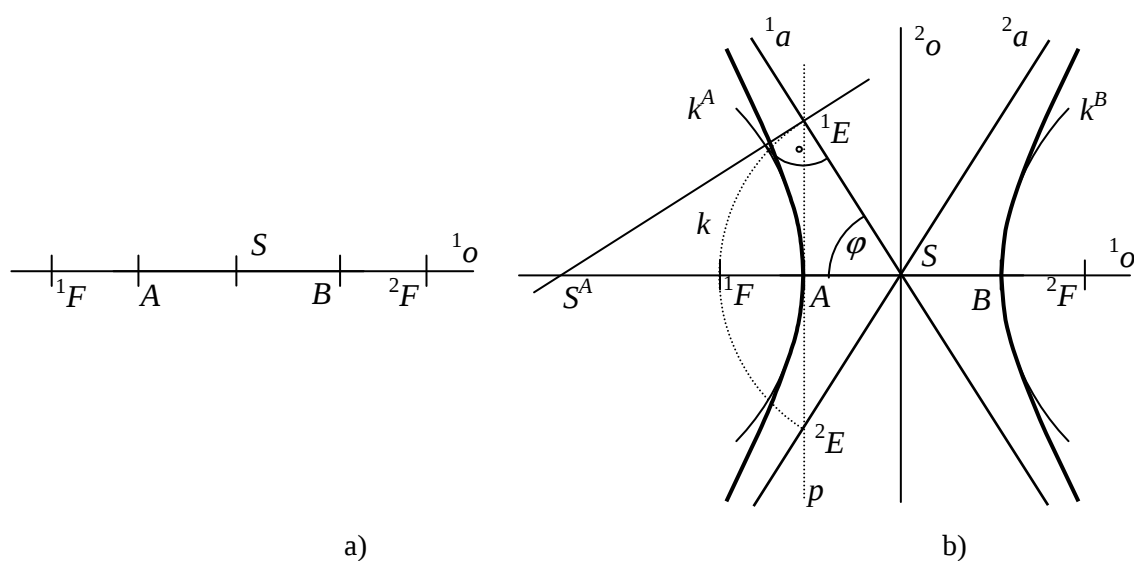
a) **Asymptoty hyperboly** ako dotyčnice hyperboly v jej nevlastných bodoch charakterizujú priebeh vetiev hyperboly. Z uvedeného uhla φ , ktorý asymptoty zvierajú s hlavnou osou vyplýva ich konštrukcia. Vrcholom A vedieme priamku p kolmú na hlavnú os. Zostrojíme kružnicu k so stredom S a polomerom rovnajúcim sa excentricite e . Priesečníky priamky p s kružnicou k sú body 1E a 2E . Asymptoty hyperboly sú priamky $^1a = S^1E$ a $^2a = S^2E$.

b) **Oskulačné kružnice** vo vrcholoch hyperboly A, B majú podľa [3] polomer:

$$r^A = r^B = \frac{b^2}{a}$$

a z toho vyplýva konštrukcia stredu S^A oskulačnej kružnice vo vrchole A ako priesečníka hlavnej osi hyperboly s kolmicou na asymptotu 1a bodom 1E . Potom oskulačná kružnica vo vrchole A je $k^A(S^A; r^A = |S^AA|)$. Oskulačnú kružnicu vo vrchole B zostrojíme využitím súmernosti elipsy podľa vedľajšej osi.

¹ Nevlastné body sú v geometrii chápané ako body v nekonečne, v ktorých sa pretínajú navzájom rovnobežné priamky.



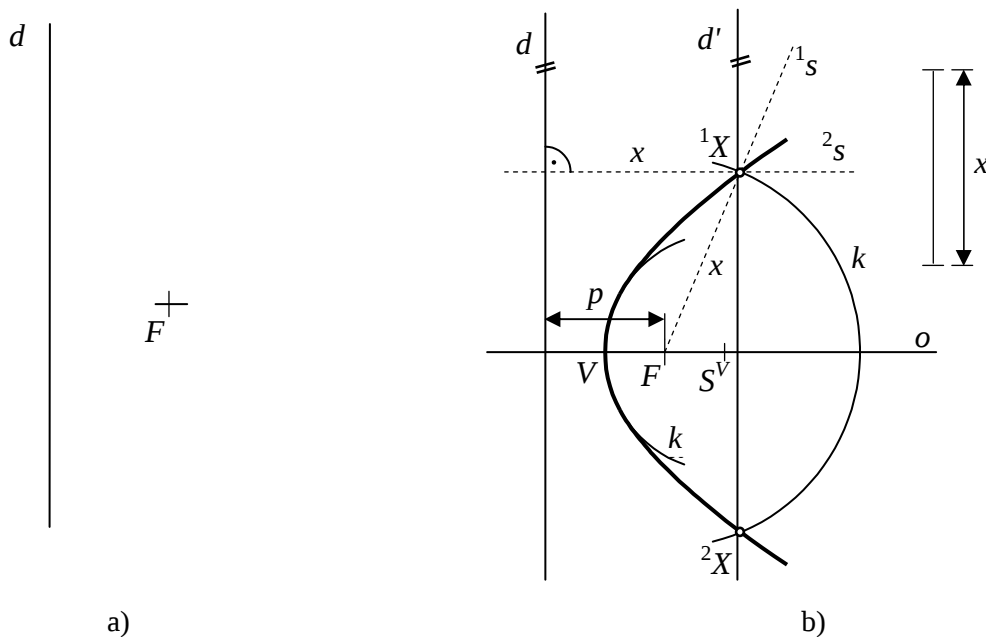
Obr. 1.2.3

1.3 Parabola

Definícia 1.3.1: Parabola je množina všetkých bodov v rovine, ktoré majú rovnakú vzdialenosť od pevného bodu F (ohniska) a od pevnej priamky d (nazývanej riadiaca priamka – direktrix), ktorá bodom F neprechádza ($F \notin d$).

Z definície 1.3.1 môžeme body roviny vzhľadom na parabolu charakterizovať:

- bod X je na parabole $\Leftrightarrow |XF| = |X, d|$,
- bod X je vonkajší bod paraboly $\Leftrightarrow |XF| > |X, d|$,
- bod X je vnútorný bod paraboly $\Leftrightarrow |XF| < |X, d|$.



Obr. 1.3.1

Úloha 1.3.1: Zostrojte bod paraboly danej ohniskom F a riadiacou priamkou d (Obr. 1.3.1a) a osculačnú kružnicu v jej vrchole.

Riešenie (Obr. 1.3.1b):

a) *Bodová konštrukcia paraboly.* Zvolíme si ľubovoľnú vzdialenosť x väčšiu ako polovica vzdialenosti medzi ohniskom F a riadiacou priamkou d . Dĺžku x považujeme za vzdialenosť hľadaného bodu paraboly od ohniska F a súčasne od riadiacej priamky d . Zostrojíme kružnicu k so stredom v bode F a polomerom x a priamku d' rovnobežnú s priamkou d , pričom vzdialenosť priamok d a d' je x a priamka d' leží v tej polrovine ohraničenej priamkou d , v ktorej leží ohnisko F . Priesečníky 1X , 2X kružnice k a priamky d' sú body paraboly.

Z konštrukcie týchto bodov vyplýva, že parabola je súmerná podľa priamky o prechádzajúcej ohniskom F kolmo na riadiacu priamku d :

- o je **os súmernosti paraboly**.
- **Vrchol paraboly** je bod V na jej osi, pre ktorý platí, že V rozpolňuje vzdialenosť medzi ohniskom F a riadiacou priamkou d , čo vyplýva z definície.
- Vzdialenosť medzi ohniskom F a riadiacou priamkou d nazývame **parameter p** .

b) *Oskulačná kružnica vo vrchole paraboly.* Polomer oskulačnej kružnice k^V vo vrchole V paraboly sa rovná jej parametru p a jej stred S^V leží na osi paraboly, teda je $k^V(S^V; r = p)$.

Sprievodiče bodu X paraboly:

1. sprievodič 1s je priamka FX ,
2. sprievodič 2s je priamka prechádzajúca bodom X kolmo na riadiacu priamku d .

1.4 Vlastnosti dotyčníc kužeľosečky

K formulácii vlastností dotyčníc kužeľosečiek zavedieme pojem vonkajšieho a vnútorného uhla ich sprievodičov. **Vonkajší uhol sprievodičov** bodu elipsy a hyperboly je ten uhol, ktorý obsahuje jej hlavné vrcholy a pod vonkajším uhlom sprievodičov bodu paraboly rozumieme ten uhol, ktorý obsahuje jej vrchol. Susedný uhol k nemu nazývame **vnútorný uhol sprievodičov** bodu kužeľosečky.

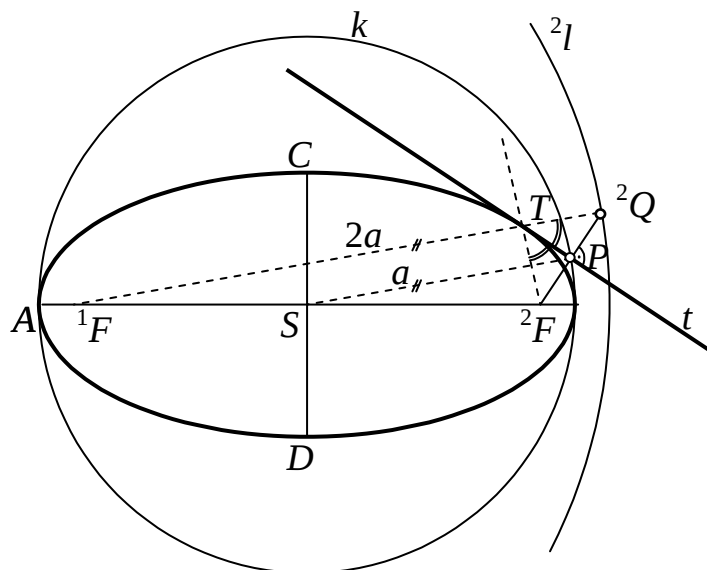
Vlastnosti dotyčnice elipsy a hyperboly

Veta 1.4.1: V každom bode elipsy alebo hyperboly existuje práve jedna jej dotyčnica, ktorá je osou vonkajšieho uhla sprievodičov tohto bodu dotyku.

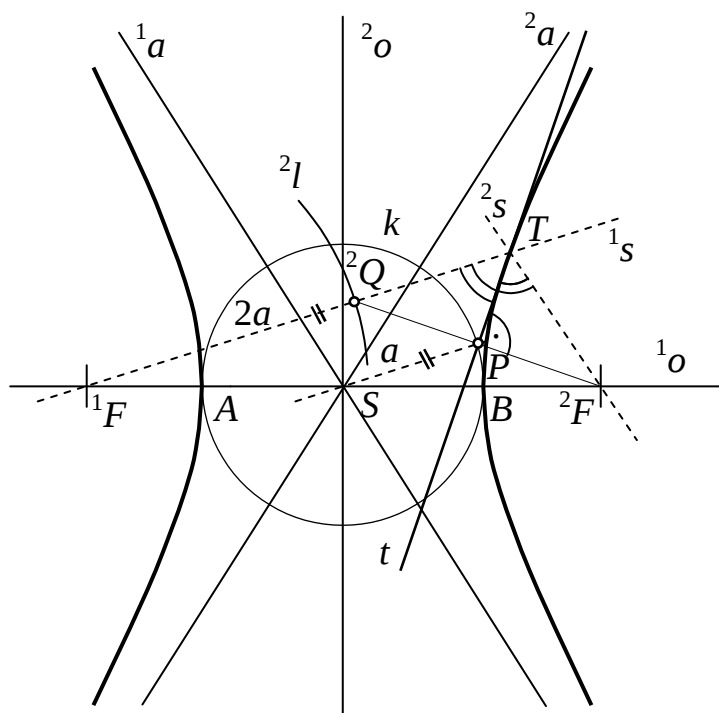
Dôkaz:

a) **elipsa** (Obr. 1.4.1): Zostrojíme priamku t ako os vonkajšieho uhla sprievodičov bodu T a dokážeme, že každý jej bod $R \neq T$ je vonkajší bod elipsy. Nech bod 2Q je súmerný s ohniskom 2F podľa t , potom 2Q leží na priamke 1FT a platí $|T^2Q| = |^2FT|$, teda $|^1F^2Q| = |^1FT| + |^2FT| = 2a$. Zvolíme na priamke t ľubovoľný bod $R \neq T$. Z trojuholníkovej nerovnosti vyplýva, že $|^1FR| + |R^2Q| > |^1F^2Q| = 2a$, a keďže $|R^2Q| = |^2FR|$, platí $|^1FR| + |^2FR| > 2a$, odkiaľ vyplýva, že bod R je vonkajší bod elipsy, teda priamka t je dotyčnica elipsy v bode T .

$|^1F^2F| : |S^2F| = 2e : e = 2 : 1$ a $|^2F^2Q| : |^2FP| = 2 : 1$, uhol pri vrchole 2F majú spoločný, teda sú podobné a musí platiť, že pomer strán $|^1F^2Q| : |SP| = 2 : 1$. Z dôkazu vety 1.4.1 pre obidve kužeľosečky vieme, že $|^1F^2Q| = 2a$, potom $|SP| = a$, a teda body P ležia na hlavnej vrcholovej kružnici k .



Obr. 1.4.3



Obr. 1.4.4

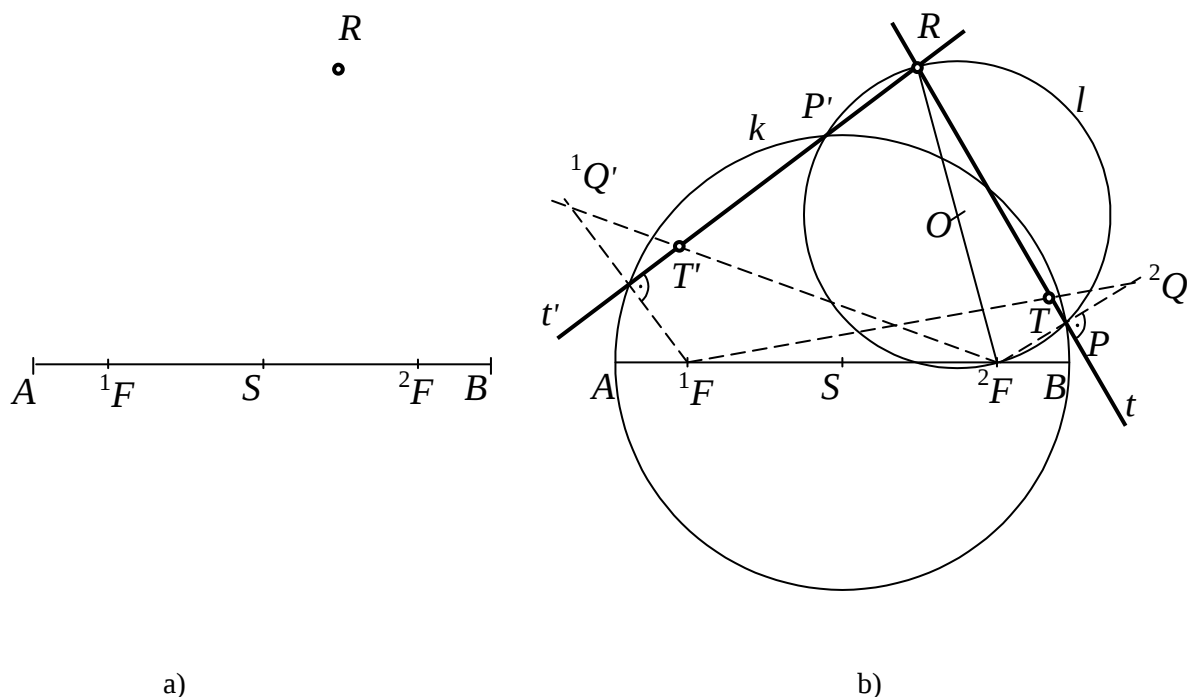
Veta 1.4.3: Množina všetkých bodov Q súmerne združených s jedným ohniskom podľa všetkých dotýčníc elipsy alebo hyperboly je kružnica so stredom v druhom ohnisku a polomerom rovným $2a$:

- množina bodov 2Q súmerných s 2F podľa všetkých dotýčníc t : $^2l(^1F; 2a)$,
- množina bodov 1Q súmerných s 1F podľa všetkých dotýčníc t : $^1l(^2F; 2a)$.

Dôkaz: V dôkaze vety 1.4.1 je uvedený aj dôkaz, že $|^1F^2Q| = 2a$ a kružnica 2l je znázornená pre elipsu na Obr. 1.4.3 a pre hyperbolu na Obr. 1.4.4. Analogicky platia tieto vlastnosti aj pre druhé ohnisko.

Úloha 1.4.1: K nenarysovanej elipse danej ohniskami 1F , 2F a vrcholmi A , B zostrojte dotyčnicu t prechádzajúcu bodom R a jej dotykový bod T (Obr. 1.4.5a).

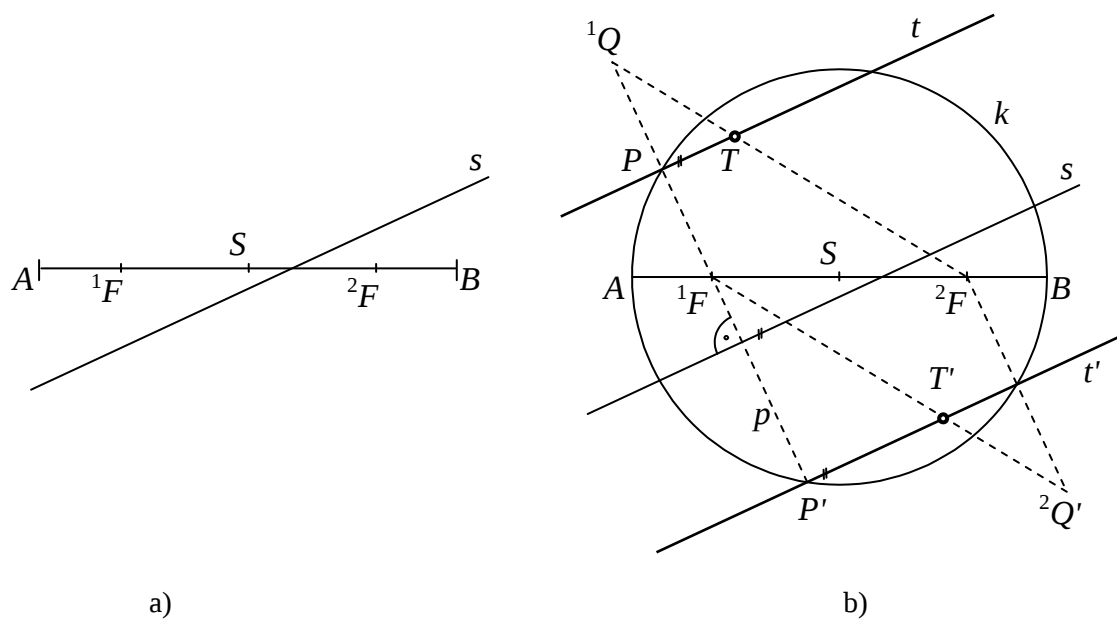
Riešenie (Obr. 1.4.5b): Hľadáme bod P – pätu kolmice vedenej z ohniska, napr. 2F , na hľadanú dotyčnicu t . Zostrojíme hlavnú vrcholovú kružnicu k (S ; $r = a$), na ktorej bod P leží. Keďže RP je hľadaná dotyčnica, vieme, že $RP \perp ^2FP$, zostrojíme Thalesovu kružnicu l opísanú nad priemerom R^2F . Bod P je priesečníkom kružníc k a l . Ak bod R je vnútorný bod elipsy, úloha nemá žiadne riešenie, ak bod R leží na elipse, úloha má práve jedno riešenie a ak bod R je vonkajší bod elipsy, úloha má dve riešenia, potom hľadané dotyčnice sú $t = RP$ a $t' = RP'$. Zostrojíme bod 2Q , ktorý je súmerný s ohniskom 2F podľa dotyčnice t . Potom priesečník priamky $^1F^2Q$ a priamky t je dotykový bod T . Zostrojíme bod $^1Q'$, ktorý je súmerný s 1F podľa t' . Potom priesečník priamky $^2F^1Q'$ a priamky t' je dotykový bod T' .



Obr. 1.4.5

Úloha 1.4.2: K nenarysovanej elipse danej ohniskami 1F , 2F a vrcholmi A , B zostrojte dotyčnicu t rovnobežnú s priamkou s a jej dotykový bod (Obr. 1.4.6a).

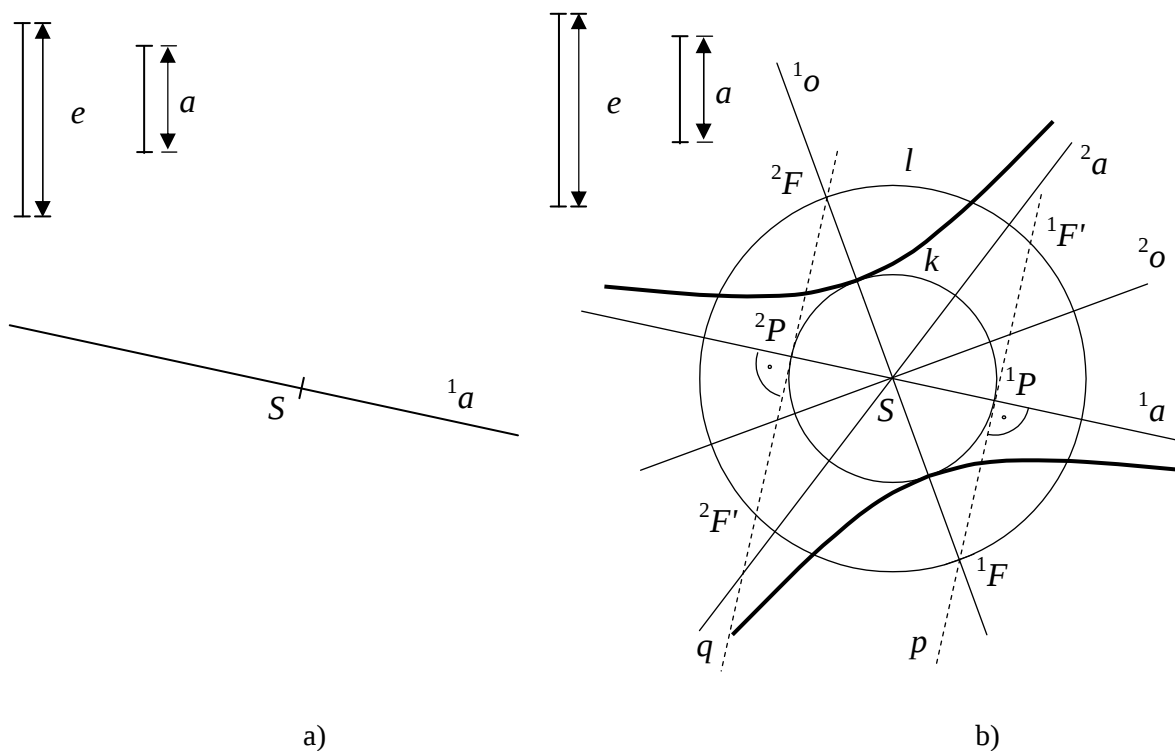
Riešenie (Obr. 1.4.6b): Hľadáme bod P – pätu kolmice vedenej z ohniska, napr. 1F na hľadanú dotyčnicu t . Zostrojíme hlavnú vrcholovú kružnicu k (S ; $r = a$), na ktorej bod P leží a ohniskom 1F vedieme priamku p kolmú na priamku s . Priamka p pretína kružnicu k v bodoch P , P' a nimi vedieme hľadané dotyčnice t a t' rovnobežné s priamkou s . Dotykové body nájdeme rovnako ako v úlohe 1.4.1.



Obr. 1.4.6

Úloha 1.4.3: Zostrojte hyperbolu danú stredom S , asymptotou 1a , dĺžkou hlavnej polosi a , excentricitou e ($e > a$) (Obr. 1.4.7a).

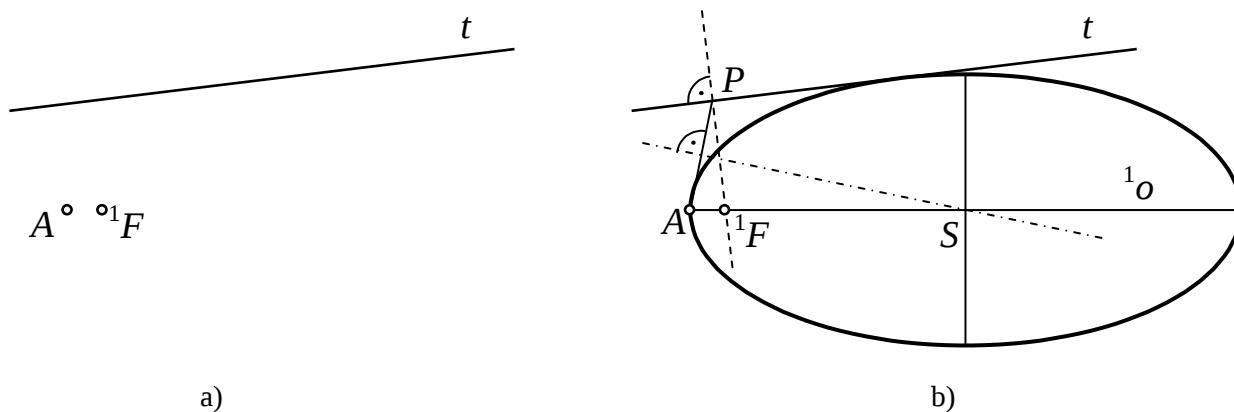
Riešenie (Obr. 1.4.7b): Hľadáme ohniská $^1F, ^2F$ hyperboly. Keďže asymptota je dotyčnica hyperboly, zostrojíme vrcholovú kružnicu k ($S; r = a$), ktorá pretína asymptotu 1a v bodoch 1P a 2P , čo sú päty kolmíc vedených z ohnisk $^1F, ^2F$ na asymptotu 1a . Ohniská $^1F, ^2F$ hyperboly sú priesečníky priamok p a q vedených bodmi 1P a 2P kolmo na asymptotu 1a s kružnicou l ($S; r = e$). Úloha má 2 riešenia, na Obr. 1.4.7b je skonštruované jedno z nich, a to hyperbola s ohniskami $^1F, ^2F$.



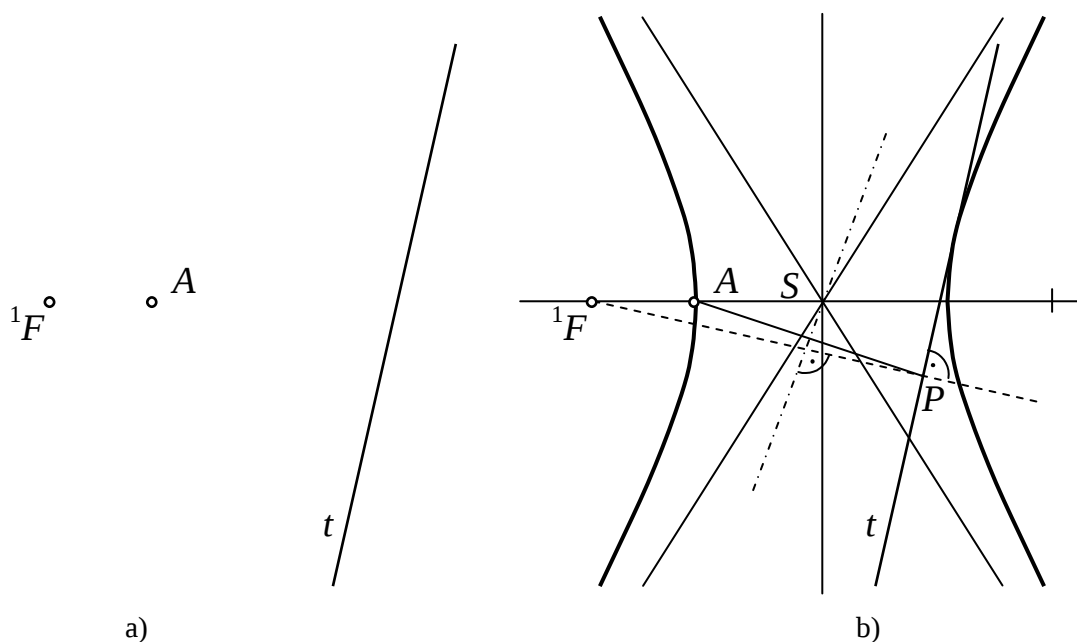
Obr. 1.4.7

Úloha 1.4.4: Zostrojte elipsu alebo hyperbolu danú ohniskom 1F , hlavným vrcholom A a dotyčnicou t (Obr. 1.4.8a, Obr. 1.4.9a).

Riešenie (Obr. 1.4.8b, Obr. 1.4.9b): Priamka A^1F je hlavná os 1o hľadanej kužeľosečky. Ak ju dotyčnica t pretína medzi bodmi A , 1F , úloha nemá riešenie. Inak zostrojíme bod P , ktorý je pätou kolmice vedenej z ohniska 1F na dotyčnicu t . Body A a P ležia na hlavnej vrcholovej kružnici, teda jej stred S je priesečník hlavnej osi 1o s osou úsečky AP . Ak usporiadanie bodov na hlavnej osi je také, že ohnisko 1F leží medzi hlavným vrcholom A a stredom S , riešením je elipsa (Obr. 1.4.8b), inak je riešením hyperbola (Obr. 1.4.9b).



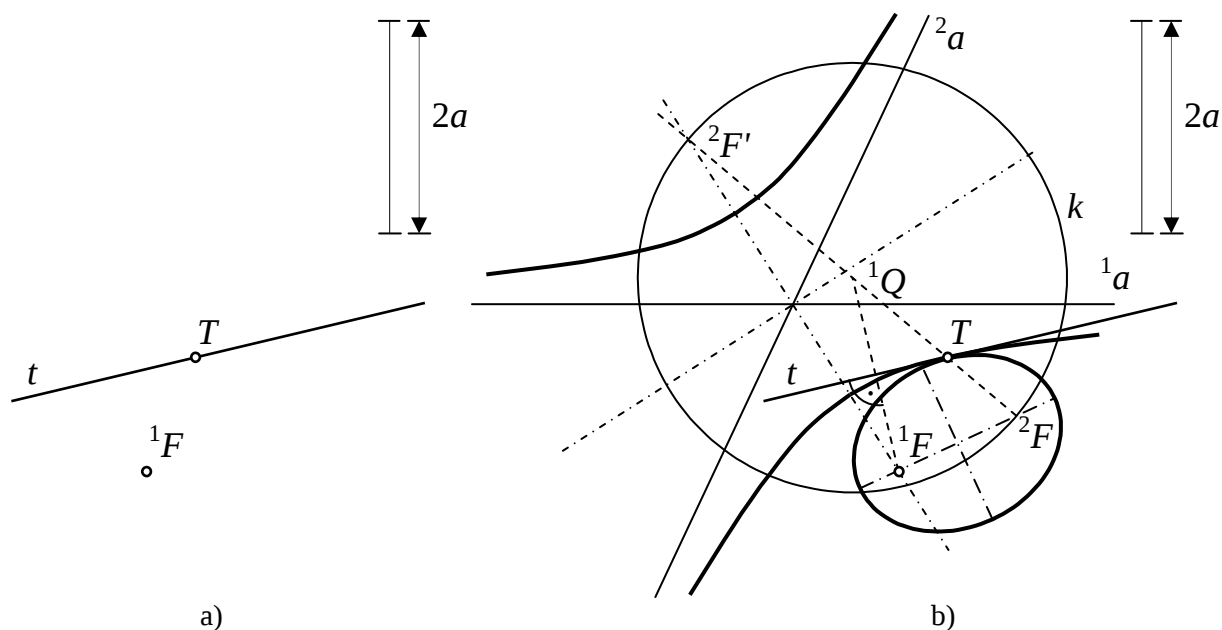
Obr. 1.4.8



Obr. 1.4.9

Úloha 1.4.5: Zostrojte elipsu alebo hyperbolu danú ohniskom 1F , dotyčnicou t , dotykovým bodom T a dĺžkou hlavnej osi $2a$ (Obr. 1.4.10a).

Riešenie (Obr. 1.4.10b): Hľadáme ohnisko 2F . Zostrojíme bod 1Q súmerný s ohniskom 1F podľa dotyčnice t . Pretože $|^2F^1Q| = 2a$, zostrojíme kružnicu k so stredom 1Q a polomerom $2a$. Priesečníkmi priamky 1QT s kružnicou k sú dva body, a to ohnisko 2F elipsy a ohnisko $^2F'$ hyperboly.

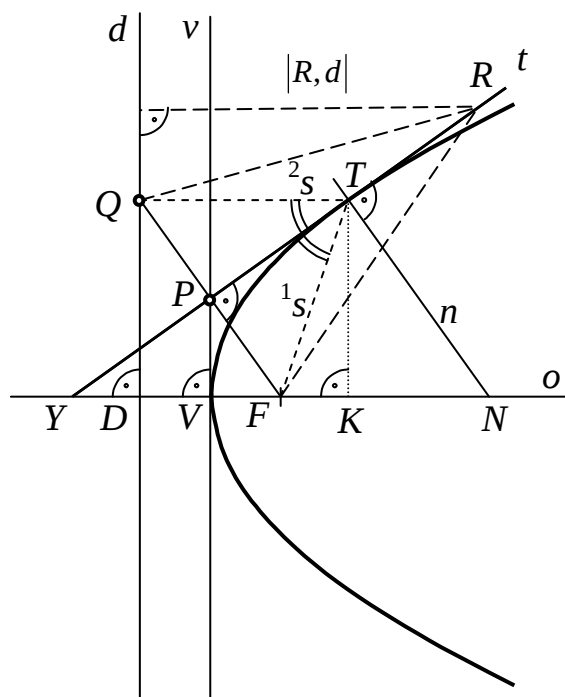


Obr. 1.4.10

Vlastnosti dotýčnice paraboly

Veta 1.4.4: V každom bode paraboly existuje práve jedna jej dotýčnica, ktorá je os vonkajšieho uhla sprievodičov tohto bodu dotyku.

Veta 1.4.5: Množina všetkých bodov Q súmerne združených s ohniskom F podľa všetkých dotýčníc paraboly je riadiaca priamka d .



Obr. 1.4.11

Dôkaz viet 1.4.4 a 1.4.5 (Obr. 1.4.11): Zostrojíme priamku t ako os vonkajšieho uhla sprievodičov bodu T a dokážeme, že každý jej bod $R \neq T$ je vonkajší bod paraboly. Nech bod

Q je súmerný s F podľa t a bod P je päta kolmice z ohniska F na dotyčnicu t . Zo súmernosti podľa t vyplýva zhodnosť trojuholníkov FPT a QPT . Potom platí $|FT| = |QT|$, teda bod Q leží na radiacej priamke d , čím sme dokázali vetu 1.4.5. Zvoľme na priamke t ľubovoľný bod $R \neq T$. Potom zo súmernosti podľa priamky t vyplýva, že $|RQ| = |RF| > |R, d|$, teda bod R je vonkajší bod paraboly. Môžeme povedať, že každý bod na priamke t rôznyi od bodu T je vonkajší bod paraboly, a teda t je dotyčnica paraboly v bode T a veta 1.4.4 platí.

Veta 1.4.6: Množina piat kolmíc P zostrojených z ohniska paraboly na všetky jej dotyčnice je vrcholová dotyčnica v paraboly.

Dôkaz (Obr. 1.4.11): Nech bod D je priesečník radiacej priamky d s osou paraboly. O trojuholníkoch DFQ a VFP platí, že pomer strán $|DF| : |VF| = 2 : 1$ a $|QF| : |PF| = 2 : 1$ a uhol pri vrchole F majú spoločný. Potom uvedené trojuholníky sú podobné a musí platiť, že uhly pri vrchole D a V sú oba pravé, teda priamka $v = VP$ je rovnobežná s d a dotýka sa paraboly v jej vrchole V .

Poznámka: Kolmica na dotyčnicu v bode dotyku sa nazýva normála paraboly a označujeme ju n . Nech N je priesečník normály n s osou o paraboly, Y je priesečník dotyčnice t s osou paraboly a K je päta kolmice vedenej z dotykového bodu T na os paraboly. Potom platia nasledujúce vlastnosti:

- Úsečka KN sa nazýva **subnormála** paraboly, jej dĺžka je konštantná pre každú dotyčnicu paraboly (rôznu od vrcholovej dotyčnice v) a rovná sa parametru p .
- Úsečka KY sa nazýva **subtangenta** paraboly, jej dĺžka nie je konštantná a platí, že vrchol V je stredom subtangenty.
- Dĺžka úsečky YN je súčtom subnormály a subtangenty paraboly a platí, že ohnisko F je stred úsečky YN .

Úloha 1.4.6: K nenarysovanej parabole danej ohniskom F a radiacou priamkou d zostrojte dotyčnicu t prechádzajúcu bodom R a jej dotykový bod (Obr. 1.4.12a).

Riešenie (Obr. 1.4.12b): Hľadáme bod P – pätu kolmice vedenej z ohniska F na hľadanú dotyčnicu t . Podľa vety 1.4.6 body P ležia na vrcholovej dotyčnici v , ktorá je rovnobežná s priamkou d vo vzdialenosti rovnajúcej sa polovici parametra p . Keďže RP je hľadaná dotyčnica, vieme, že $RP \perp FP$, zostrojíme teda Thalesovu kružnicu k opísanú nad priemerom RF . Bod P je priesečník kružnice k a vrcholovej dotyčnice v . Ak bod R je vnútorný bod paraboly, úloha nemá žiadne riešenie, ak bod R leží na parabole, úloha má práve jedno riešenie a ak bod R je vonkajší bod paraboly, úloha má dve riešenia, a potom hľadané dotyčnice sú $t = RP$ a $t' = RP'$. Zostrojíme bod Q súmerný s F podľa t a bodom Q vedieme sprievodič 1 s dotykového bodu kolmý na radiacu priamku d . Jeho priesečník s dotyčnicou t je hľadaný dotykový bod T . Dotykový bod T' zostrojíme rovnakým postupom.



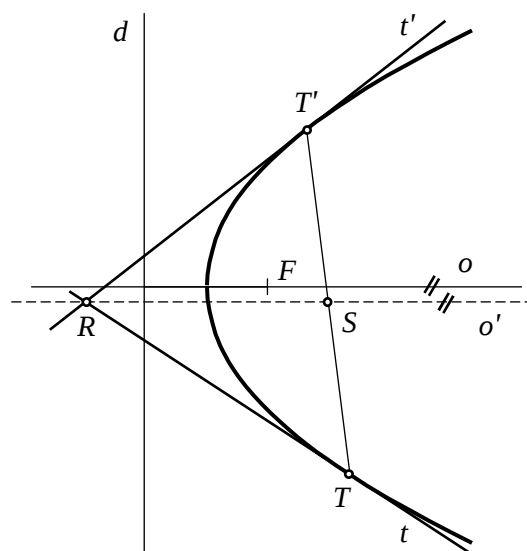
b)

Riešenie (Obr. 1.4.13b): Hľadáme bod P – päť kolmice vedenej z ohniska F na hľadanú dotyčnicu t . Zostrojíme vrcholovú dotyčnicu v ako v predchádzajúcej úlohe a ohniskom F vedieme priamku p kolmú na priamku s . Priamka p pretína vrcholovú dotyčnicu v v bode P a ním vedieme hľadanú dotyčnicu t rovnobežnú s priamkou s . Dotykový bod T nájdeme ako v úlohe 1.4.6. Úloha nemá riešenie v prípade, že priamka s je rovnobežná s osou paraboly.



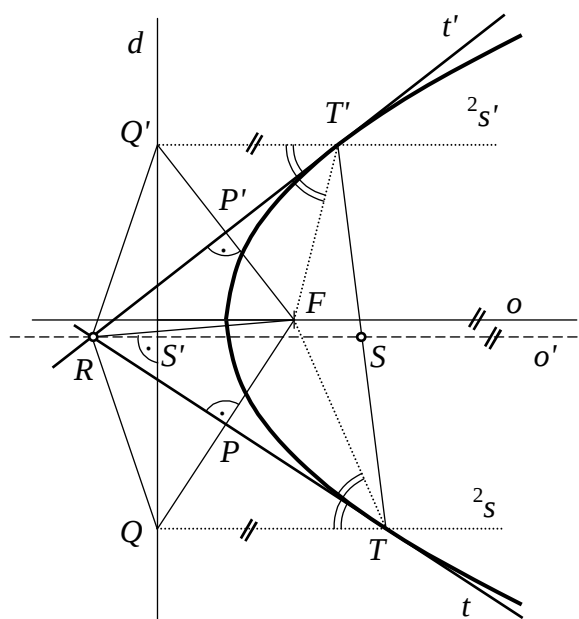
b)

24



Obr. 1.4.14

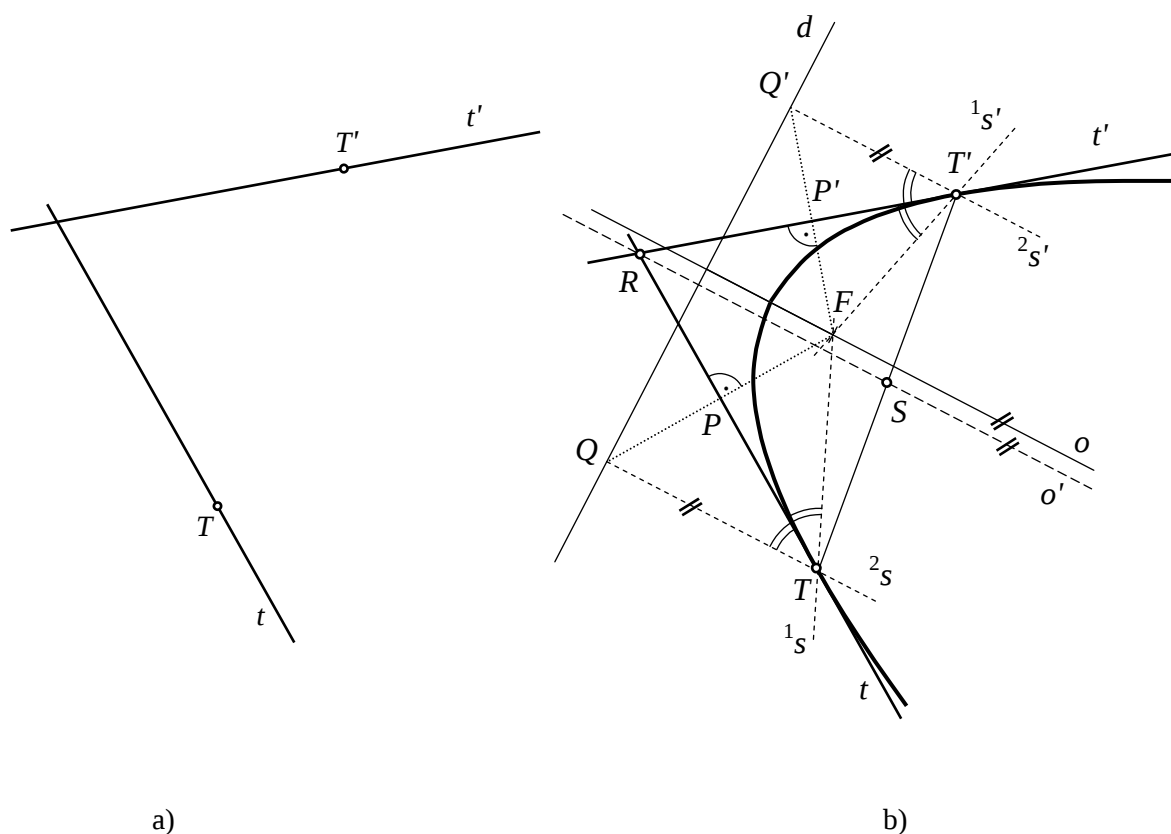
Dôkaz (Obr. 1.4.15): Nech bod R je priesečník dotyčníc t a t' paraboly. Bodom R ved'me priamku o' rovnobežnú s osou o paraboly a ukážeme, že priamka o' prechádza bodom S , ktorý je stred úsečky TT' spájajúcej dotykové body. Nech Q je bod súmerný s ohniskom F podľa dotyčnice t a bod Q' je bod súmerný s ohniskom F podľa dotyčnice t' . Body Q a Q' ležia na radiacej priamke d a na sprievodičoch 2s a $^2s'$ bodov T a T' rovnobežných s osou o paraboly. Body P a P' sú päty kolmíc vedených z ohniska F na dotyčnice t a t' . O trojuholníkoch RPF a RPQ platí, že sú pravouhlé, majú spoločnú odvesnu RP a zhodné odvesny PF a PQ . Potom uvedené trojuholníky sú zhodné a musí platiť, že aj strany RQ a RF sú zhodné. Analogicky aj pre trojuholníky $RP'F$ a $RP'Q'$ platí, že sú zhodné, a teda dĺžky strán RQ' a RF sa rovnajú. Z predchádzajúcich rovností vyplýva, že RQ' a RQ sú zhodné. Potom trojuholník RQQ' je rovnoramenný, a teda priamka o' je jeho výška z bodu R na stranu QQ' . Táto výška o' prechádza tiež bodom S' , ktorý je stred úsečky QQ' , a teda priamka o' je os sprievodičov 2s a $^2s'$ bodov T a T' . Z uvedených vlastností vyplýva, že stred S úsečky TT' tiež leží na priamke o' , teda platí veta 1.4.7.



Obr. 1.4.15

Úloha 1.4.8: Zostrojte parabolú danú dotyčnicami t, t' s dotykovými bodmi T, T' (Obr. 1.4.16a).

Riešenie (Obr. 1.4.16b): Zostrojíme stred S úsečky TT' a spojíme ho s priesečníkom R dotyčníc t, t' . Keďže platí veta 1.4.7, priamka $o' = RS$ určuje smer osi o paraboly, a teda aj smer jedného sprievodiča každého z dotykových bodov T a T' . Zostrojíme tieto sprievodiče 2s a $^2s'$ rovnobežné s osou paraboly (kolmé na riadiacu priamku) oboma danými bodmi T a T' . Každý zo sprievodičov 1s a $^1s'$ bodov T a T' je súmerný s prvým sprievodičom podľa príslušnej dotyčnice t a t' . Priesečníkom týchto sprievodičov 1s a $^1s'$ je ohnisko F a ním vedieme os o paraboly. Riadiacu priamku d zostrojíme kolmo na os paraboly pomocou bodu Q súmerného s ohniskom F podľa niektorej z dotyčníc.

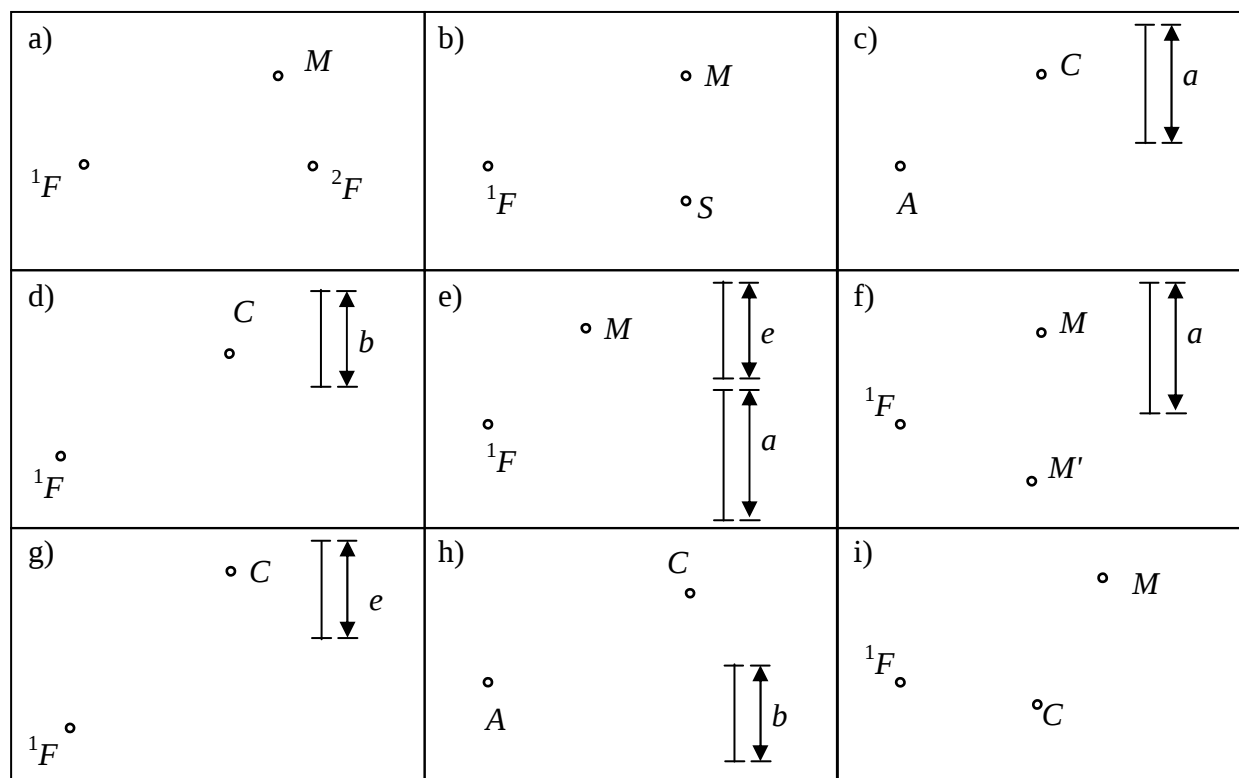


Obr. 1.4.16

Cvičenia

1. Zostrojte elipsu danú (označenia sú opísané v kapitole 1) (Obr. 1):

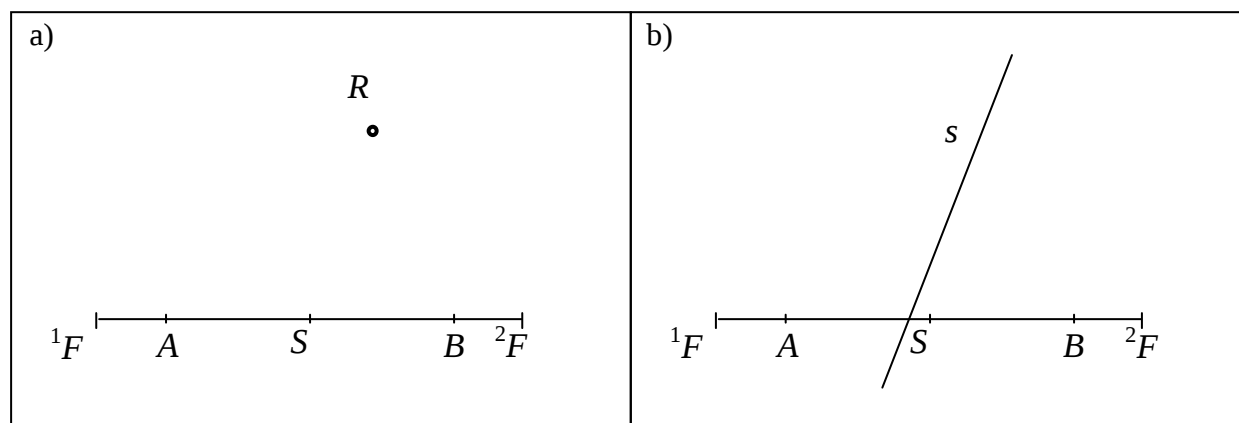
- | | | |
|--------------------------------|---------------------------------|-----------------------------------|
| a) $^1F, ^2F, M$ – bod elipsy. | b) $S, ^1F, M$ – bod elipsy. | c) $A, C, a, a < AC $. |
| d) $^1F, C, b, b < ^1FC $. | e) $^1F, a, e, M$ – bod elipsy. | f) $^1F, a, M, M'$ – body elipsy. |
| g) $^1F, C, e, e < ^1FC $. | h) A, C, b . | i) $^1F, C, M$ – bod elipsy. |



Obr. 1

2. K nenarysovanej hyperbole danej ohniskami $^1F, ^2F$ a vrcholmi A, B zostrojte dotyčnice prechádzajúce bodom R (Obr. 2a).

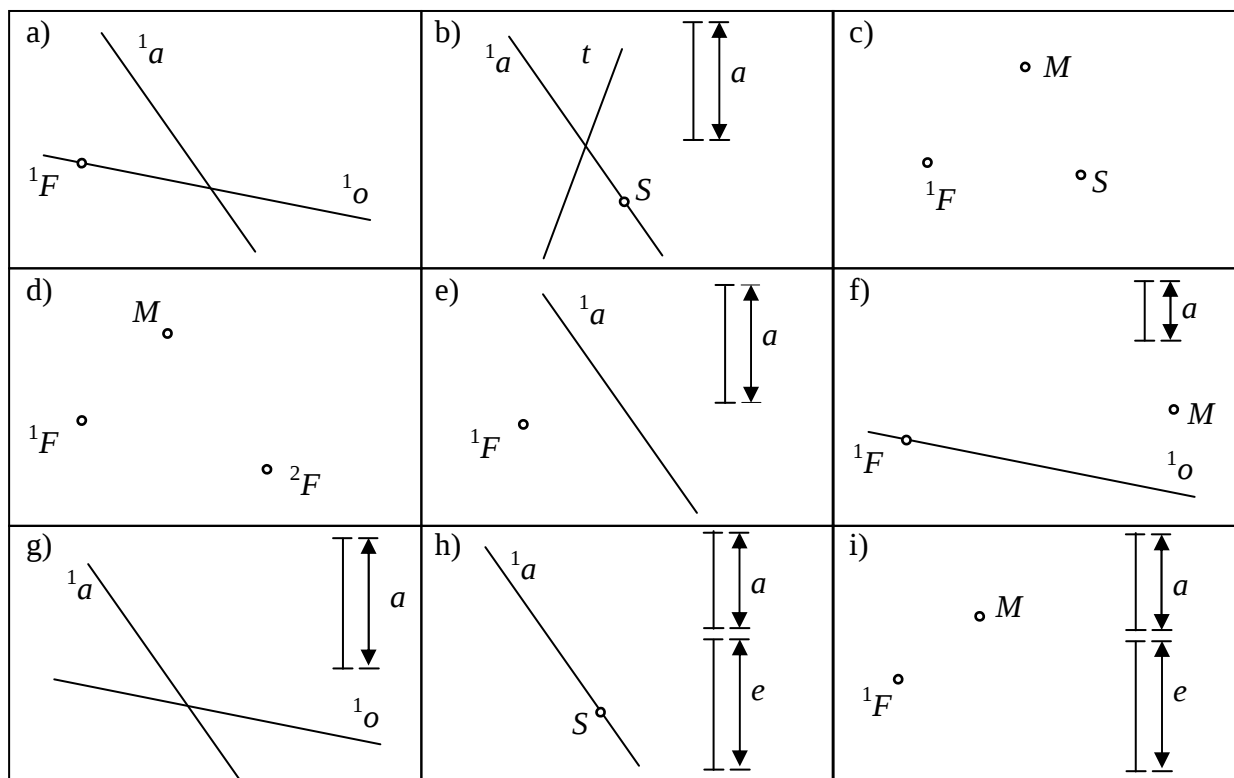
3. K nenarysovanej hyperbole danej ohniskami $^1F, ^2F$ a vrcholmi A, B zostrojte dotyčnice rovnobežné s priamkou s (Obr. 2b).



Obr. 2

4. Zostrojte hyperbolu danú (Obr. 3):

- a) $^1F, ^1a, ^1o$. b) $S, ^1a, t, a$. c) $^1F, S, M$ – bod hyperboly.
d) $^1F, ^2F, M$ – bod hyperboly. e) $^1F, ^1a, a$. f) $^1F, ^1o, a, M$ – bod hyperboly.
g) $^1o, ^1a, a$. h) $S, ^1a, a, e, a < e$. i) $^1F, a, e, a < e, M$ – bod hyperboly.

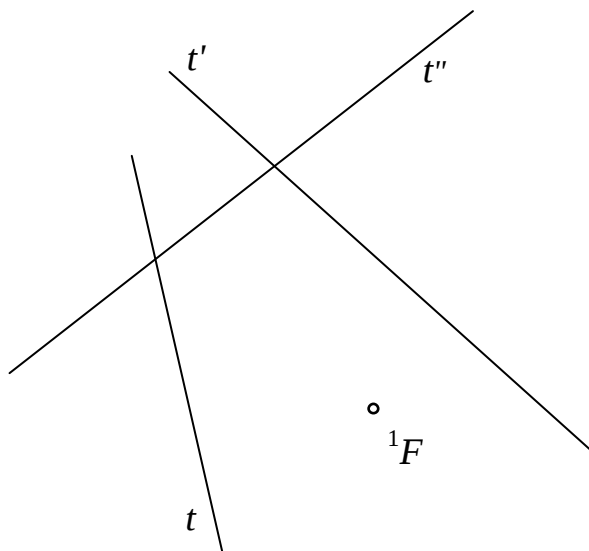


Obr. 3

5. Zostrojte elipsu alebo hyperbolu danú ohniskom 1F a tromi dotyčnicami t, t', t'' (Obr. 4).

Návod na riešenie (1. variant): Zostrojíme body P, P', P'' ako päty kolmíc vedených z ohniska 1F na dotyčnice t, t', t'' . Stred S hľadanej kužeľosečky nájdeme ako stred kružnice opísanej trojuholníku $PP'P''$, ktorá je zároveň hlavná vrcholová kružnica.

Návod na riešenie (2. variant): Zostrojíme body $^1Q, ^1Q', ^1Q''$ ako body súmerné s ohniskom 1F podľa dotyčníc t, t', t'' . Ohnisko 2F hľadanej kužeľosečky nájdeme ako stred kružnice opísanej trojuholníku $^1Q ^1Q' ^1Q''$, ktorej polomer je $2a$.



Obr. 4

6. Zostrojte elipsu alebo hyperbolu danú (Obr. 5):

a) S, t, t', a .

b) $S, a, T, t, T \in t$.

c) $^1F, t, t', a$.

d) $^1F, ^1o, T, t, T \in t$.

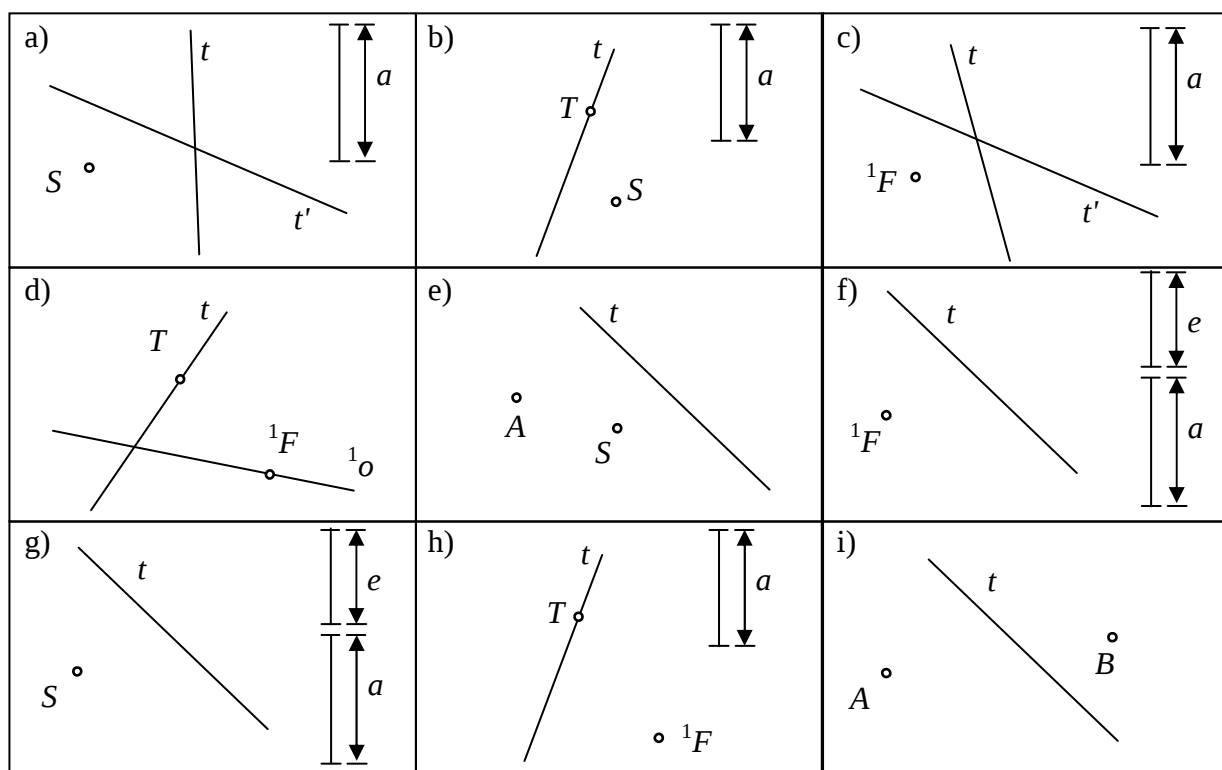
e) A, S, t .

f) $^1F, t, a, e$.

g) S, t, a, e .

h) $^1F, a, T, t, T \in t$.

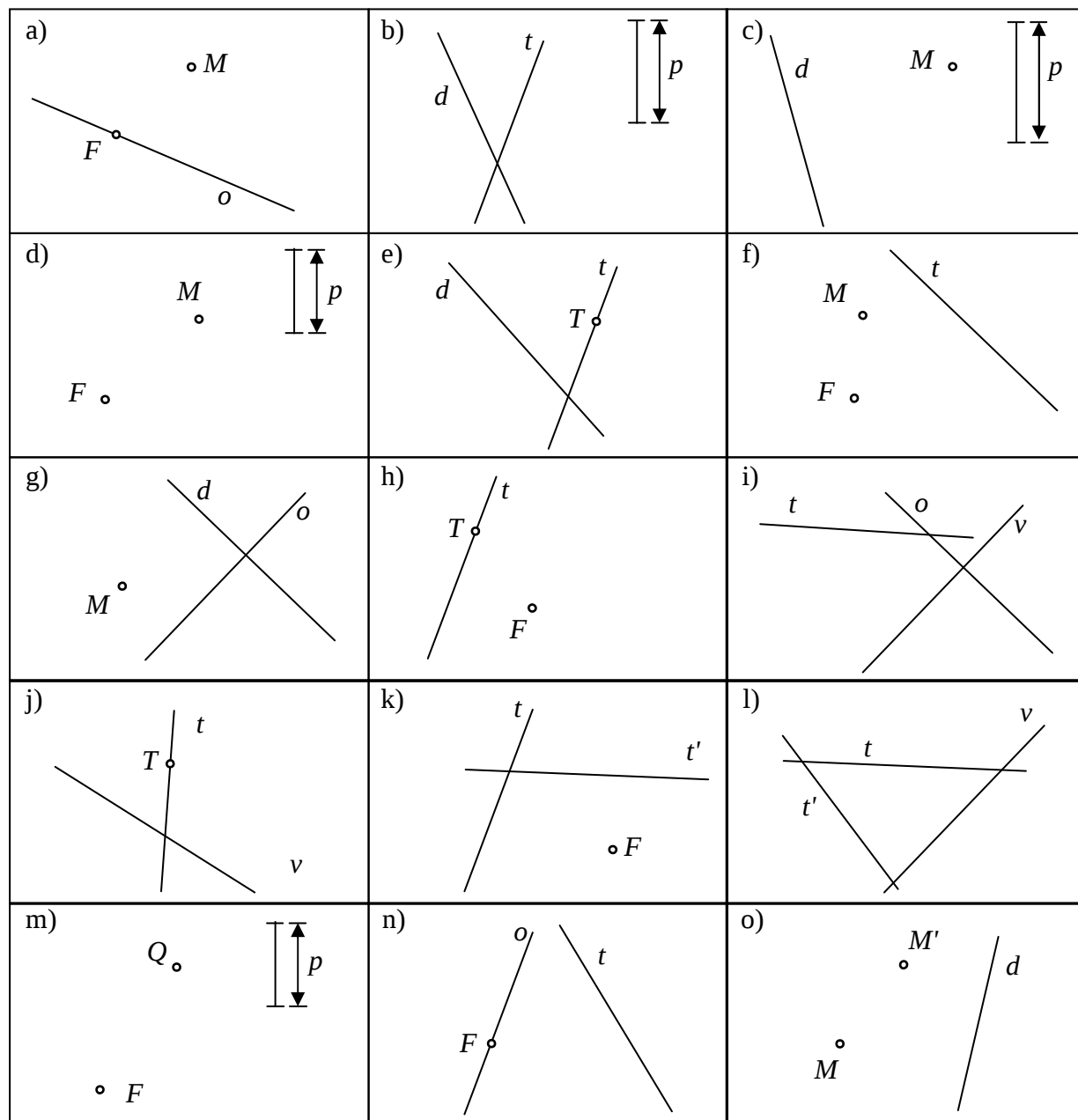
i) A, B, t .



Obr. 5

7. Zostrojte parabolu danú (Obr. 6):

- | | | |
|---|-------------------------|--------------------------------|
| a) o, F, M – bod paraboly. | b) d, t, p . | c) d, p, M – bod paraboly. |
| d) p, F, M – bod paraboly. | e) $d, t, T, T \in t$. | f) t, F, M – bod paraboly. |
| g) $o, d, o \perp d, M$ – bod paraboly. | h) $F, t, T, T \in t$. | i) $o, v, t, o \perp v$. |
| j) $v, t, T, T \in t$. | k) F, t, t' . | l) v, t, t' . |
| m) F, p, Q – bod radiacej priamky d . | n) F, o, t . | o) d, M, M' – body paraboly. |



Obr. 6

2 ZÁKLADNÉ POJMY ZO STEREOMETRIE

Predmet štúdia priestorovej geometrie (stereometrie) je Euklidovský priestor ako množina bodov a jeho podmnožiny. Najjednoduchšie podmnožiny priestoru sú priamky a roviny. Euklidovský priestor budeme označovať $\mathbb{E}^3$. V tejto kapitole vám ponúkame prehľad základných pojmov, faktov a tvrdení zo stereometrie, ktoré zohrajú dôležitú úlohu v ďalších kapitolách. Za známe považujeme základné geometrické pojmy ako úsečka, polpriamka, polrovina, vzdialenosť dvoch bodov a podobne. Takisto považujeme za známe základné geometrické konštrukcie ako konštrukcia stredu úsečky, osi uhla, osi úsečky a podobne.

V prvej časti tejto kapitoly sa venujeme tomu, ako môžu byť zadané priamky a roviny a aká môže byť ich vzájomná poloha. V druhej časti si zopakujeme pojmy uhol a vzdialenosť základných geometrických útvarov a v tretej časti uvedieme vety o rovnobežnosti a kolmosti priamok a rovín. Štvrtá časť je venovaná jednoduchým plochám a telesám.

2.1 Určenie priamok a rovín a ich vzájomná poloha

Priamka je jednoznačne určená dvoma rôznymi bodmi. Ak majú priamky spoločné dva rôzne body, potom majú spoločné všetky body, t. j. priamky sú totožné.

Vzájomná poloha dvoch priamok

- Priamky a, b sú **rôznobežné** ($a \times b$), ak ležia v jednej rovine a majú spoločný práve jeden bod (priesečník).
- Priamky a, b sú **rovnobežné** ($a \parallel b$), ak ležia v jednej rovine a nemajú spoločný bod (rovnobežné rôzne priamky) alebo majú spoločné všetky body (totožné priamky).
- Priamky sú **mimobežné**, ak neležia v jednej rovine.

Rovina je jednoznačne určená

- tromi rôznymi bodmi, ktoré neležia na jednej priamke, $\alpha = ABC$,
- priamkou a bodom, ktorý na nej neleží, $\alpha = Ab$,
- dvoma rôznymi rovnobežnými priamkami, $\alpha = ab, a \parallel b$,
- dvoma rôznobežnými priamkami, $\alpha = ab, a \times b$.

Vzájomná poloha dvoch rovín

- Roviny α, β sú **rovnobežné** ($\alpha \parallel \beta$), ak nemajú spoločný bod (rovnobežné rôzne roviny) alebo majú spoločné všetky body (totožné roviny $\alpha = \beta$).
- Roviny α, β sú **rôznobežné** ($\alpha \times \beta$), ak majú spoločnú práve jednu priamku (priesečnicu).

Ak majú dve rôzne roviny spoločný bod, tak majú spoločnú práve jednu priamku, ktorá týmto bodom prechádza.

Konstrukciu priesečnice dvoch rovín si budeme ilustrovať na príklade.

Úloha 2.1.1: Daná je kocka $ABCDEFGH$ a bod M na hrane AE , roviny α a β sú určené $\alpha = MFH$, $\beta = BGE$ (Obr. 2.1.1a). Určte priesečnicu rovín α a β .

Riešenie: (Obr. 2.1.1b) Priesečnicu rovín α a β určíme pomocou dvoch bodov, ktoré patria obidvom rovinám. Tieto body získame ako priesečníky rôznobežných priamok

$$EG \cap FH = \{ K \},$$

$$BE \cap MF = \{ L \}.$$

Hľadaná priesečnica je priamka $r = KL$.

Vzájomná poloha priamky a roviny

- Priamka a a rovina β sú **rôznobežné** ($a \parallel \beta$), ak nemajú spoločný bod alebo majú spoločné všetky body danej priamky (priamka leží v rovine $a \subset \beta$).
- Priamka a a rovina β sú **rôznobežné** ($a \times \beta$), ak majú spoločný práve jeden bod (priesečník).

Ak dva rôzne body priamky ležia v rovine, tak v tejto rovine leží celá priamka.

Vzájomná poloha priamky m a roviny α . Postup:

1. λ ; λ je pomocná rovina, ktorá obsahuje priamku m . Takých rovín je nekonečne veľa, vyberieme jednu z nich tak, aby bola rôznobežná s rovinou α .
2. r ; $r = \lambda \cap \alpha$.
3. $r \cap m$; môžu nastať tri rôzne možnosti:
 - a) $r \cap m = \emptyset$, potom $m \parallel \alpha$,
 - b) $r \cap m = \{ R \}$, potom $m \times \alpha$,
 - c) $r \cap m = m$, potom $m \subset \alpha$.

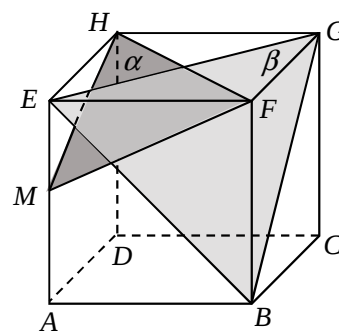
Teraz si ukážeme tento postup na konkrétnom príklade.

Úloha 2.1.2: Daná je kocka $ABCDEFGH$ a bod M na hrane DH , priamka m a rovina β sú určené $m = DF$, $\alpha = ACM$, (Obr. 2.1.2a). Určte priesečník priamky m a roviny α .

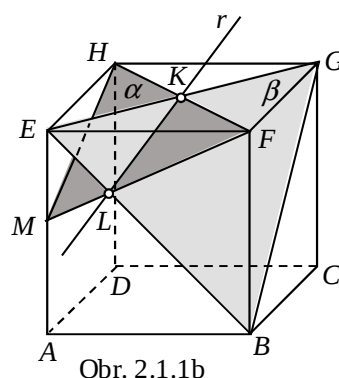
Riešenie: (Obr. 2.1.2b) Pomocnú rovinu $\lambda = DBF$, ktorá musí obsahovať priamku m volíme kolmo na rovinu dolnej podstavy kocky. Už z Obr. 2.1.2a vidíme, že $m \times \alpha$, t. j. zostrojíme priesečník priamky s rovinou.

Postup:

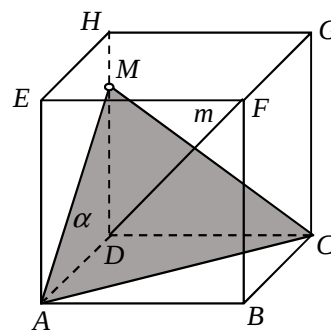
1. λ ; $\lambda = DBF$,
2. r ; $r = \lambda \cap \alpha = KM$,
3. R ; $\{ R \} = r \cap m$.



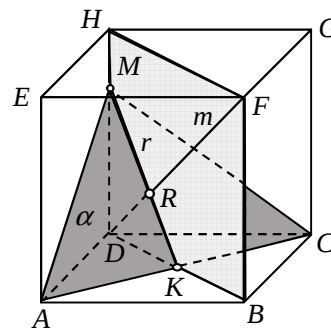
Obr. 2.1.1a



Obr. 2.1.1b



Obr. 2.1.2a

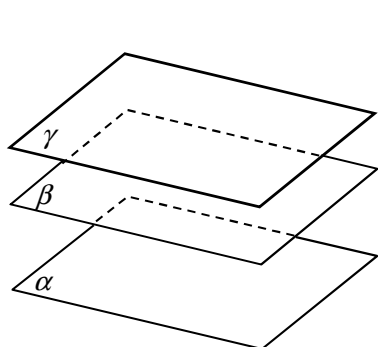


Obr. 2.1.2b

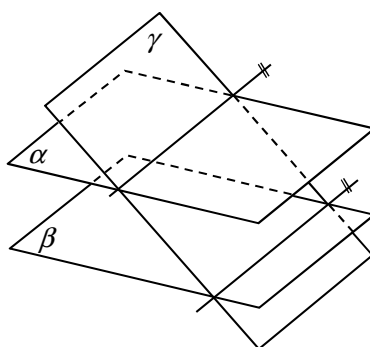
Vzájomná poloha troch rôznych rovín

Tri rôzne roviny môžu mať v priestore jednu z piatich polôh:

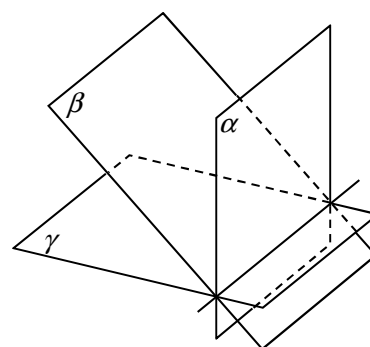
- Všetky tri roviny sú navzájom rovnobežné (Obr. 2.1.3a). Množina všetkých navzájom rovnobežných rovín sa nazýva osnova rovín.
- Dve roviny sú navzájom rovnobežné a tretia je s nimi rôznobežná (Obr. 2.1.3b). S touto situáciou súvisí veta 2.1.1.
- Všetky tri roviny sú navzájom rôznobežné a majú spoločnú práve jednu priamku (Obr. 2.1.3c). Množinu všetkých rovín, ktoré majú spoločnú jedinou priamku nazývame zväzok rovín a ich spoločnú priamku nazývame os zväzku rovín.
- Roviny sa po dvojiciach pretínajú v troch rôznych priamkach, ktoré sú navzájom rovnobežné (Obr. 2.1.3d).
- Roviny sa po dvojiciach pretínajú v troch rôznych priamkach, ktoré sa pretínajú v jedinom bode (Obr. 2.1.3e, f). Množinu všetkých rovín, ktoré majú spoločný jediný bod nazývame trs rovín a ich spoločný bod stred trsu.



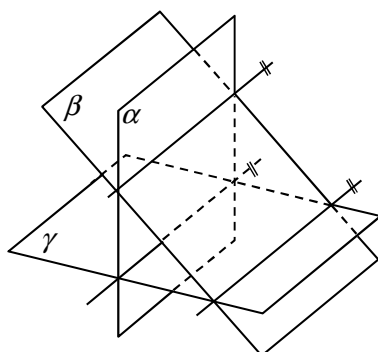
Obr. 2.1.3a



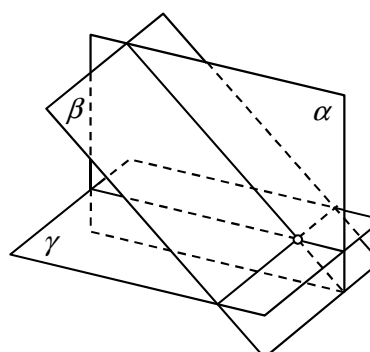
Obr. 2.1.3b



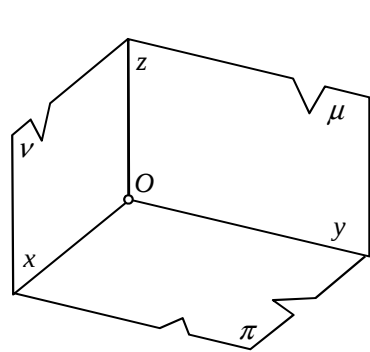
Obr. 2.1.3c



Obr. 2.1.3d



Obr. 2.1.3e



Obr. 2.1.3f

Veta 2.1.1: Priesečnice roviny rôznobežnej s dvoma rovnobežnými rovinami sú navzájom rovnobežné priamky (Obr. 2.1.3b).

Veta 2.1.2: Priesečnice troch rovín, ktoré sa po dvojiciach pretínajú v troch rôznych priamkach majú spoločný jediný bod (Obr. 2.1.3e), alebo sú všetky tri navzájom rovnobežné (Obr. 2.1.3d).

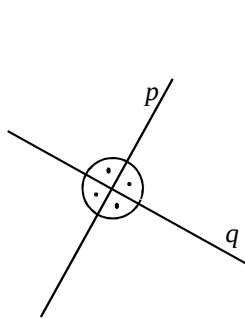
Obrázok 2.1.3f ilustruje špeciálny prípad troch rovín π , ν , μ , ktoré majú spoločný jediný bod O , a ktoré sú navzájom kolmé. Priesečnice týchto rovín, priamky $x = \pi \cap \nu$, $y = \pi \cap \mu$, $z = \mu \cap \nu$ sú navzájom kolmé priamky. Útvár zložený z rovín π , ν , μ , priamok x , y , z a bodu O nazývame pravouhlý súradnicový trojhran a prostredníctvom neho definujeme pravouhlý súradnicový systém.

2.2 Uhly a vzdialenosti

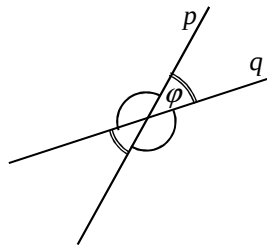
Uhol ľubovoľných útvarov je definovaný prostredníctvom uhla dvoch priamok, preto si najprv pripomenieme definíciu tohto pojmu.

Uhol dvoch priamok

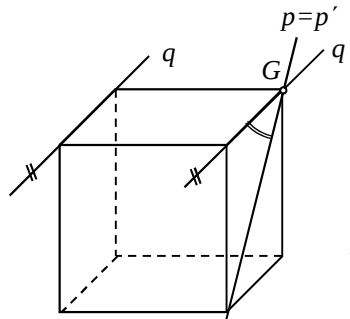
- Rôznobežné priamky zvierajú štyri uhly. Ak sú tieto štyri uhly zhodné (Obr. 2.2.1a), tak priamky sú navzájom kolmé a ich uhol má veľkosť 90° . Ak uhly nie sú zhodné, tak priamky zvierajú dva zhodné tupé a dva zhodné ostré uhly (Obr. 2.2.1b), pod uhlom takýchto priamok rozumieme ich ostrý uhol.
- Veľkosť uhla rovnobežných priamok je 0° .
- Uhol mimobežných priamok p, q je definovaný ako uhol dvoch rôznobežných priamok p', q' , ktoré sú s priamkami p, q rovnobežné. Zvyčajne sa ľubovoľným bodom jednej priamky zostrojí priamka rovnobežná s druhou priamkou (Obr. 2.2.1c).



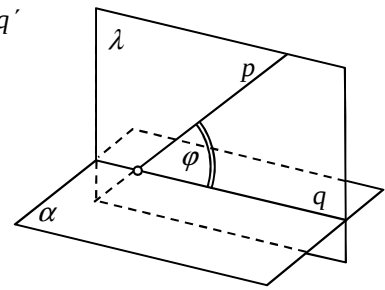
Obr. 2.2.1a



Obr. 2.2.1b



Obr. 2.2.1c



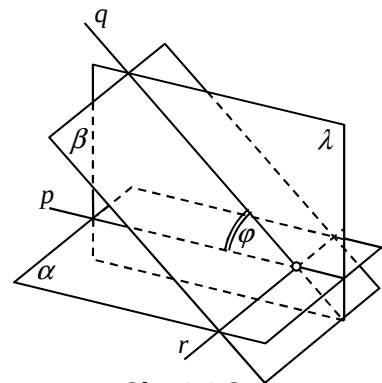
Obr. 2.2.2

Uhol priamky s rovinou

Uhol priamky p s rovinou α je definovaný ako uhol priamok p, q , kde q je priesečnica roviny α s rovinou λ , ktorá obsahuje priamku p a je kolmá na rovinu α , $\sphericalangle(p, \alpha) = \sphericalangle(p, q)$ (Obr. 2.2.2). Ak $p \parallel \alpha$, tak $|\sphericalangle(p, \alpha)| = 0^\circ$.

Uhol dvoch rovín

Uhol rovín α a β je definovaný ako uhol priamok p, q , kde p, q sú priesečnice rovín α a β s rovinou λ , ktorá je kolmá na obidve roviny α aj β , aj na ich priesečnicu r , $\sphericalangle(\alpha, \beta) = \sphericalangle(p, q)$ (Obr. 2.2.3). Ak $\alpha \parallel \beta$, tak $|\sphericalangle(\alpha, \beta)| = 0^\circ$.

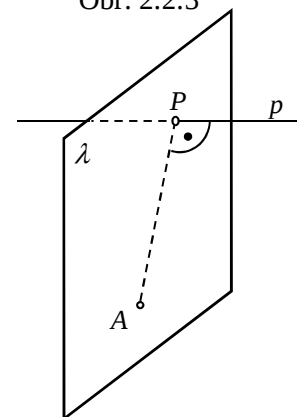


Obr. 2.2.3

Vzdialenosť bodu od priamky

Vzdialenosť bodu A od priamky p je vzdialenosť bodov AP , kde P je päta kolmice vedenej z bodu A na priamku p (Obr. 2.2.4). Postup:

1. $\lambda; A \in \lambda \wedge \lambda \perp p$,
2. $P; \{P\} = \lambda \cap p$,
3. $|AP| = |A, p|$.



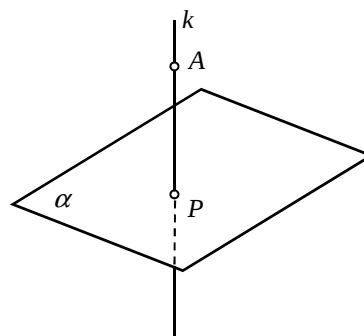
Obr. 2.2.4

Vzdialenosť bodu od roviny

Vzdialenosť bodu A od roviny α je vzdialenosť bodov AP , kde P je päta kolmice vedenej z bodu A na rovinu α (Obr. 2.2.5).

Postup:

1. $k; A \in k \wedge k \perp \alpha$,
2. $P; \{P\} = k \cap \alpha$,
3. $|AP| = |A, \alpha|$.



Obr. 2.2.5

Vzdialenosť priamky od roviny

Vzdialenosť priamky p od roviny α je definovaná len ak $p \parallel \alpha$ a je to vzdialenosť ľubovoľného bodu priamky p od roviny α .

Vzdialenosť dvoch priamok

Vzdialenosť dvoch priamok je definovaná len pre rovnobežné priamky a mimobežné priamky.

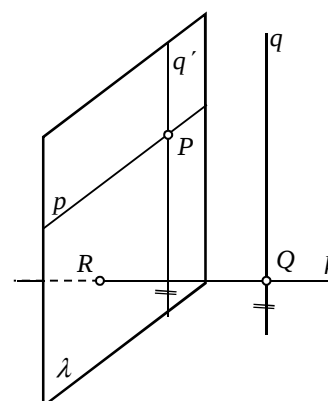
- Vzdialenosť dvoch rovnobežných priamok je vzdialenosť ľubovoľného bodu jednej priamky od druhej priamky.
- Vzdialenosť dvoch mimobežných priamok p, q je vzdialenosť bodov A, B , pre ktoré platí $A \in p, B \in q, AB \perp p$ a $AB \perp q$. Priamka AB sa nazýva osou mimobežných priamok p, q (Obr. 2.2.6b).

Na Obr. 2.2.6a sú zobrazené mimobežné priamky p, q a body Q, R , ktorých vzdialenosť sa rovná vzdialenosti priamok p, q napriek tomu, že priamka $k = QR$ nie je osou týchto mimobežných priamok. V praxi zvyčajne nezostrojujeme os mimobežných priamok, ale práve takú dvojicu bodov ako sú body Q, R . Konštrukcia bodov Q, R :

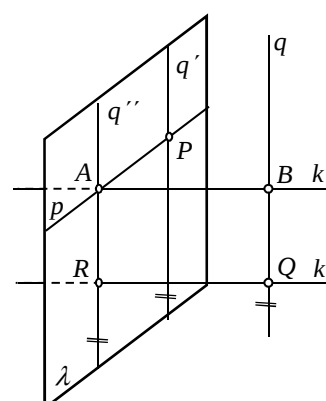
1. $P; P \in p$ ľubovoľný bod,
2. $q'; P \in q' \wedge q' \parallel q$,
3. $\lambda; \lambda = pq'$,
4. $Q; Q \in q$ ľubovoľný bod,
5. $k; Q \in k \wedge k \perp \lambda$,
6. $R; \{R\} = k \cap \lambda$,
7. $|RQ| = |p, q|$.

Ak chceme zostrojiť os mimobežných priamok pokračujeme v konštrukcii (Obr. 2.2.6b):

8. $q''; R \in q'' \wedge q'' \parallel q$,
9. $A; \{A\} = q'' \cap p$,
10. $k'; A \in k' \wedge k' \perp \lambda$,
11. $B; \{B\} = k' \cap q$,
12. Priamka $k' = AB$ je os mimobežných priamok p, q a tiež platí $|AB| = |p, q|$.



Obr. 2.2.6a



Obr. 2.2.6b

Vzdialenosť dvoch rovín

Vzdialenosť dvoch rovín je definovaná len pre rovnobežné roviny ako vzdialenosť ľubovoľného bodu jednej roviny od druhej roviny.

2.3 Rovnobežnosť a kolmosť priamok a rovín

V tejto časti si pripomenieme najdôležitejšie tvrdenia o rovnobežnosti a kolmosti priamok a rovín v Euklidovskom priestore.

Kritérium rovnobežnosti priamky a roviny: Priamka je rovnobežná s rovinou práve vtedy, keď je rovnobežná s nejakou priamkou tejto roviny.

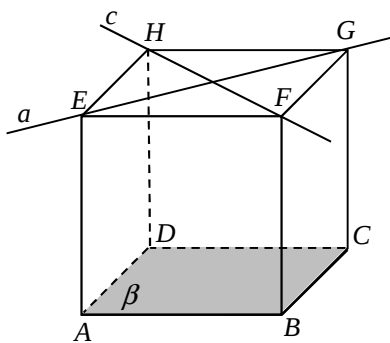
Kritérium rovnobežnosti dvoch rovín: Dve roviny sú navzájom rovnobežné práve vtedy, keď jedna rovina obsahuje dve rôznobežné priamky, ktoré sú rovnobežné s druhou rovinou.

Ďalšie vzťahy rovnobežnosti priamok a rovín:

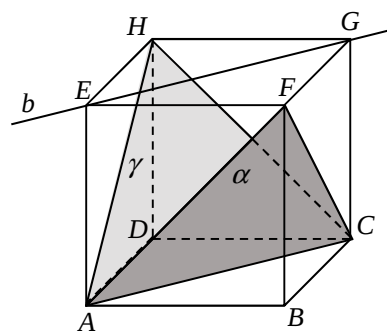
- Bodom, ktorý neleží v danej rovine, prechádza práve jedna rovina rovnobežná s danou rovinou.
- Ak sú dve roviny rovnobežné, tak každá priamka z jednej roviny je rovnobežná s druhou rovinou.
- Ak $a \parallel b \wedge b \parallel c$, potom $a \parallel c$ (tranzitívnosť rovnobežnosti priamok).
- Ak $\alpha \parallel \beta \wedge \beta \parallel \gamma$, potom $\alpha \parallel \gamma$ (tranzitívnosť rovnobežnosti rovín).
- Ak $a \parallel b \wedge b \parallel \gamma$, potom $a \parallel \gamma$.
- Ak $a \parallel \beta \wedge \beta \parallel \gamma$, potom $a \parallel \gamma$.

Poznámka: Avšak musíme byť opatrní, nie každý vzťah, ktorý vytvoríme týmto spôsobom, je správny. Uvedieme dva príklady:

1. ak $a \parallel \beta \wedge \beta \parallel c$, potom nemusí platiť, že $a \parallel c$. Na Obr. 2.3.1a sú znázornené priamky $a = EG$, $c = FH$ a rovina $\beta = ABC$, zrejme platí $a \parallel \beta \wedge \beta \parallel c$, ale priamky a , c nie sú navzájom rovnobežné.
2. ak $\alpha \parallel b \wedge b \parallel \gamma$, potom nemusí platiť, že $\alpha \parallel \gamma$. Obr. 2.3.1b zobrazuje situáciu, kde $\alpha = ACF$, $b = EG$ a rovina $\gamma = ACH$. Vidíme, že $\alpha \parallel b \wedge b \parallel \gamma$, ale roviny α a γ nie sú navzájom rovnobežné.



Obr. 2.3.1a



Obr. 2.3.1b

Veta 2.3.1: Ak je priamka rovnobežná s dvoma rôznobežnými rovinami, tak je rovnobežná aj s ich priesečnicou.

Teraz sa budeme zaoberať kolmost'ou. Pripomeňme, že priamka je kolmá na rovinu práve vtedy, keď je kolmá na všetky priamky tejto roviny, ale v praxi nie je možné overiť kolmost' na všetky priamky, preto teraz uvedieme užitočné kritériá kolmosti.

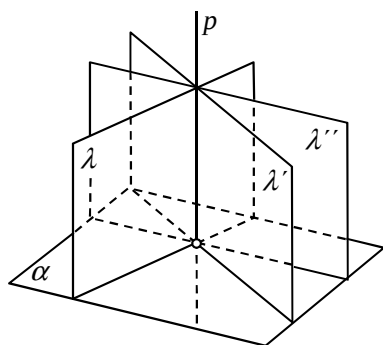
Kritérium kolmosti priamky a roviny: Priamka je kolmá na rovinu práve vtedy, keď je kolmá na dve rôznobežné priamky tejto roviny.

Kritérium kolmosti dvoch rovín: Dve roviny sú navzájom kolmé práve vtedy, keď jedna rovina obsahuje priamku kolmú na druhú rovinu.

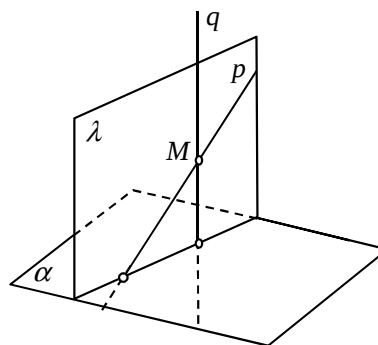
Úloha 2.3.1: Daná je priamka p a rovina α . Priamkou p veďte rovinu λ tak, aby bola kolmá na rovinu α .

Riešenie: Ak $p \perp \alpha$ (Obr. 2.3.2a), tak každá rovina prechádzajúca priamkou p je kolmá na rovinu α , všetky riešenia tvoria zväzok rovín, ktorého osou je priamka p .

Ak priamka p nie je kolmá na rovinu α (Obr. 2.3.2b), tak existuje jediná rovina λ , ktorá je riešením úlohy. Rovina λ je určená dvojicou rôznobežných priamok p, q , kde priamka q je kolmica na rovinu α prechádzajúca ľubovoľným bodom priamky p .



Obr. 2.3.2a



Obr. 2.3.2b

Ďalšie vzťahy kolmosti a rovnobežnosti priamok a rovín

- Existuje jediná priamka prechádzajúca daným bodom kolmá na danú rovinu.
- Existuje jediná rovina prechádzajúca daným bodom kolmá na danú priamku.
- Všetky priamky kolmé na danú rovinu sú navzájom rovnobežné.
- Všetky roviny kolmé na danú priamku sú navzájom rovnobežné.
- Ak sú dve rôznobežné roviny kolmé na tú istú rovinu, tak aj ich priesečnica je kolmá na túto rovinu.

Veta 2.3.2: Rovina je kolmá k dvom rôznobežným rovinám práve vtedy, keď je kolmá na ich priesečnicu.

2.4 Jednoduché plochy a telesá

V tejto časti uvádzame definície jednoduchých priamkových plôch a pojmov, ktoré s tým súvisia. Zaoberať sa budeme len takými plochami, ktorých určujúci útvar je uzavretý

n -uholník alebo kružnica, počas štúdia sa stretnete so všeobecnejšími definíciami jednoduchých plôch.

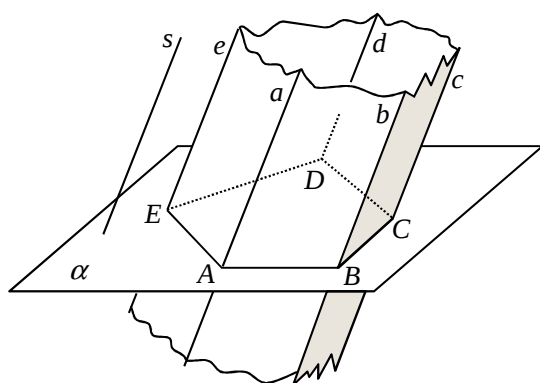
Hranolová plocha a hranol

Daný je n -uholník $ABC\dots$ v rovine α a priamka s rovnobežná s rovinou α .

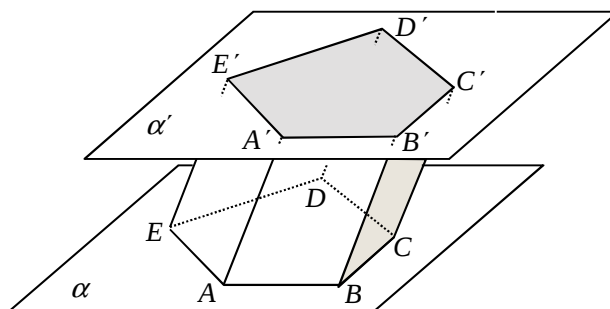
Hranolová plocha (Obr. 2.4.1a) je množina bodov všetkých priamok rovnobežných s priamkou s , ktoré pretínajú obvod n -uholníka $ABC\dots$. Ak smer tvoriacich priamok s je kolmý na rovinu určujúceho n -uholníka, tak plocha sa nazýva kolmá, inak sa nazýva šikmá. Priamky, ktoré plochu vytvárajú, sa nazývajú **tvoriace priamky** plochy a n -uholník $ABC\dots$ sa nazýva **určujúci n -uholník** plochy. Priamka plochy prechádzajúca vrcholom n -uholníka je **hrana** plochy a množina všetkých priamok plochy prechádzajúcich stranou n -uholníka tvorí **stenu** plochy.

Hranolový priestor je množina bodov všetkých priamok rovnobežných s priamkou s , ktoré pretínajú n -uholník $ABC\dots$.

Hranol (Obr. 2.4.1b) je časť hranolového priestoru ohraničená dvoma rôznymi rovnobežnými rovinami α, α' , ktoré sú rovnobežné so smerom tvoriacich priamok s ($\alpha \parallel \alpha', \alpha \neq \alpha', \alpha \not\parallel s$). Prieniky hranolového priestoru s rovinami α, α' sa nazývajú **podstavy** hranola. Vzdialenosť rovin α, α' je výška hranola. Kolmý hranol, ktorého podstava je pravidelný n -uholník, sa nazýva **pravidelný n -boký hranol**.



Obr. 2.4.1a



Obr. 2.4.1b

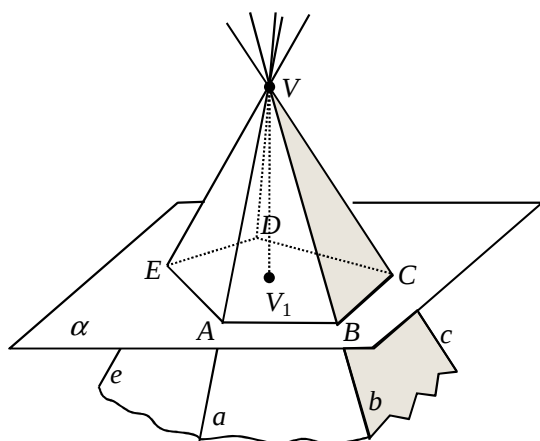
Ihlanová plocha a ihlan

Daný je n -uholník $ABC\dots$ v rovine α a bod V , ktorý neleží v rovine α .

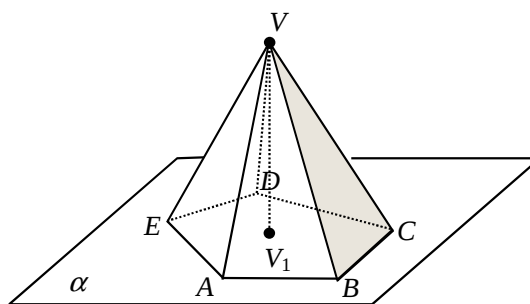
Ihlanová plocha (Obr. 2.4.2a) je množina bodov všetkých priamok, ktoré prechádzajú bodom V a pretínajú obvod n -uholníka $ABC\dots$. Bod V sa nazýva **hlavný vrchol** plochy.

Ihlanový priestor je množina bodov všetkých priamok, ktoré prechádzajú bodom V a pretínajú n -uholník $ABC\dots$.

Ihlan (Obr. 2.4.2b) je časť ihlanového priestoru ohraničená vrcholom V a rovinou určujúceho n -uholníka $ABC\dots$, ktorý nazývame **podstava** ihlana. Vzdialenosť bodu V od roviny podstavy je výška ihlana. Ihlan, ktorého podstava je pravidelný n -uholník a päta výšky je stredom podstavy, sa nazýva **pravidelný n -boký ihlan**.



Obr. 2.4.2a



Obr. 2.4.2b

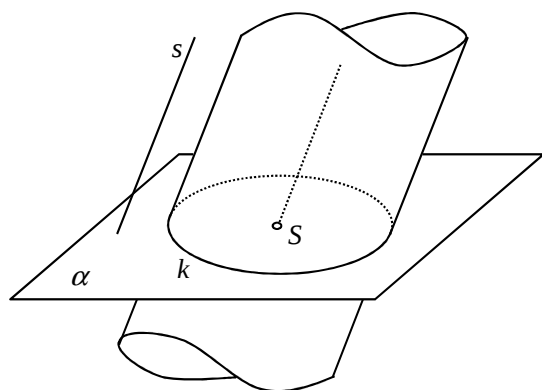
Kružnicová valcová plocha a valec

Daný je kruh K s obvodovou kružnicou k v rovine α a priamka s rôznobežná s rovinou α .

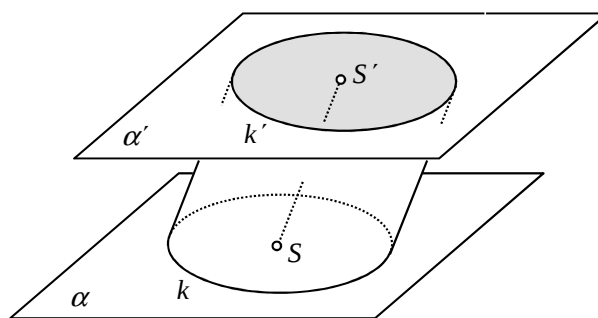
Kružnicová valcová plocha (Obr. 2.4.3a) je množina bodov všetkých priamok rovnobežných s priamkou s , ktoré pretínajú kružnicu k . Kružnicu k nazývame **určujúcou kružnicou** plochy. Ak smer tvoriacich priamok s je kolmý na rovinu určujúcej kružnice, tak plocha sa nazýva rotačná (môže vzniknúť rotáciou), inak sa nazýva šikmá.

Kružnicový valcový priestor je množina bodov všetkých priamok rovnobežných s priamkou s , ktoré pretínajú kruh K .

Valec (Obr. 2.4.3b) je časť valcového priestoru ohraničená dvomi rôznymi rovnobežnými rovinami α, α' , ktoré sú rôznobežné so smerom tvoriacich priamok s . Prieniky valcového priestoru s rovinami α, α' sa nazývajú **podstavy** valca. Vzdialenosť rovin α, α' je výška valca. **Rotačný valec** je valec, ktorého tvoriace priamky sú kolmé na rovinu podstavy.



Obr. 2.4.3a



Obr. 2.4.3b

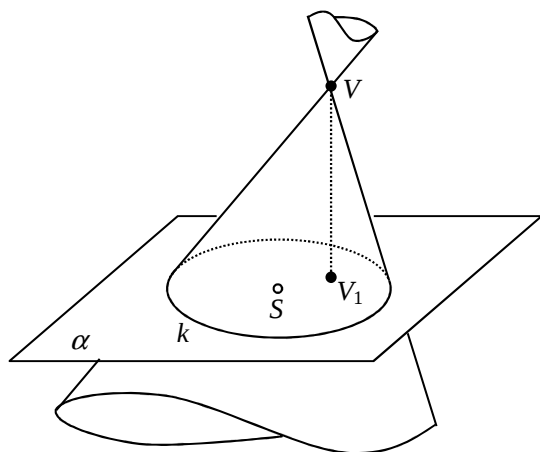
Kružnicová kužeľová plocha a kužeľ

Daný je kruh K s obvodovou kružnicou k v rovine α a priamka s rôznobežná s rovinou α .

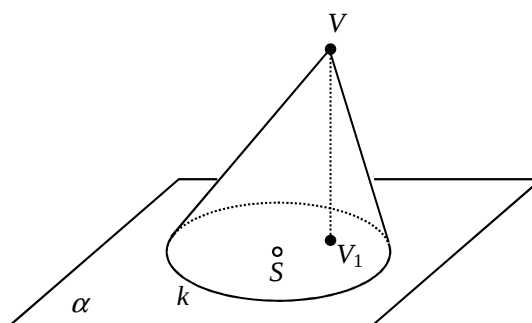
Kružnicová kužeľová plocha (Obr. 2.4.4a) je množina bodov všetkých priamok, ktoré prechádzajú bodom V a pretínajú kružnicu k . Bod V sa nazýva vrchol plochy. Ak spojnica vrcholu V so stredom S určujúcej kružnice je kolmá na rovinu určujúcej kružnice, tak plochu nazývame rotačná kužeľová plocha.

Kružnicový kužeľový priestor je množina bodov všetkých priamok, ktoré prechádzajú bodom V a pretínajú kruh K .

Kužeľ (Obr. 2.4.4b) je časť kužeľového priestoru ohraničená vrcholom V a rovinou kruhu K , ktorý nazývame **podstavou** kužeľa. Vzdialenosť vrcholu V od roviny podstavy je výška kužeľa. Kužeľ, pre ktorý platí, že spojnica vrcholu V so stredom S podstavy je kolmá na rovinu podstavy, sa nazýva **rotačný kužeľ**.



Obr. 2.4.4a

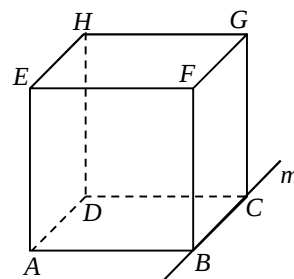


Obr. 2.4.4b

Cvičenia

1. Daná je kocka $ABCDEFGH$. Vymenujte všetky priamky, ktoré prechádzajú vrcholom E a ďalším vrcholom kocky a sú s priamkou $m = BC$ (Obr. 1):

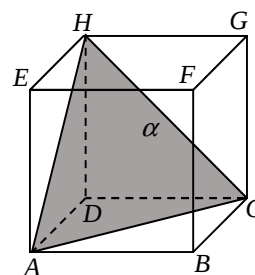
- a) rovnobežné,
- b) rôznobežné,
- c) mimobežné.



Obr. 1

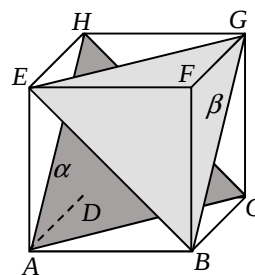
2. Daná je kocka $ABCDEFGH$. Vymenujte všetky priamky, ktoré prechádzajú vrcholom E a ďalším vrcholom kocky a sú s rovinou $\alpha = ACH$ (Obr. 2):

- a) rovnobežné (odôvodnite prečo),
- b) rôznobežné (určte ich priesečník).



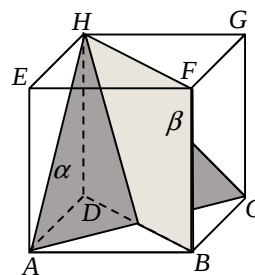
Obr. 2

3. Daná je kocka $ABCDEFGH$. Dokážte, že roviny $\alpha = ACH$, $\beta = BEG$ sú navzájom rovnobežné (Obr. 3).



Obr. 3

4. Daná je kocka $ABCDEFGH$. Dokážte, že roviny $\alpha = ACH$, $\beta = BDH$ sú navzájom kolmé. (Pomôcka: dokážte, že priamka AC je kolmá na rovinu BDH) (Obr. 4).



Obr. 4

5. Daná je kocka $ABCDEFGH$. Bod M je stred hrany EF . Zostrojte priesečnicu rovín α a β :

- a) $\alpha = AFH$, $\beta = CGM$,
- b) $\alpha = ABG$, $\beta = DEG$.

6. Daná je kocka $ABCDEFGH$. Bod M je stred hrany EF , L je stred hrany GH . Zostrojte priesečník priamky m a roviny α :

- a) $\alpha = BEG, m = DM,$
- b) $\alpha = ACG, m = BL.$

7. Daný je pravidelný štvorboký ihlan $ABCDV$ a body K, M, L , K je stred hrany CV , M je stred hrany AV , L je stred hrany DV . Zostrojte:

- a) priesečnicu rovín α a β , $\alpha = BDV, \beta = ACL,$
- b) priesečník priamky m a roviny γ , $m = CM, \gamma = BDK.$

8. Daná je kocka $ABCDEFGH$, $|AB| = 5\text{cm}$. Graficky určte uhol priamky $m = HB$ a roviny α :

- a) $\alpha = ABC,$
- b) $\alpha = BCG,$
- c) $\alpha = DCG.$

9. Daná je kocka $ABCDEFGH$, $|AB| = 5\text{cm}$. Graficky určte uhol rovín α a β :

- a) $\alpha = ABC, \beta = BEG,$
- b) $\alpha = ACF, \beta = ACH,$
- c) $\alpha = ACF, \beta = BEG.$

10. Daná je kocka $ABCDEFGH$, $|AB| = 5\text{cm}$. Graficky určte vzdialenosť:

- a) bodu E a roviny $\alpha = DBF,$
- b) bodu E a roviny $\beta = DBG,$
- c) priamky $m = HF$ a roviny $\beta = DBG,$
- d) rovín $\beta = DBG$ a $\gamma = AFH.$

11. Daný je pravidelný štvorboký ihlan $ABCDV$, $|AB| = 5\text{cm}$ a výška $v = 7\text{cm}$. Bod K je stred hrany AV , L je stred hrany CV , M je stred hrany DV . Graficky určte uhol priamok:

- a) $p = AD, q = BL,$
- b) $a = AB, b = KL,$
- c) $c = BC, d = KM,$
- d) $e = AL, f = CV.$

12. Daný je pravidelný štvorboký ihlan $ABCDV$, $|AB| = 5\text{cm}$ a výška $v = 7\text{cm}$. Bod K je stred hrany AV , L je stred hrany CV , M je stred hrany DV , S je stred podstavy. Graficky určte:

- a) uhol priamky $p = SV$ a roviny $\alpha = ACM,$
- b) uhol rovín $\beta = BDK, \gamma = BDL,$
- c) vzdialenosť priamky $m = AD$ a roviny $\delta = BCV.$

3 ROVNOBEŽNÉ PREMIETANIE A PERSPEKTÍVNA AFINITA

Premietanie je základný prostriedok na zostrojenie obrazu priestorového objektu vo väčšine zobrazovacích metód v deskriptívnej geometrii. Premietanie je zobrazenie priestoru $\mathbb{E}^3$ do roviny $\mathbb{E}^2$. Premietanie môže byť stredové alebo rovnobežné, v tejto publikácii sa budeme zaoberať len rovnobežným premietaním do roviny, hlavne jeho špeciálnym prípadom, kolmým premietaním do roviny.

Perspektívna afinita je zobrazenie, ktoré má v deskriptívnej geometrii bohaté využitie, lebo zjednodušuje riešenie mnohých úloh, napr. otáčanie roviny v kolmom premietaní alebo konštrukciu rezov niektorých telies.

Prvé dve časti tejto kapitoly sú venované rovnobežnému premietaniu, tretia časť je venovaná špeciálnemu prípadu rovnobežného premietania, kolmému premietaniu. Štvrtá časť sa zaoberá perspektívnou afinitou a piata časť afinnými konštrukciami elipsy.

3.1 Rovnobežné premietanie

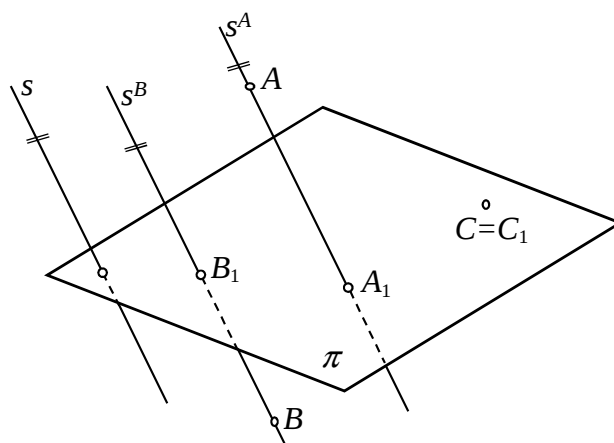
Definícia 3.1.1: Nech π je ľubovoľná rovina v priestore $\mathbb{E}^3$ a s je priamka, ktorá nie je rovnobežná s rovinou π . Rovnobežné premietanie je zobrazenie priestoru $\mathbb{E}^3$ do roviny π , ktoré každému bodu $X \in \mathbb{E}^3$ priradí bod $X_1 \in \pi$ tak, že $XX_1 \parallel s$. Rovinu π nazývame priemetňa, priamka s určuje smer premietania a priamku $s^X = XX_1$ nazývame premietacia priamka bodu X .

Poznámka: Priemety útvarov označujeme rovnakým písmenom ako pôvodný útvar, pričom vpravo dole napíšeme vhodný index, v prípade rovnobežného premietania do jednej priemetne je to index „1“, ak budeme mať druhú, resp. tretiu priemetňu, použijeme index „2“, resp. „3“.

Rovnobežný priemet bodu

Rovnobežný priemet bodu je vždy bod, ktorý je priesečník premietacej priamky bodu a priemetne. Priemet bodu, ktorý leží v priemetni, je ten istý bod. Na obrázku 3.1.1 je zobrazený rovnobežný priemet bodov A a B , ktoré ležia v opačných polpriestoroch vzhľadom na priemetňu π a bodu C , ktorý leží v priemetni. s^A je premietacia priamka bodu A a s^B je premietacia priamka bodu B .

Priemet útvaru $\mathbb{U}$ je útvar $\mathbb{U}_1$, ktorý je množinou priemetov všetkých bodov útvaru $\mathbb{U}$. Premietacie priamky všetkých bodov útvaru $\mathbb{U}$ vytvárajú premietací útvar, $\mathbb{U}_1$ je prienikom premietacieho útvaru a priemetne. Ak útvar $\mathbb{U}$ leží v priemetni, tak jeho priemet je zhodný s pôvodným útvarom, t. j. $\mathbb{U}_1 = \mathbb{U}$. Najjednoduchšie geometrické útvary sú bod, priamka a rovina.



Obr. 3.1.1

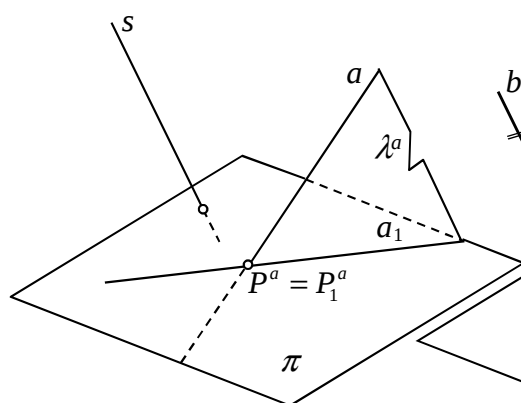
Rovnobežný priemet priamky

Ak priamka a nie je rovnobežná so smerom premietania, tak premietací útvar priamky je rovina, označíme ju λ^a ($a \subset \lambda^a \wedge \lambda^a \parallel s$). Priemet priamky a je priamka $a_1 = \lambda^a \cap \pi$ (Obr. 3.1.2a). Premietací útvar priamky b , ktorá je rovnobežná so smerom premietania, je priamka b , preto jej priemetom je jediný bod $b_1 = b \cap \pi$ (Obr. 3.1.2b).

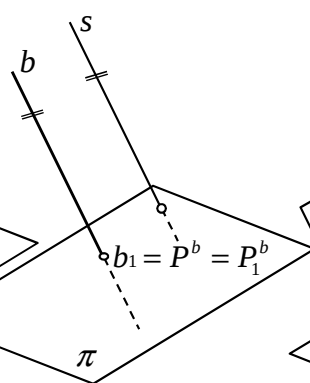
Veta 3.1.1: Rovnobežný priemet priamky je bod, ak je priamka rovnobežná so smerom premietania, inak je rovnobežný priemet priamky priamka.

Definícia 3.1.2: Stopník priamky je priesečník priamky s priemetňou.

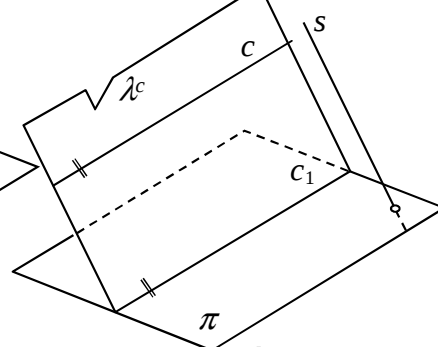
Stopník priamky a v priemetni π označujeme P^a . Na Obr. 3.1.2a, b sú zobrazené stopníky P^a a P^b priamok a a b . Priamka c rovnobežná s priemetňou stopník nemá, jej rovnobežný priemet je priamka $c_1 \parallel c$ (Obr. 3.1.2c).



Obr. 3.1.2a



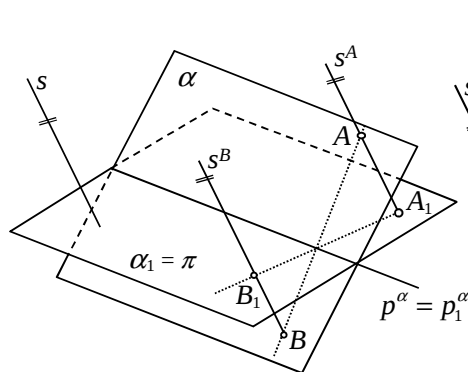
Obr. 3.1.2b



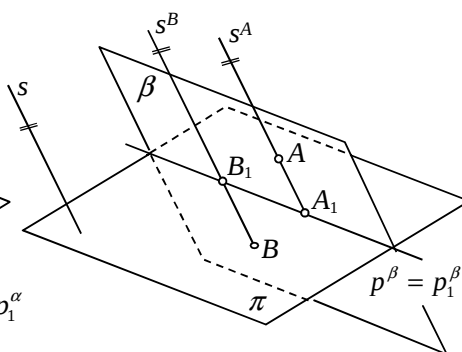
Obr. 3.1.2c

Rovnobežný priemet roviny

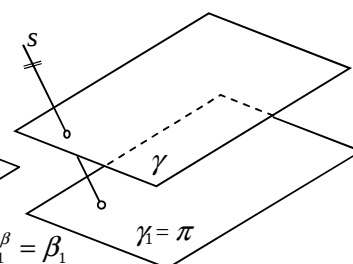
Ak rovina α nie je rovnobežná so smerom premietania, tak premietacie priamky všetkých jej bodov vyplnia celý priestor, preto priemetom takejto roviny je celá priemetňa, t. j. $\alpha_1 = \pi$ (Obr. 3.1.3a). Ak rovina β je rovnobežná so smerom premietania, tak premietací útvar roviny β je samotná rovina β a jej rovnobežný priemet je jediná priamka $\beta_1 = \beta \cap \pi$ (Obr. 3.1.3b).



Obr. 3.1.3a



Obr. 3.1.3b



Obr. 3.1.3c

Veta 3.1.2: Rovnobežný priemet roviny je priamka, ak je rovina rovnobežná so smerom premietania, inak je rovnobežný priemet roviny celá priemetňa.

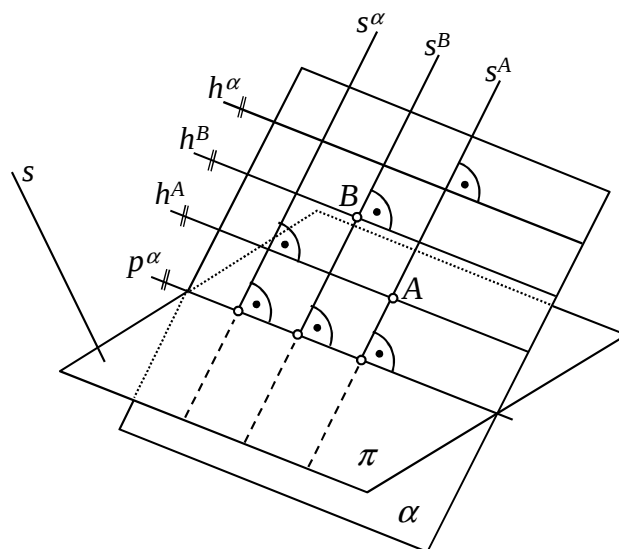
Definícia 3.1.3: Stopa roviny je priesečnica roviny s priemetňou.

Stopu roviny α v priemetni π označujeme p^α . Na Obr. 3.1.3a,b sú zobrazené stopy p^α a p^β rovín α a β . Rovina γ rovnobežná s priemetňou stopu nemá, jej rovnobežný priemet je celá priemetňa $\gamma = \pi$ (Obr. 3.1.3c).

Pre mnohé konštrukcie v deskriptívnej geometrii sú dôležité dve sústavy priamok v rovine: hlavné a spádové priamky.

Definícia 3.1.4: Hlavná priamka roviny je priamka roviny rovnobežná s priemetňou. Spádová priamka roviny je priamka roviny kolmá na stopu tejto roviny.

Poznámka: Hlavné priamky roviny α označujeme h^α a spádové priamky s^α . Ak pracujeme s viacerými hlavnými, resp. spádovými priamkami jednej roviny používame ako index bod, ktorým tieto priamky prechádzajú, t. j. použijeme označenie h^A a s^A v prípade, keď priamky prechádzajú bodom $A \in \alpha$ a v úlohe vystupuje len jedna rovina (Obr. 3.1.4).



Obr. 3.1.4

Pripomeňme si tri fakty, ktoré vyplývajú priamo zo základných viet zo stereometrie:

- Každá hlavná priamka roviny je rovnobežná so stopou roviny.
- Priamka roviny rôzna od hlavnej priamky má svoj stopník na stope tejto roviny.
- Každá spádová priamka je kolmá na každú hlavnú priamku danej roviny, t. j. hlavné a spádové priamky tvoria pravouhlú sieť priamok v rovine (Obr. 3.1.4).

3.2 Základné vlastnosti rovnobežného premietania

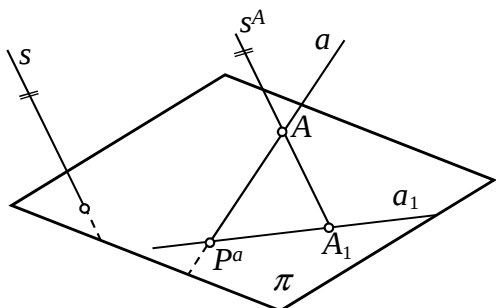
V tejto časti uvedieme vlastnosti rovnobežného premietania, ktoré vyplývajú zo základných poznatkov planimetrie, stereometrie a z definície rovnobežného premietania. V ďalších častiach sa budeme na tieto vlastnosti odvolávať.

V1. Rovnobežné premietanie zachováva incidenciu útvarov. Útvar $\mathbb{U}$ inciduje s útvarom $\mathbb{V}$, ak $\mathbb{U}$ je prvok alebo podmnožina $\mathbb{V}$ alebo $\mathbb{V}$ je prvok alebo podmnožina $\mathbb{U}$. Napríklad:

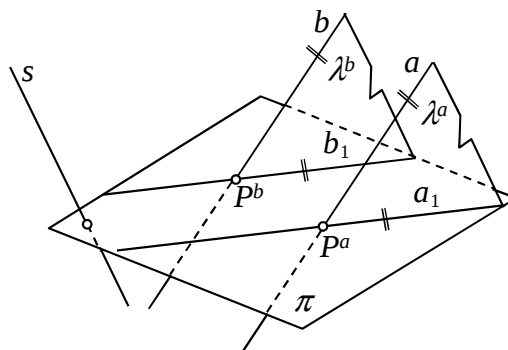
- bod A inciduje s priamkou a znamená, že $A \in a$,
- bod A inciduje s rovinou α znamená, že $A \in \alpha$,
- priamka a inciduje s rovinou α znamená, že $a \subset \alpha$.

Zachovanie incidencie bodov a priamok znamená: ak $A \in a$, tak $A_1 \in a_1$ (Obr. 3.2.1a).

V2. Rovnobežné premietanie zachováva rovnobežnosť priamok, t. j. ak a, b sú dve navzájom rovnobežné priamky v priestore, ktoré nie sú rovnobežné so smerom premietania, tak ich rovnobežné priemety a_1, b_1 sú navzájom rovnobežné priamky v priemetni (Obr. 3.2.1b).



Obr. 3.2.1a



Obr. 3.2.1b

V3. Rovnobežné premietanie zachováva deliaci pomer bodov na priamke. Deliaci pomer je definovaný pre tri kolineárne body (t. j. body ležiace na jednej priamke) takto:

Definícia 3.2.1: Nech A, B, C sú tri kolineárne body, $B \neq C$. Deliaci pomer bodov A, B, C je číslo $(A, B; C)$ definované takto:

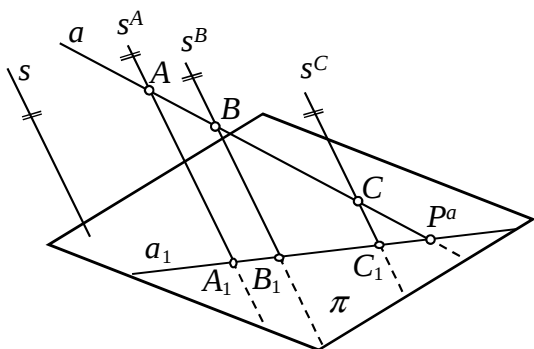
1. ak C leží na úsečke AB , tak $(A, B; C) = -\frac{|AC|}{|BC|}$
2. ak C neleží na úsečke AB , tak $(A, B; C) = \frac{|AC|}{|BC|}$

Stred úsečky môžeme charakterizovať prostredníctvom deliaceho pomeru takto:

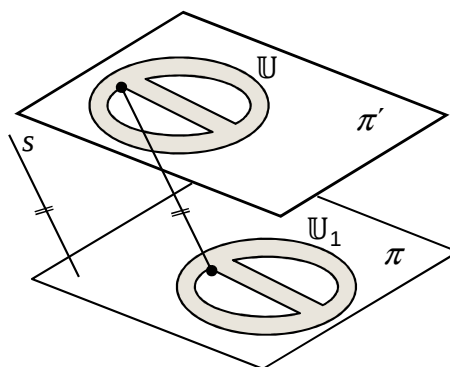
- bod C je stred úsečky AB práve vtedy, keď $(A, B; C) = -1$,
- bod B je stred úsečky AC práve vtedy, keď $(A, B; C) = 2$,
- bod A je stred úsečky BC práve vtedy, keď $(A, B; C) = \frac{1}{2}$.

Zachovanie deliaceho pomeru znamená: ak A, B, C sú tri body ležiace na priamke, ktorá nie je rovnobežná so smerom premietania a A_1, B_1, C_1 sú ich rovnobežné priemety (Obr. 3.2.1c), tak platí:

$$(A, B; C) = (A_1, B_1; C_1).$$



Obr. 3.2.1c



Obr. 3.2.1d

V4. Ak útvar $\mathbb{U}$ leží v rovine rovnobežnej s priemetňou, tak jeho rovnobežný priemet je útvar $\mathbb{U}_1$ zhodný s pôvodným útvarom (Obr. 3.2.1d).

Zaujímavá je otázka, či rovnobežné premietanie zachováva dĺžku úsečky alebo uhol dvoch priamok. Vo všeobecnosti sa tieto vlastnosti nezachovávajú, ale v špeciálnom prípade, ak úsečka, resp. dvojica priamok ležia v rovine rovnobežnej s priemetňou sa dĺžka úsečky aj uhol dvoch priamok zachovávajú (vyplýva z vlastnosti V4).

3.3 Kolmé (pravouhlé) premietanie

Teraz sa budeme zaoberať špeciálnym prípadom rovnobežného premietania, kolmým premietaním, ktoré je základný prostriedok Mongeovej projekcie.

Definícia 3.3.1: Kolmé premietanie je také rovnobežné premietanie, ktorého smer je kolmý na priemetňu.

Kolmé premietanie je jednoznačne určené priemetňou. Pre kolmý priemet bodov, priamok a rovín platia všetky vety z časti 3.1, rovnako aj vlastnosti V1 až V4 z časti 3.2.

Z viet 3.1.1 a 3.1.2 vyplýva:

- Kolmý priemet priamky je bod, ak je priamka kolmá na priemetňu, inak je kolmý priemet priamky priamka.
- Kolmý priemet roviny je priamka, ak je rovina kolmá na priemetňu, inak je kolmý priemet roviny celá priemetňa.

Kolmé premietanie má vlastnosti, ktoré neplatia pre šikmé premietanie:

V5. Pre dĺžku kolmého priemetu úsečky platí:

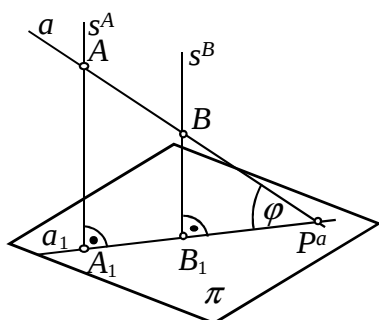
$$|A_1B_1| = |AB| \cdot \cos \varphi,$$

kde A_1B_1 je kolmý priemet úsečky AB a φ je uhol priamky AB a priemetne π (Obr. 3.3.1). Dĺžka priemetu úsečky je najväčšia, ak $AB \parallel \pi$, t. j. $\varphi = 0$, vtedy $\cos \varphi = 1$ a platí:

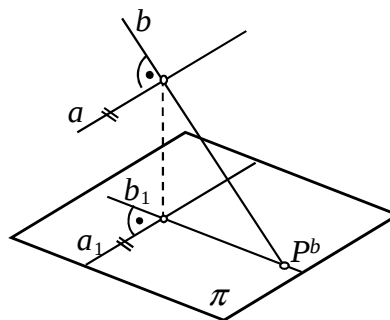
$$|A_1B_1| = |AB|.$$

Vo všetkých ostatných prípadoch je kolmý priemet úsečky kratší ako pôvodná úsečka.

Poznámka: V premietaní, ktoré nie je kolmé sa môže stať, že priemet úsečky je dlhší ako pôvodná úsečka.



Obr. 3.3.1



Obr. 3.3.2

V6. **Veta o kolmom priemete pravého uhla:** Kolmým priemetom pravého uhla je pravý uhol práve vtedy, keď jedno rameno uhla je rovnobežné s priemetňou a druhé nie je na priemetňu kolmé (Obr. 3.3.2).

Poznámka: Hlavná a spádová priamka roviny, ktorá nie je kolmá na priemetňu, je príklad dvojice priamok, ktoré spĺňajú podmienky vety o kolmom priemete pravého uhla. Hlavná priamka je rovnobežná s priemetňou, spádová priamka nie je kolmá na priemetňu, preto ich kolmé priemety sú navzájom kolmé priamky.

3.4 Perspektívna afinita

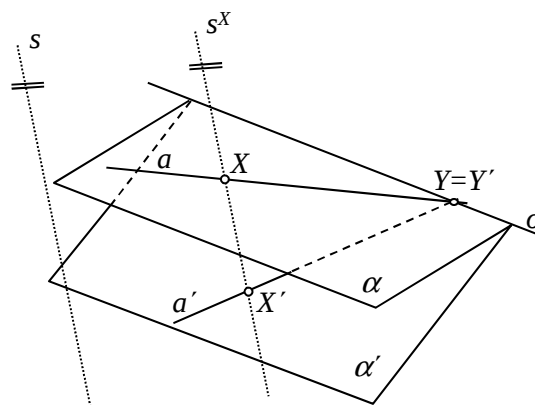
Uvedieme definície dvoch typov perspektívnej afinity, ktoré spolu veľmi úzko súvisia. Jeden typ je zobrazením z jednej roviny do druhej roviny, druhý typ je rovinné zobrazenie.

Perspektívna afinita roviny α na rovinu α'

Definícia 3.4.1: Nech α , α' sú dve rôzne roviny a s je priamka, ktorá nie je rovnobežná s rovinou α ani s rovinou α' . Perspektívna afinita roviny α na rovinu α' je zobrazenie, ktoré každému bodu $X \in \alpha$ priradí bod $X' \in \alpha'$ tak, že $XX' \parallel s$. Body roviny α nazývame vzory, body roviny α' nazývame obrazy a priamku s nazývame smer afinity (Obr. 3.4.1a).

Ak $\alpha \parallel \alpha'$, perspektívna afinita je posunutím roviny α do roviny α' . Pre nás bude dôležitý prípad, keď α , α' sú dve rôznobežné roviny a v ďalšom texte sa budeme zaoberať len týmto prípadom. Priesečnicu rovín α a α' nazývame os perspektívnej afinity a označujeme o . Pre každý bod $Y \in o$ platí $Y' = Y$, t. j. bod Y sa zobrazí sám do seba (Obr. 3.4.1a). Body s touto vlastnosťou nazývame samodružné. Priamku, ktorej každý bod je samodružný, nazývame bodovo samodružná priamka. Os afinity o je jediná bodovo samodružná priamka.

Poznámka: Samodružné body budeme označovať číslami, napr. $1 = 1'$, $2 = 2'$, Priamky $XX' \parallel AA' \parallel BB' \parallel \dots \parallel s$ budeme označovať s^X , s^A , s^B ,



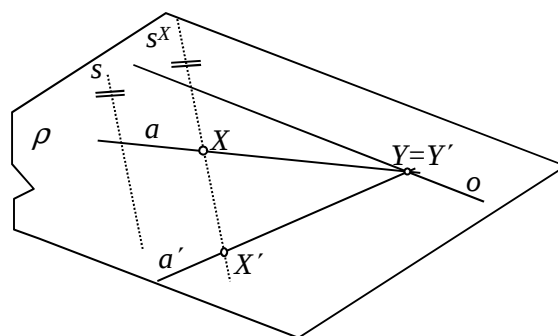
Obr. 3.4.1a

Perspektívna afinita v rovine

Definícia 3.4.2: (Obr. 3.4.1b) Perspektívna afinita v rovine ρ je zobrazenie, ktoré každému bodu $X \in \rho$ priradí bod $X' \in \rho$ tak, že sú splnené nasledujúce podmienky:

1. Zobrazenie zachováva kolinearitu bodov, t. j. zobrazuje priamky do priamok.
2. Všetky dvojice bodov X , X' ležia na navzájom rovnobežných priamkach (**smer afinity**).
3. Zobrazenie má jednu bodovo samodružnú priamku (**os afinity**).

Perspektívnu afinitu nazývame kolmá, ak je jej smer kolmý na os afinity. Špeciálny prípad, kolmá



Obr. 3.4.1b

perspektívna afinita s osou o je osová súmernosť, ak pre každý bod $X \in \rho$ platí: $|X, o| = |X', o|$ a body X, X' neležiace na osi afinity ležia v opačných polrovinách s hraničnou priamkou o .

Súvislosť typov perspektívnej afinity

Rovnobežný priemet perspektívnej afinity roviny α na rovinu α' v smere t do roviny ρ je perspektívna afinita v rovine ρ , ak sa žiadna z rovín α, α' nepremieta do roviny ρ ako priamka. Os a smer pôvodnej afinity sa premietnu do osi a smeru afinity v rovine ρ . Ak smer premietania t je zhodný so smerom afinity s , tak dostaneme identitu v rovine ρ .

Perspektívna afinita roviny α na rovinu α' je založená na rovnobežnom premietaní, preto má niektoré vlastnosti rovnobežného premietania, tieto vlastnosti sa rovnobežným premietaním zachovávajú.

Vlastnosti perspektívnej afinity roviny α na rovinu α' aj perspektívnej afinity v rovine

- zachováva incidenciu útvarov, špeciálne zachováva incidenciu bodov a priamok: ak $A \in a$, tak $A' \in a'$,
- zachováva rovnobežnosť priamok: ak $a \parallel b$, tak $a' \parallel b'$,
- zachováva deliaci pomer bodov na priamke: ak A, B, C sú tri body ležiace na priamke, $B \neq C$ a A', B', C' sú ich obrazy, tak platí:
$$(A, B; C) = (A', B'; C').$$

Priamo z vlastností perspektívnej afinity vyplýva:

- stred úsečky sa v perspektívnej afinite zobrazí do stredu obrazu úsečky,
- štvorec, obdĺžnik alebo rovnobežník sa v perspektívnej afinite zobrazí do rovnobežníka,
- stredovo súmerný útvar sa v perspektívnej afinite zobrazí do stredovo súmerného útvaru.

Perspektívna afinita v rovine je jednoznačne určená osou o a dvojicou afinne združených bodov (vzor, obraz). (Zvyčajne ju takto zadávame.) Konštrukcie obrazov bodov, priamok a jednoduchých geometrických útvarov si ukážeme na príkladoch.

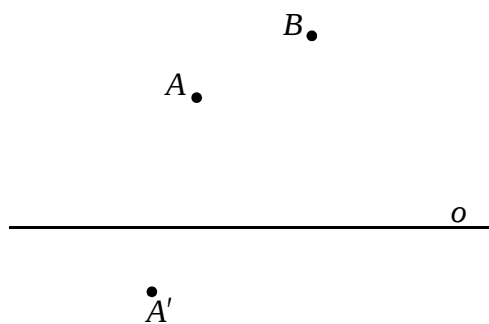
Úloha 3.4.1: Perspektívna afinita v rovine je daná osou o a dvojicou (A, A') . V tejto perspektívnej afinite zostrojte obraz bodu B , ak

- a) $B \notin AA'$ (Obr. 3.4.2a),
- b) $B \in AA'$ (Obr. 3.4.3a).

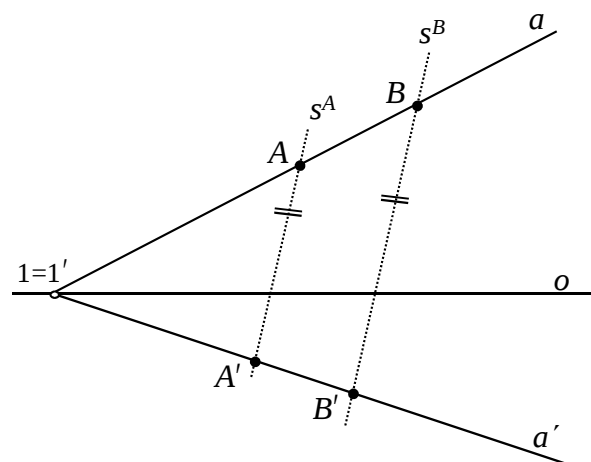
Riešenie: a) (Obr. 3.4.2b)

Využijeme všetky vlastnosti perspektívnej afinity z definície 3.4.2. Postup:

1. $s^A; s^A = AA'$ (s^A je smer afinity),
2. $s^B; s^B \parallel s^A \wedge B \in s^B$,
3. $a; a = AB$,
4. $1; \{1\} = a \cap o$ ($1 = 1'$ je samodružný bod priamky a),
5. $a'; a' = 1'A'$,
6. $B'; \{B'\} = s^B \cap a'$.



Obr. 3.4.2a



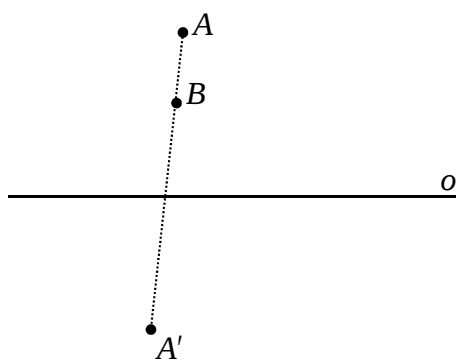
Obr. 3.4.2b

b) (Obr. 3.4.3b)

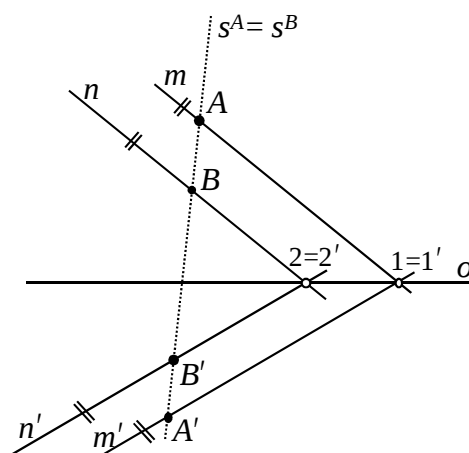
Ak by sme chceli postupovať rovnako ako v prípade a) a použili by sme priamku $a = AB$, narazíme na problém, pretože $a' = a = s^A = s^B$. Všimnite si, že priamka a je samodružná, ale ide o iný typ samodružnej priamky ako je os o , body priamky a nie sú samodružné (okrem priesečníka s osou), priamka a nie je bodovo samodružná.

Pri riešení úlohy využijeme jednu z vlastností perspektívnej afinity v rovine, a to zachovanie rovnobežnosti priamok. Postup:

1. m ; $A \in m$, je vhodné vybrať priamku m tak, aby bol dostupný jej samodružný bod $\{1\} = m \cap o, 1 = 1'$,
2. n ; $B \in n \wedge n \parallel m$,
3. 2 ; $\{2\} = n \cap o, 2 = 2'$,
4. m' ; $m \rightarrow m' (m' = 1'A')$,
5. n' ; $n \rightarrow n' (n' \parallel m' \wedge 2' \in n')$,
6. B' ; $\{B'\} = s^B \cap n'$.



Obr. 3.4.3a



Obr. 3.4.3b

Úloha 3.4.2: Perspektívna afinita v rovine je daná osou o a dvojicou (A, A') . V tejto perspektívnej afinite zostrojte obraz priamky m , ak

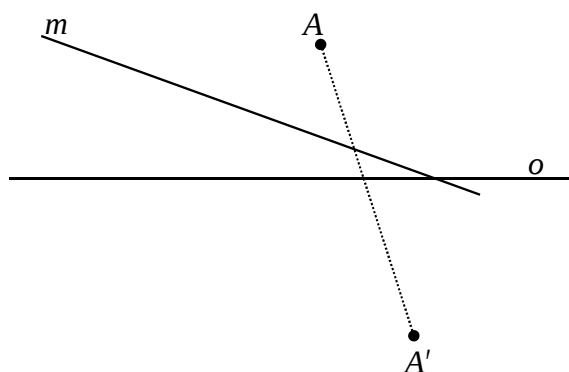
- priamka m je rôznobežná s osou o (Obr. 3.4.4a),
- priamka m je rovnobežná s osou o (Obr. 3.4.5a).

Riešenie:

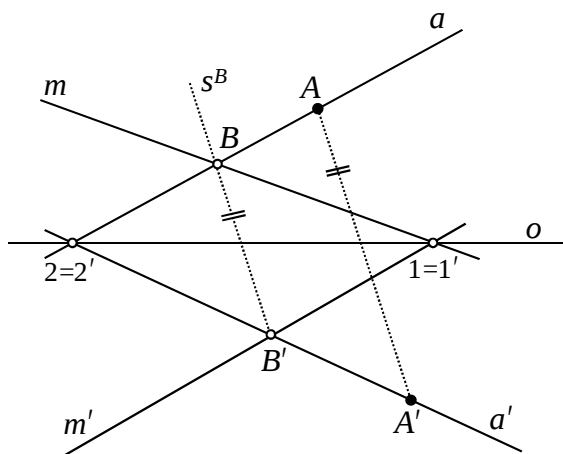
Obrazom ľubovoľnej priamky v perspektívnej afinite je priamka. Obraz priamky je určený obrazom dvoch rôznych bodov priamky. Ak priamka nie je rovnobežná s osou afinity a je dostupný jej priesečník s osou afinity (samodružný bod priamky), tak ho využijeme. Priamka rovnobežná s osou afinity sa zobrazí do priamky rovnobežnej s osou afinity.

a) (Obr. 3.4.4b) Priamku m zobrazíme pomocou ľubovoľného bodu B a samodružného bodu $\{1\} = m \cap o$. Postup:

- B ; $B \in m$ ľubovoľný bod,
- B' ; $B \rightarrow B'$ (pozri úlohu 3.4.1a),
- 1 ; $\{1\} = m \cap o$ ($1 = 1'$ je samodružný bod priamky m),
- $m' = 1'B'$.

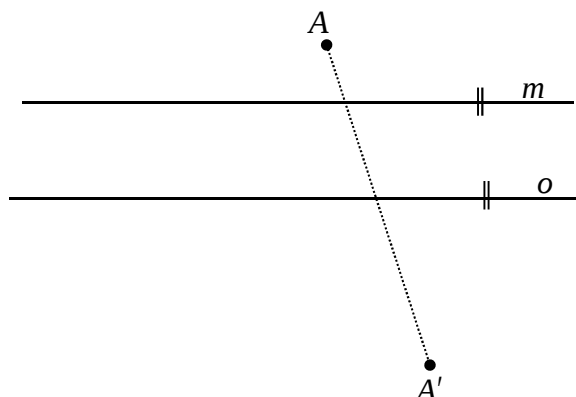


Obr. 3.4.4a

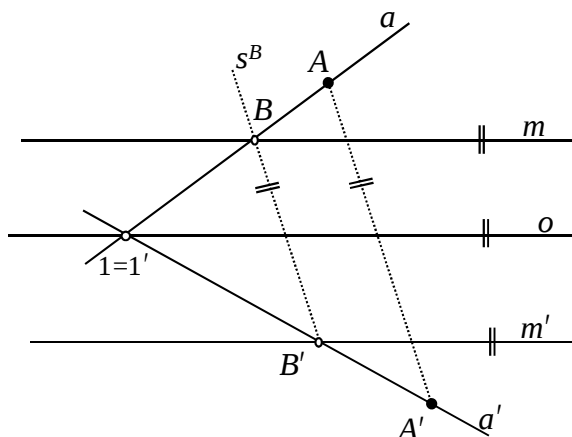


Obr. 3.4.4b

b) (Obr. 3.4.5b) Priamka m sa zobrazí do priamky rovnobežnej s osou afinity. Stačí zobrazit jeden jej bod.



Obr. 3.4.5a



Obr. 3.4.5b

1. $B; B \in m$ ľubovoľný bod,
2. $B'; B \rightarrow B'$ (pozri úlohu 3.4.1a),
3. $m'; B' \in m' \wedge m' \parallel o$.

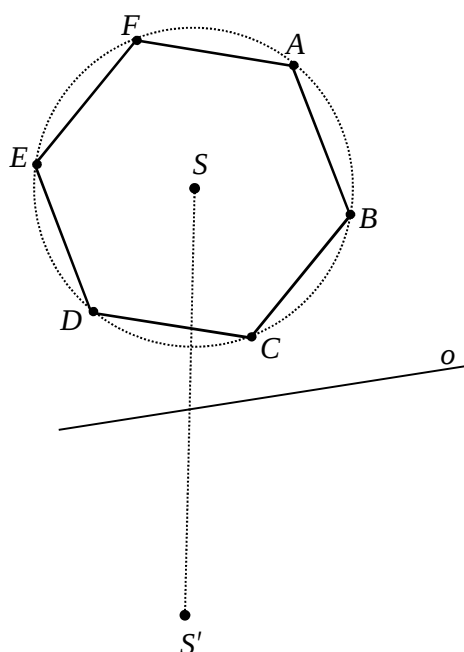
Úloha 3.4.3: Perspektívna afinita v rovine je daná osou o a dvojicou (S, S') . V tejto perspektívnej afinite zostrojte obraz pravidelného 6-uholníka $ABCDEF$ (Obr. 3.4.6a).

Riešenie: (Obr. 3.4.6b) Obrazom pravidelného 6-uholníka $ABCDEF$ je 6-uholník $A'B'C'D'E'F'$, ktorý už nie je pravidelný, lebo dĺžky úsečiek a uhly priamok sa v afinite vo všeobecnosti nezachovávajú, ale z vlastností perspektívnej afinity vyplýva, že stred S 6-uholníka $ABCDEF$ sa zobrazuje do stredu S' 6-uholníka $A'B'C'D'E'F'$ a protíahlé strany 6-uholníka a uhlopriečka medzi nimi sú navzájom rovnobežné.

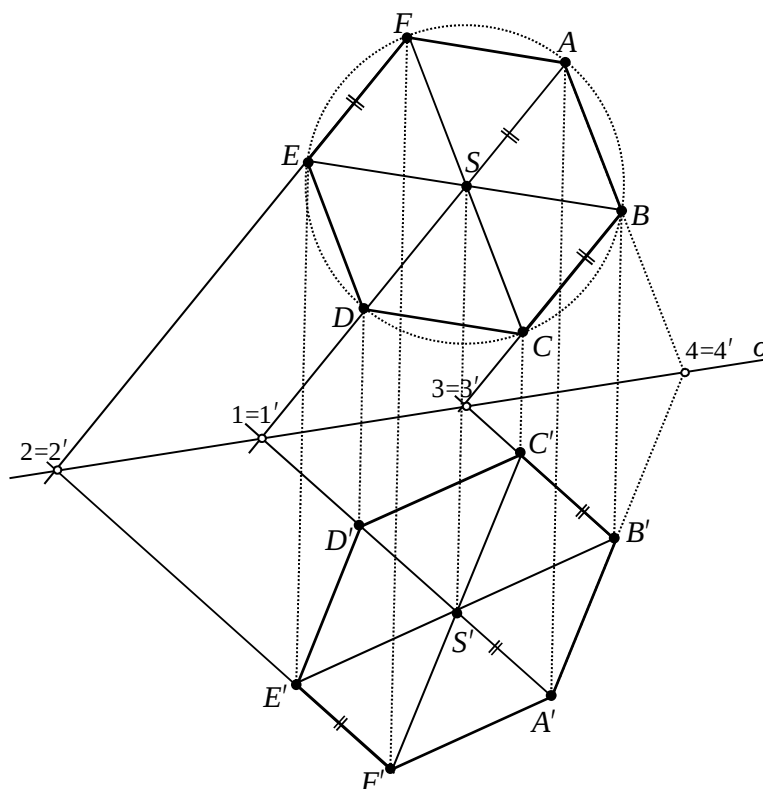
Postupne sme zobrazili jednotlivé vrcholy 6-uholníka, pričom sme využili:

- a) Priamky EF, AD, BC sú navzájom rovnobežné, preto aj ich obrazy $E'F', A'D', B'C'$ sú navzájom rovnobežné priamky.
- b) Priamky spájajúce bod a jeho obraz sú rovnobežné so smerom afinity SS' .

Samodružný bod $4 = 4'$, v ktorom sa musia pretínať priamky AB a $A'B'$ sme použili na kontrolu presnosti rysovania.



Obr. 3.4.6a



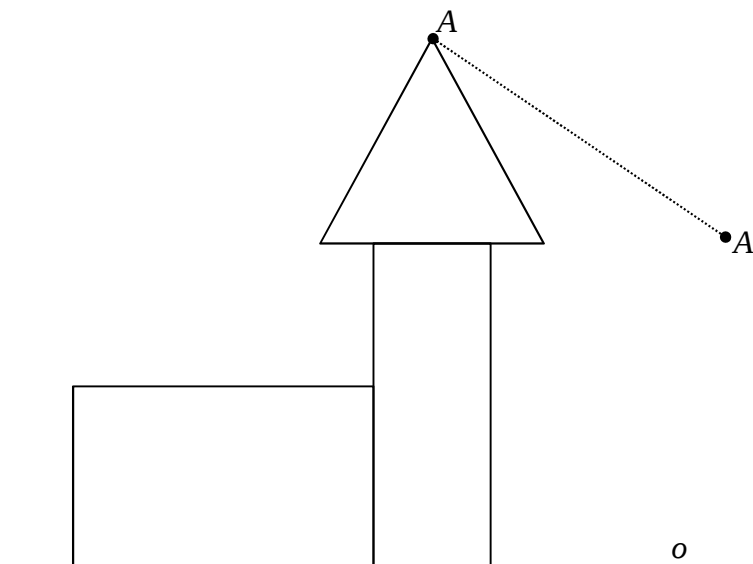
Obr. 3.4.6b

Úloha 3.4.4: Perspektívna afinita v rovine je daná osou o a dvojicou (A, A') . V tejto perspektívnej afinitе zostrojte obraz útvaru, ktorý je zobrazený na obr. 3.4.7a.

Riešenie: (Obr. 3.4.7b) Útvar na Obr. 3.4.7a je zložený z jednoduchších útvarov, označíme B, C, D, E, F body útvaru, ktoré ho určujú. Body útvaru ležiace na osi afinity sú samodružné.

Pri riešení úlohy je možné postupovať rôznymi spôsobmi. Jednou z možností je využitie systému priamok kolmých na os afinity. Najprv zostrojíme obraz jednej takejto priamky:

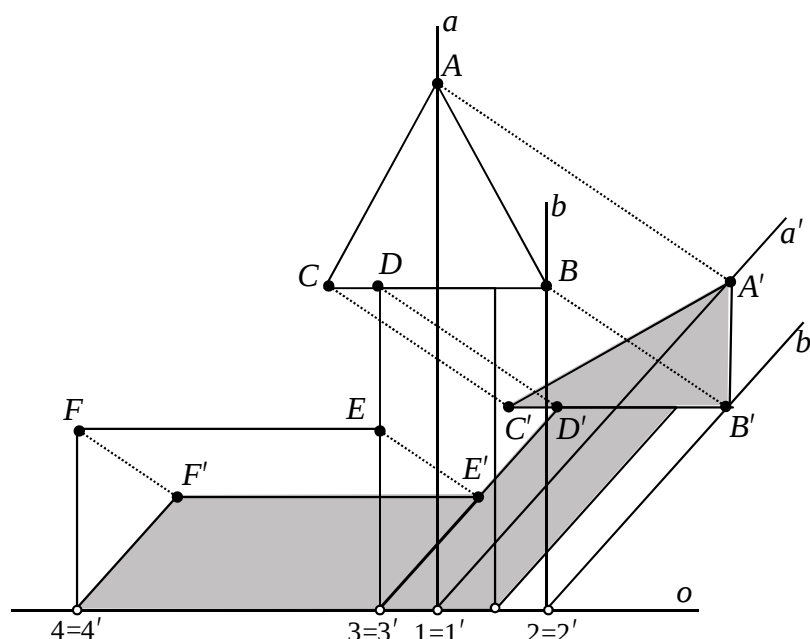
1. $a; A \in a \wedge a \perp o$
2. $1; \{1\} = a \cap o, 1 = 1'$
3. $a'; a' = 1'A'$.



Obr. 3.4.7a

Postupne sme zobrazili jednotlivé body a strany útvaru, pričom sme využili:

- a) Obrazy priamok kolmých na os afinity sú priamky rovnobežné s priamkou a' .
- b) Obrazy priamok rovnobežných s osou afinity sú priamky rovnobežné s osou afinity.
- c) Priamky spájajúce bod a jeho obraz sú rovnobežné so smerom afinity AA' .



Obr. 3.4.7b

3.5 Obraz kružnice v perspektívnej afinite

V tejto časti zostrojíme obraz kružnice v perspektívnej afinite a uvedieme konštrukcie bodov elipsy a jej dotyčníc, pričom využijeme vlastnosti perspektívnej afinity.

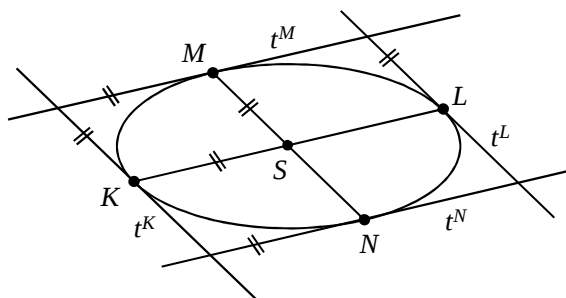
Veta 3.5.1: Obraz kružnice v perspektívnej afinite je elipsa alebo kružnica.

Poznámka: Ak je afinita zhodnosť, alebo osová súmernosť, tak obrazom kružnice v tejto afinite je kružnica.

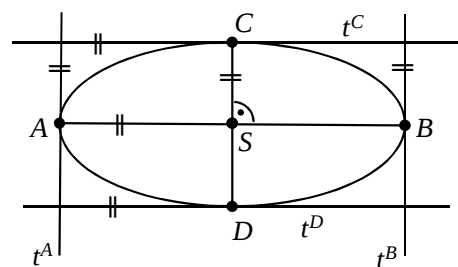
Definícia 3.5.1: Priemer elipsy je úsečka, ktorá obsahuje stred elipsy a jej krajné body ležia na elipse.

Veta 3.5.2: Nech sa kružnica k zobrazí v perspektívnej afinite do elipsy k' . Obraz stredu kružnice k je stred elipsy k' , obraz priemeru kružnice k je priemer elipsy k' , obraz dotyčnice kružnice k je dotyčnica elipsy k' .

Definícia 3.5.2: Dva priemery KL , MN elipsy sa nazývajú **združené priemery elipsy**, ak dotyčnice elipsy v krajných bodoch jedného priemeru sú rovnobežné s druhým priemerom (Obr. 3.5.1a).



Obr. 3.5.1a



Obr. 3.5.1b

Poznámka: Nech A , B , C , D sú vrcholy elipsy (Obr. 3.5.1b). Priemery AB , CD sú združené priemery elipsy, sú to jediné združené priemery elipsy, ktoré sú navzájom kolmé.

V perspektívnej afinite sa zachováva incidencia útvarov a rovnobežnosť priamok, ale nezachovávajú sa uhly medzi priamkami, preto platí:

Veta 3.5.3: Nech sa kružnica k zobrazí v perspektívnej afinite do elipsy k' . Obrazy ľubovoľných dvoch navzájom kolmých priemerov kružnice k sú združené priemery elipsy k' .

Úloha 3.5.1: Daná je kružnica $k(S; r)$ a perspektívna afinita s osou o a dvojicou (R, R') (Obr. 3.5.2a). Zostrojte obraz kružnice k v danej afinite.

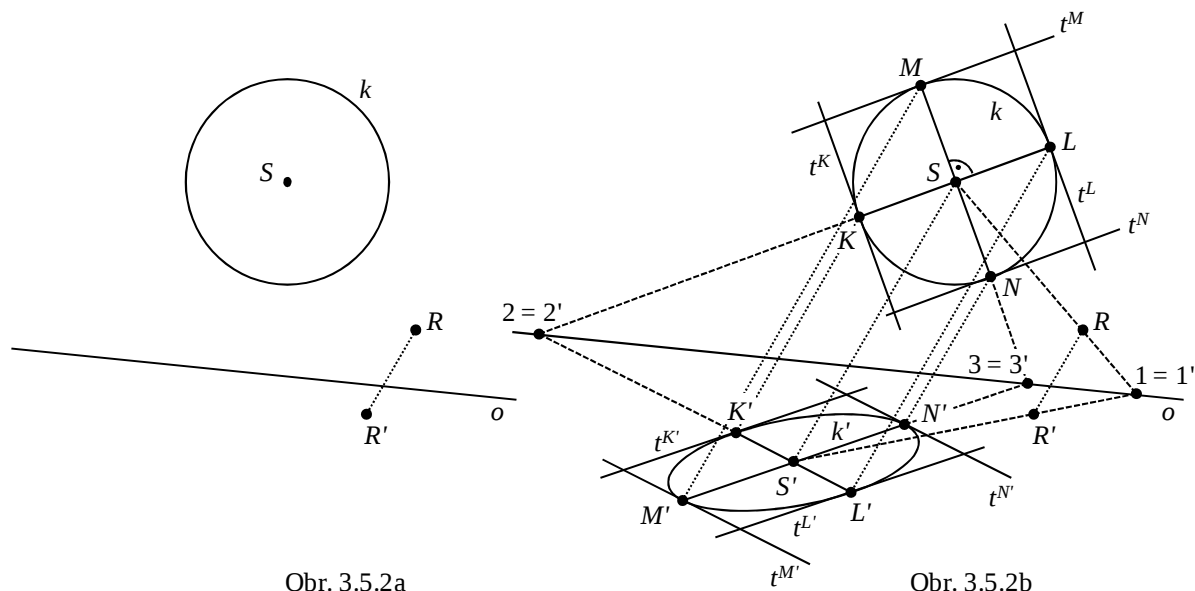
Riešenie:

Obraz kružnice k v danej afinite je elipsa k' . Každý priemer kružnice k sa zobrazí do priemeru elipsy k' . V afinite sa nezachováva uhol medzi priamkami, takže ľubovoľné dva navzájom kolmé priemery KL , MN kružnice k sa nemusia zobraziť do kolmých priemerov elipsy k' , ale zobrazia sa do združených priemerov $K'L'$, $M'N'$ elipsy k' (veta 3.5.3).

Postup (Obr. 3.5.2b):

1. V afinite zobrazíme stred S kružnice k , ktorý sa zobrazí do stredu S' elipsy k' .
2. Zvolíme si ľubovoľné dva navzájom kolmé priemery $KL \perp MN$ kružnice k .
3. V afinite zobrazíme priemery KL a MN .

4. Zostrojíme dotyčnice kružnice k v bodoch K, L, M a N . Tieto dotyčnice sa zobrazia do dotyčníc elipsy k' v bodoch K', L', M' a N' . V afinite sa zachováva rovnobežnosť priamok a preto ak $t^K \parallel MN$, tak $t^{K'} \parallel M'N'$. Analogicky zobrazíme ostatné dotyčnice.
5. Elipsa k' je určená združenými priermi $K'L', M'N'$.



Obr. 3.5.2a

Obr. 3.5.2b

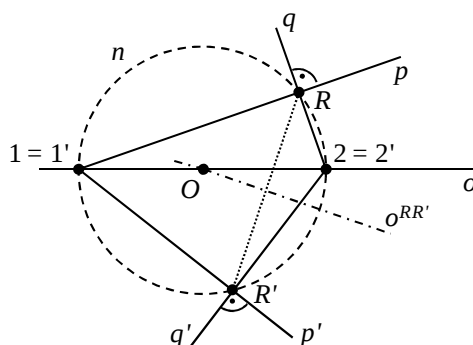
Poznámka: Ak nie sú požiadavky na presnosť rysovania veľké, elipsu k' načrtne tak, aby prechádzala bodmi K', L', M', N' a dotýkala sa zostrojených dotyčníc v týchto bodoch. Na presnejšiu konštrukciu elipsy, ktorá je určená združenými priermi, môžeme použiť Rytzovu konštrukciu, priechkovú konštrukciu, alebo konštrukciu 8 bodov a 8 dotyčníc elipsy. Uvedieme ich v ďalšej časti tejto kapitoly.

Definícia 3.5.3: Dve navzájom kolmé osnvy priamok, ktorých obrazy v perspektívnej afinite sú navzájom kolmé osnvy priamok, sa nazývajú **hlavné smery** tejto **afinity**.

Poznámka: Osnova priamok je množina všetkých navzájom rovnobežných priamok.

Poznámka: Nech je perspektívna afinita určená osou o a dvojicou (R, R') .

- Ak je afinita kolmá a nie je to osová súmernosť, tak do hlavných smerov patria priamky o a RR' . To znamená, že iba také navzájom kolmé priamky $p \perp q$, kde $p \parallel o$ a $q \parallel RR'$, sa zobrazia do navzájom kolmých priamok $p' \perp q'$ (pozri úlohu 3.5.3).
- Ak je afinita osová súmernosť, tak do hlavných smerov patrí nekonečne veľa priamok, t. j. v osovej súmernosti sa každé dve navzájom kolmé priamky zobrazia do navzájom kolmých priamok.
- Ak afinita nie je kolmá, tak existuje jedna dvojica navzájom kolmých osnvy priamok, ktorá sa zobrazí do navzájom kolmých osnvy priamok. Nech priamky p, q patria do hlavných smerov afinity a prechádzajú ľubovoľným bodom R (Obr. 3.5.3). Nech body 1 a 2 sú samodružné body týchto priamok. Platí: $|\angle(1R2)| = |\angle(1R'2)| = 90^\circ$, t. j. priamky $1R$ a $2R$ sú navzájom kolmé a priamky $1R'$ a $2R'$ sú navzájom kolmé. To znamená, že body R, R' ležia na kružnici n , ktorej stred O leží na osi o a na osi $o^{RR'}$ úsečky RR' . Kružnica n pretína os o v bodoch 1 a 2. Je to Talesova kružnica nad priemerom 12. Pozri aj úlohu 3.5.2.



Obr. 3.5.3

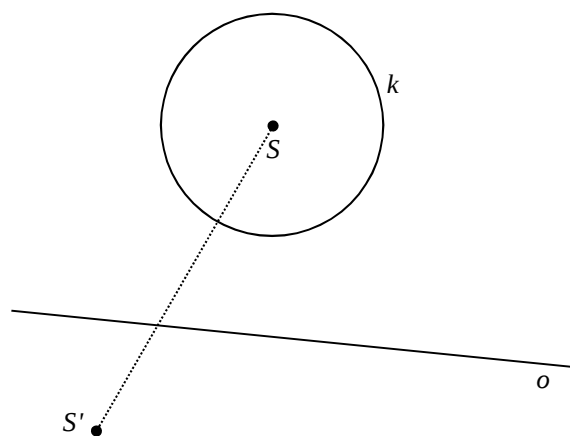
Úloha 3.5.2: Daná je kružnica $k(S; r)$ a perspektívna afinita s osou o a dvojicou (S, S') (Obr. 3.5.4a). Zostrojte obraz kružnice k v danej afinite. Nájdite také dva navzájom kolmé priemery kružnice, ktoré sa zobrazia do kolmých združených priemerov elipsy, t. j. do hlavnej a vedľajšej osi elipsy.

Riešenie:

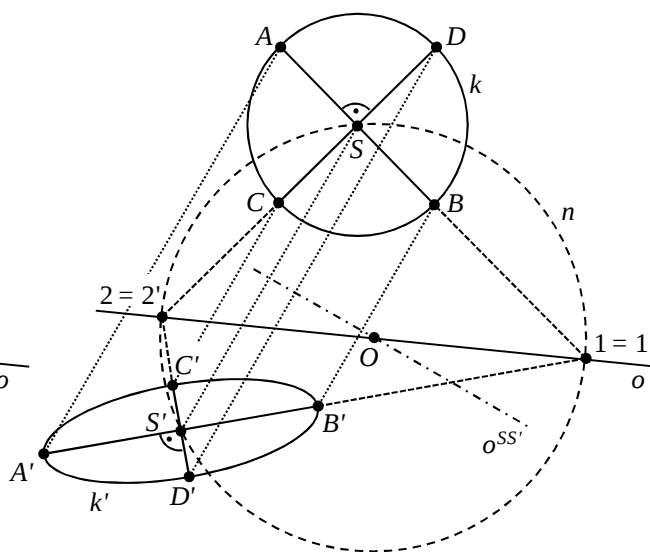
Hľadáme dva navzájom kolmé priemery AB, CD kružnice k , ktoré sa zobrazia do kolmých združených priemerov $A'B', C'D'$ elipsy k' . Priemery AB, CD patria do hlavných smerov danej afinity (pozri Obr. 3.5.3).

Postup (Obr. 3.5.4b):

1. Zostrojíme os $o^{SS'}$ úsečky SS' .
2. $O: o \cap o^{SS'} = \{O\}$.
3. $n: n(O; r = |OS| = |OS'|)$.
4. $1, 2: n \cap o = \{1, 2\}$. Platí: $1 = 1', 2 = 2'$.
5. $A, B, C, D: 1S \cap k = \{A, B\}, 2S \cap k = \{C, D\}$. Platí: $AB \perp CD$.
6. V afinite zobrazíme priemery AB a CD . Platí: $A'B' \perp C'D'$.
7. Elipsa k' je určená vrcholmi A', B', C' a D' . Vo vrcholoch elipsy môžeme zostrojiť oskulačné kružnice (pozri úlohu 1.1.2).



Obr. 3.5.4a



Obr. 3.5.4b

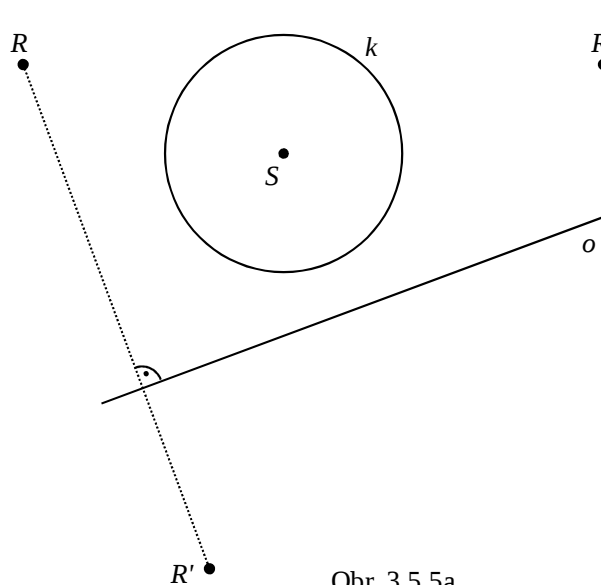
Úloha 3.5.3: Daná je kružnica $k(S; r)$ a kolmá perspektívna afinita s osou o a dvojicou (R, R') (Obr. 3.5.5a). Zostrojte obraz kružnice k v danej afinite.

Riešenie:

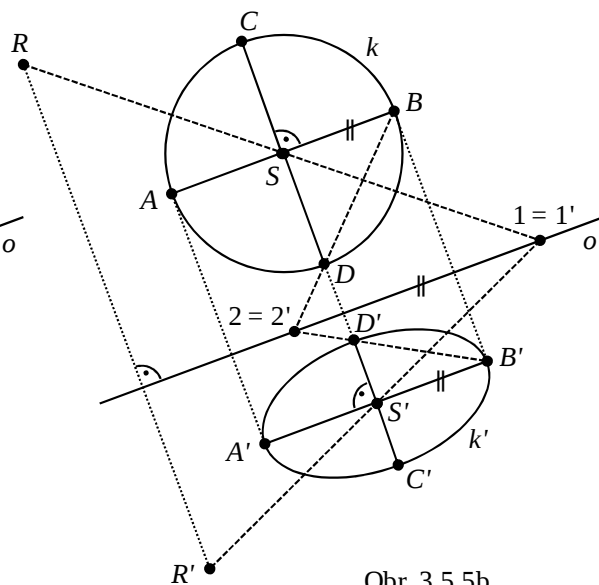
Daná kolmá afinita nie je ani zhodnosť ani osová súmernosť, preto obraz kružnice k je elipsa k' . Existuje jedna dvojica navzájom kolmých priemerov AB, CD kružnice k , ktorá sa zobrazí do navzájom kolmých priemerov $A'B', C'D'$ elipsy k' , t. j. do osí elipsy k' . Keďže daná afinita je kolmá, tak jeden hľadaný priemer kružnice k je rovnobežný s osou afinity a druhý priemer je kolmý na os afinity.

Postup (Obr. 3.5.5b):

1. V afinite zobrazíme stred S kružnice k , ktorý sa zobrazí do stredu S' elipsy k' .
2. Zobrazíme priemer kružnice $AB \parallel o$. Platí: $AB \parallel o \Rightarrow A'B' \parallel o$.
3. Zobrazíme priemer kružnice $CD \perp o$. Platí: $CD \perp o \Rightarrow C'D' \perp o$.
4. Elipsa k' je určená hlavnými vrcholmi A', B' a vedľajšími vrcholmi C', D' . Vo vrcholoch elipsy môžeme zostrojiť oskulačné kružnice (pozri úlohu 1.1.2).



Obr. 3.5.5a

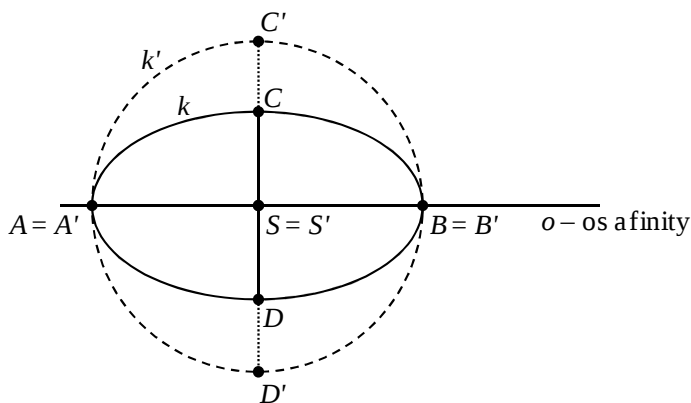


Obr. 3.5.5b

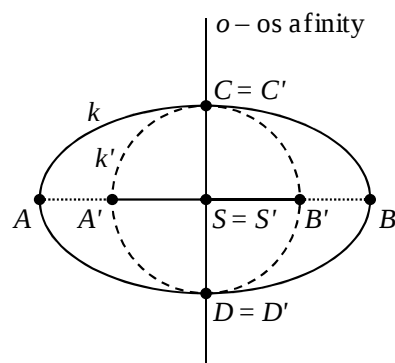
V ďalšej časti uvedieme niekoľko konštrukcií elipsy a jej dotyčníc. Pri riešení úloh budeme používať afinitu medzi kružnicou a elipsou. Vhodne zvolíme afinitu tak, aby sa elipsa zobrazila do kružnice. To môžeme urobiť viacerými spôsobmi, pričom za os afinity môžeme zvoliť ľubovoľnú priamku roviny elipsy, napr. priemer elipsy, alebo dotyčnicu elipsy. Ak os afinity zvolíme vhodne, riešenie úloh sa veľmi zjednoduší.

Dve najjednoduchšie afinity, ktoré zobrazia elipsu k so stredom S a vrcholmi A, B, C, D do kružnice k' sú:

1. $k \rightarrow k'(S; r = |SA|)$. Afinita je určená osou $o = AB$ a dvojicou (C, C') , kde $\{C'\} = SC \cap k'$. Je to kolmá afinita (pozri Obr. 3.5.6a).
2. $k \rightarrow k'(S; r = |SC|)$. Afinita je určená osou $o = CD$ a dvojicou (A, A') , kde $\{A'\} = SA \cap k'$. Je to kolmá afinita (pozri Obr. 3.5.6b).



Obr. 3.5.6a



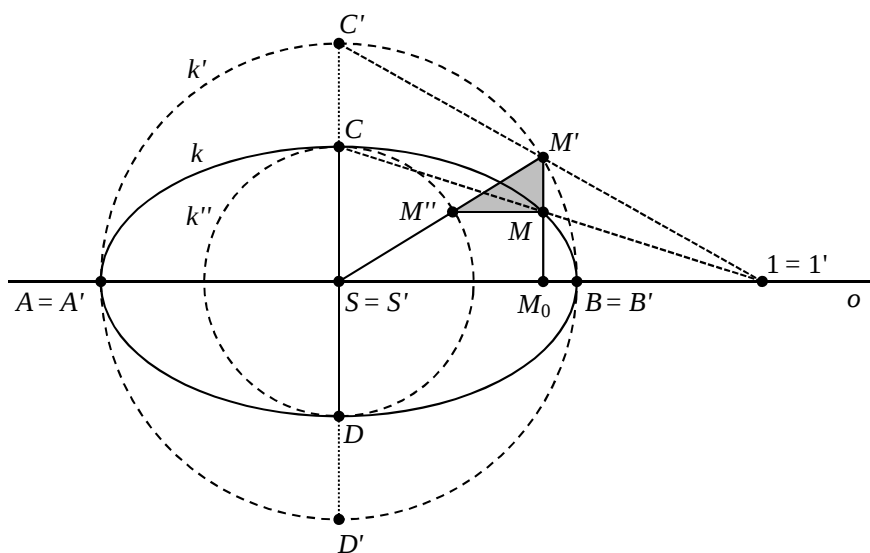
Obr. 3.5.6b

Trojuhelníková (zástavková) bodová konštrukcia elipsy:

Úloha 3.5.4: Dané sú vrcholy A , B , C a D elipsy (Obr. 3.5.7b). Zostrojte niekoľko bodov elipsy.

Riešenie:

Pri riešení úlohy využijeme kolmú afinitu medzi elipsou k a kružnicou k' , Obr. 3.5.6a. Elipsa k so stredom S sa zobrazí do kružnice $k'(S; r = |SA|)$. Táto afinita je určená osou $o = AB$ a dvojicou (C, C') , kde $\{C'\} = SC \cap k'$. Na Obr. 3.5.7a sa ľubovoľný bod M elipsy k zobrazí do bodu M' kružnice k' . Nech $\{M_0\} = MM' \cap o$, a je dĺžka hlavnej polosi a b je dĺžka vedľajšej polosi elipsy k . Pre deliace pomery bodov platí: $(M, M'; M_0) = (C, C'; S) = b/a$. Vyplyva to z podobnosti trojuholníkov MM_01 , $CS1$ a trojuholníkov $M'M_01$, $C'S1$. Zostrojíme kružnicu $k''(S; r = |SC|)$ a bod $\{M''\} = SM' \cap k''$. Platí: $(M'', M'; S) = (C, C'; S)$, teda $(M'', M'; S) = (M, M'; M_0)$. Posledná rovnosť platí práve vtedy, keď $M''M \parallel SM_0$. Z toho vyplýva tzv. trojuhelníková bodová konštrukcia elipsy.

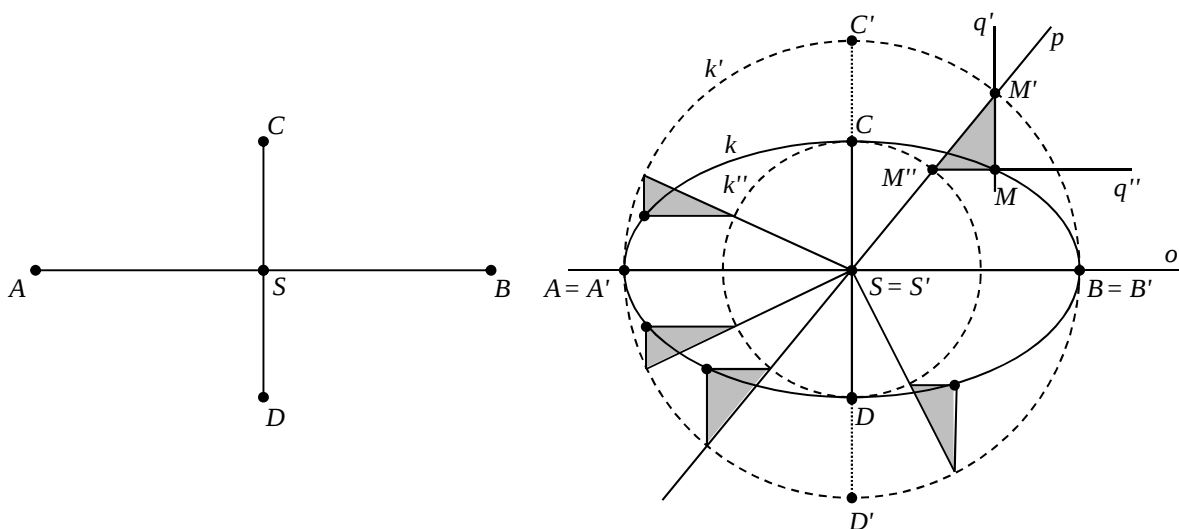


Obr. 3.5.7a

Postup (Obr. 3.5.7c):

1. $k': k'(S; r = |SA|)$.
2. $k'': k''(S; r = |SC|)$.

3. $p: S \in p$, inak je priamka p ľubovoľná.
4. $M': p \cap k' = \{M'\}$.
 $M'': p \cap k'' = \{M''\}$.
5. $q': M' \in q' \wedge q' \parallel SC$.
 $q'': M'' \in q'' \wedge q'' \parallel SA$.
6. $M: q' \cap q'' = \{M\}$, M je bod elipsy k .
7. Podobne zostrojíme ďalšie body elipsy k .



Obr. 3.5.7b

Obr. 3.5.7c

Poznámka: Ak je elipsa určená vrcholmi, tak trojuholníkovú konštrukciu môžeme použiť na zostrojenie bodov elipsy a spolu s oskulačnými kružnicami vo vrcholoch elipsy nakresliť elipsu presnejšie.

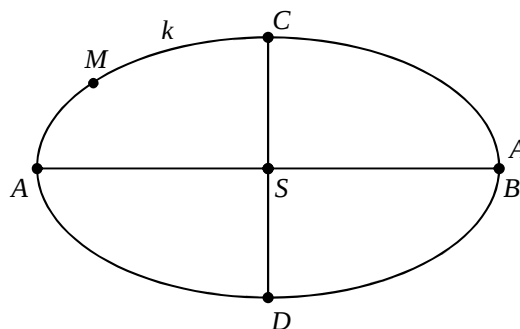
Úloha 3.5.5: Daná je elipsa. Bod S je stred elipsy, body A, B, C a D sú vrcholy elipsy, M je bod elipsy (Obr. 3.5.8a). Zostrojte 6-uholník $MNOPQR$ so stredom S , ktorý je vpísaný do elipsy a jeho protiľahlé strany sú navzájom rovnobežné.

Riešenie:

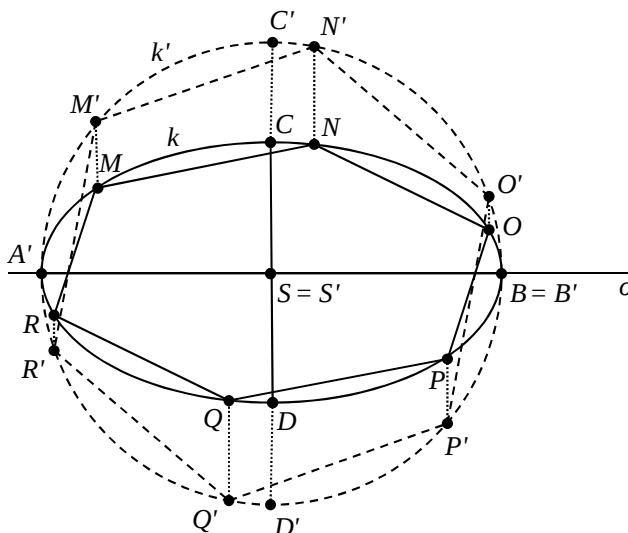
Vpísať požadovaný 6-uholník do kružnice je jednoduchá úloha. Je to pravidelný 6-uholník. Preto elipsu k afinitou zobrazíme do kružnice k' . Zvolíme napr. kolmú afinitu z Obr. 3.5.6a. Bod $M \in k$ sa zobrazí do bodu $M' \in k'$. Do kružnice k' vpíšeme pravidelný 6-uholník $M'N'O'P'Q'R'$ a jeho vrcholy afinitou zobrazíme na elipsu k .

Postup (Obr. 3.5.8b):

1. Zvolíme afinitu, ktorá zobrazí elipsu k do kružnice k' : $k \rightarrow k'(S; r = |SA|)$.
 Afinita je určená osou $o = AB$, $C \rightarrow C'$, kde $\{C'\} = SC \cap k'$ a body C, C' ležia v tej istej polrovine vzhľadom na os o .
2. V afinite zobrazíme bod $M \rightarrow M'$. Platí: $MM' \parallel CC' \wedge M' \in k'$.
3. Do kružnice k' vpíšeme pravidelný 6-uholník $M'N'O'P'Q'R'$.
4. V afinite zobrazíme bod $N' \rightarrow N$. Platí: $NN' \parallel CC' \wedge N \in k$.
5. Podobne zobrazíme ostatné vrcholy 6-uholníka.



Obr. 3.5.8a



Obr. 3.5.8b

Úloha 3.5.6: Dané sú vrcholy A, B, C a D elipsy a bod $R \in CD$ (Obr. 3.5.9a). Zostrojte dotyčnice elipsy prechádzajúce bodom R . Úlohu vyriešte pomocou afinity medzi elipsou a kružnicou.

Riešenie:

Ak bod R je vnútorný bod úsečky CD , tak úloha nemá riešenie. Ak je bod R totožný s bodom C alebo D , tak úloha má jedno riešenie a dotyčnica $t^R \parallel AB$. Ak bod R je vonkajší bod úsečky CD , tak úloha má 2 riešenia, čo je podľa Obr. 3.5.9a náš prípad.

Elipsu k afinitou zobrazíme do kružnice k' . Zvolíme kolmú afinitu z Obr. 3.5.6b s osou $o = CD$. Bod $R \in CD$ je samodružný bod, t. j. $R = R'$. Zostrojíme dotyčnice kružnice k' z bodu $R = R'$ a ich dotykové body. Dotyčnice kružnice k' aj s dotykovými bodmi afinity zobrazíme do dotyčníc elipsy k .

Postup (Obr. 3.5.9b):

1. Zvolíme afinitu, ktorá zobrazí elipsu k do kružnice k' : $k \rightarrow k'(S; r = |SC|)$.

Afinita je určená osou $o = CD$, $A \rightarrow A'$, kde $\{A'\} = SA \cap k'$ a body A, A' ležia v tej istej polrovine vzhľadom na os o .

2. R' : $R = R'$.

3. Zostrojíme dotyčnice ${}^1t', {}^2t'$ kružnice k' z bodu $R = R'$:

O : O je stred úsečky SR' .

n : $n(O; r = |OS| = |OR'|)$.

${}^1T', {}^2T'$: $n \cap k' = \{{}^1T', {}^2T'\}$. Body ${}^1T', {}^2T'$ sú dotykové body dotyčníc kružnice k' .

${}^1t'$: ${}^1t' = {}^1T'R'$.

${}^2t'$: ${}^2t' = {}^2T'R'$.

4. V afinite zobrazíme dotykové body ${}^1T', {}^2T'$:

${}^1T' \rightarrow {}^1T, {}^2T' \rightarrow {}^2T$.

5. Zostrojíme dotyčnice ${}^1t, {}^2t$ elipsy k z bodu R :

1t : ${}^1t = {}^1TR$,

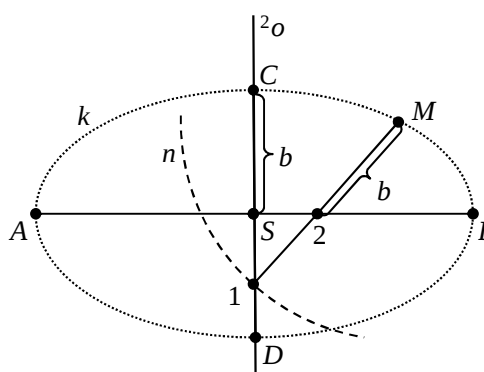
2t : ${}^2t = {}^2TR$.

Postup (Obr. 3.5.10c):

1. 2o : 2o je os úsečky AB .
2. S : $AB \cap {}^2o = \{S\}$.
3. n : $n(M; r = |SA| = a)$.
4. 1: $n \cap {}^2o = \{1\}$.
5. 2: $M1 \cap AB = \{2\}$.
6. $|M2| = b$.
7. C, D : $\{C, D\} \in {}^2o \wedge |SC| = |SD| = b$.



Obr. 3.5.10b



Obr. 3.5.10c

Poznámka: Nech a je dĺžka hlavnej polosi elipsy k , b je dĺžka vedľajšej polosi elipsy k , $|M1| = a$ a $|M2| = b$. Ak sa úsečka $M1$ s vnútorným bodom 2 pohybuje tak, že sa bod 1 pohybuje po priamke CD a bod 2 po priamke AB , tak sa bod M pohybuje po elipse k . Preto túto konštrukciu nazývame „prúžková“ bodová konštrukcia elipsy, t. j. môžeme ju vykonať pomocou prúžku papiera s vyznačenými bodmi 1, 2, M .

Rytzova konštrukcia osí elipsy:

Úloha 3.5.8: Dané sú združené priemery KL , MN elipsy (Obr. 3.5.11b). Zostrojte vrcholy elipsy.

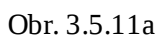
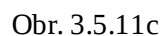
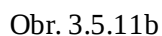
Riešenie (Obr. 3.5.11a):

Pri riešení úlohy využijeme kolmú afinitu, ktorá zobrazí elipsu k so stredom S do kružnice $k'(S; r = |SA|)$. Afinity je určená osou $o = AB$ a dvojicou (C, C') , kde $\{C'\} = SC \cap k'$. Ľubovoľné dva navzájom kolmé priemery $K'L'$, $M'N'$ kružnice k' sa v tejto afinitě zobrazia do združených priemerov KL , MN elipsy k . Na Obr. 3.5.11a sme ich zostrojili trojuholníkovou konštrukciou (pozri úlohu 3.5.4). Nájdeme vzťah medzi združenými priermi KL , MN elipsy k a osami AB , CD elipsy k .

Trojuholník $K'KK''$ otočíme okolo bodu S o 90° . Bod K' sa otočí do bodu N' , bod K'' do bodu N'' a bod K do bodu K_o . Keďže trojuholníky $K'KK''$, $N''NN'$ sú zhodné, tak $K_oN''NN'$ je obdĺžnik so stredom O . Priamka NK_o pretína osi elipsy k v bodoch 1 a 2. Platí:

$$\begin{aligned} |1N| &= |SN''| = b = |2K_o|, \\ |1K_o| &= |SN'| = a = |2N|, \end{aligned}$$

kde a je dĺžka hlavnej polosi elipsy k , b je dĺžka vedľajšej polosi elipsy k . Navyše $|1O| = |2O|$ a $\angle(1S2) = 90^\circ$, t. j. bod O je stred kružnice n s priemerom 12, ktorá inciduje s bodom S .


$$C, D: \{C, D\} \in {}^2O \wedge |SC| = |SD| = b.$$


63

Priečková bodová konštrukcia elipsy:

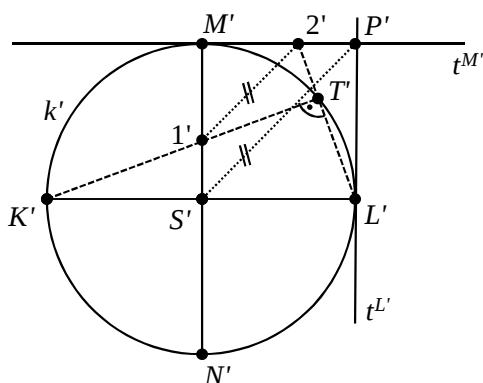
Úloha 3.5.9: Dané sú združené priemery KL , MN elipsy (Obr. 3.5.12c). Zostrojte časť elipsy medzi bodmi M a L .

Riešenie:

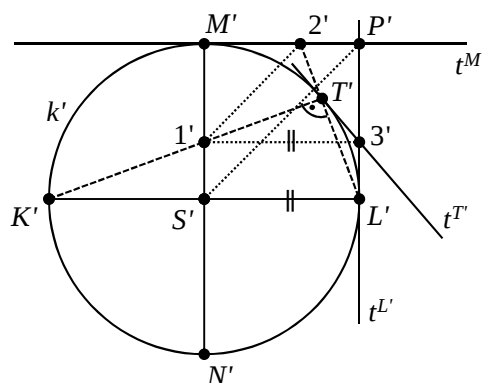
Uvedieme bodovú konštrukciu kružnice k' , ktorá sa zachová v ľubovoľnej afinite, t. j. bude platná aj pre konštrukciu bodov elipsy k . Konštrukcia bude založená na delení úsečky a na rovnobežnosti priamok. V afinite sa zachováva incidencia útvarov, deliaci pomer bodov na priamke aj rovnobežnosť priamok.

Nech $K'L'$, $M'N'$ sú dva navzájom kolmé priemery kružnice k' a bod P' je priesečník dotýčnic kružnice k' v bodoch M' a L' , Obr. 3.5.12a. Označíme ľubovoľný vnútorný bod priemeru $M'N'$ ako bod $1'$ a zostrojíme bod $2' \in M'P'$ tak, aby $1'2' \parallel S'P'$. Pravouhlé trojuholníky $1'S'K'$ a $2'P'L'$ sú zhodné. Navyše ich dve dvojice strán sú navzájom kolmé: $K'S' \perp L'P'$ a $S'1' \perp P'2'$. Z toho vyplýva, že aj tretia dvojica strán $K'1'$ a $L'2'$ sú navzájom kolmé priamky. Pre ich priesečník, bod $\{T'\} = K'1' \cap L'2'$ teda platí: $\angle(K'T'L') = 90^\circ$. To znamená, že bod T' je bod kružnice k' . Z uvedenej konštrukcie tiež vyplýva, že $(S', M'; 1') = (P', M'; 2')$, čo môžeme využiť pri konštrukcii viacerých bodov elipsy k .

Nech bod $3'$ je vrchol obdĺžnika $1'S'L'3'$, Obr. 3.5.12b. Body L' a T' sú súmerne združené podľa priamky $S'3'$ (lebo $K'1' \parallel S'3' \Rightarrow S'3' \perp T'L'$, $|S'L'| = |S'T'|$ a body L' , T' ležia v opačných polrovinách vzhľadom na priamku $S'3'$). Preto $\angle(S'T'3') = \angle(S'L'3') = 90^\circ$, t. j. priamka $T'3'$ je dotýčnica kružnice k' v bode T' .



Obr. 3.5.12a



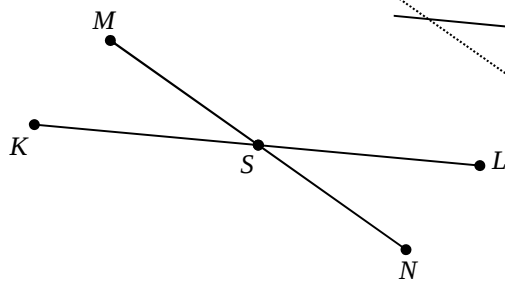
Obr. 3.5.12b

Postup (Obr. 3.5.12d):

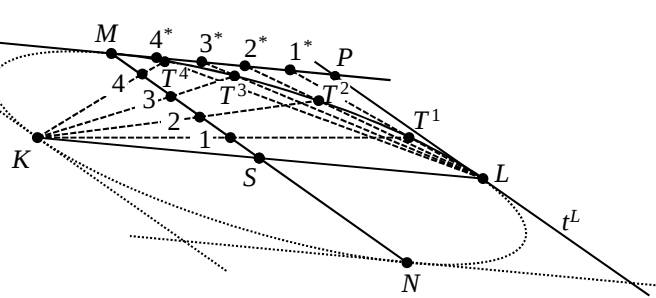
1. Zostrojíme dotýčnice t^M a t^L elipsy k v krajných bodoch M a L združených priemerov KL , MN .
2. $P: t^M \cap t^L = \{P\}$.
3. Polpriemer SM rozdelíme na zhodné časti, ich počet závisí od požiadaviek na presnosť rysovania. Ak chceme zostrojiť napr. 4 body elipsy, tak polpriemer SM rozdelíme na 5 častí. Deliace body označíme 1, 2, 3 a 4.
4. Úsečku PM rozdelíme na zhodné časti, ich počet je rovnaký ako pri delení úsečky SM . Deliace body označíme 1^* , 2^* , 3^* a 4^* (poradie pozri na Obr. 3.5.12d).
5. Zostrojíme body T^1 , T^2 , T^3 , T^4 elipsy k :

$$K1 \cap L1^* = \{T^1\},$$

$$\begin{aligned} K2 \cap L2^* &= \{T^2\}, \\ K3 \cap L3^* &= \{T^3\}, \\ K4 \cap L4^* &= \{T^4\}. \end{aligned}$$



Obr. 3.5.12c

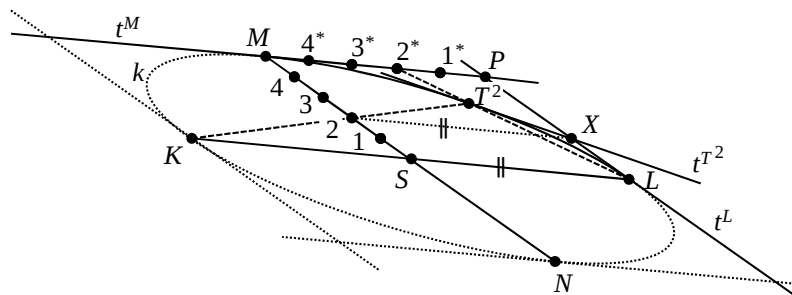


Obr. 3.5.12d

Ešte zostrojíme dotyčnicu elipsy k v jednom bode, v bode T^2 , Obr. 3.5.12e.

1. $X: X \in LP \wedge 2X \parallel KL$.

2. Dotyčnica elipsy k v bode T^2 je priamka XT^2 .



Obr. 3.5.12e

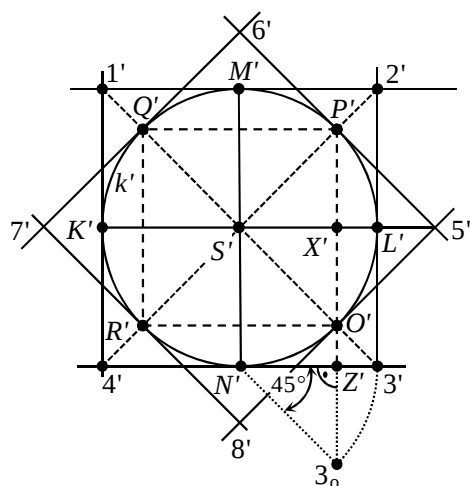
Poznámka: Priečková bodová konštrukcia elipsy sa používa hlavne vtedy, keď nepotrebujeme nakresliť celú elipsu, ale iba oblúk elipsy.

Konštrukcia 8 bodov a 8 dotyčníc elipsy:

Úloha 3.5.10: Dané sú združené priemery KL , MN elipsy (Obr. 3.5.13b). Zostrojte 8 bodov a 8 dotyčníc elipsy.

Riešenie (Obr. 3.5.13a):

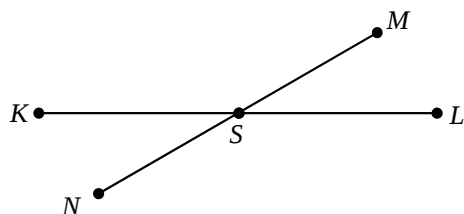
Najprv zostrojíme 8 bodov a 8 dotyčníc kružnice k' a vyjadríme ich vlastnosti, ktoré sa zachovávajú v ľubovoľnej afinite, t. j. konštrukcia bude platná aj pre body a dotyčnice elipsy k . Nech $K'L'$, $M'N'$ sú dva navzájom kolmé priemery kružnice k' . Zostrojíme dotyčnice kružnice k' v týchto bodoch a ich priesečníky označíme $1'$, $2'$, $3'$ a $4'$. $1'2'3'4'$ je štvorec opísaný kružnici k' . Body kružnice k' na priamkach $1'3'$ a $2'4'$ označíme O' , P' , Q' a R' , je to druhá dvojica navzájom kolmých priemerov kružnice k' . Zostrojíme dotyčnice kružnice k' aj v týchto bodoch a ich priesečníky označíme $5'$, $6'$, $7'$ a $8'$. $5'6'7'8'$ je druhý štvorec opísaný kružnici k' . Nech $\{Z'\} = O'P' \cap N'3'$ a $\{X'\} = O'P' \cap S'L'$. Z pravouhlého trojuholníka $S'X'O'$ vyplýva $\cos(\angle(X'S'O')) = \cos(45^\circ) = |S'X'| : |S'O'| = \sqrt{2} : 2$. Potom platí aj $|S'X'| : |S'L'| = |N'Z'| : |N'3'| = \sqrt{2} : 2$. Kvôli prehľadnosti rysovania zostrojíme trojuholník $N'Z'3'$, zhodný s trojuholníkom $S'X'O'$, ktorý tiež má uvedené pomery dĺžok strán. Navyše platí: $|S'X'| = |X'5'|$.



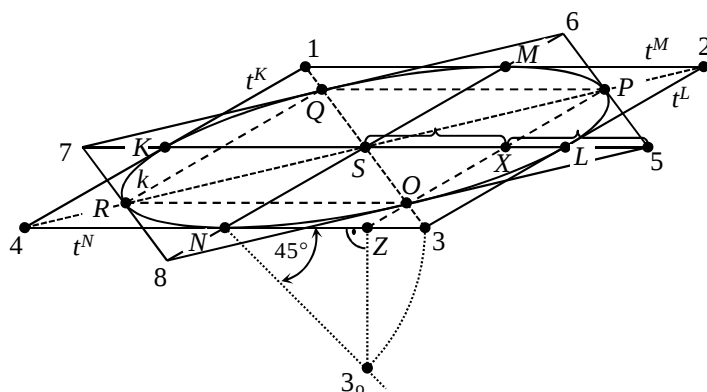
Obr. 3.5.13a

Postup (Obr. 3.5.13c):

1. Zostrojíme dotyčnice elipsy k v krajných bodoch združených priemerov KL , MN . Ich priesečníky označíme 1, 2, 3 a 4. 1234 je rovnobežník opísaný elipse k .
2. Zostrojíme bod $Z \in N3$, pričom $|NZ| : |N3| = \sqrt{2} : 2$. Bod 3 otočíme okolo bodu N o 45° do bodu 3_0 . Z bodu 3_0 zostrojíme kolmicu na priamku $N3$ a ich priesečník označíme Z .
3. Na priamkach 13 a 24 zostrojíme body O , P , Q a R elipsy k :
 $O, P: O \in 13 \wedge P \in 24 \wedge Z \in OP \wedge OP \parallel MN$.
 $Q, R: Q \in 13 \wedge R \in 24 \wedge PQ \parallel KL \parallel OR$.
4. Priemery OQ , PR sú združené priemery elipsy k . Zostrojíme dotyčnice elipsy k v krajných bodoch združených priemerov OQ , PR . Ich priesečníky označíme 5, 6, 7 a 8. 5678 je druhý rovnobežník opísaný elipse k .
5. Dotyčnice elipsy k v bodoch O , P , Q a R môžeme zostrojiť aj iným spôsobom:
 $X: SL \cap OP = \{X\}$,
5: $5 \in KL \wedge X$ je stred úsečky $S5$,
6: $P5 \cap MN = \{6\}$,
7: $Q6 \cap KL = \{7\}$,
8: $R7 \cap MN = \{8\} = O5 \cap MN$.
Priamky $O5$, $P5$, $Q6$ a $R7$ sú dotyčnice elipsy k v bodoch O , P , Q a R .



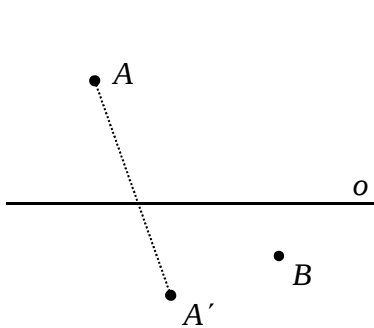
Obr. 3.5.13b



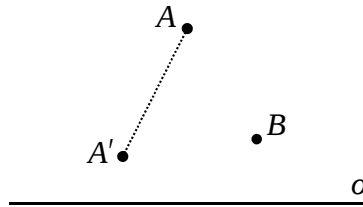
Obr. 3.5.13c

Cvičenia

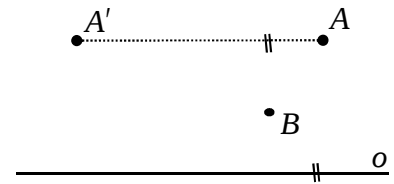
1. Perspektívna afinita v rovine je daná osou o a dvojicou (A, A') . V tejto perspektívnej afinite zostrojte obraz bodu B (Obr. 1a, b, c).



Obr. 1a

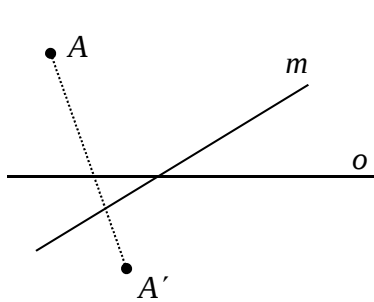


Obr. 1b

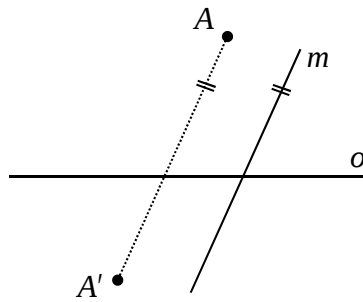


Obr. 1c

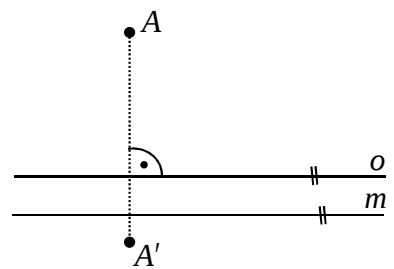
2. Perspektívna afinita v rovine je daná osou o a dvojicou (A, A') . V tejto perspektívnej afinite zostrojte obraz priamky m (Obr. 2a, b, c).



Obr. 2a

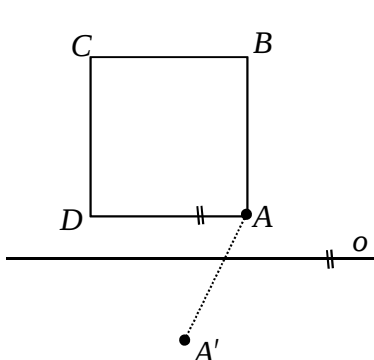


Obr. 2b

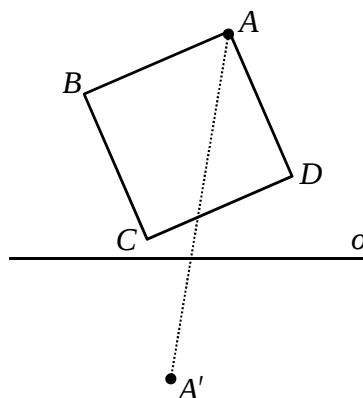


Obr. 2c

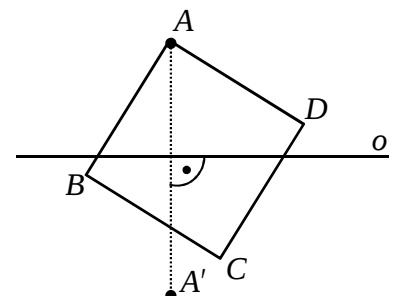
3. Perspektívna afinita v rovine je daná osou o a dvojicou (A, A') . V tejto perspektívnej afinite zostrojte obraz štvorca $ABCD$ (Obr. 3a, b, c).



Obr. 3a

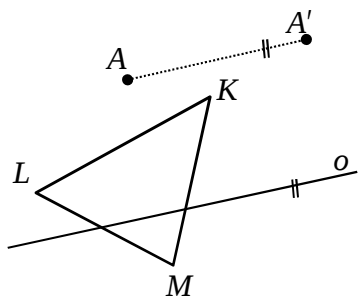


Obr. 3b

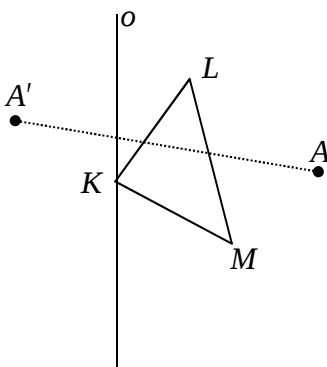


Obr. 3c

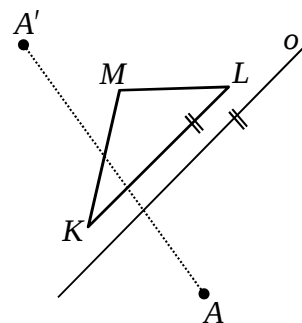
4. Perspektívna afinita v rovine je daná osou o a dvojicou (A, A') . V tejto perspektívnej afinite zostrojte obraz trojuholníka KLM (Obr. 4a, b, c).



Obr. 4a

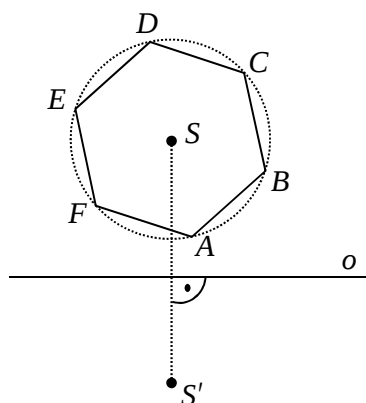


Obr. 4b

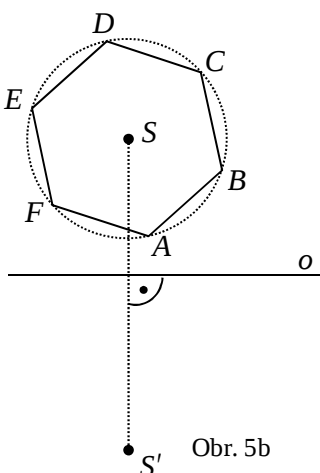


Obr. 4c

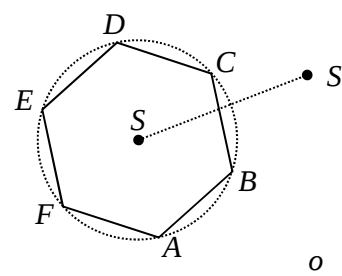
5. Perspektívna afinita v rovine je daná osou o a dvojicou (S, S') . V tejto perspektívnej afinite zostrojte obraz pravidelného 6-uholníka $ABCDEF$ (Obr. 5a, b, c). Na Obr. 5a platí $|S, o| > |S', o|$ a na obr. 5b platí $|S, o| < |S', o|$.



Obr. 5a

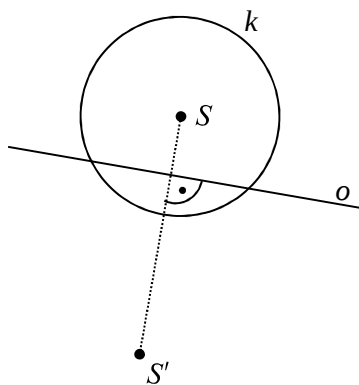


Obr. 5b

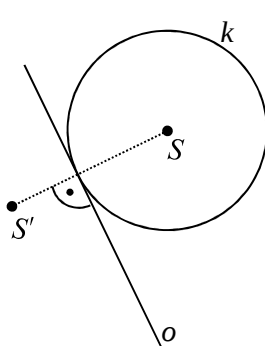


Obr. 5c

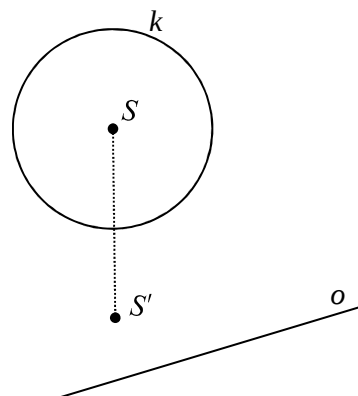
6. Perspektívna afinita v rovine je daná osou o a dvojicou (S, S') . Zostrojte obraz kružnice k v tejto perspektívnej afinite (Obr. 6a, b, c).



Obr. 6a



Obr. 6b



Obr. 6c

4 MONGEOVA PROJEKCIA 1. časť

Jeden z cieľov deskriptívnej geometrie je zobrazenie priestorových objektov do roviny a to tak, aby obraz objektu bolo možné zostrojiť pomerne jednoducho, aby bol názorný a aby bolo možné z obrazu pôvodný objekt zrekonštruovať. Pri štúdiu na Stavebnej fakulte a Fakulte architektúry v Bratislave budete mať možnosť spoznať viacero zobrazovacích metód. V tejto kapitole sa budeme zaoberať metódou založenou na dvoch kolmých premietaniach, ktorá sa nazýva Mongeova projekcia podľa významného francúzskeho geometra a matematika Gasparda Monge (1746 až 1818). Gaspard Monge je považovaný za zakladateľa deskriptívnej geometrie, zaviedol použitie dvoch premietaní do dvoch združených priemetní, čo umožnilo riešiť úlohy o veľkosti, tvare a vzájomnej polohe priestorových objektov.



V úvodných častiach tejto kapitoly budeme charakterizovať pojem Mongeova projekcia a ukážeme, ako sa zostrojí obraz základných geometrických útvarov v Mongeovej projekcii. Ďalej sa budeme zaoberať polohovými a metrickými úlohami a veľkú pozornosť budeme venovať zobrazeniu rovinných útvarov a telies. V poslednej časti ukážeme použitie tretej priemetne pri riešení úloh.

4.1 Obraz bodu v Mongeovej projekcii

Zjednodušene môžeme povedať, že Mongeova projekcia je dvojica kolmých premietaní do dvoch navzájom kolmých priemetní. Rovnobežné premietanie nie je bijektívne zobrazenie, a teda z jedného priemetu bodu nie je možné určiť jeho polohu v priestore, preto je potrebné zadať doplňujúcu informáciu o bode. Ak touto informáciou bude ďalší kolmý priemet bodu do priemetne kolmej na prvú priemetňu, tak dostaneme Mongeovu projekciu.

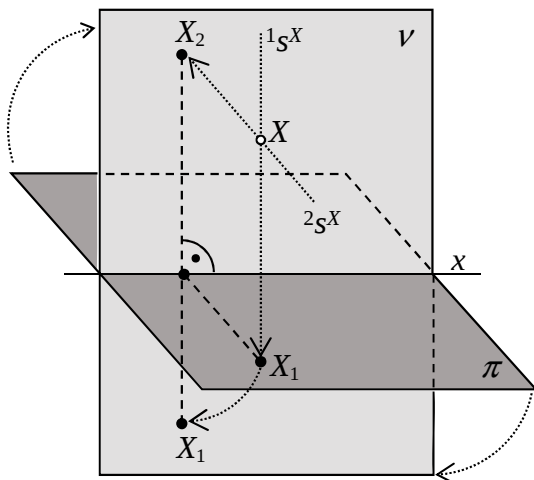
Charakteristika Mongeovej projekcie: prvú priemetňu volíme vo vodorovnej polohe, nazývame ju **pôdorysňa** a označujeme ju π , druhú priemetňu volíme v zvislej polohe, nazývame ju **nárysňa** a označujeme ju ν , $\pi \perp \nu$. Priesečnicu rovín π a ν nazývame **základnica** alebo os x .

Nech $X \in \mathbb{E}^3$. Zostrojíme dva kolmé priemety bodu X , prvý priemet je kolmý priemet do pôdorysne, označíme ho X_1 , druhý priemet je kolmý priemet do nárysne, označíme ho X_2 , tým sme dostali usporiadanú dvojicu bodov $[X_1, X_2]$, $X_1 \in \pi$, $X_2 \in \nu$. Za nákresňu budeme považovať rovinu ν (nárysňu). Priemety X_1, X_2 združíme tak, že prvú priemetňu otočíme do druhej priemetne okolo osi x (Obr. 4.1.1a), toto otočenie nazývame **združenie priemetní**. Bod $X_1 \in \pi$ sa združením priemetní otočí do bodu v nárysni, ktorý opäť označíme X_1 . Výsledkom je usporiadaná dvojica bodov $[X_1, X_2]$ v nárysni, pričom platí $X_1X_2 \perp x$. Ku každému bodu v priestore vieme jednoznačne priradiť usporiadanú dvojicu bodov v nárysni.

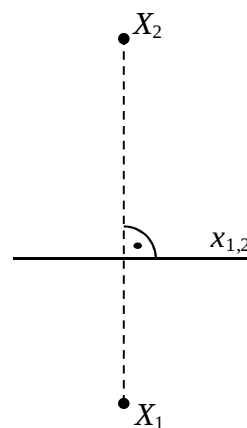
A naopak, ak máme usporiadanú dvojicu bodov $[X_1, X_2]$ v nárysni, pre ktorú platí $X_1X_2 \perp x$, vieme k nej jednoznačne priradiť bod X v priestore.

Usporiadaná dvojica bodov $[X_1, X_2]$ v nárysni, pre ktorú platí $X_1X_2 \perp x$ je obrazom bodu X v Mongeovej projekcii, hovoríme tiež, že body X_1, X_2 sú **združené priemety** bodu X . Spojnicu X_1X_2 nazývame **ordinála** bodu X .

Obr. 4.1.1b predstavuje obraz bodu X v Mongeovej projekcii. Pre priemety osi x platí: $x_1 = x_2$, budeme používať označenie $x_{1,2}$.



Obr. 4.1.1a



Obr. 4.1.1b

π – pôdorysňa (prvá priemetňa)

X_1 – pôdorys (prvý priemet) bodu X

ν – nárysňa (druhá priemetňa)

X_2 – nárys (druhý priemet) bodu X

x – základnica, os x

$x_{1,2}$ – pôdorys aj nárys osi x ,

$X_1X_2 \perp x_{1,2}$ – ordinála bodu X

$1s^X, X \in 1s^X \wedge 1s^X \perp \pi$ – prvá (pôdorysne) premietacia priamka bodu X

$2s^X, X \in 2s^X \wedge 2s^X \perp \nu$ – druhá (nárysne) premietacia priamka bodu X

Definícia 4.1.1: Nech π a ν sú dve kolmé roviny v priestore $\mathbb{E}^3$. Mongeova projekcia je vzájomne jednoznačné zobrazenie bodov priestoru $\mathbb{E}^3$ na usporiadané dvojice združených priemetov bodov v nárysni.

Súradnice bodu

Na určenie polohy bodu v priestore používame súradnicovú sústavu. Súradnicové roviny π, ν, μ sú určené takto: π – pôdorysňa, ν – nárysňa, μ ; $\mu \perp \pi$ a $\mu \perp \nu$, rovinu μ nazývame bokorysňa alebo tretia hlavná priemetňa. Priesečník súradnicových rovín $O = \pi \cap \nu \cap \mu$ je začiatok súradnicovej sústavy, priesečnice súradnicových rovín $x = \pi \cap \nu$, $y = \pi \cap \mu$, $z = \nu \cap \mu$ sú súradnicové osi. Budeme používať pravotočivú súradnicovú sústavu, t. j. súradnicové osi sú orientované tak ako to môžeme vidieť na Obr. 4.1.2a.

Každému bodu $A \in \mathbb{E}^3$ vieme priradiť okrem pôdorysu A_1 a nárysu A_2 aj tretí priemet A_3 , je to kolmý priemet bodu A do bokorysne, nazývame ho bokorys bodu A . Priamka $3s^A$ ($A \in 3s^A \wedge 3s^A \perp \mu$) je tretia (bokorysne) premietacia priamka bodu A .

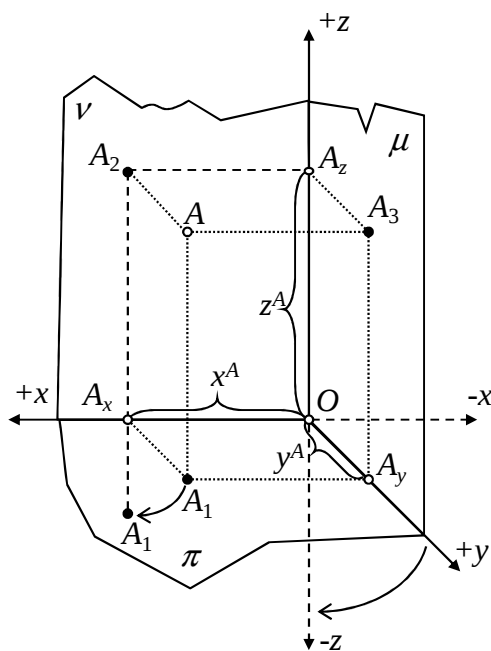
Pre bod A , ktorý neleží v žiadnej súradnicovej rovine (pozri Obr. 4.1.2a), tvoria body $A_1A_yOA_xAA_3A_zA_2$ vrcholy kvádra, ktorý nazývame súradnicový kváder bodu A . Pre súradnice bodu A platí:

$$|x^A| = |A\mu| = |AA_3| = |OA_x|,$$

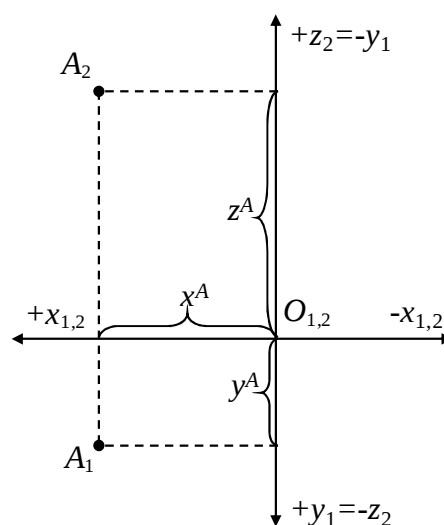
$$|y^A| = |Av| = |AA_2| = |A_1A_x| = |OA_y|,$$

$$|z^A| = |A\pi| = |AA_1| = |A_2A_x| = |OA_z|.$$

Súradnice bodu $A \in \mathbb{E}^3$ sú orientované vzdialenosti bodu A od súradnicových rovín. Obr. 4.1.2b vyjadruje situáciu z priestorového Obr. 4.1.2a po združení prvej a druhej priemetne. Prvú a druhú priemetňu združíme tak, že kladná polos $+y$ splynie so zápornou polosou $-z$. Súradnice združených priemetov bodu A sú $A_1[x^A; y^A]$, $A_2[x^A; z^A]$.



Obr. 4.1.2a



Obr. 4.1.2b

Kvadranty

Pôdorysňa a nárysňa delia priestor na 4 časti, ktoré voláme kvadranty. Kvadranty očísľujeme tak ako je to znázornené na Obr. 4.1.3, t. j. I. kvadrant je časť priestoru nad pôdorysňou a pred nárysňou, kde $y > 0$ a $z > 0$. Ostatné kvadranty sú charakterizované:

II. kvadrant – nad pôdorysňou a za nárysňou,

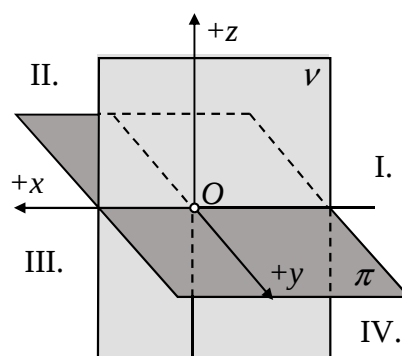
$$y < 0 \text{ a } z > 0,$$

III. kvadrant – pod pôdorysňou a za nárysňou,

$$y < 0 \text{ a } z < 0,$$

IV. kvadrant – pod pôdorysňou a pred nárysňou,

$$y > 0 \text{ a } z < 0.$$



Obr. 4.1.3

Úloha 4.1.1: Body A, B, C, D, E, F sú dané súradnicami: $A[-4; 2; 3]$, $B[4; -3; 1]$, $C[-2; -1; -3]$, $D[1; 3; -3]$, $E[-3; 0; 1]$, $F[3; 2; 0]$. Zostrojte ich obrazy v Mongeovej projekcii.

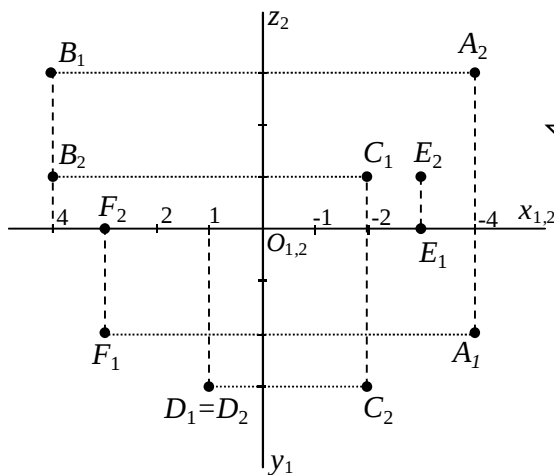
Riešenie: (Obr. 4.1.4a)

Obrazom bodu A v Mongeovej projekcii je usporiadaná dvojica združených priemetov (A_1, A_2), združené priemety bodu A majú súradnice $A_1[-4; 3]$ a $A_2[-4; 5]$.

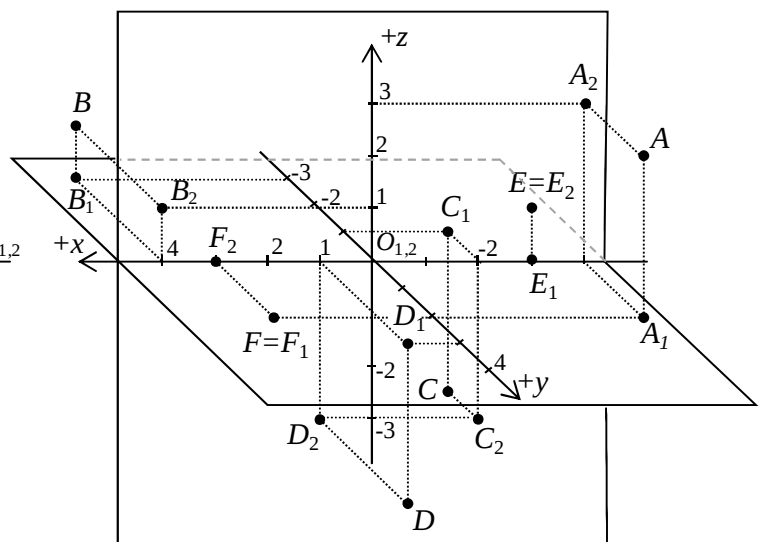
Úloha 4.1.2: Určte v ktorom kvadrante alebo v ktorej priemetni ležia body A, B, C, D, E, F z úlohy 4.1.1.

Riešenie:

Zmeny jednotlivých súradníc predstavujú zmeny polohy bodu v priestore, je dôležité vedieť si predstaviť, čo znamená zmena konkrétnej súradnice. Zmena x -ovej súradnice bodu predstavuje pohyb v smere zľava-doprava alebo opačne a preto x -ová súradnica bodu nie je dôležitá pre určenie kvadrantu. Zmena y -ovej súradnice predstavuje pohyb v smere zozadu-dopredu alebo opačne, body s kladnou y -ovou súradnicou sa nachádzajú pred nárysňou, t. j. v I. alebo IV. kvadrante a body so zápornou y -ovou súradnicou sa nachádzajú za nárysňou, t. j. v II. alebo III. kvadrante. A nakoniec zmena z -ovej súradnice predstavuje pohyb v smere zdola-nahor alebo opačne, body s kladnou z -ovou súradnicou sa nachádzajú nad pôdorysňou, t. j. v I. alebo II. kvadrante a body so zápornou z -ovou súradnicou sa nachádzajú pod pôdorysňou, t. j. v III. alebo IV. kvadrante. Z týchto úvah a Obr. 4.1.4b už vyplýva riešenie príkladu 4.1.2 pre body A, B, C, D : bod A je z I. kvadrantu, B je z II. kvadrantu, C je z III. kvadrantu, D je z IV. kvadrantu. Body E, F sú špeciálne tým, že ležia na hranici dvoch kvadrantov a teda priamo v niektorej priemetni. Bod E leží v náryсни a F v pôdorysni. Všetky body, ktoré ležia v náryсни, majú pôdorys na základnici a všetky body, ktoré ležia v pôdorysni, majú nárys na základnici. Takéto body budú zohrávať kľúčovú rolu v ďalších úvahách.



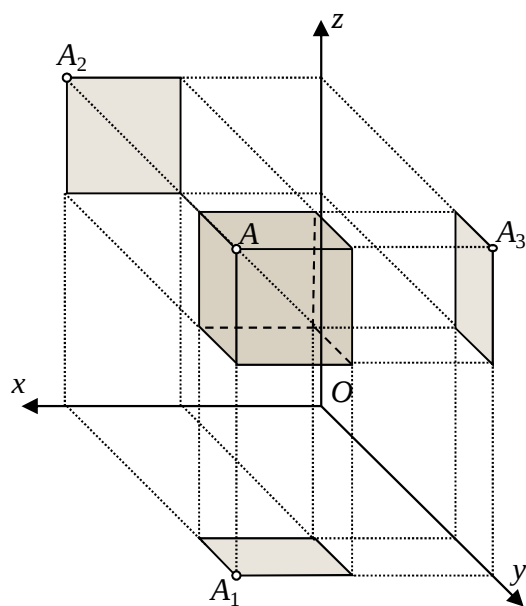
Obr. 4.1.4a



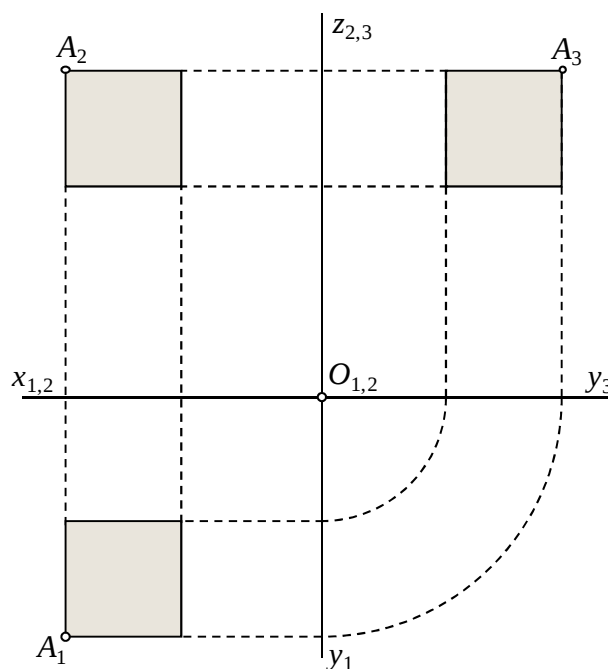
Obr. 4.1.4b

4.2 Bokorysňa

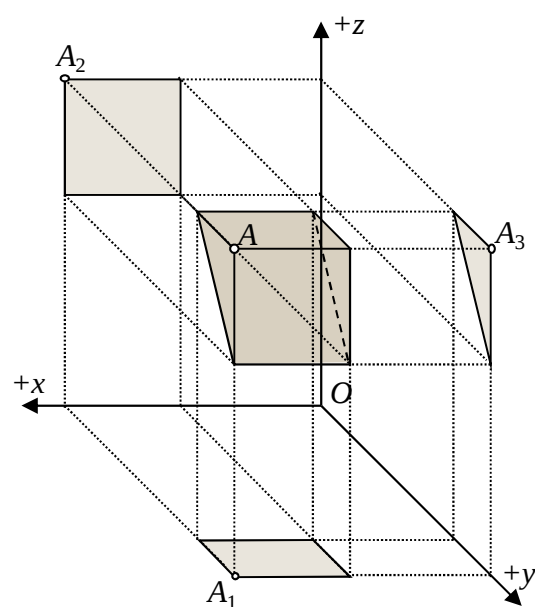
Bokorysňa je dôležitý nástroj, ktorý využívame napríklad vtedy, keď nám pôdorys a nárys nestačia na rýchlu identifikáciu objektu. Príkladom sú kocka a trojboký hranol zobrazené na Obr. 4.2.1a a 4.2.2a. Pôdorysy aj nárysy oboch telies sú zhodné štvorce, až podľa bokorysu (štvorec alebo trojuholník) je možné teleso identifikovať. Obr. 4.2.1b a 4.2.2b predstavujú trojicu združených priemetov týchto telies po združení priemetní. Konštrukcii trojice združených priemetov bodov, resp. telies je venovaná táto časť.



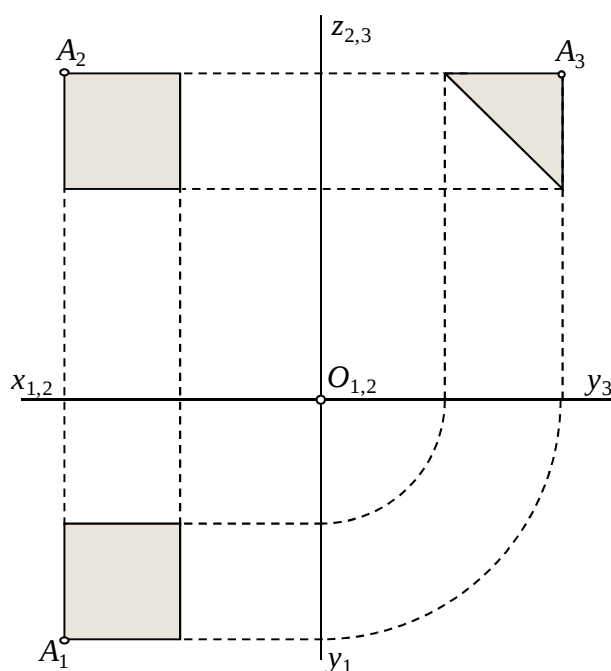
Obr. 4.2.1a



Obr. 4.2.1b



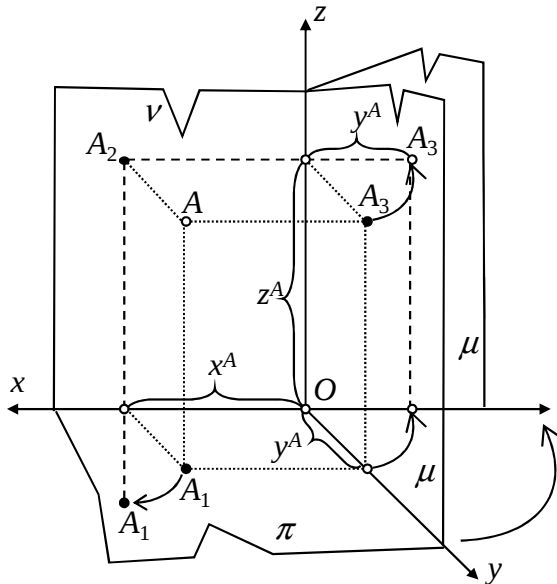
Obr. 4.2.2a



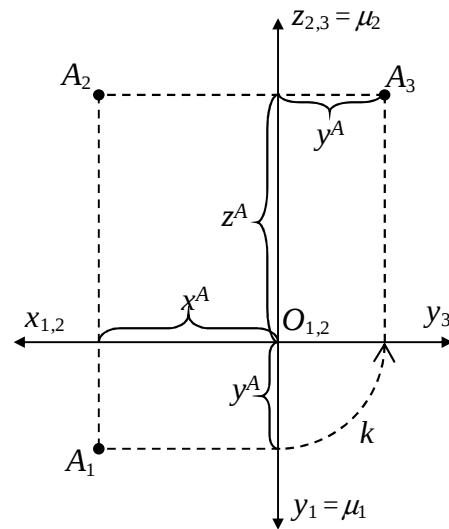
Obr. 4.2.2b

Združenie bokorysne s nárysňou

Bokorysňu združíme s nárysňou otočením bokorysne do nárysne okolo osi z . Združenie priemetní a konštrukcia bokorysu bodu A sú zobrazené na obrázku 4.2.3a. Spojnica $A_2A_3 \perp z$ je ordinála bodu A spájajúca nárys s bokorysom a $|A_3, z| = |y^A|$. Na konštrukciu tretieho priemetu bodu zvyčajne používame postup znázornený na Obr. 4.2.3b, kde k je kružnicový oblúk so stredom $O_{1,2}$ a polomerom $r = |y^A|$.



Obr. 4.2.3a



Obr. 4.2.3b

V nasledujúcich príkladoch zobrazíme jednoduché telesá (pozri kap. 2.4) v Mongeovej projekcii. Zostrojíme tri združené priemety hranola, ihlana, valca a kužeľa a s podstavou v pôdorysni alebo v nárysni. Cieľom týchto príkladov je rýchle intuitívne pochopenie princípu Mongeovej projekcie.

Úloha 4.2.1: Zobrazte kolmý 4-boký hranol $ABCDEFGH$ s výškou v a obdĺžnikovou podstavou $ABCD$ v pôdorysni.

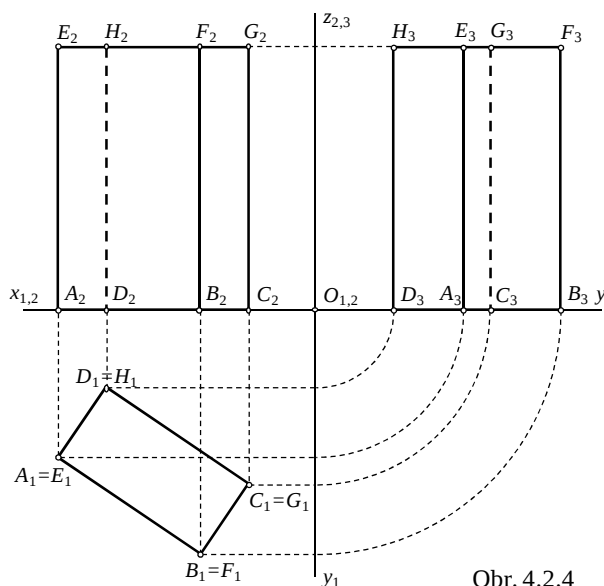
Riešenie: (Obr. 4.2.4)

Podstava hranola, obdĺžnik $ABCD$ sa v pôdoryse zobrazí v skutočnom tvare, v náryse ako úsečka na osi x a v bokoryse ako úsečka na osi y . Pretože zobrazujeme kolmý hranol, pôdorys celého hranola je obdĺžnik $A_1B_1C_1D_1$, nárysy tvoriacich priamok sú kolmé na os x a bokorysy na os y . Výška hranola sa premietne v skutočnej veľkosti v náryse aj v bokoryse: $v = |AE| = |A_2E_2| = |A_3E_3|$.

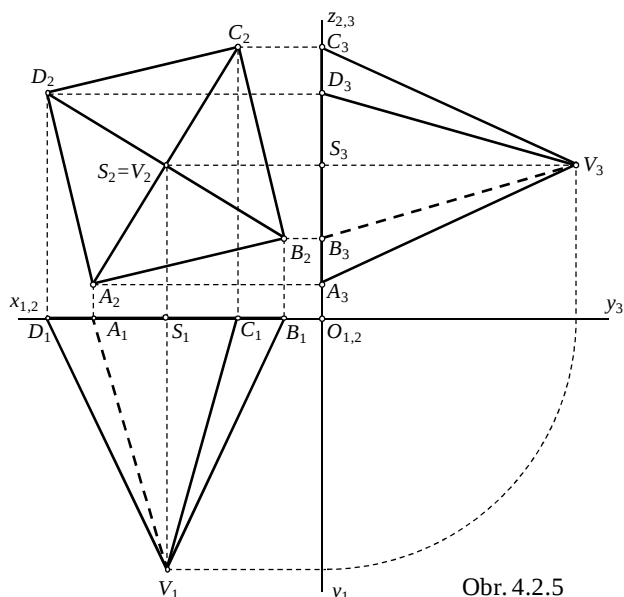
Úloha 4.2.2: Zobrazte pravidelný 4-boký ihlan $ABCDV$ s výškou v a štvorcovou podstavou $ABCD$ v nárysní.

Riešenie: (Obr. 4.2.5)

Podstava ihlana, štvorec $ABCD$ sa v náryse zobrazí v skutočnom tvare, v pôdoryse ako úsečka na osi x a v bokoryse ako úsečka na osi z . Spojnica SV stredu štvorca $ABCD$ s vrcholom ihlanu je kolmá na rovinu podstavy, t. j. $SV \perp v$, preto $V_2 = S_2$. Vrchol V je pred nárysňou, preto bočné hrany ihlanu AV , BV , CV , DV sú v náryse viditeľné. Nárys ihlana je štvorec $A_2B_2C_2D_2$ s uhlopriečkami, pôdorys a bokorys je trojuholník. Výška sa premieta v skutočnej veľkosti v pôdoryse aj v bokoryse: $v = |SV| = |S_1V_1| = |S_3V_3|$.



Obr. 4.2.4



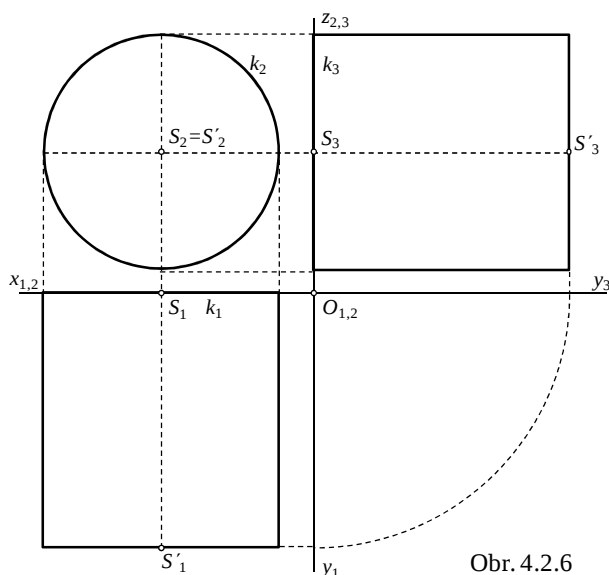
Obr. 4.2.5

Úloha 4.2.3: Zobrazte rotačný valec s výškou v a kruhovou podstavou $k(S; r)$ v nárysi.

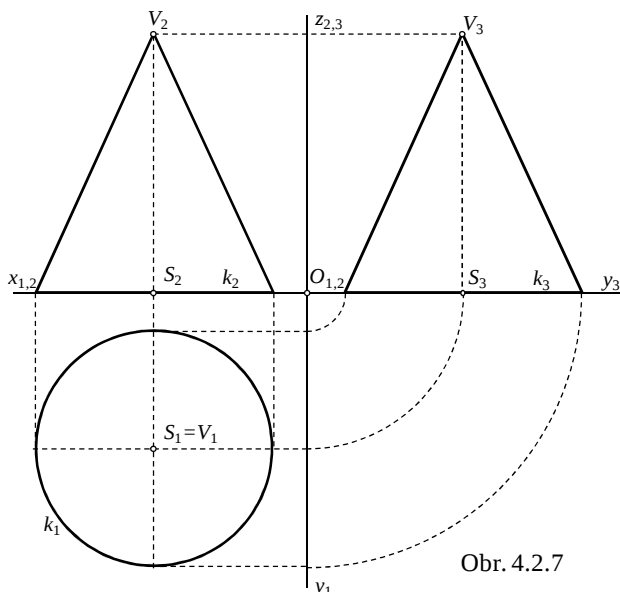
Riešenie: (Obr. 4.2.6) Podstava valca, kruh $k(S; r)$ sa v náryse zobrazí v skutočnom tvare, v pôdoryse ako úsečka dĺžky $2r$ na osi x a v bokoryse ako úsečka dĺžky $2r$ na osi z . Rotačný valec má spojnicu stredov oboch podstáv SS' kolmú na roviny podstáv, t. j. $SS' \perp \pi$, preto $S_2 = S'_2$. Nárys valca je kruh $k_2(S_2; r)$, pôdorys aj bokorys je obdĺžnik s rozmermi $2r$ a v . Výška valca sa premieta v skutočnej veľkosti v pôdoryse aj v bokoryse: $v = |SS'| = |S_1S'_1| = |S_3S'_3|$.

Úloha 4.2.4: Zobrazte rotačný kužeľ s výškou v a kruhovou podstavou $k(S; r)$ v pôdorysni.

Riešenie: (Obr. 4.2.7) Podstava kužeľa, kruh $k(S; r)$ sa v pôdoryse zobrazí v skutočnom tvare, v náryse ako úsečka dĺžky $2r$ na osi x a v bokoryse ako úsečka dĺžky $2r$ na osi y . Rotačný kužeľ má spojnicu SV stredu podstavy s vrcholom kolmú na rovinu podstavy, t. j. $SV \perp \pi$, preto $V_1 = S_1$. Pôdorys kužeľa je kruh $k_1(S_1; r)$, nárys aj bokorys je rovnoramenný trojuholník so základňou $2r$ a výškou v . Výška kužeľa sa premieta v skutočnej veľkosti v náryse aj v bokoryse: $v = |SV| = |S_2V_2| = |S_3V_3|$.



Obr. 4.2.6



Obr. 4.2.7

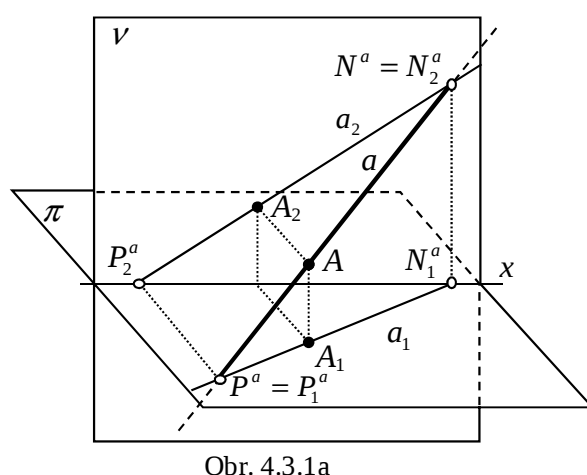
4.3 Obraz priamky v Mongeovej projekcii

Pri zobrazovaní priamky v Mongeovej projekcii využijeme to, čo vieme o priemete priamky v kolmom premietaní. Pripomeňme si, že kolmým priemetom priamky je priamka alebo bod.

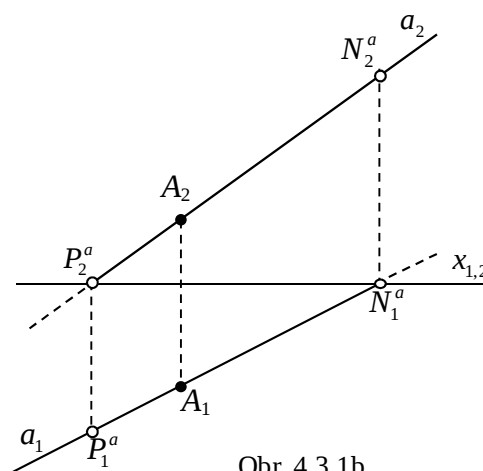
Nech a je ľubovoľná priamka. Zostrojíme kolmé priemety priamky a do pôdorysne aj nárysne, tým získame usporiadanú dvojicu $[a_1, a_2]$ priemetov, a_1 je pôdorys (prvý priemet) a a_2 je nárys (druhý priemet) priamky a . Táto usporiadaná dvojica $[a_1, a_2]$ je obraz priamky a v Mongeovej projekcii alebo tiež hovoríme, že a_1, a_2 sú združené priemety priamky a . Dvojica $[a_1, a_2]$ môže predstavovať dvojicu priamok, jednu dvojnásobnú priamku, alebo priamku a bod.

Definícia 4.3.1: Priesečník priamky s pôdorysňou nazývame pôdorysný stopník priamky. Priesečník priamky s nárysňou nazývame nárysný stopník priamky.

Poznámka: Pôdorysný stopník priamky a označujeme P^a a nárysný stopník N^a . Označenie P_1^a (P_2^a) znamená prvý (druhý) priemet pôdorysného stopníka priamky a , N_1^a (N_2^a) znamená prvý (druhý) priemet nárysného stopníka priamky a . Počet stopníkov súvisí s polohou priamky vzhľadom na priemetne, ak je priamka s niektorou priemetňou rovnobežná, tak príslušný stopník neexistuje (Obr. 4.3.3a, b – Obr. 4.3.6a, b).



Obr. 4.3.1a



Obr. 4.3.1b

Na ilustračnom Obr. 4.3.1a je zobrazená priamka a vo všeobecnej polohe vzhľadom na priemetne, na Obr. 4.3.1b je jej obraz v Mongeovej projekcii. Z Obr. 4.3.1a, b vyplýva konštrukcia priemetov stopníkov priamky a :

1. Priemety pôdorysného stopníka:

$$\{P_2^a\} = a_2 \cap x_{1,2} \text{ a } P_1^a \in a_1 \text{ a } P_1^a \text{ leží na ordinále bodu } P^a.$$

2. Priemety nárysného stopníka:

$$\{N_1^a\} = a_1 \cap x_{1,2} \text{ a } N_2^a \in a_2 \text{ a } N_2^a \text{ leží na ordinále bodu } N^a.$$

Bod na priamke

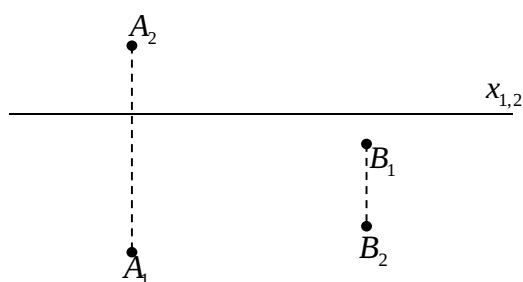
Z vlastnosti V1 rovnobežného premietania (Kapitola 3.2) vyplýva:

$$\text{Ak } A \in a, \text{ tak } A_1 \in a_1 \text{ a } A_2 \in a_2 \text{ (Obr. 4.3.1a, b).}$$

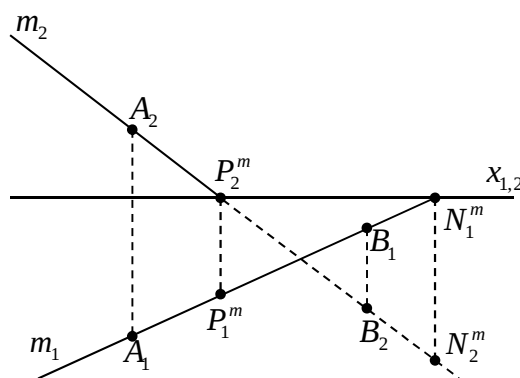
Úloha 4.3.1: Dané sú združené priemety bodov A, B (Obr. 4.3.2a). Zobrazte združené priemety priamky $m = AB$ a zostrojte jej stopníky.

Riešenie: (Obr. 4.3.2b)

1. Združené priemety priamky m sú určené združenými priemetmi bodov A, B : $m_1 = A_1B_1$, $m_2 = A_2B_2$.
2. Priemety pôdorysného stopníka:
 $\{P_2^m\} = m_2 \cap x_{1,2}$, $\{P_1^m\} \in m_1$ a P_1^m leží na ordinále bodu P^m .
3. Priemety nárysneho stopníka:
 $\{N_1^m\} = m_1 \cap x_{1,2}$, $\{N_2^m\} \in m_2$ a N_2^m leží na ordinále bodu N^m .



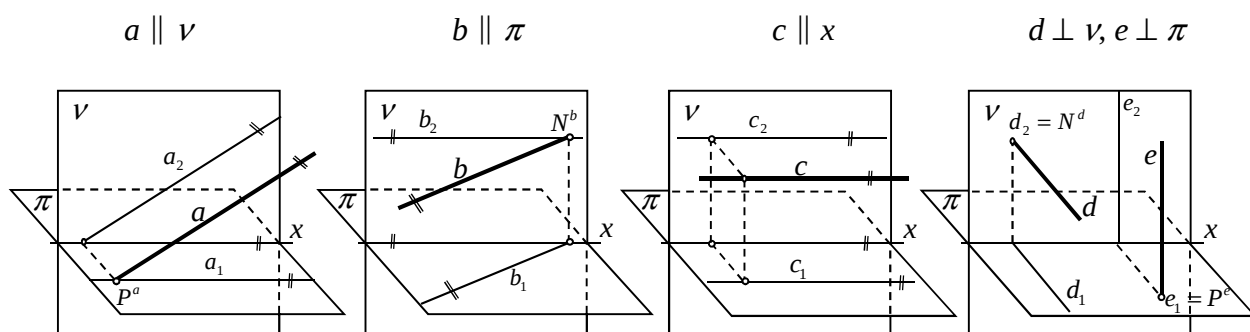
Obr. 4.3.2a



Obr. 4.3.2b

Priamka v špeciálnej polohe

Na Obr. 4.3.3a – 4.3.6a sú zobrazené priamky v špeciálnych polohách vzhľadom na priemetne a na Obr. 4.3.3b – 4.3.6b sú tieto priamky zobrazené v Mongeovej projekcii. Všímnite si stopníky priamok a, b, c, d, e .

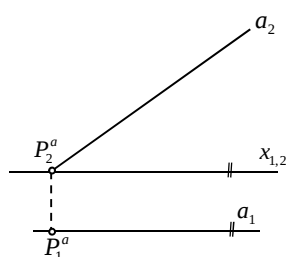


Obr. 4.3.3a

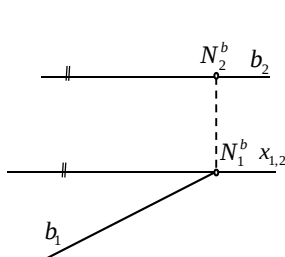
Obr. 4.3.4a

Obr. 4.3.5a

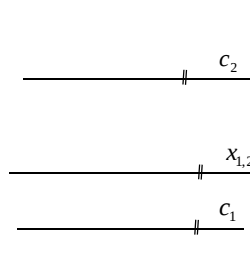
Obr. 4.3.6a



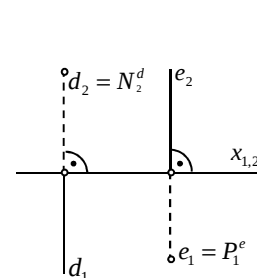
Obr. 4.3.3b



Obr. 4.3.4b



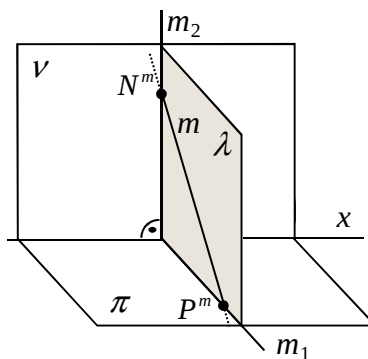
Obr. 4.3.5b



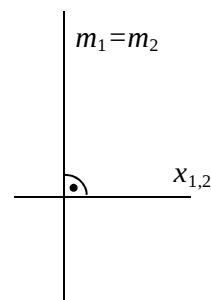
Obr. 4.3.6b

Priamka je svojimi združenými priemetmi jednoznačne určená, okrem jediného prípadu, ak je priamka kolmá na základnicu a pritom nie je kolmá ani na jednu priemetňu. V tomto špeciálnom prípade priamka leží v rovine λ kolmej na základnicu (Obr. 4.3.7a), všetky

priamky ležiace v tejto rovine, ktoré nie sú kolmé ani na jednu priemetňu sa po združení priemetní zobrazia do jedinej priamky kolmej na os $x_{1,2}$, pričom pôdorys priamky je zhodný s jej nárysom (Obr. 4.3.7b). Priemety takejto priamky musia byť dourčené priemetmi dvoch rôznych bodov. Úlohy týkajúce sa takýchto priamok riešime pomocou bokorysne. Ukážeme si to na príklade.



Obr. 4.3.7a



Obr. 4.3.7b

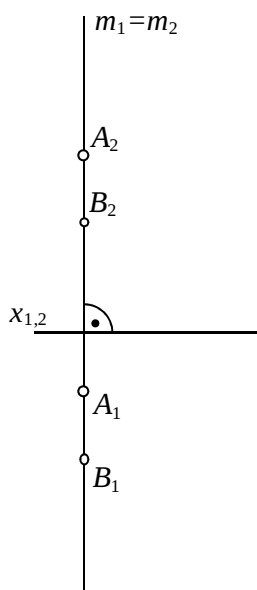
Úloha 4.3.2: Dané sú združené priemety priamky $m = AB$, $m \perp x$ (Obr. 4.3.8a). Zostrojte jej stopníky.

Riešenie: (Obr. 4.3.8b)

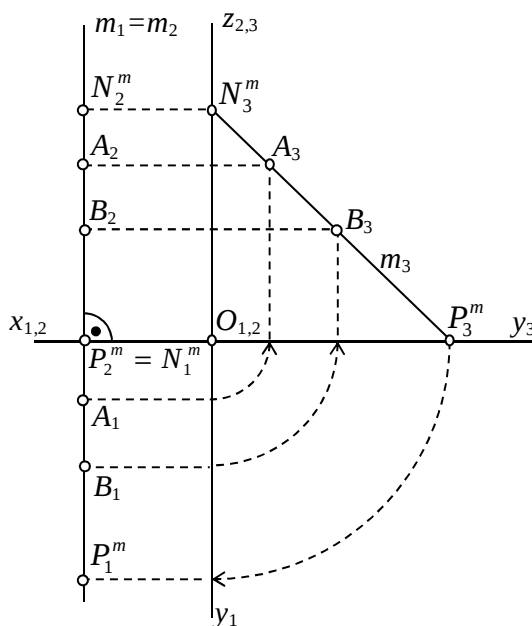
Vhodne zvolíme polohu bokorysne μ (t. j. zobrazíme bod O a súradnicové osi y a z), zostrojíme tretie priemety A_3, B_3 bodov A, B (podľa konštrukcie uvedenej na Obr. 4.2.3). Tretí priemet priamky m je $m_3 = A_3B_3$. V treťom priemete zostrojíme bokorysy stopníkov

$$\{P_3^m\} = m_3 \cap y_3, \{N_3^m\} = m_3 \cap z_{2,3},$$

a odvodíme ich pôdorysy a nárysy.



Obr. 4.3.8a



Obr. 4.3.8b

4.4 Obraz roviny v Mongeovej projekcii

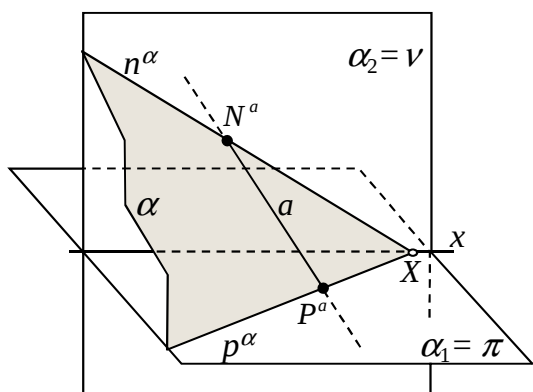
Kolmý priemet roviny môže byť priamka alebo celá priemetňa. Nech rovina α má všeobecnú polohu, t. j. α nie je kolmá na žiadnu priemetňu ani rovnobežná s niektorou priemetňou. Pôdorys roviny α je celá pôdorysňa a nárys roviny α je celá nárysňa. Priemet roviny preto určujeme pomocou dvojice špeciálnych priamok roviny: pomocou stôp roviny.

Definícia 4.4.1: Priesečnicu roviny s pôdorysňou nazývame pôdorysná stopa roviny. Priesečnicu roviny s nárysňou nazývame nárysná stopa roviny.

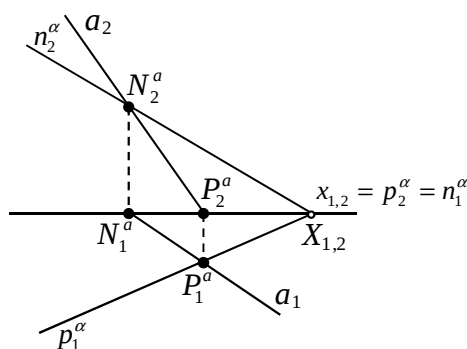
Poznámka: Pôdorysnú stopu roviny α označujeme p^α a nárysnu stopu n^α . Označenie p_1^α (p_2^α) znamená prvý (druhý) priemet pôdorysnej stopy roviny α , n_1^α (n_2^α) znamená prvý (druhý) priemet nárysnej stopy roviny α .

Na ilustračnom Obr. 4.4.1a je zobrazená rovina α vo všeobecnej polohe vzhľadom na priemetne a na vedľajšom Obr. 4.4.1b je táto rovina zobrazená v Mongeovej projekcii. Stopy roviny, ak existujú, sa pretínajú na základnici v bode X alebo sú so základnicou rovnobežné (Obr. 4.4.7a, b). Ak je rovina rovnobežná s niektorou priemetňou, tak príslušnú stopu nemá (Obr. 4.4.8a, b, Obr. 4.4.9a, b).

Na jednoznačné určenie priemetu roviny stačí: p_1^α , n_2^α , pre zvyšné priemety stôp roviny vždy platí $p_2^\alpha = n_1^\alpha = x_{1,2}$, preto toto označenie budeme v ďalších obrázkoch vynechávať.



Obr. 4.4.1a



Obr. 4.4.1b

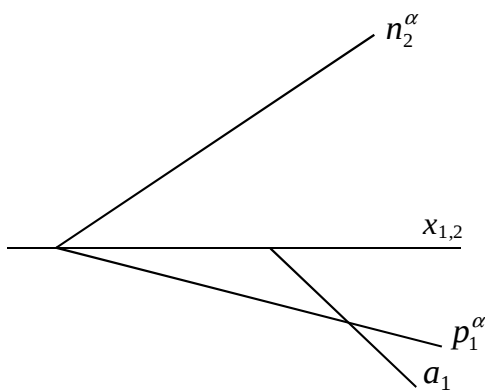
Priamka v rovine

Veta 4.4.1: Ak priamka leží v rovine, tak svoje stopníky má na stopách tejto roviny, pôdorysný stopník na pôdorysnej stope a nárysny na nárysnej stope, t.j. ak $a \subset \alpha$, tak $P^a \in p^\alpha \wedge N^a \in n^\alpha$ (Obr. 4.4.1a, b).

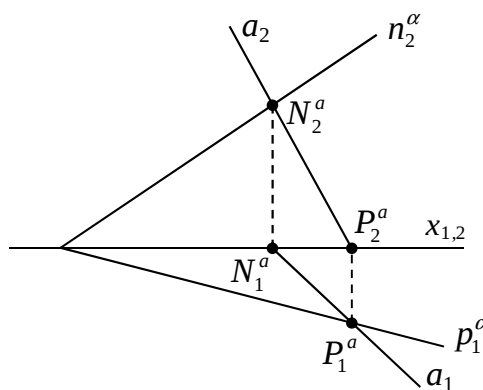
Úloha 4.4.1: Daná je rovina α svojimi stopami a pôdorys a_1 priamky a , ktorá leží v rovine α (Obr. 4.4.2a). Zostrojte nárys priamky a .

Riešenie: (Obr. 4.4.2b)

1. Zostrojíme pôdorysy stopníkov priamky a : $\{P_1^a\} = a_1 \cap p_1^\alpha$, $\{N_1^a\} = a_1 \cap x_{1,2}$.
2. Nárysy stopníkov ležia na ordinálach a platí: $P_2^a \in x_{1,2}$ a $N_2^a \in n_2^\alpha$.
3. Nárys priamky a : $a_2 = P_2^a N_2^a$.



Obr. 4.4.2a



Obr. 4.4.2b

Bod v rovine

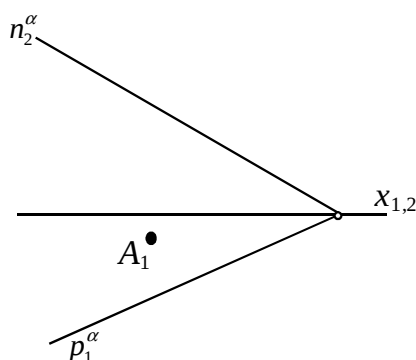
Bod leží v rovine práve vtedy, ak leží na nejakej priamke tejto roviny. To využívame pri určení bodu v rovine. Ak chceme zvoliť bod v rovine α , môžeme zvoliť len jeden z priemetov, zvyšný priemet musíme zostrojiť a to pomocou vhodnej priamky roviny prechádzajúcej týmto bodom.

Úloha 4.4.2: Daná je rovina α svojimi stopami a pôdorys A_1 bodu A , ktorý leží v rovine α (Obr. 4.4.3a). Zostrojte nárys bodu A .

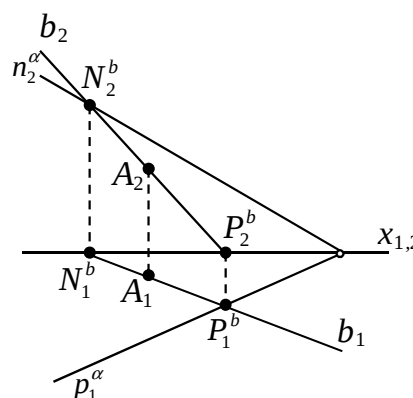
Riešenie: (Obr. 4.4.3b) Zostrojíme priamku b , ktorá leží v rovine α a prechádza bodom A . Takých priamok je nekonečne veľa, zvolíme si tú, ktorá má obidva stopníky dostupné na nákrese.

Postup:

1. Pôdorys priamky b : b_1 ; $A_1 \in b_1$.
2. Priemety stopníkov priamky b : $P_1^b, P_2^b, N_1^b, N_2^b$.
3. Nárys priamky b : $b_2 = P_2^b N_2^b$.
4. $A_2 \in b_2$ a A_2 leží na ordinále bodu A .



Obr. 4.4.3a



Obr. 4.4.3b

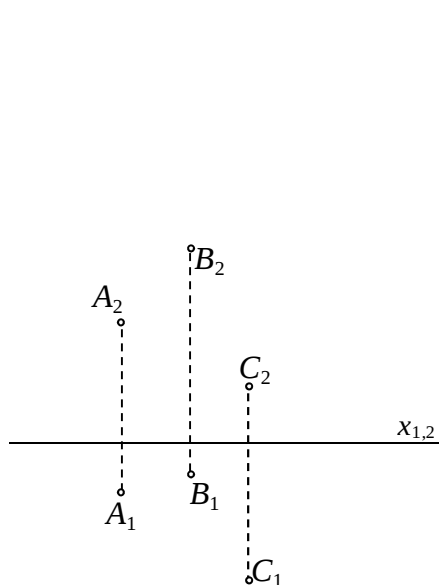
Úloha 4.4.3: Zostrojte stopy roviny $\alpha = ABC$. Body A, B, C sú dané svojimi združenými priemetmi (Obr. 4.4.4a).

Riešenie: (Obr. 4.4.4b)

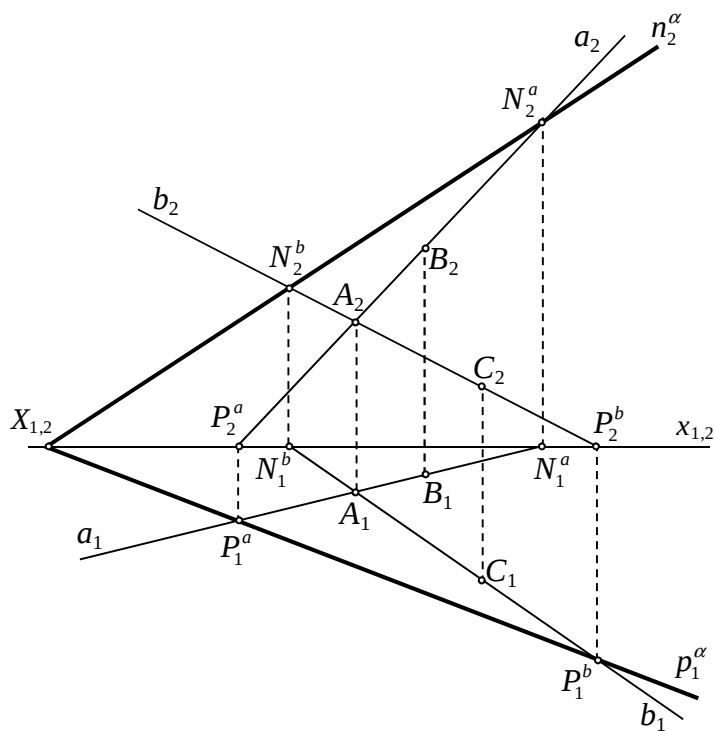
Vidíme, že body A, B, C neležia na jednej priamke, a preto jednoznačne určujú rovinu α . Riešenie bude založené na tom istom kľúčovom fakte ako v predchádzajúcich úlohách, t. j. ak priamka leží v rovine, tak svoje stopníky má na stopách tejto roviny. Každú stopu určíme dvoma stopníkmi, pôdorysnú dvoma pôdorysnými a nárysnú dvoma nárysnými stopníkmi dvoch priamok z roviny α . Ak je niektorý stopník nedostupný, využijeme fakt, že stopy sa pretínajú na základnici v bode $X_{1,2}$. Body A, B, C nám priamo určujú tri priamky, pri riešení nášho príkladu sme použili priamky $a = AB$ a $b = AC$.

Postup:

1. Podľa úlohy 4.3.1 zostrojíme priemety stopníkov priamky a : $P_1^a, P_2^a, N_1^a, N_2^a$.
2. Podobne zostrojíme priemety stopníkov priamky b : $P_1^b, P_2^b, N_1^b, N_2^b$.
3. $p_1^\alpha = P_1^a P_1^b, n_2^\alpha = N_2^a N_2^b$.



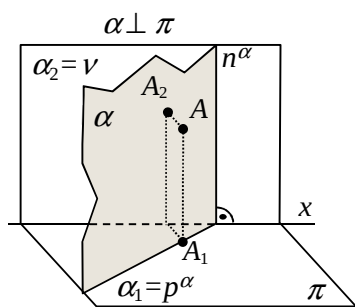
Obr. 4.4.4a



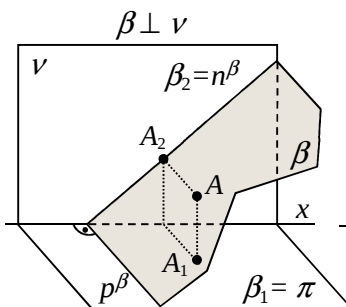
Obr. 4.4.4b

Rovina v špeciálnej polohe

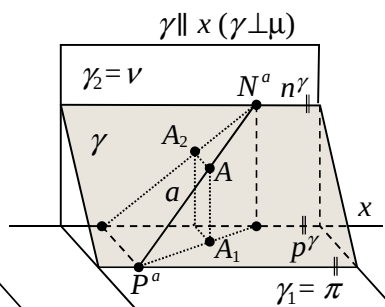
Obr. 4.4.5a – 4.4.10a znázorňujú špeciálne polohy rovín, ich obraz v Mongeovej projekcii je na Obr. 4.4.5b – 4.4.10b.



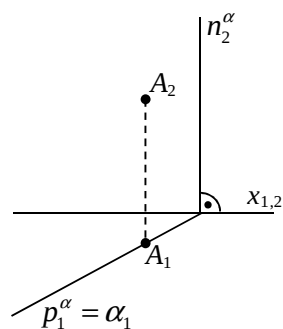
Obr. 4.4.5a



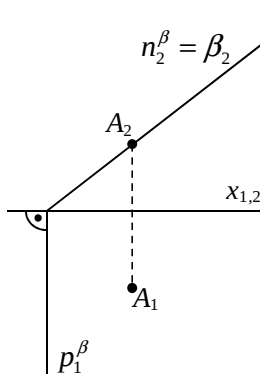
Obr. 4.4.6a



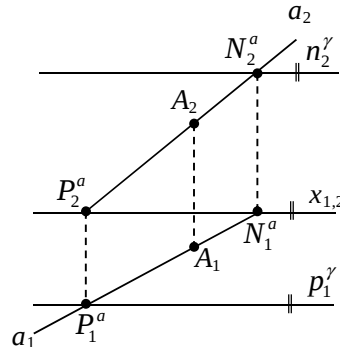
Obr. 4.4.7a



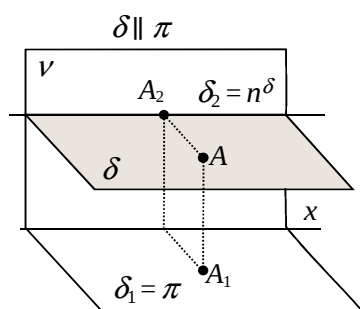
Obr. 4.4.5b



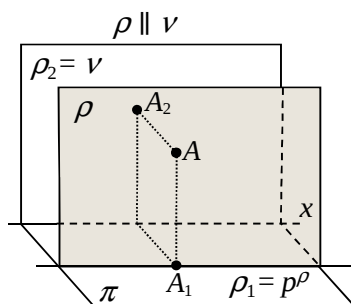
Obr. 4.4.6b



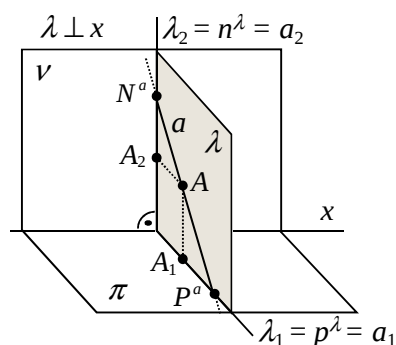
Obr. 4.4.7b



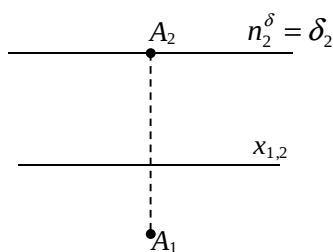
Obr. 4.4.8a



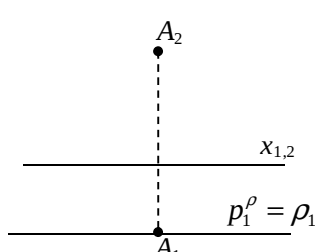
Obr. 4.4.9a



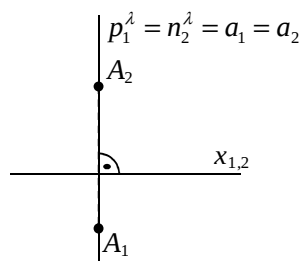
Obr. 4.4.10a



Obr. 4.4.8b



Obr. 4.4.9b



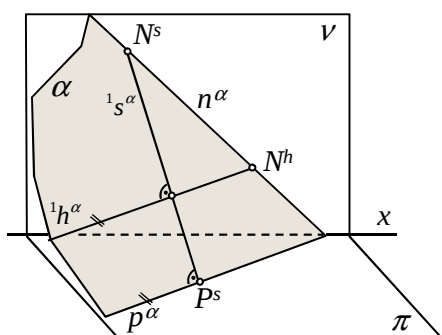
Obr. 4.4.10b

Ak je rovina kolmá na pôdorysňu (roviny α , ρ , λ), tak pôdorysy všetkých bodov tejto roviny ležia na pôdorysnej stope roviny, ak je rovina kolmá na nárýsňu (roviny β , δ , λ), tak nárýsy všetkých bodov tejto roviny ležia na nárýsnej stope roviny. Ak je rovina rovnobežná s osou x , tak jej stopy sú tiež rovnobežné s osou x a bod v rovine dourčíme pomocou vhodnej priamky (Obr. 4.4.7a, b). Rovina δ nemá pôdorysnú stopu a rovina ρ nemá nárýsnú stopu. Veľmi špeciálny prípad je rovina λ kolmá na os x , úlohy súvisiace s touto rovinou riešime pomocou bokorysne.

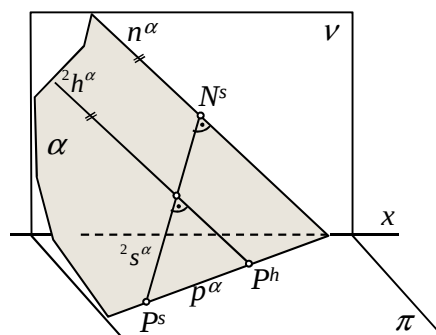
4.5 Hlavné a spádové priamky roviny, kolmica na rovinu

V časti 3.1 sme definovali hlavné a spádové priamky roviny. V Mongeovej projekcii sú dve priemetne, preto v rovine sú dva druhy hlavných priamok a dva druhy spádových priamok, a to hlavné (spádové) priamky prvej a druhej osnovy. Prvá osnova sa vždy viaže k pôdorysni a druhá osnova k nárýsni.

Definícia 4.5.1: Nech je daná ľubovoľná rovina. Priamka roviny rovnobežná s pôdorysňou sa nazýva hlavná priamka prvej osnovy. Priamka roviny rovnobežná s nárýsňou sa nazýva hlavná priamka druhej osnovy (Obr 4.5.1a, b).



Obr. 4.5.1a



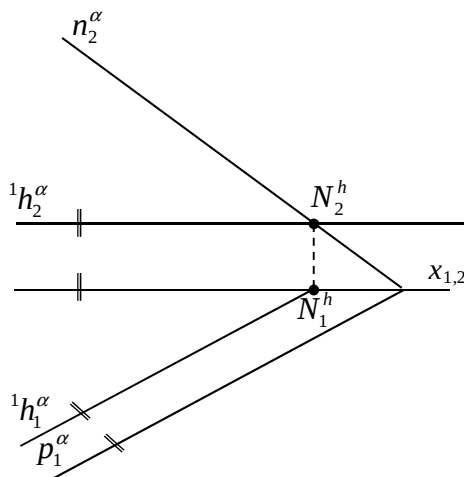
Obr. 4.5.1b

Poznámka: Osnovu budeme písať ako index vľavo hore, t. j. hlavnú priamku roviny α prvej osnovy označíme $^1h^\alpha$ a hlavnú priamku roviny α druhej osnovy označíme $^2h^\alpha$. Potom napr. označenie $^2h_1^\alpha$ znamená prvý priemet hlavnej priamky druhej osnovy.

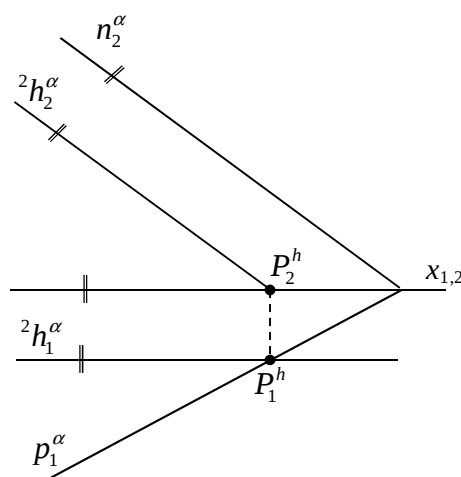
Kolmé premietanie zachováva rovnobežnosť priamok, preto pre priemety hlavných priamok roviny, ktorá nie je kolmá na žiadnu priemetňu, platí nasledujúce tvrdenie.

Veta 4.5.1: Pre priemety hlavných priamok roviny α platí:

1. Ak rovina α nie je kolmá na nárysňu, tak $^1h_1^\alpha \parallel p_1^\alpha \wedge ^1h_2^\alpha \parallel x_{1,2}$ (Obr 4.5.2a).
2. Ak rovina α nie je kolmá na pôdorysňu, tak $^2h_2^\alpha \parallel n_2^\alpha \wedge ^2h_1^\alpha \parallel x_{1,2}$ (Obr 4.5.2b).



Obr. 4.5.2a



Obr. 4.5.2b

Definícia 4.5.2: Nech je daná ľubovoľná rovina. Priamka roviny kolmá na pôdorysnú stopu roviny sa nazýva spádová priamka prvej osnovy. Priamka roviny kolmá na nárysňu stopu roviny sa nazýva spádová priamka druhej osnovy (Obr 4.5.1a, b).

Poznámka: Spádové priamky označujeme analogicky ako hlavné priamky, t. j. spádovú priamku roviny α prvej osnovy označíme $^1s^\alpha$ a spádovú priamku roviny α druhej osnovy označíme $^2s^\alpha$. Potom napr. označenie $^1s_2^\alpha$ znamená druhý priemet spádovej priamky roviny α prvej osnovy.

Z vety o kolmom priemete pravého uhla (vlastnosť V6 v kapitole 3.3) vyplýva nasledujúce tvrdenie.

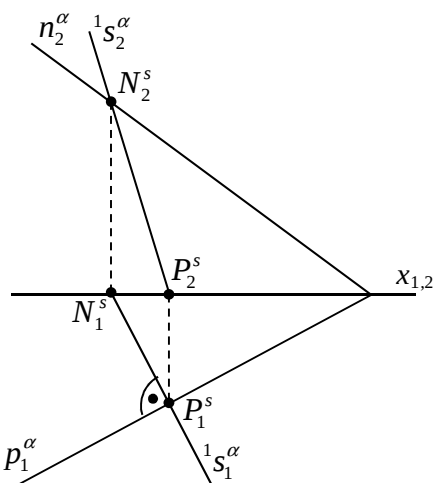
Veta 4.5.2: Pre priemety spádových priamok roviny α platí:

1. Ak rovina α nie je kolmá na pôdorysňu, tak $^1s_1^\alpha \perp p_1^\alpha$ (Obr 4.5.3a).
2. Ak rovina α nie je kolmá na nárysňu, tak $^2s_2^\alpha \perp n_2^\alpha$ (Obr 4.5.3b).

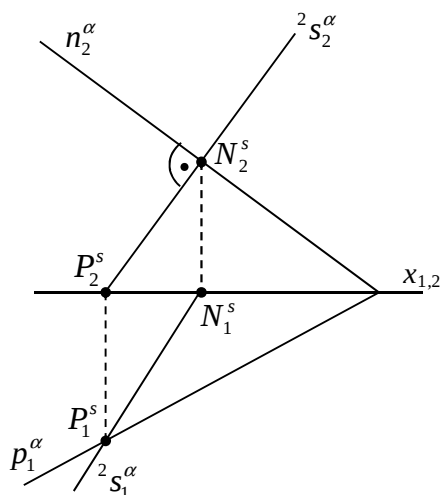
Dôsledok: Pre priemety hlavných a spádových priamok roviny α platí:

1. Ak rovina α nie je kolmá na pôdorysňu, tak $^1s_1^\alpha \perp ^1h_1^\alpha$ (Obr 4.5.3a).
2. Ak rovina α nie je kolmá na nárysňu, tak $^2s_2^\alpha \perp ^2h_2^\alpha$ (Obr 4.5.3b).

Poznámka: Veta 4.5.2 nehovorí nič o druhom priemete spádovej priamky prvej osnovy ani o prvom priemete spádovej priamky druhej osnovy, tieto priemety odvodíme pomocou stopníkov spádových priamok.



Obr. 4.5.3a



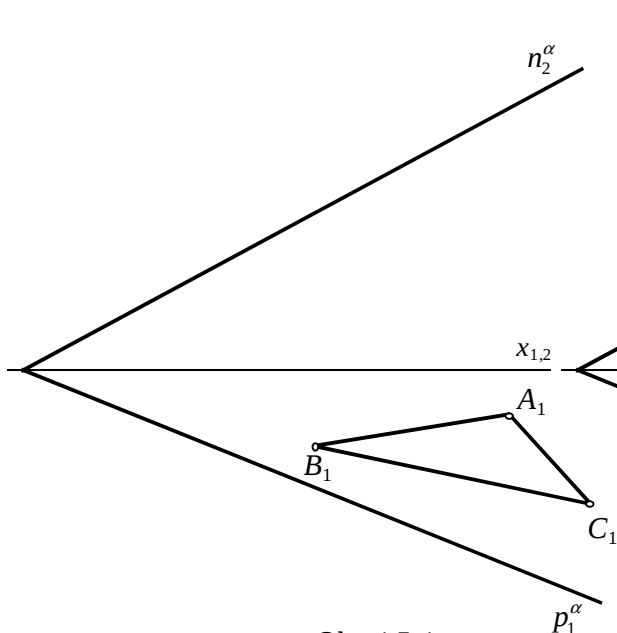
Obr. 4.5.3b

Teraz si ukážeme použitie hlavných priamok na riešenie úlohy, ktorá je často súčasťou zložitejších úloh. Ak poznáme jeden priemet útvaru, ktorý leží v rovine, jeho chýbajúci priemet zostrojíme najčastejšie pomocou hlavných priamok roviny.

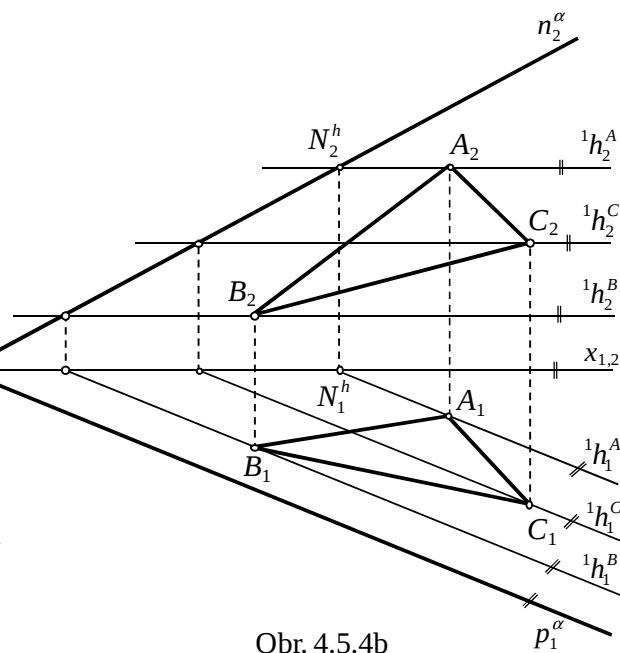
Úloha 4.5.1: Daná je rovina α svojimi stopami. Daný je pôdorys trojuholníka ABC , ktorý leží v rovine α (Obr. 4.5.4a). Zostrojte nárys trojuholníka ABC .

Riešenie: (Obr. 4.5.4b)

Na riešenie môžeme použiť hlavné priamky prvej alebo druhej osnovy alebo môžeme použiť ľubovoľné priamky roviny α . Požijeme hlavné priamky prvej osnovy prechádzajúce bodmi A , B , C , označíme ich ${}^1h^A$, ${}^1h^B$, ${}^1h^C$.



Obr. 4.5.4a



Obr. 4.5.4b

Postup pre bod A :

1. Pôdorys hlavnej priamky: $A_1 \in {}^1h_1^A \wedge {}^1h_1^A \parallel p_1^\alpha$.

2. Priemety nárysného stopníka hlavnej priamky: $\{N_1^h\} = {}^1h_1^A \cap x_{1,2}$,

$N_2^h \in n_2^\alpha \wedge N_2^h$ leží na ordinále bodu N^h .

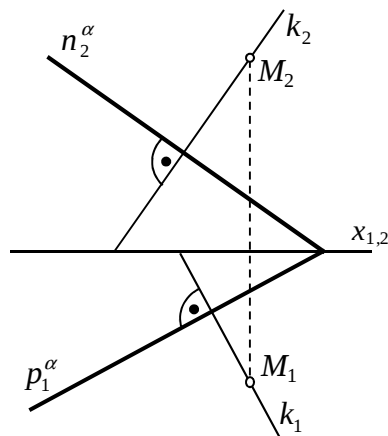
3. Nárys hlavnej priamky: $N_2^h \in {}^1h_2^A \wedge {}^1h_2^A \parallel x_{1,2}$.

4. Nárys bodu A: $A_2 \in {}^1h_2^A \wedge A_2$ leží na ordinále A.

Nárysy bodov B a C zostrojíme analogicky.

Kolmica na rovinu

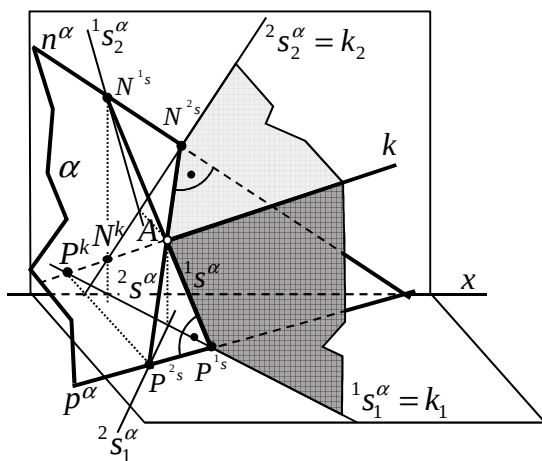
Kolmica k na rovinu α je kolmá na všetky priamky roviny, teda aj na pôdorysnú a nárysnú stopu roviny, t. j. $k \perp p^\alpha$ a $k \perp n^\alpha$. Pretože $p^\alpha \parallel \pi$, z vety o kolmom priemete pravého uhla vyplýva, že pravý uhol medzi kolmicou a pôdorysnou stopou sa zachová v pôdoryse: $k_1 \perp p_1^\alpha$. Analogicky: pretože $n^\alpha \parallel \nu$, z vety o kolmom priemete pravého uhla vyplýva, že pravý uhol medzi kolmicou a nárysnou stopou sa zachová v náryse: $k_2 \perp n_2^\alpha$. Na Obr. 4.5.5 je zobrazená kolmica k na rovinu α prechádzajúca bodom M .



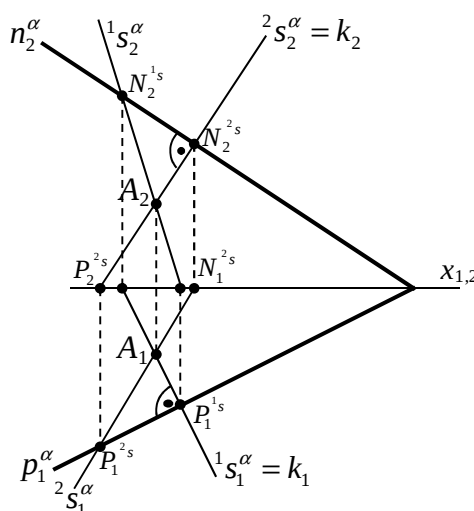
Obr. 4.5.5

Veta 4.5.3: Pre združené priemety kolmice k na rovinu α platí: $k_1 \perp p_1^\alpha \wedge k_2 \perp n_2^\alpha$.

Poznámka: Na Obr. 4.5.6a si všimnime, že spádová priamka roviny α prvej osnovy a kolmica na rovinu α majú spoločnú prvú premietáciu rovinu, preto ${}^1s_1^\alpha = k_1$ a podobne spádová priamka roviny α druhej osnovy a kolmica na rovinu α majú spoločnú druhú premietáciu rovinu, preto ${}^2s_2^\alpha = k_2$ (Obr. 4.5.6a, b).



Obr. 4.5.6a



Obr. 4.5.6b

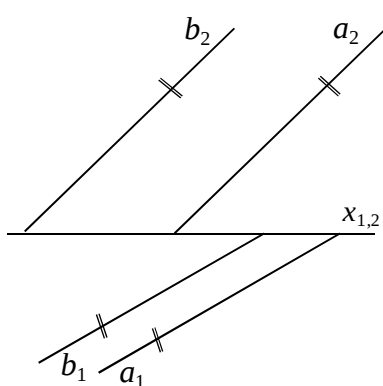
4.6 Polohové úlohy

Pod týmto názvom rozumieme skupinu úloh, ktoré sa zaoberajú vzájomnou polohou základných geometrických útvarov. Vzájomnú polohu bodu a priamky sme riešili v časti 4.3 a vzájomnú polohu bodu a roviny sme riešili v časti 4.4. V tejto časti sa budeme zaoberať vzájomnou polohou dvoch priamok, dvoch rovín a priamky a roviny.

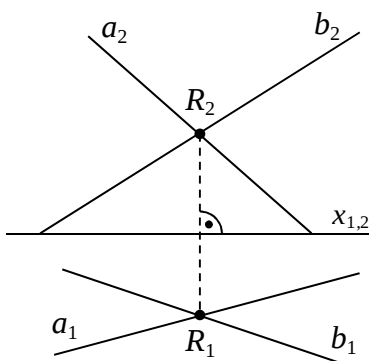
Vzájomná poloha dvoch priamok

Zo stereometrie vieme, že dve priamky v priestore môžu byť rovnobežné, rôznobežné alebo mimobežné, totožné priamky predstavujú špeciálny prípad rovnobežnosti. V Mongeovej projekcii môžu nastať rôzne prípady v súvislosti s polohou priamok vzhľadom na priemetne. Ukážeme ako to vyzerá vo všeobecnom prípade. Nech a, b sú dve priamky, ktoré nemajú špeciálnu polohu vzhľadom na žiadnu z priemetní, potom platí:

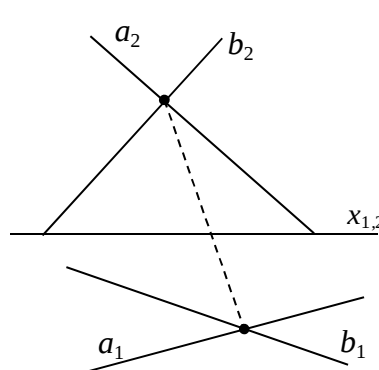
- Rovnobežné priamky (Obr. 4.6.1a): $a_1 \parallel b_1$ a $a_2 \parallel b_2$.
- Rôznobežné priamky (Obr. 4.6.1b): a_1, b_1 a a_2, b_2 sú dve dvojice rôznobežných priamok a body $\{R_1\} = a_1 \cap b_1$, $\{R_2\} = a_2 \cap b_2$ ležia na ordinále, sú to združené priemety priesečníka R priamok a, b .
- Mimobežné priamky (Obr. 4.6.1c): a_1, b_1 a a_2, b_2 sú dve dvojice rôznobežných priamok a body $a_1 \cap b_1, a_2 \cap b_2$ neležia na ordinále.



Obr. 4.6.1a

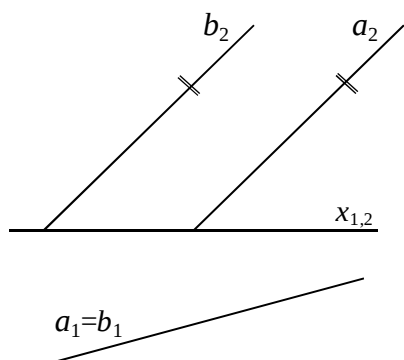


Obr. 4.6.1b

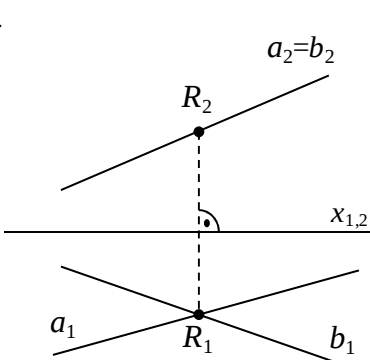


Obr. 4.6.1c

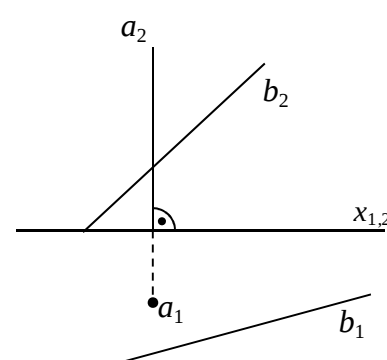
Obr. 4.6.2a zobrazuje dvojicu rovnobežných priamok so spoločnou prvou premietacou rovinou, Obr. 4.6.2b dvojicu rôznobežných priamok so spoločnou druhou premietacou rovinou a priesečníkom R . Na Obr. 4.6.2c sú združené priemety mimobežných priamok, pričom priamka a je kolmá na pôdorysňu. Ďalšie špeciálne prípady nájdete v cvičeniach za kapitolou 4.7.



Obr. 4.6.2a



Obr. 4.6.2b



Obr. 4.6.2c

Pozrime sa ešte na jeden špeciálny prípad, keď priamky a, b majú premietacie roviny kolmé na základnicu, ale samotné priamky nie sú kolmé ani na jednu priemetňu. V úlohe 4.3.2 sme videli, že takéto priamky nie sú jednoznačne určené svojim pôdorysom a nárysom, ale zadávame ich pomocou dvoch rôznych bodov. Pri riešení využijeme bokorysňu.

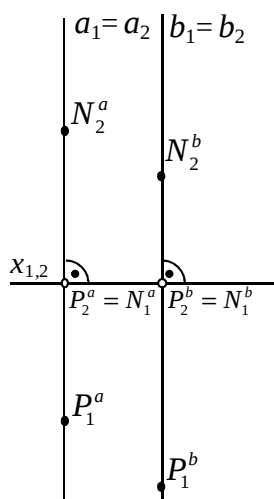
Úloha 4.6.1: Dané sú združené priemety priamok a, b kolmých na x a priemety ich stopníkov. Určte vzájomnú polohu priamok a, b , ak

- nemajú spoločné premietacie roviny (Obr. 4.6.3a),
- majú spoločnú premietaciu rovinu (Obr. 4.6.4a).

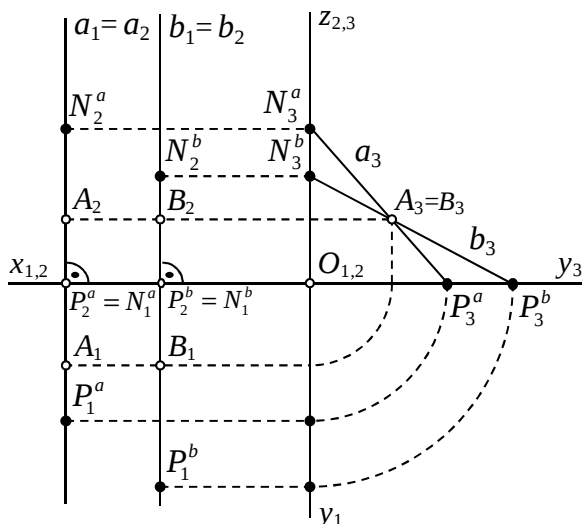
Riešenie: Priamky na Obr. 4.6.3a môžu byť rovnobežné alebo mimobežné a priamky na obrázku 4.6.4a môžu byť rovnobežné alebo rôznobežné. V oboch prípadoch postupujeme rovnako: vhodne zvolíme bokorysňu μ , vyznačíme priemety bodu O a súradnicových osí y, z . Ďalší postup:

- Podľa úlohy 4.3.2 zostrojíme tretie priemety stopníkov priamky $a: P_3^a, N_3^a$.
- Podobne zostrojíme tretie priemety stopníkov priamky $b: P_3^b, N_3^b$.
- Bokorysy priamok $a, b: a_3 = P_3^a N_3^a, b_3 = P_3^b N_3^b$.

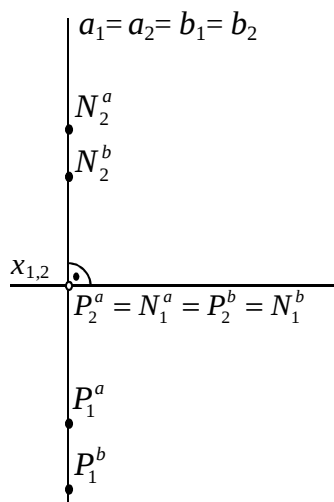
Podľa vzájomnej polohy priamok a_3, b_3 rozhodneme o vzájomnej polohe priamok a, b . V prvom prípade (Obr. 4.6.3b) sú priamky a_3, b_3 rôznobežné, z čoho vyplýva, že priamky a, b sú mimobežné. Bod $a_3 \cap b_3 = A_3 = B_3$ je bokorys dvoch rôznych bodov: $A \in a$ a $B \in b$.



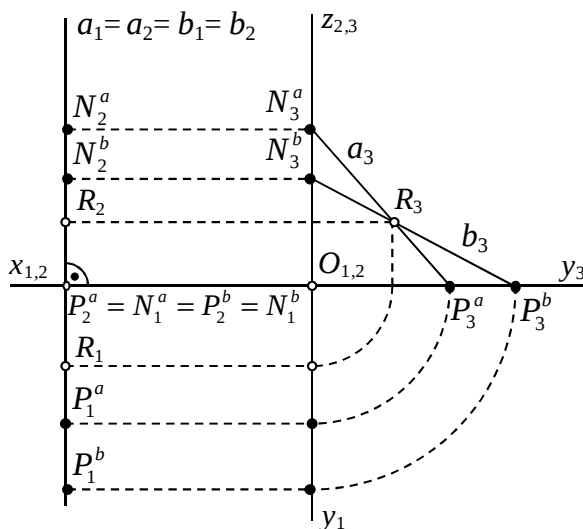
Obr. 4.6.3a



Obr. 4.6.3b



Obr. 4.6.4a



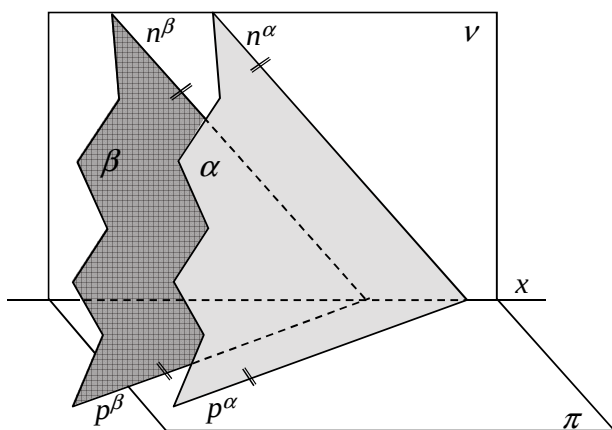
Obr. 4.6.4b

V druhom prípade (Obr. 4.6.4b) sú priamky a_3, b_3 opäť rôznobežné, z čoho vyplýva, že priamky a, b sú rôznobežné. Navyše v bokoryse môžeme určiť aj bokorys R_3 priesečníka R a odvodíme jeho pôdorys a nárýs R_1, R_2 .

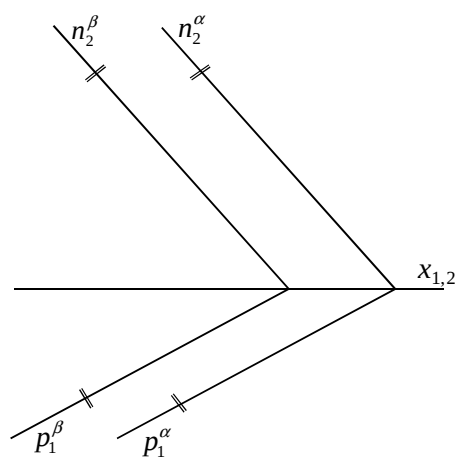
Vzájomná poloha dvoch rovín

Dve roviny môžu byť rovnobežné alebo rôznobežné, totožné roviny sú špeciálny prípad rovnobežných rovín.

Rovnobežné roviny



Obr. 4.6.5a



Obr. 4.6.5b

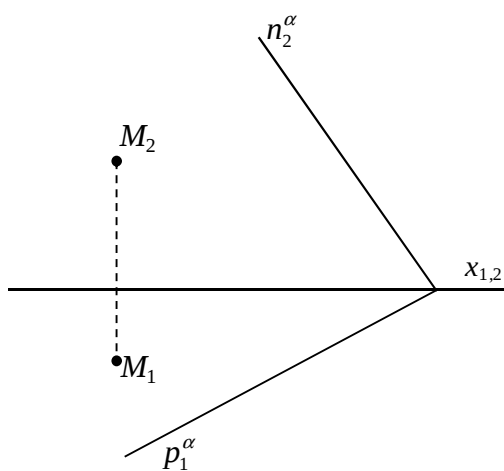
Na Obr. 4.6.5a sú znázornené rovnobežné roviny α a β vo všeobecnej polohe vzhľadom na priemetne. Z vety 2.1.1 vyplýva, že stopy rovnobežných rovín α a β sú navzájom rovnobežné priamky a pre ich priemety platí:

Veta 4.6.1: Ak $\alpha \parallel \beta$, tak $p_1^\alpha \parallel p_1^\beta$ a $n_2^\alpha \parallel n_2^\beta$ (Obr. 4.6.5 b).

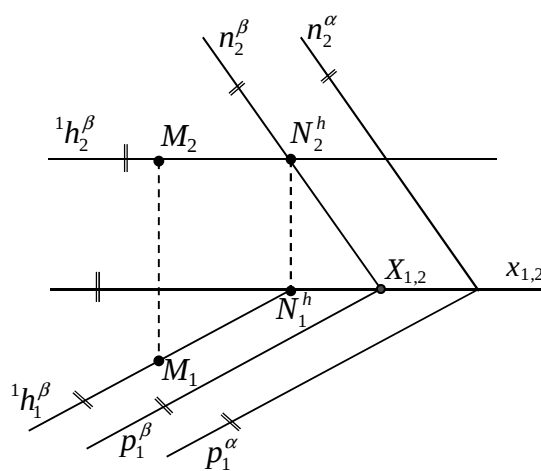
Poznámka: Opačné tvrdenie neplatí, existujú rôznobežné roviny, ktorých stopy sú rovnobežné priamky (Obr. 4.6.9).

Úloha 4.6.2: Daná je rovina α a bod $M, M \notin \alpha$. Zostrojte stopy roviny β , ktorá prechádza bodom M a je rovnobežná s rovinou α (Obr. 4.6.6a).

Riešenie: (Obr. 4.6.6b)



Obr. 4.6.6a



Obr. 4.6.6b

Pre stopy roviny β platí $p_1^\beta \parallel p_1^\alpha$ a $n_2^\beta \parallel n_2^\alpha$, takže nám stačí zostrojiť jeden stopník ľubovoľnej priamky roviny β . Použijeme hlavnú priamku prvej osnovy roviny β , prechádzajúcu bodom M .

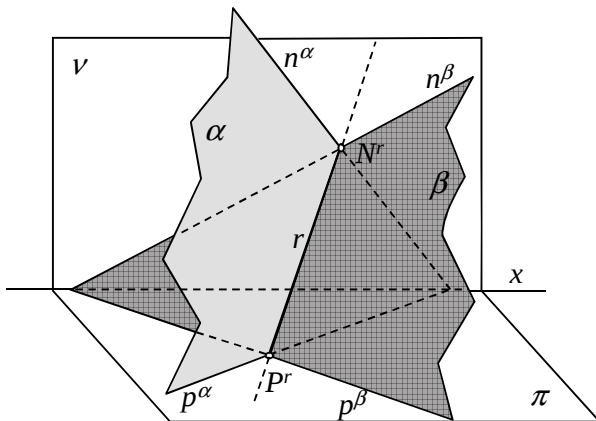
Postup:

1. Pôdorys hlavnej priamky roviny β prvej osnovy: $M_1 \in {}^1h_1^\beta \wedge {}^1h_1^\beta \parallel p_1^\alpha$.
2. Nárys hlavnej priamky roviny β prvej osnovy: $M_2 \in {}^1h_2^\beta \wedge {}^1h_2^\beta \parallel x_{1,2}$.
3. Nárysný stopník priamky ${}^1h^\beta$: $\{N_1^h\} = {}^1h_1^\beta \cap x_{1,2}$, $N_2^h \in n_2^\alpha$ a N_2^h leží na ordinále bodu N_1^h .
4. Stopy roviny β : n_2^β ; $N_2^h \in n_2^\beta \wedge n_2^\beta \parallel n_2^\alpha$, p_1^β ; $p_1^\beta \parallel p_1^\alpha \wedge p_1^\beta \cap n_2^\beta = X_{1,2} \in x_{1,2}$.

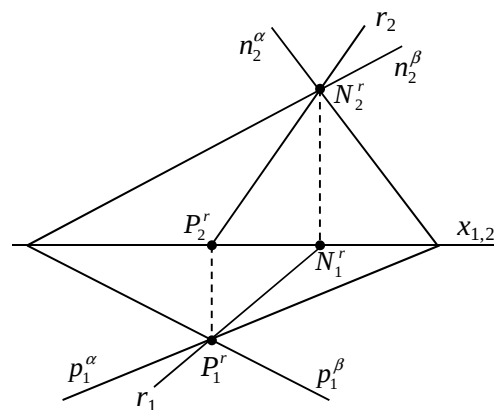
Priesečnica rôznobežných rovín

V prípade, ak stopy rovín α a β sú rôznobežné priamky, tak α a β sú rôznobežné roviny. Ich priesečnica r je určená priesečníkmi stôp rovín: $\{P^r\} = p^\alpha \cap p^\beta$, $\{N^r\} = n^\alpha \cap n^\beta$, $r = P^r N^r$ (Obr. 4.6.7a). Konštrukcia priesečnice r rovín α a β v Mongeovej projekcii je zobrazená na obrázku 4.6.7b. Postup:

1. Priemety pôdorysného stopníka: $\{P_1^r\} = p_1^\alpha \cap p_1^\beta$, $P_2^r \in x_{1,2}$, $P_1^r P_2^r$ je ordinála.
2. Priemety nárysného stopníka: $\{N_2^r\} = n_2^\alpha \cap n_2^\beta$, $N_1^r \in x_{1,2}$, $N_1^r N_2^r$ je ordinála.
3. Priemety priesečnice: $r_1 = P_1^r N_1^r$, $r_2 = P_2^r N_2^r$.



Obr. 4.6.7a



Obr. 4.6.7b

V nasledujúcej úlohe ukážeme konštrukciu priesečnice dvoch rovín v prípade, ak sú priesečníky stôp body nedostupné v nákrese.

Úloha 4.6.3: Dané sú stopy rovín α a β (Obr. 4.6.8a). Zostrojte priesečnicu rovín α a β .

Riešenie: (Obr. 4.6.8b).

Stopy rovín α a β sú rôznobežné priamky, preto dané roviny sú rôznobežné. Priesečnicu určíme dvoma rôznymi bodmi, ktoré vzniknú ako priesečníky hlavných priamok roviny α a hlavných priamok roviny β so spoločnou premietacou rovinou. Na riešenie môžeme použiť hlavné priamky prvej alebo druhej osnovy.

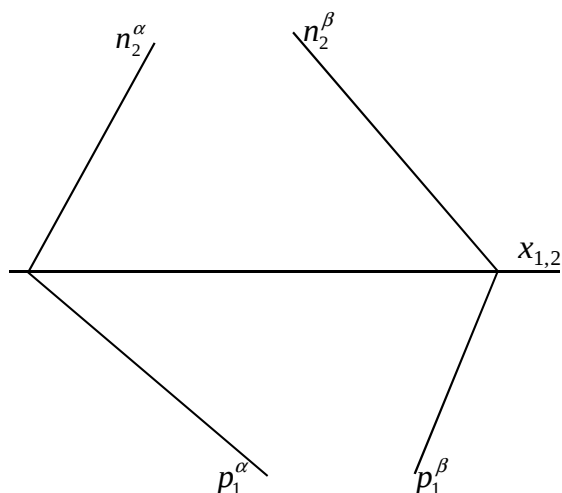
Označme r priesečnicu rovín α a β . Zostrojíme ju na základe tejto úvahy: každá rovnobežka s osou $x_{1,2}$ je pôdorys hlavnej priamky druhej osnovy roviny α aj hlavnej priamky druhej osnovy roviny β : ${}^2h_1^\alpha = {}^2h_1^\beta$. Tieto hlavné priamky sú rôznobežné, ich priesečník bod A je

bodom priesečnice r . Ďalší bod priesečnice zostrojíme pomocou inej dvojice hlavných priamok.

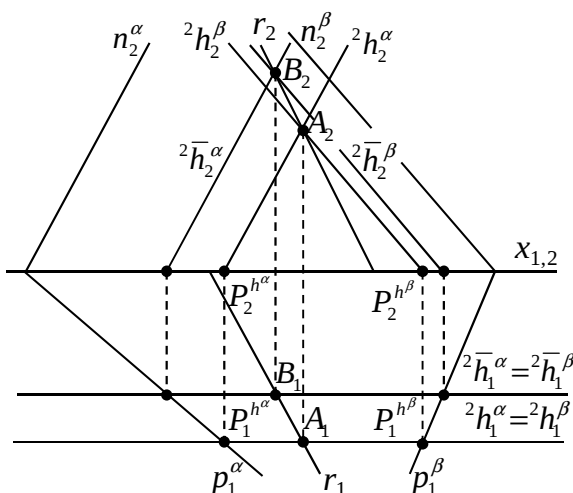
Postup konštrukcie bodu A : $\{A\} = {}^2h^\alpha \cap {}^2h^\beta$:

1. ${}^2h_1^\alpha = {}^2h_1^\beta$; ${}^2h_1^\alpha \parallel x_{1,2}$ ľubovoľne.
2. Nárys priamky ${}^2h^\alpha$: ${}^2h_2^\alpha \parallel n_2^\alpha$ a použijeme pôdorysný stopník priamky ${}^2h^\alpha$.
3. Nárys priamky ${}^2h^\beta$: ${}^2h_2^\beta \parallel n_2^\beta$ a použijeme pôdorysný stopník priamky ${}^2h^\beta$.
4. Priemety priesečníka hlavných priamok: $\{A_2\} = {}^2h_2^\alpha \cap {}^2h_2^\beta$, $\{A_1\} \in {}^2h_1^\alpha \wedge A_1$ leží na ordinále bodu A .

Ďalší bod priesečnice: $\{B\} = {}^2\bar{h}^\alpha \cap {}^2\bar{h}^\beta$. Priesečnica $r = AB$.



Obr. 4.6.8a



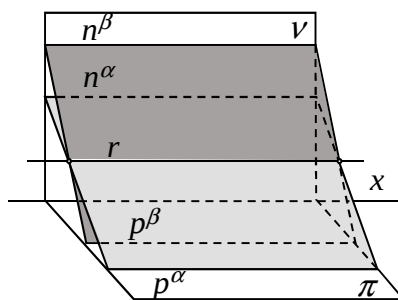
Obr. 4.6.8b

Ďalšia úloha demonštruje situáciu rôznobežných rovín, ktorých stopy sú navzájom rovnobežné priamky (Obr. 4.6.9a).

Úloha 4.6.4: Dané sú stopy rovín α a β rovnobežných s osou x (Obr. 4.6.9b). Určte vzájomnú polohu rovín α a β . Ak sú roviny rôznobežné, zostrojte ich priesečnicu.

Riešenie: (Obr. 4.6.9c) Úlohu je výhodné riešiť pomocou bokorysne. Roviny α a β sú kolmé na bokorysňu, preto bokorysy rovín sú priamky.

Bokorys roviny α je totožný so spádovou priamkou roviny α , ktorá leží v bokorysni. V tomto špeciálnom prípade platí, že spádové priamky prvej a druhej osnovy sú totožné: ${}^1s^\alpha = {}^2s^\alpha = \alpha_3$, preto nebudeme osnovu v tejto úlohe uvažovať. Rovnaký vzťah platí aj pre rovinu β : ${}^1s^\beta = {}^2s^\beta = \beta_3$.



Obr. 4.6.9a

Zvolíme polohu bokorysne μ , t. j. bod O a súradnicové osi y a z . Bokorysy rovín α a β určíme pomocou stopníkov spádových priamok s^α a s^β . Postup:

1. Stopníky spádovej priamky roviny α :

pôdorysný stopník: $\{P_1^{s^\alpha}\} = p_1^\alpha \cap s_{1,2}^\alpha$, $P_2^{s^\alpha} = O_{1,2}$, $P_3^{s^\alpha} \in y_3$, $|P_3^{s^\alpha} O_{1,2}| = |P_1^{s^\alpha} O_{1,2}|$,

nárysny stopník: $\{N_2^{s^\alpha}\} = n_2^\alpha \cap s_{1,2}^\alpha, N_1^{s^\alpha} = O_{1,2}, N_3^{s^\alpha} = N_2^{s^\alpha}.$

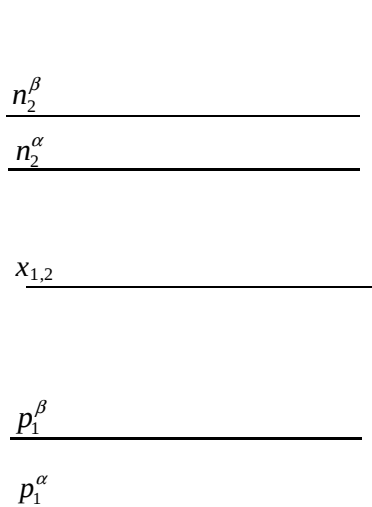
2. Stopníky spádovej priamky roviny β :

pôdorysný stopník: $\{P_1^{s^\beta}\} = p_1^\beta \cap s_{1,2}^\beta, P_2^{s^\beta} = O_{1,2}, P_3^{s^\beta} \in y_3, |P_3^{s^\beta} O_{1,2}| = |P_1^{s^\beta} O_{1,2}|,$

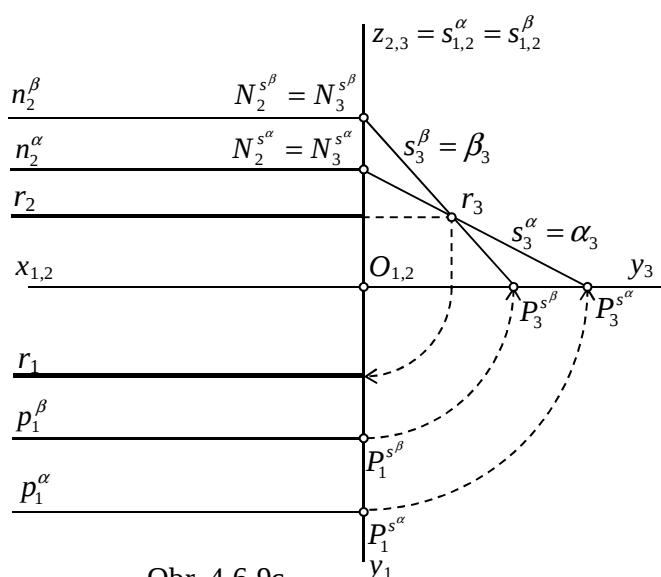
nárysny stopník: $\{N_2^{s^\beta}\} = n_2^\beta \cap s_{1,2}^\beta, N_1^{s^\beta} = O_{1,2}, N_3^{s^\beta} = N_2^{s^\beta}.$

3. Bokorysy rovín α a β : $\alpha_3 = s_3^\alpha = P_3^{s^\alpha} N_3^{s^\alpha}, \beta_3 = s_3^\beta = P_3^{s^\beta} N_3^{s^\beta}.$

Ak $\alpha_3 \parallel \beta_3$, tak $\alpha \parallel \beta$. Ak $\alpha_3 \times \beta_3$, tak $\alpha \times \beta$. Ak sú roviny rôznobežné, ich priesečnica r je rovnobežná so základnicou a jej bokorys je bod $\alpha_3 \cap \beta_3 = \{r_3\}$, z bokorysu odvodíme pôdorys a nárys priesečnice r . V našom prípade sú roviny α, β rôznobežné.



Obr. 4.6.9b



Obr. 4.6.9c

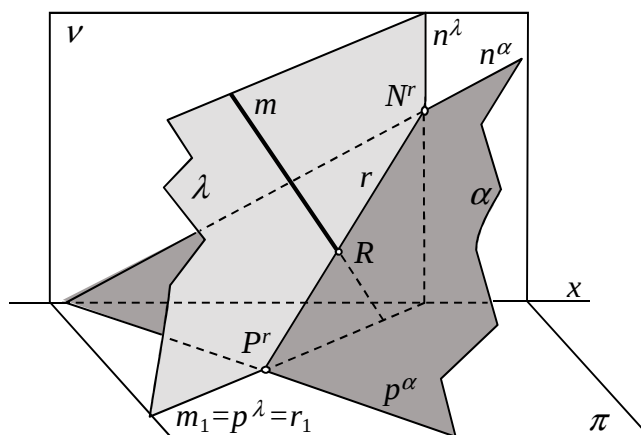
Vzájomná poloha priamky a roviny

Priamka môže byť s rovinou rovnobežná alebo rôznobežná, ak priamka v rovine leží, je to špeciálny prípad rovnobežnosti. Postupujeme tak, že hľadáme priesečník priamky s rovinou a ak priesečník existuje, priamka je s rovinou rôznobežná, v opačnom prípade je priamka s rovinou rovnobežná.

Daná je priamka m a rovina α . Úlohou, zostrojiť priesečník priamky s rovinou, sme sa podrobne zaoberali v časti 2.1. V Mongeovej projekcii postupujeme rovnako (Obr. 4.6.10a):

1. Pomocná rovina λ ; $m \subset \lambda$ a $\lambda \perp \pi$.
2. Priesečnica r ; $r = \alpha \cap \lambda, r_1 = m_1$.
3. R ; $\{R\} = r \cap m$.

Bod R je hľadaný priesečník priamky m a roviny α .



Obr. 4.6.10a

Priamky m a r majú spoločnú prvú premietáciu rovinu, preto sa ich pôdorysy prekrývajú: $r_1 = m_1$. Priamku r nazývame **krycia priamka** a celý postup sa nazýva **metóda krycej priamky**.

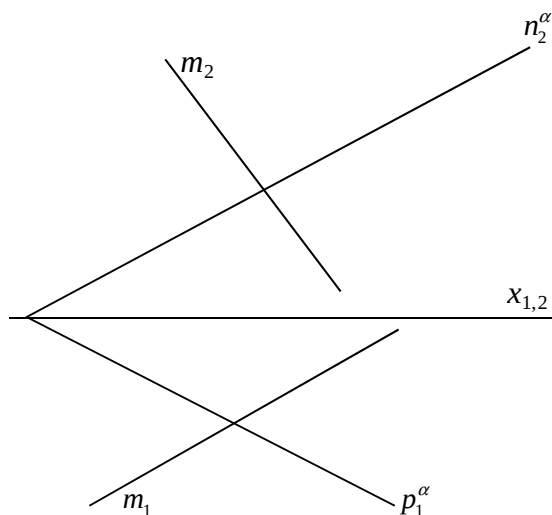
Poznámka: Pomocná rovina λ by mohla byť kolmá na nárysňu ($m \subset \lambda$ a $\lambda \perp \nu$), vtedy by sa prekrývali nárysy priamok r a m : $r_2 = m_2$.

Úloha 4.6.5 (Metóda krycej priamky): Daná je priamka m a rovina α (Obr. 4.6.10b). Určte vzájomnú polohu priamky m a roviny α . V prípade, že sú rôznobežné, zostrojte ich priesečník.

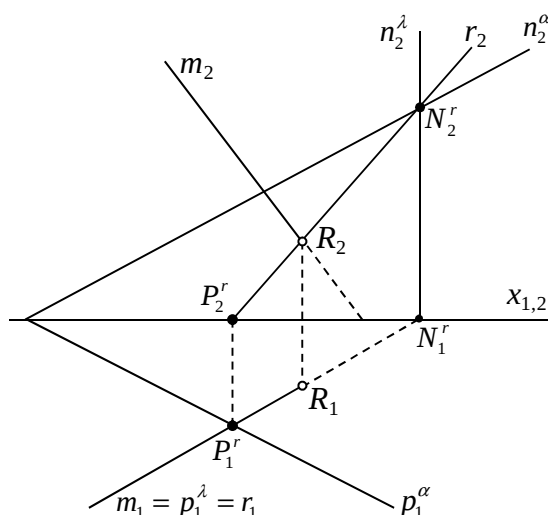
Riešenie: (Obr. 4.6.10c) Na riešenie použijeme rovinu λ kolmú na pôdorysňu.

Postup:

1. Pomocná rovina λ ; $m \subset \lambda$ a $\lambda \perp \pi$. Pre stopy roviny λ platí: $p_1^\lambda = m_1$ a $n_2^\lambda \perp x_{1,2}$.
2. Krycia priamka $r = \alpha \cap \lambda$, $r_1 = m_1$, nárys priamky r zostrojíme pomocou jej stopníkov:
 $\{P_1^r\} = r_1 \cap p_1^\alpha$, $P_2^r \in x_{1,2}$ a P_2^r leží na ordinále bodu P^r ,
 $\{N_1^r\} = r_1 \cap x_{1,2}$, $N_2^r \in n_2^\alpha$ a N_2^r leží na ordinále bodu N^r ,
 $r_2 = P_2^r N_2^r$.
3. Môžu nastať tri prípady:
 - $r_2 \times m_2$: priamka m je rôznobežná s rovinou α . Priesečník $\{R\} = \alpha \cap m$: $R_2 = r_2 \cap m_2$, $R_1 \in m_1$ a R_1 leží na ordinále bodu R .
 - $r_2 \parallel m_2 \wedge r_2 \neq m_2$: priamka m je rovnobežná s rovinou α , m neleží v α .
 - $r_2 = m_2$: priamka m leží v rovine α .



Obr. 4.6.10b



Obr. 4.6.10c

Viditeľnosť: Dôležitá súčasť riešenia úloh v geometrii je viditeľnosť jednotlivých objektov, resp. viditeľnosť daného objektu vzhľadom na ostatné objekty.

Mongeova projekcia predstavuje dva pohľady na objekt, viditeľnosť určujeme pre každý priemet zvlášť. Pôdorys predstavuje pohľad zhora, z dvoch bodov, ktoré majú zhodný pôdorys (krycie body), vidíme ten, ktorý je „vyššie“, t. j. má väčšiu z-ovú súradnicu. Z-ové

súradnice môžeme porovnať v náryse. Analogicky, nárys predstavuje pohľad spredu, preto z dvoch bodov, ktoré majú zhodný nárys (krycie body), je viditeľný ten, ktorý je „viac vpredu“, t. j. má väčšiu y -ovú súradnicu. Y -ové súradnice môžeme porovnať v pôdoryse. Túto metódu nazývame **metóda krycích bodov**.

Úloha 4.6.6: V Mongeovej projekcii je daný trojuholník ABC a priamka m (Obr. 4.6.11a). Zostrojte priesečník priamky m s trojuholníkom ABC .

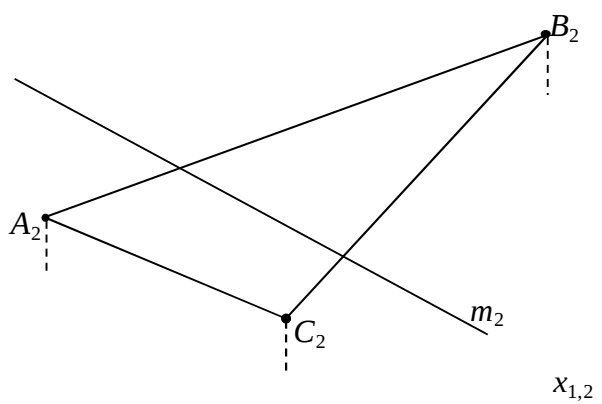
Riešenie: (Obr. 4.6.11b)

Ide vlastne o úlohu zostrojiť priesečník priamky m s rovinou $\alpha = ABC$, túto úlohu riešime metódou krycej priamky:

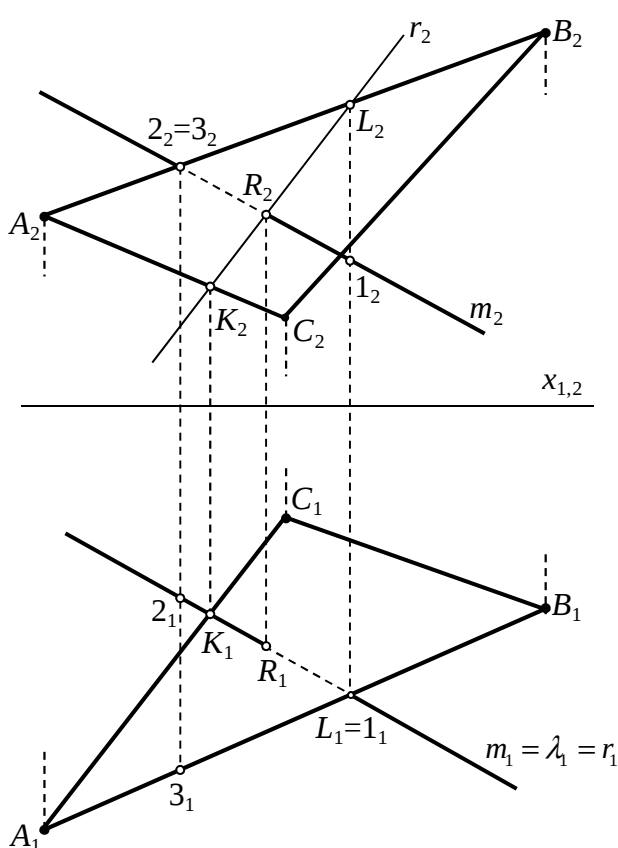
1. Pomocná rovina λ ; $m \subset \lambda$ a $\lambda \perp \pi$. Platí: $\lambda_1 = m_1$.
2. r ; $r = \alpha \cap \lambda$, $r_1 = \lambda_1 = m_1$. Priamka r leží v rovine $\alpha = ABC$, preto je so stranami ΔABC rôznobežná (aspoň s dvomi) : $\{K_1\} = r_1 \cap A_1C_1$, $\{L_1\} = r_1 \cap A_1B_1$. Nárysy bodov K , L : $K_2 \in A_2C_2$ a $L_2 \in A_2B_2$. Nárys priamky r je $r_2 = K_2L_2$.
3. R ; $\{R\} = r \cap m$, $\{R_2\} = r_2 \cap m_2$, $R_1 \in m_1$ a R_1 leží na ordinále bodu R .

Viditeľnosť určíme pomocou krycích bodov 1 a L v pôdoryse a bodov 2 a 3 v náryse:

- $1 \in m$, $L \in AB$, $z^L > z^1$, bod 1 je pod bodom L , preto v pôdoryse úsečku $1R$ nevidíme,
 $2 \in m$, $3 \in AB$, $y^3 > y^2$, bod 2 je za bodom 3, preto v náryse úsečku $R2$ nevidíme.



Obr. 4.6.11a



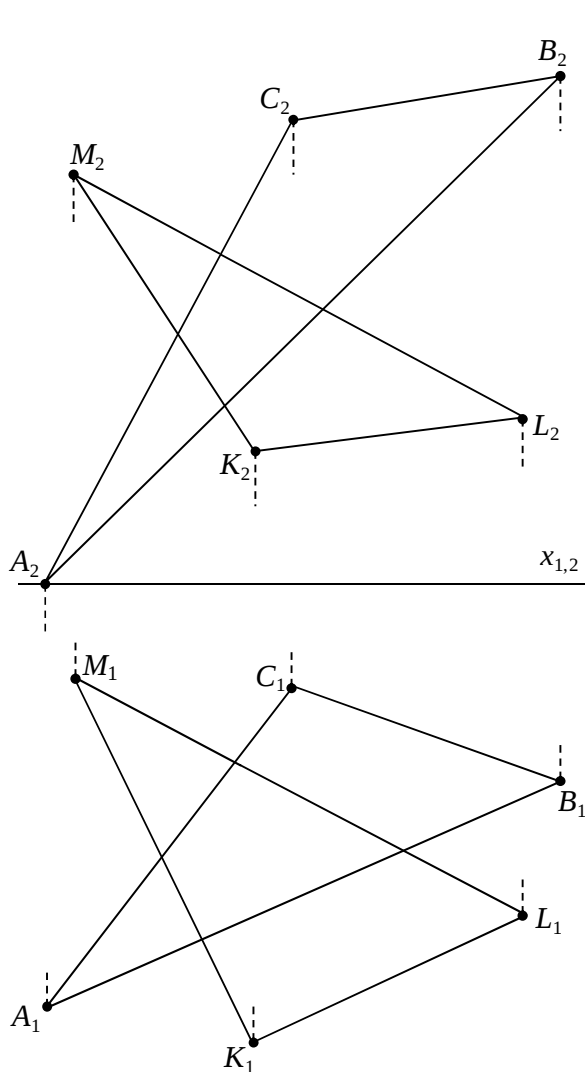
Obr. 4.6.11b

Úloha 4.6.7: V Mongeovej projekcii sú dané trojuholníky ABC a KLM (Obr. 4.6.12a). Zostrojte prienik týchto trojuholníkov.

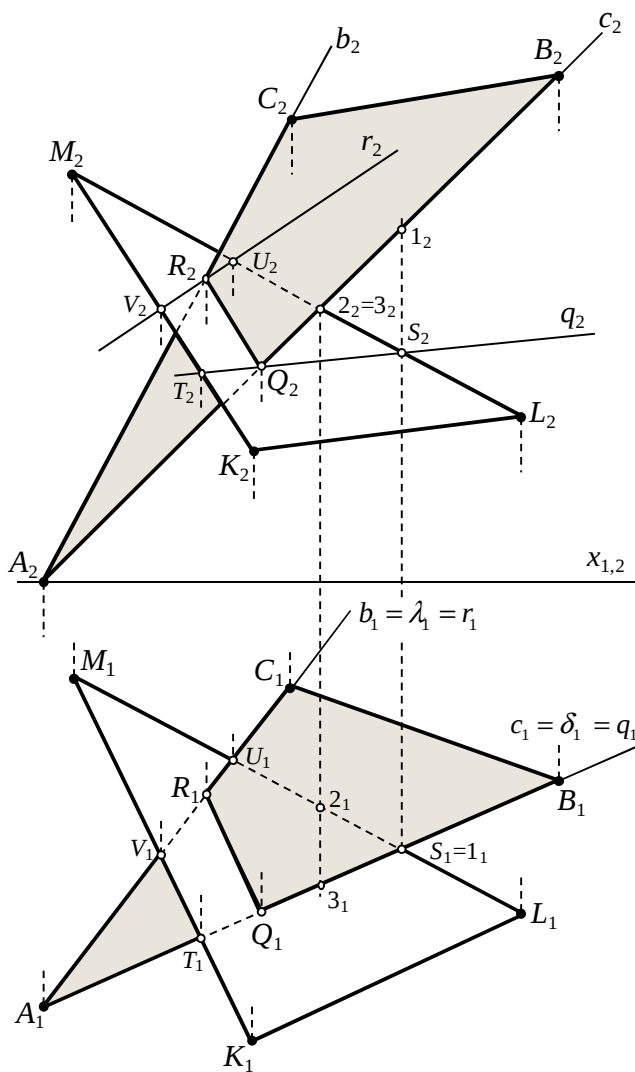
Riešenie: (Obr. 4.6.12b)

Prienikom trojuholníkov je úsečka QR na priesečnici rovín trojuholníkov ABC a KLM :

$\{Q\} = AB \cap KLM$, $\{R\} = AC \cap KLM$. Konštrukcia bodov Q a R je analogická ako konštrukcia bodu R v predchádzajúcej úlohe. Viditeľnosť určíme metódou krycích bodov 1 a 5 v pôdoryse a bodov 2 a 3 v náryse.



Obr. 4.6.12a



Obr. 4.6.12b

Podrobnejší postup:

1. Označíme priamky $b = AC$, $c = AB$, t. j. $b_1 = A_1C_1$, $b_2 = A_2C_2$, $c_1 = A_1B_1$, $c_2 = A_2B_2$.
2. Pomocná rovina λ ; $b \subset \lambda$ a $\lambda \perp \pi$. Platí: $\lambda_1 = b_1$.
3. r ; $r = KLM \cap \lambda$, $r_1 = \lambda_1 = b_1$. Priamka r leží v rovine trojuholníka KLM , preto je s jeho stranami rôznobežná: $\{U_1\} = r_1 \cap L_1M_1$, $\{V_1\} = r_1 \cap K_1M_1$. Nárysy bodov U , V : $U_2 \in L_2M_2$ a $V_2 \in K_2M_2$. Nárys priamky r je $r_2 = U_2V_2$.
4. R ; $\{R\} = r \cap b$, $\{R_2\} = r_2 \cap b_2$, $R_1 \in b_1$.

5. Pomocná rovina δ ; $c \subset \delta$ a $\delta \perp \pi$. Platí: $\delta_1 = c_1$.
6. q ; $q = KLM \cap \delta$, $q_1 = \delta_1 = c_1$. Nárys q_2 priamky q , odvodíme pomocou bodov S , T : $\{S_1\} = q_1 \cap L_1M_1$, $\{T_1\} = q_1 \cap K_1M_1$. Nárysy bodov S , T : $S_2 \in L_2M_2$ a $T_2 \in K_2M_2$. Nárys priamky q je $q_2 = S_2T_2$.
7. Q ; $\{Q\} = q \cap c$, $\{Q_2\} = q_2 \cap c_2$, $Q_1 \in c_1$.
8. Úsečka RQ je hľadaný prienik trojuholníkov ABC a KLM .
9. Viditeľnosť v pôdoryse: krycie body $S \in LM$, $1 \in AB$, $S_1 = 1_1$. Z nárysu vyplýva $z^1 > z^S$, t. j. bod 1 je nad bodom S .
10. Viditeľnosť v náryse: krycie body $2 \in LM$, $3 \in AB$, $2_1 = 3_1$. Z pôdorysu vyplýva $y^3 > y^2$, t. j. bod 3 je pred bodom 2.

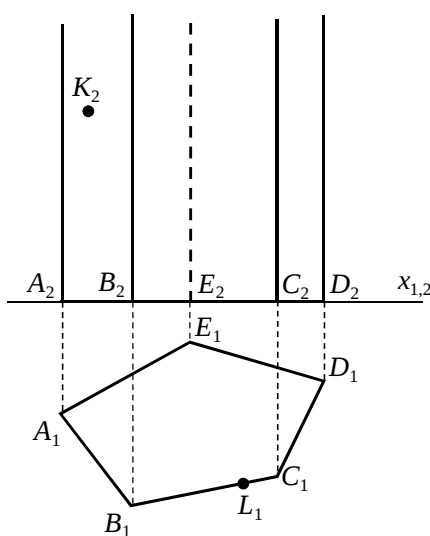
4.7 Úlohy na hranolových plochách

Teraz si ukážeme, ako sa dajú poznatky z predchádzajúcich častí využiť pri riešení úloh. Ako príklad nám poslúži hranolová plocha s podstavou v pôdorysni.

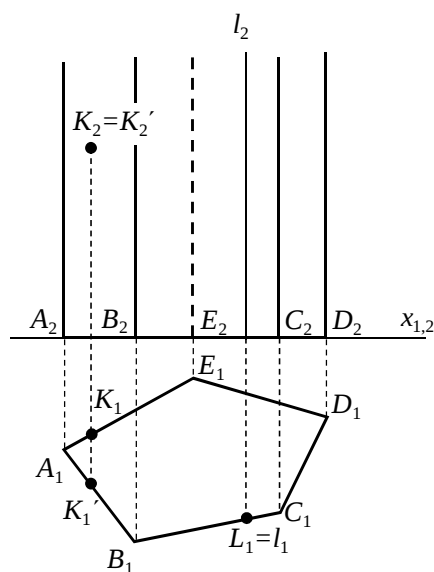
Úloha 4.7.1: Daná je kolmá 5-boká hranolová plocha s podstavou $ABCDE$ v pôdorysni a nárys K_2 bodu K a pôdorys L_1 bodu L , ktoré ležia na hranolovej ploche (Obr. 4.7.1a). Zostrojte pôdorys bodu K a nárys bodu L .

Riešenie: (Obr. 4.7.1b)

1. Pôdorys bodu K : Zadaný bod K_2 predstavuje nárys dvoch bodov hranolovej plochy K a K' : $K_2 = K_2'$. Ich pôdorysy ležia na stranách 5-uholníka $A_1B_1C_1D_1E_1$ a na spoločnej ordinále bodov K a K' .
2. Nárys bodu L : Pôdorys L_1 bodu L je pôdorysom tvoriacej priamky l hranolovej plochy: $L_1 = l_1$. Nárys bodu L nie je jednoznačne určený, môže ležať kdekoľvek na náryse l_2 priamky l .



Obr. 4.7.1a

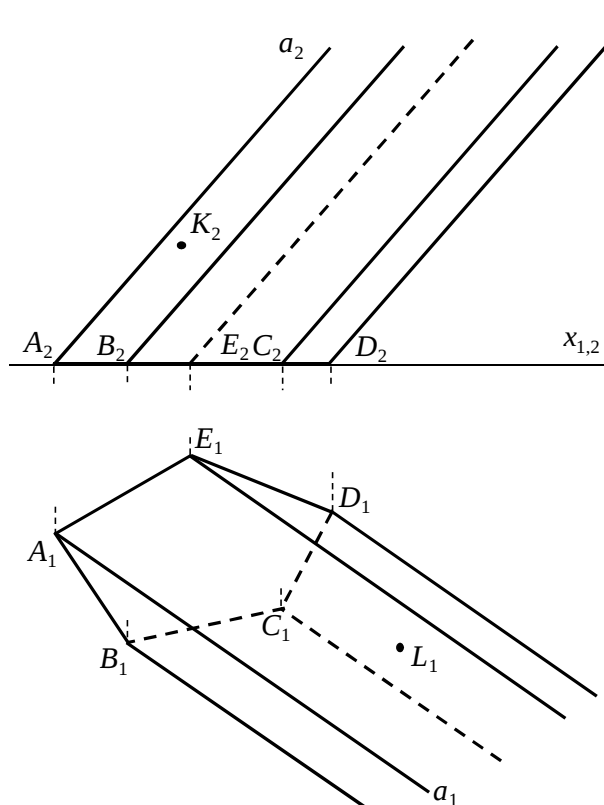


Obr. 4.7.1b

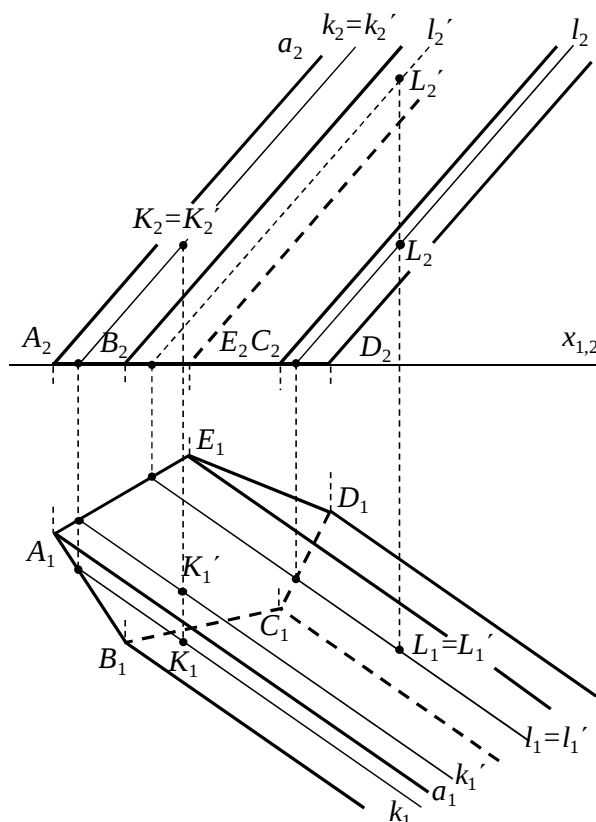
Úloha 4.7.2: Daná je šikmá 5-boká hranolová plocha s podstavou $ABCDE$ v pôdorysni a nárys K_2 bodu K a pôdorys L_1 bodu L , ktoré ležia na hranolovej ploche (Obr. 4.7.2a). Zostrojte pôdorys bodu K a nárys bodu L .

Riešenie: (Obr. 4.7.2b)

1. Pôdorys bodu K : Zadaný bod K_2 predstavuje nárys dvoch bodov hranolovej plochy K a K' : $K_2 = K_2'$. Pôdorysy bodov K a K' odvodíme pomocou tvoriacich priamok hranolovej plochy k a k' , ktoré majú spoločnú druhú premietáciu rovinu, preto $k_2 = k_2'$. Priamka k leží v stene určenej úsečkou AB , priamka k' v stene určenej úsečkou AE , obidve steny sú pri pohľade zhora viditeľné, preto aj priamky k a k' sú v pôdoryse viditeľné. Pôdorysy bodov K a K' : $K_1 \in k_1$, $K_1' \in k_1'$ a K_1 , K_1' ležia na spoločnej ordinále bodov K a K' .
2. Nárys bodu L : Zadaný bod L_1 predstavuje pôdorys dvoch bodov hranolovej plochy L a L' : $L_1 = L_1'$. Nárysy bodov L a L' odvodíme pomocou tvoriacich priamok hranolovej plochy l a l' , ktoré majú spoločnú prvú premietáciu rovinu, preto $l_1 = l_1'$. Priamka l leží v stene určenej úsečkou CD , priamka l' v stene určenej úsečkou AE . Stena s určujúcou úsečkou CD je pri pohľade spredu viditeľná, preto aj priamka l je v náryse viditeľná na rozdiel od priamky l' , ktorá v náryse viditeľná nie je. Nárysy bodov L a L' : $L_2 \in l_2$, $L_2' \in l_2'$ a L_2 , L_2' ležia na spoločnej ordinále bodov L a L' .



Obr. 4.7.2a

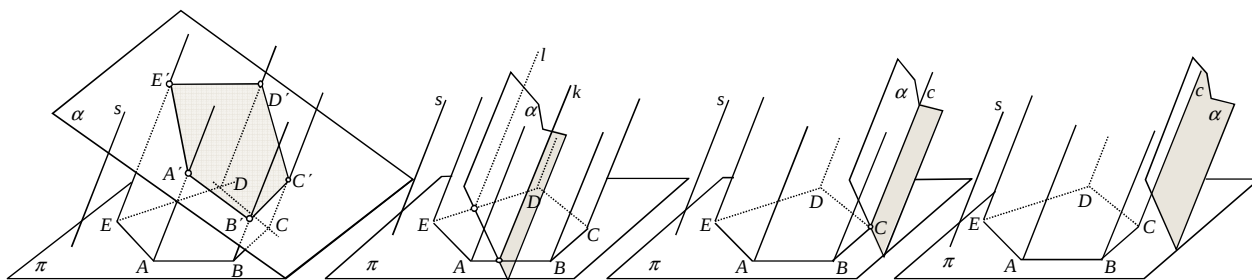


Obr. 4.7.2b

Nasledujúce tri príklady sú venované konštrukcii prieniku (rezu) hranolovej plochy a roviny. Daná bude rovina α (rezová rovina) a hranolová plocha s určujúcim 5-uholníkom $ABCDE$ v pôdorysni a smerom tvoriacich priamok s . Prienik hranolovej plochy a roviny α :

- Ak $\alpha \times s$, tak rez je 5-uholník $A'B'C'D'E'$ (Obr. 4.7.3a), špeciálne ak $\alpha \parallel \pi$, tak $A'B'C'D'E'$ je 5-uholník zhodný s určujúcim 5-uholníkom $ABCDE$.

- Ak $\alpha \parallel s$, tak prienikom môžu byť dve tvoriace priamky hranolovej plochy (Obr. 4.7.3b) alebo jedna tvoriaca priamka (Obr. 4.7.3c) alebo prázdna množina (Obr. 4.7.3d).



Obr. 4.7.3a

Obr. 4.7.3b

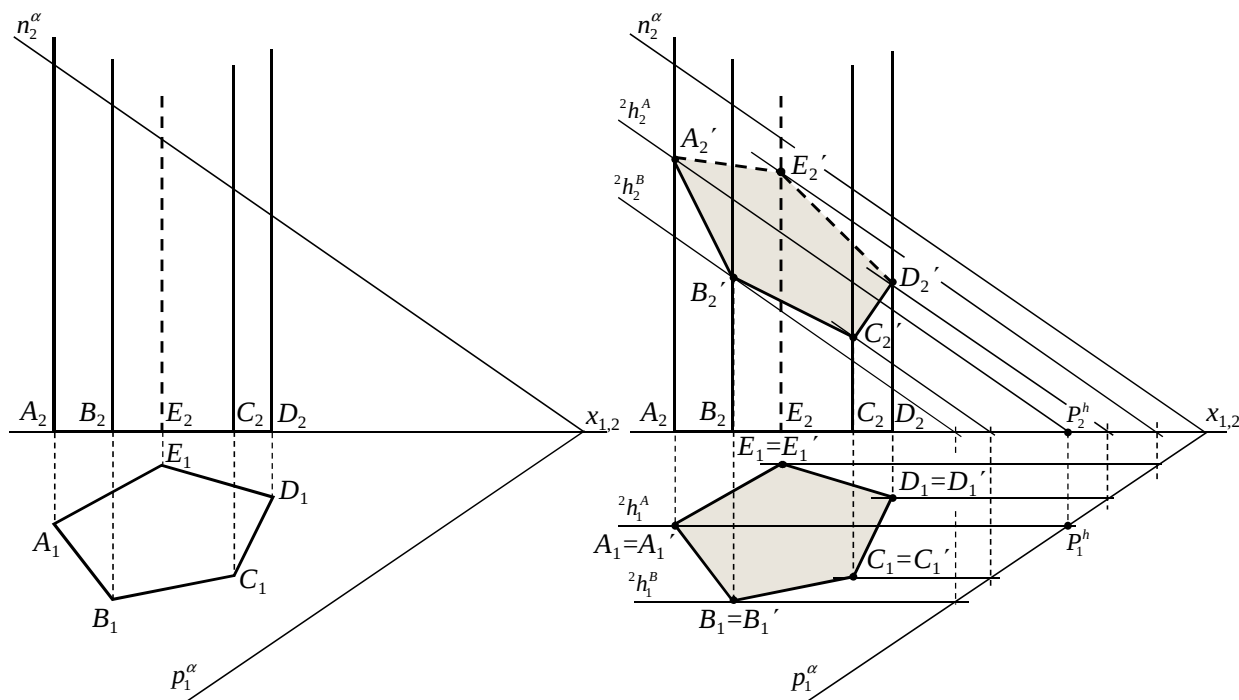
Obr. 4.7.3c

Obr. 4.7.3d

Úloha 4.7.3: Daná je kolmá 5-boká hranolová plocha s určujúcim 5-uholníkom $ABCDE$ v pôdorysni a rovina α (Obr. 4.7.4a). Zostrojte rez plochy rovinou α .

Riešenie: (Obr. 4.7.4b)

1. Pôdorys $A_1'B_1'C_1'D_1'E_1'$ rezového 5-uholníka je zhodný s pôdorysom $A_1B_1C_1D_1E_1$ určujúceho 5-uholníka hranolovej plochy.
2. Nárys $A_2'B_2'C_2'D_2'E_2'$ rezového 5-uholníka môžeme zostrojiť pomocou hlavných priamok roviny α prvej alebo druhej osnovy, použili sme hlavné priamky druhej osnovy. Steny hranolovej plochy s určujúcou úsečkou AE a ED nie sú v náryse viditeľné, preto aj úsečky $A'E'$, $D'E'$ rezového 5-uholníka nie sú v náryse viditeľné.



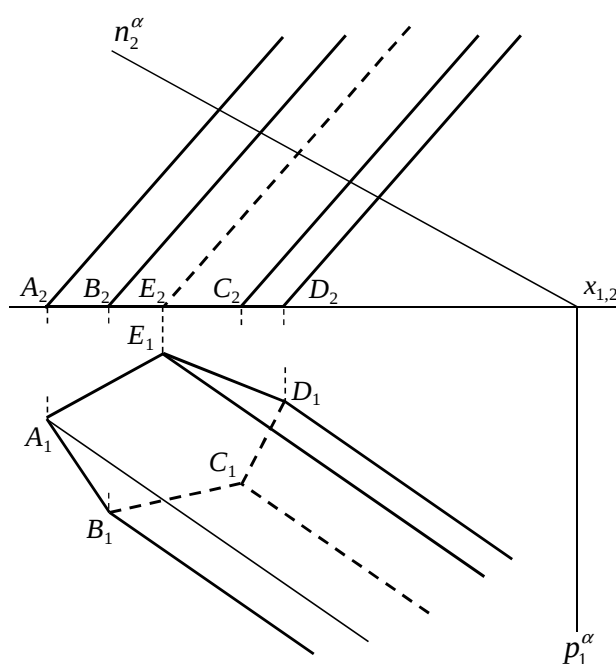
Obr. 4.7.4a

Obr. 4.7.4b

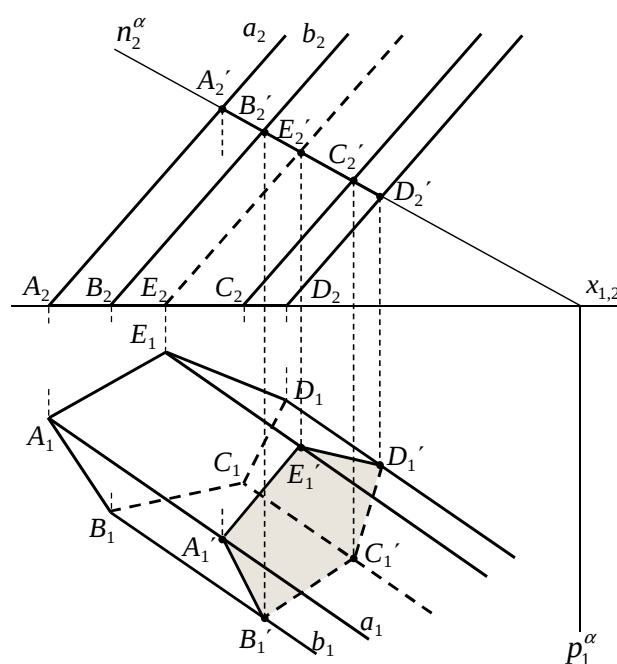
Úloha 4.7.4: Daná je šikmá 5-boká hranolová plocha s určujúcim 5-uholníkom $ABCDE$ v pôdorysni a rovina α kolmá na nárysnu (Obr. 4.7.5a). Zostrojte rez plochy rovinou α .

Riešenie: (Obr. 4.7.5b)

1. Nárys roviny α je jej nárysná stopa n_2^α . Nárys $A_2'B_2'C_2'D_2'E_2'$ rezového 5-uholníka je úsečka $A_2'D_2'$ na náryskej stope: $\{A_2'\} = a_2 \cap n_2^\alpha$, $\{B_2'\} = b_2 \cap n_2^\alpha$, ...
2. Body A' , B' , ležia tvoriacich priamkach plochy a , b , Ich pôdorysy zostrojíme: $\{A_1'\} \in a_1$ a A_1' leží na ordinále bodu A , $\{B_1'\} \in b_1$ a B_1' leží na ordinále bodu B , ... Viditeľnosť rezového 5-uholníka $A'B'C'D'E'$ v pôdoryse je rovnaká ako viditeľnosť určujúceho 5-uholníka $ABCDE$ v pôdoryse.



Obr. 4.7.5a



Obr. 4.7.5b

Úloha 4.7.5: Daná je šikmá 5-boká hranolová plocha s určujúcim 5-uholníkom $ABCDE$ v pôdorysni a rovina α (Obr. 4.7.6a). Zostrojte rez plochy rovinou α .

Riešenie: (Obr. 4.7.6b)

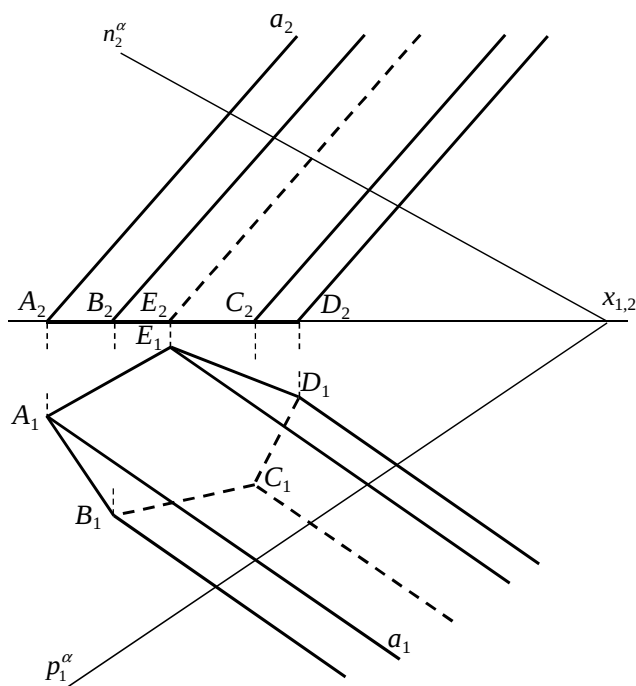
Určujúci 5-uholník $ABCDE$ a rezový 5-uholník $A'B'C'D'E'$ sú afinne združené útvary v perspektívnej afinitě. Ide o perspektívnu afinitu medzi rovinami π a α s osou $p^\alpha = \pi \cap \alpha$ a smerom $s \parallel a$ (a je tvoriaca priamka plochy prechádzajúca bodom A). Priemet tejto perspektívnej afinity do pôdorysne je perspektívna afinita v rovine π s osou p_1^α a smerom $s_1 \parallel a_1$. Najprv pomocou tejto perspektívnej afinity zostrojíme pôdorys rezu, potom odvodíme nárys rezu z pôdorysu.

Perspektívna afinita v rovine π zobrazí 5-uholník $A_1B_1C_1D_1E_1$ do 5-uholníka $A_1'B_1'C_1'D_1'E_1'$. Os aj smer afinity máme, chýba nám dvojica afinne združených bodov (vzor, obraz), preto jeden z bodov A' , B' , C' , D' , E' musíme zostrojiť ako priesečník tvoriacej priamky hranolovej plochy s rovinou α . Tvoriacu priamku si vyberieme tak, aby nám konštrukcia dobre vychádzala v nákrese. V našej úlohe zostrojíme bod D' ; $\{D'\} = d \cap \alpha$.

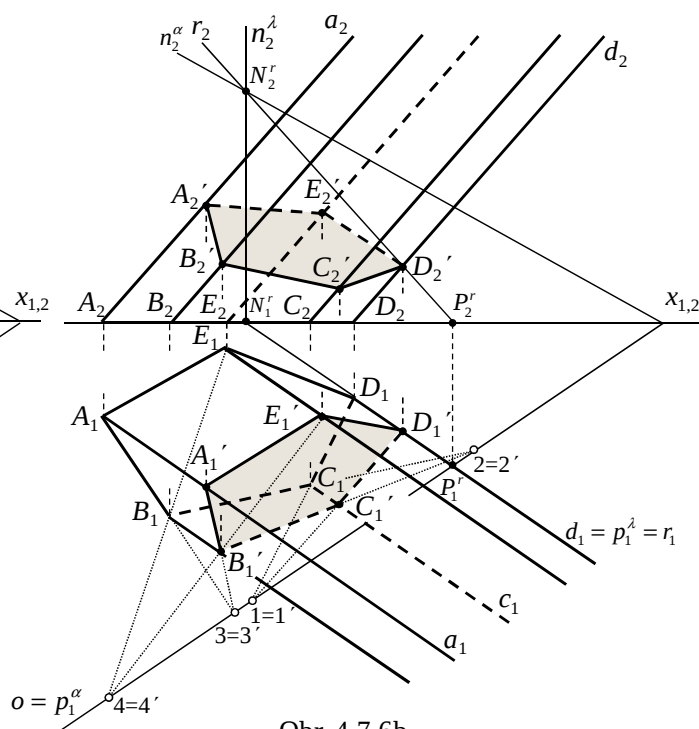
Postup:

1. d_1, d_2 ; d je tvoriaca priamka hranolovej plochy prechádzajúca bodom D .
2. D' ; $\{D'\} = d \cap \alpha$. Bod D' zostrojíme metódou krycej priamky:
 1. Pomocná rovina λ ; $d \subset \lambda$ a $\lambda \perp \pi$.
 2. Krycia priamka r ; $r = \alpha \cap \lambda$, $r_1 = d_1$.
 3. Priesečník D' ; $\{D'\} = d \cap r = d \cap \alpha$.
3. V perspektívnej afinite, ktorá je určená: os $o = p_1^\alpha$, dvojica $D_1 \rightarrow D_1'$, zostrojíme body A_1', B_1', C_1', E_1' ako obrazy bodov A_1, B_1, C_1, E_1 . Konštrukcia bodu C_1' :
 1. $1; \{1\} = C_1 D_1 \cap p_1^\alpha$, $1 = 1'$,
 2. $C_1'; \{C_1'\} = c_1 \cap D_1' 1'$.
4. $A_2'; \{A_2'\} \in a_2$ a A_2' leží na ordinále bodu A' . Body B_2', C_2', E_2' zostrojíme podobne.

Na záver určíme viditeľnosť rezového 5-uholníka $A'B'C'D'E'$ v pôdoryse, resp. v náryse podľa viditeľnosti jednotlivých stien hranolovej plochy v pôdoryse, resp. v náryse.



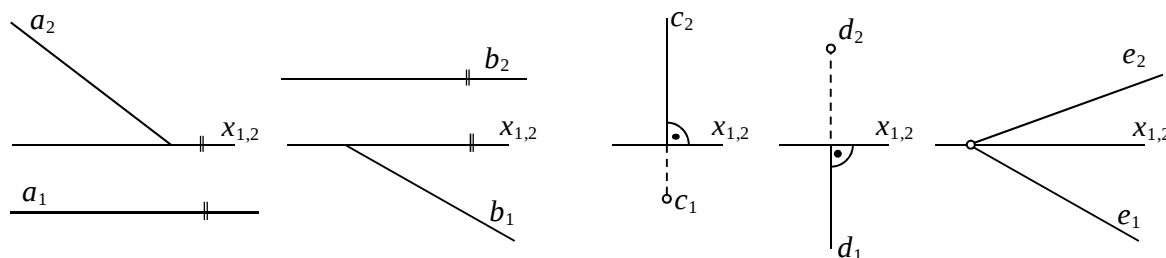
Obr. 4.7.6a



Obr. 4.7.6b

Cvičenia

1. Na Obr. 1 sú v Mongeovej projekcii zobrazené priamky a, b, c, d, e . Určte akú polohu majú tieto priamky vzhľadom na priemetne a zostrojte ich stopníky.



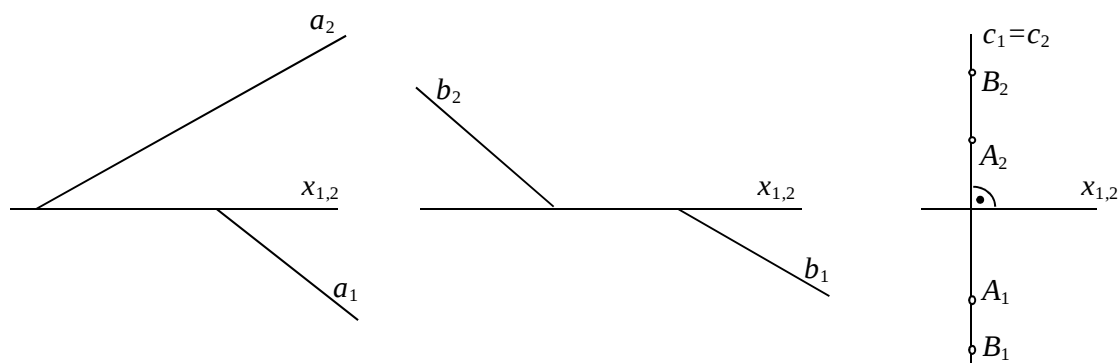
Obr. 1

2. Dané sú body A, B svojimi súradnicami. V Mongeovej projekcii zobrazte priamku $m = AB$ a zostrojte jej stopníky.

a) $A[-3; 1; 6], B[2; 4; 2]$,

b) $A[-3; 3; 4], B[1; 1; 2]$.

3. Zostrojte stopníky priamok a, b, c zobrazených na Obr. 2.



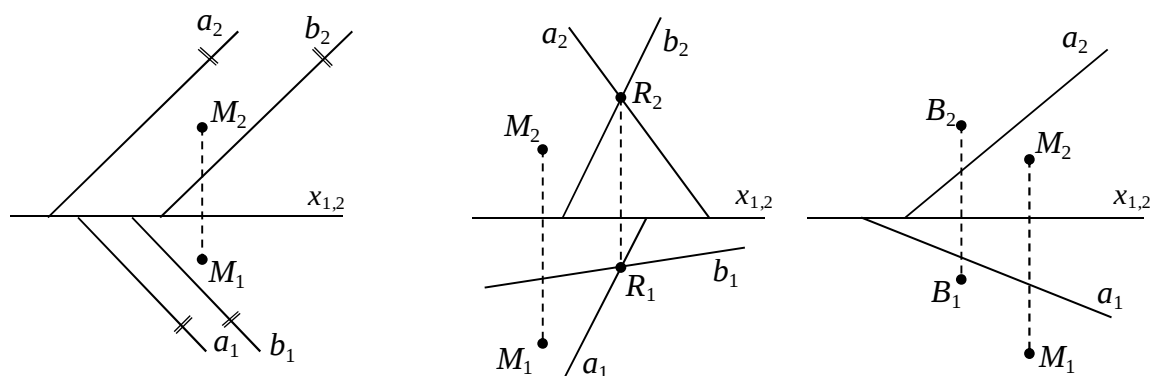
Obr. 2

4. Zistite, či bod M leží v rovine α (Obr. 3), ktorá je daná

a) dvoma rovnobežnými priamkami a, b ,

b) dvoma rôznobežnými priamkami a, b ,

c) bodom B a priamkou a .

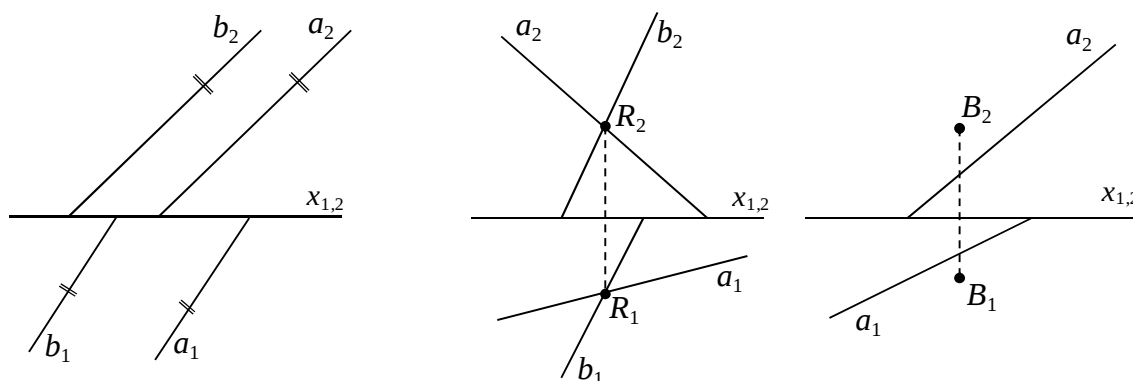


Obr. 3

5. Zostrojte stopy roviny α , ktorá je daná bodmi A, B, C , $A[0; 3; 1]$, $B[-2; 1; 2]$, $C[1; 2; 3]$.

6. Zostrojte stopy roviny α , ktorá je daná (Obr. 4)

- dvoma rovnobežnými priamkami,
- dvoma rôznobežnými priamkami,
- bodom B a priamkou a .

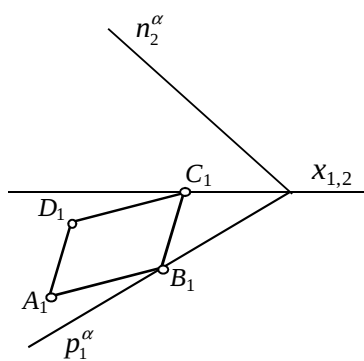


Obr. 4

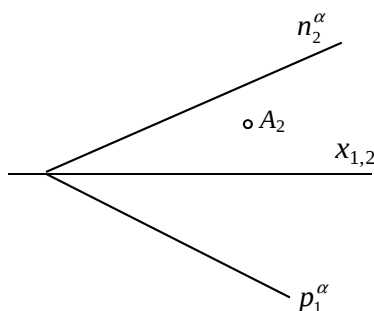
7. Dané sú stopy roviny α a pôdorys rovnobežníka $ABCD$, ktorý leží v rovine α (Obr. 5). Pomocou hlavných priamok zostrojte nárys rovnobežníka $ABCD$.

8. Dané sú stopy roviny α a druhý priemet bodu A roviny α (Obr. 6). Zostrojte združené priemety spádovej priamky prvej osnovy, ktorá prechádza bodom A .

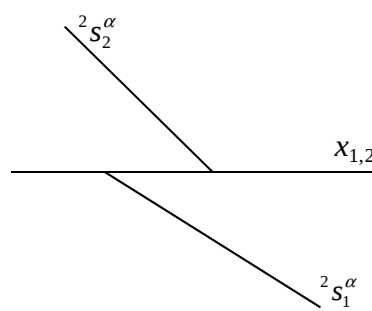
9. Dané sú združené priemety spádovej priamky 2. osnovy roviny α (Obr. 7). Zostrojte stopy roviny α .



Obr. 5

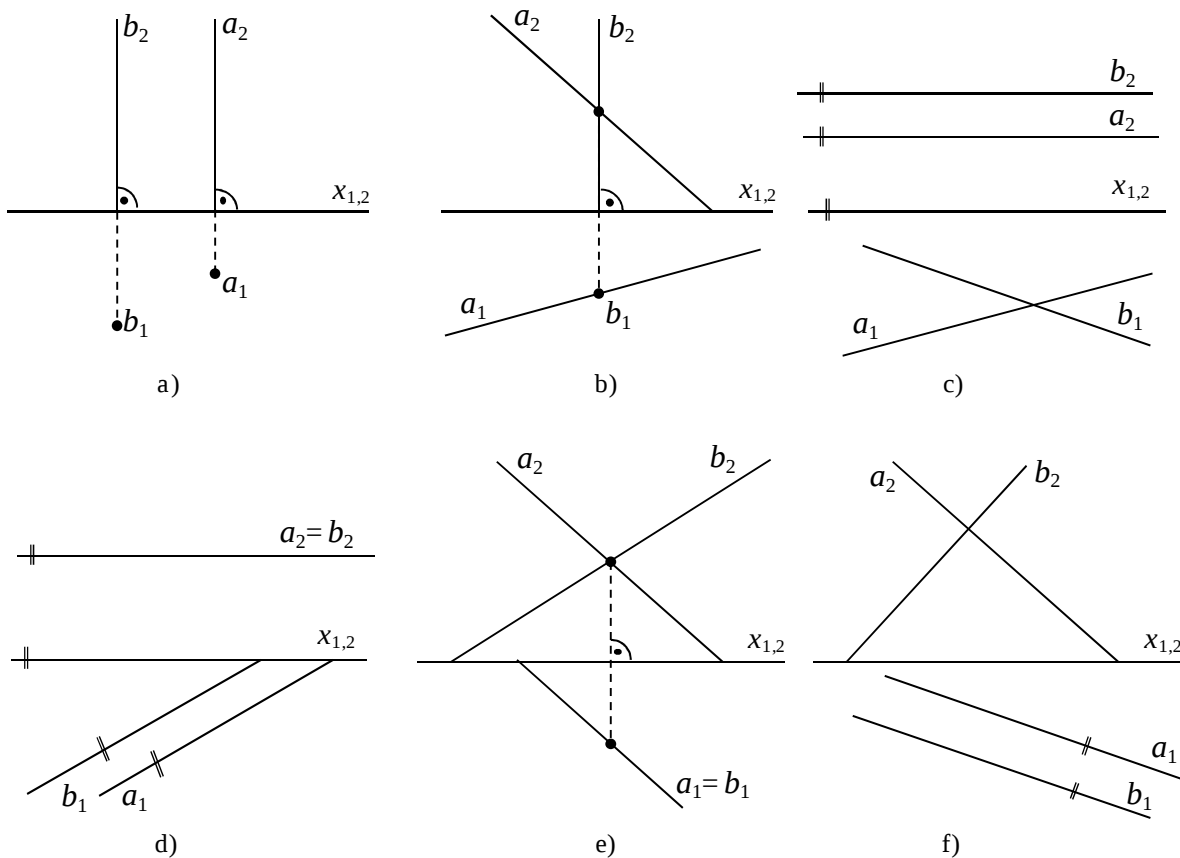


Obr. 6



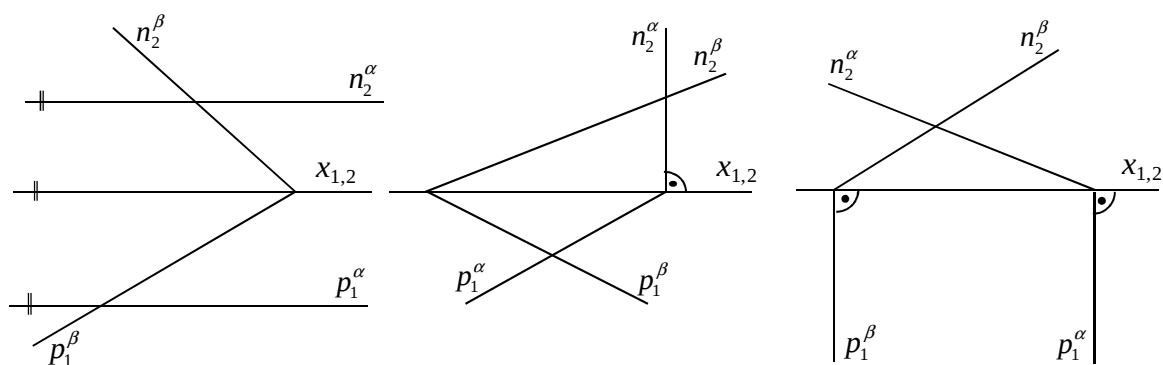
Obr. 7

10. Určte vzájomnú polohu priamok a, b , ktoré sú zobrazené na obrázkoch 8a) – f). Ak priamky a, b ležia v jednej rovine, určte stopy tejto roviny.



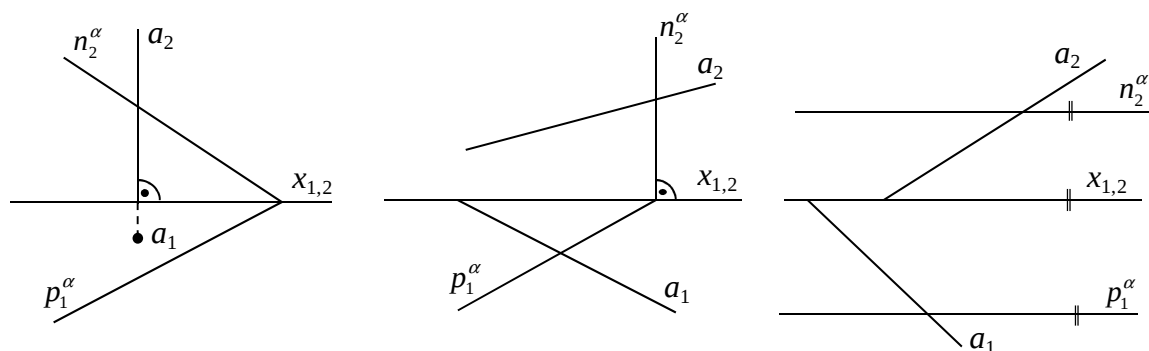
Obr. 8

11. Dané sú roviny α a β (Obr. 9). Zostrojte ich priesečnicu.



Obr. 9

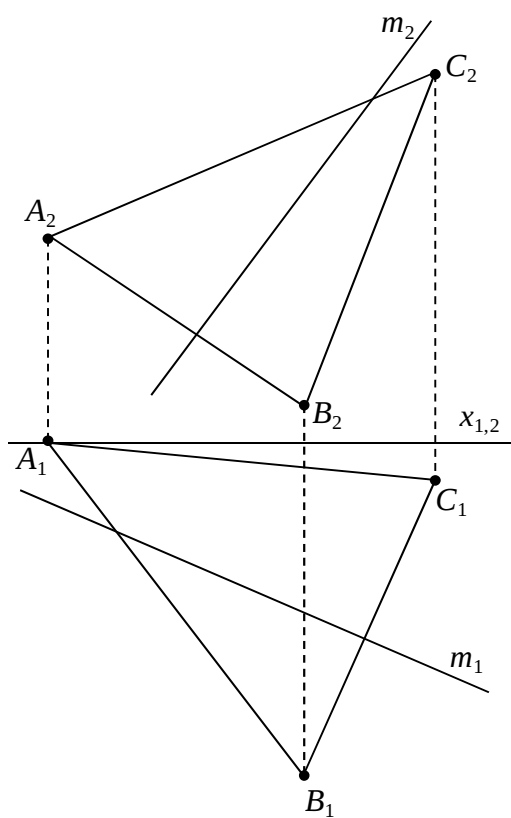
12. Daná je rovina α a priamka a (Obr. 10). Zostrojte priesečník priamky a s rovinou α .



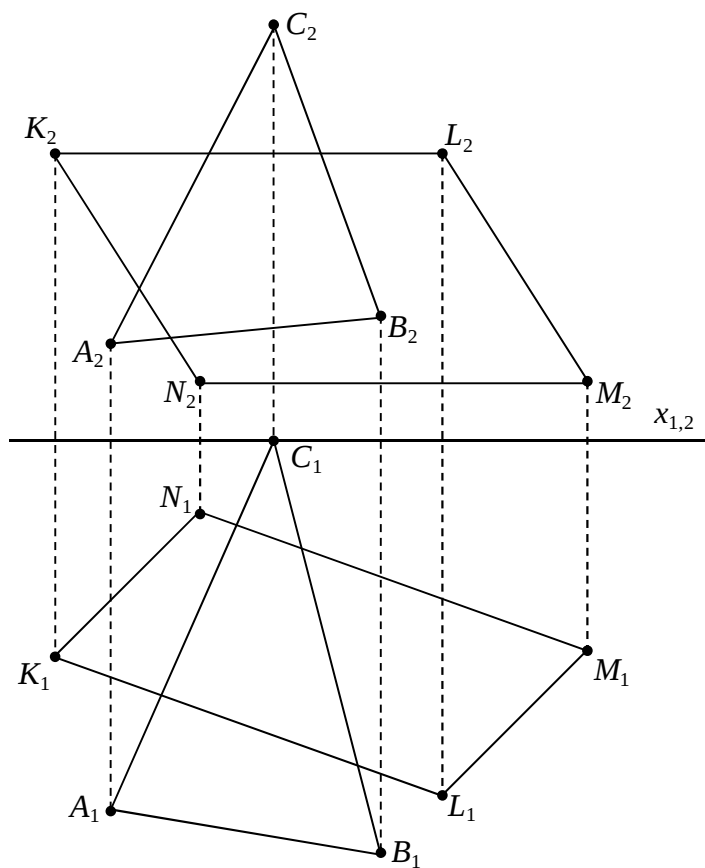
Obr. 10

13. Daný je trojuholník ABC a priamka m (Obr. 11). Zostrojte priesečník priamky m s trojuholníkom ABC .

14. Daný je trojuholník ABC a rovnobežník $KLMN$ (Obr. 12). Zostrojte prienik trojuholníka ABC a rovnobežníka $KLMN$.



Obr. 11



Obr. 12

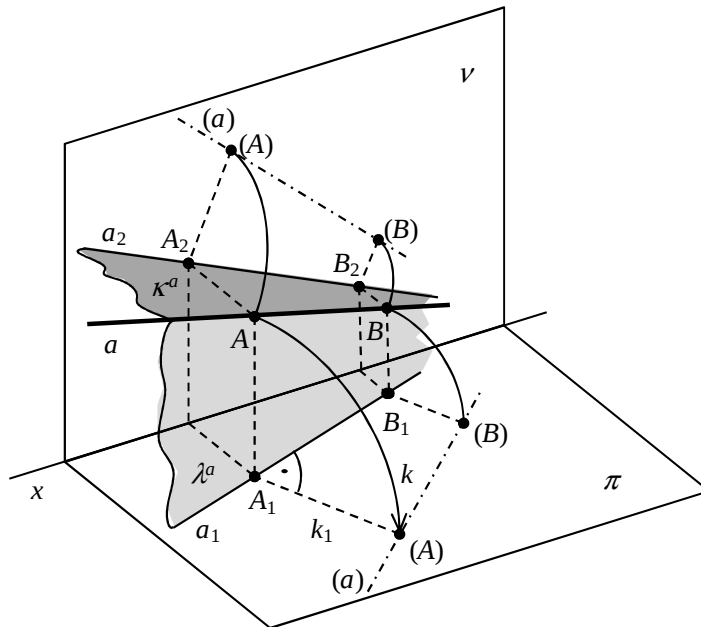
MONGEOVA PROJEKCIA 2. časť

4.8 Metrické úlohy

V tejto kapitole budeme riešiť metrické úlohy dĺžka úsečky, odchýlka priamky od priemetne, odchýlka roviny od priemetne, rovina kolmá na priamku a vzdialenosť bodu od roviny. V kapitolách 4.9 a 4.10 budeme riešiť úlohy týkajúce sa metrických vlastností rovinného útvaru.

Dĺžka úsečky

Úloha 4.8.1: Určte dĺžku úsečky AB . Dané sú združené priemety A_1B_1 a A_2B_2 (Obr. 4.8.1b).



Obr. 4.8.1a

Riešenie (Obr. 4.8.1a):

Úsečka AB je vo všeobecnej polohe vzhľadom na priemetne. Preto sú úsečky A_1B_1 a A_2B_2 kratšie ako úsečka AB (pozri V5 v kapitole 3.3). Na určenie dĺžky úsečky AB použijeme **sklopenie premietacej roviny priamky $a = AB$ do priemetne**. Sklopenie je otočenie o 90° .

Premietacia rovina priamky a pri premietaní do pôdorysne je rovina $\lambda^a = aa_1$. Sklopíme ju do pôdorysne okolo priamky a_1 . Bod A sa pri sklápaní pohybuje po štvrtkružnici k so stredom v bode A_1 . Jej pôdorysom je úsečka k_1 kolmá na priamku a_1 . Polomer kružnice k sa rovná $|z^A| = |AA_1|$. Sklopenú polohu bodu A budeme označovať (A) .

Premietacia rovina priamky a pri premietaní do nárysne je rovina $\kappa^a = aa_2$. Sklopíme ju do nárysne okolo priamky a_2 .

Poznámka: V ďalšom texte budeme používať termín „sklopenie priamky (úsečky)“ v zmysle sklopenie premietacej roviny priamky (úsečky) do priemetne.

Postup:

Sklopenie roviny λ^a do pôdorysne (Obr. 4.8.1c):

1. (A) : $(A)A_1 \perp a_1 \wedge |(A)A_1| = |z^A|$
2. (B) : $(B)B_1 \perp a_1 \wedge |(B)B_1| = |z^B|$

3. Sklopená poloha priamky $a = AB$ do pôdorysne je priamka $(a) = (A)(B)$. Sklopené útvary rysujeme bodkočiarkovanou čiarou.

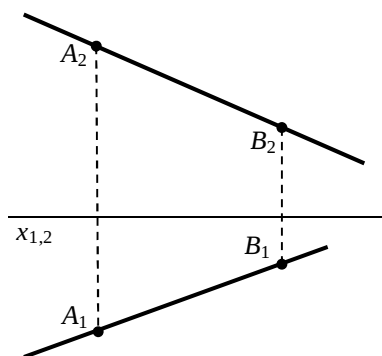
4. Keďže sklopenie roviny je zhodnosť, platí: $|AB| = |(A)(B)|$.

Sklopenie roviny κ^a do nárysne (Obr. 4.8.1d):

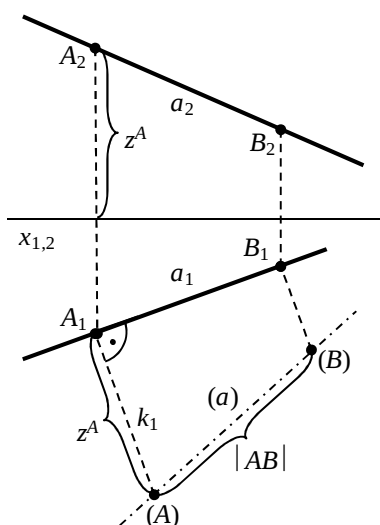
1. (A): $(A)A_2 \perp a_2 \wedge |(A)A_2| = |y^A|$

2. (B): $(B)B_2 \perp a_2 \wedge |(B)B_2| = |y^B|$

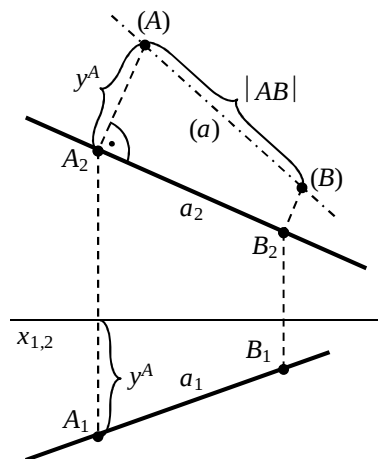
3. $|AB| = |(A)(B)|$



Obr. 4.8.1b



Obr. 4.8.1c



Obr. 4.8.1d

Úloha 4.8.2: Určte dĺžku úsečky AB . Dané sú združené priemety A_1B_1 a A_2B_2 (obr. 4.8.2a).

Riešenie:

V tejto úlohe nie je určená poloha osi x , t. j. nepoznáme presnú polohu pôdorysne, ale smer ordinál určuje smer pôdorysne. Kolmé priemety do navzájom rovnobežných rovín sú zhodné, preto môžeme v riešení úlohy použiť ľubovoľnú rovinu, ktorá je rovnobežná s pôdorysňou. Úlohu vyriešime sklopením priamky AB do roviny π^* , ktorá je rovnobežná s pôdorysňou a prechádza bodom B . Skrátené hovoríme o **sklopení priamky AB do úrovne bodu B** .

Postup (Obr. 4.8.2b):

1. Bodom B vedieme rovinu π^* :

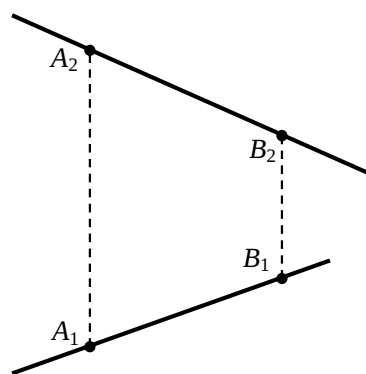
$$B_2 \in \pi_2^* \wedge \pi_2^* \perp B_1B_2$$

2. $(B) = B_1$

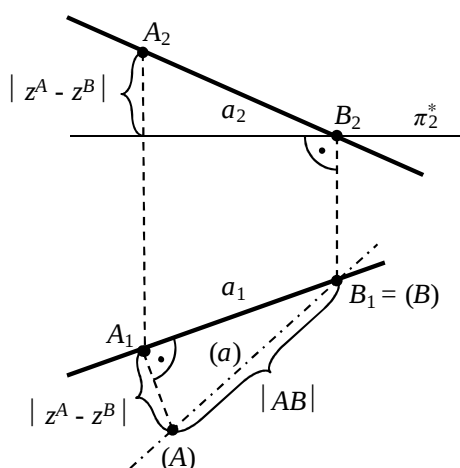
3. (A): $(A)A_1 \perp a_1 \wedge |(A)A_1| = |z^A - z^B|$

4. Sklopená poloha priamky $a = AB$ do roviny π^* je priamka $(a) = (A)(B)$.

5. Keďže sklopenie roviny je zhodnosť, platí: $|AB| = |(A)(B)|$.



Obr. 4.8.2a



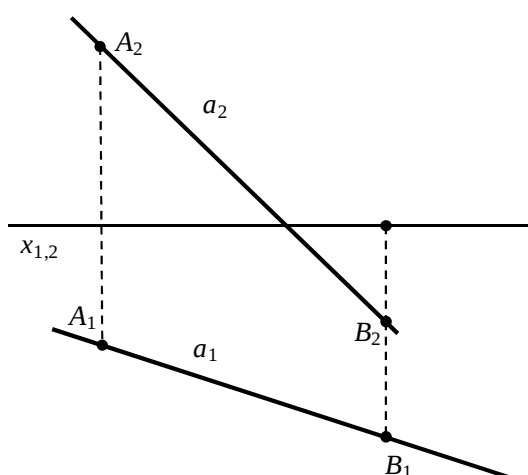
Obr. 4.8.2b

Poznámka: Sklápanie do úrovne používame aj v iných prípadoch, keď je to výhodné. Napríklad ak sú súradnice bodov veľké a sklopené polohy bodov do priemetne by ležali mimo nákresne.

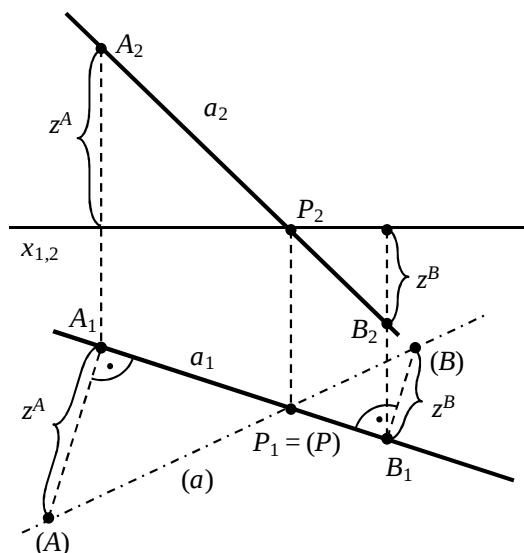
Úloha 4.8.3: Určte dĺžku úsečky AB . Dané sú združené priemety A_1B_1 a A_2B_2 (Obr. 4.8.3a).

Riešenie (Obr. 4.8.3b):

Úlohu budeme riešiť sklopením priamky AB do pôdorysne. Body A a B ležia v opačných polpriestoroch vzhľadom na rovinu π . Súradnica z^A je kladná a súradnica z^B je záporná, preto sklopené polohy (A) a (B) ležia v opačných polrovinách vzhľadom na a_1 . Postup je analogický ako v úlohe 4.8.1. Priamky a_1 a (a) sa pretínajú v bode $P_1 = (P)$, ktorý je pôdorysný stopník priamky a .



Obr. 4.8.3a



Obr. 4.8.3b

Odchýlka priamky od priemetne

Definícia 4.8.1: Uhol priamky s priemetňou sa nazýva **odchýlka priamky od priemetne**.

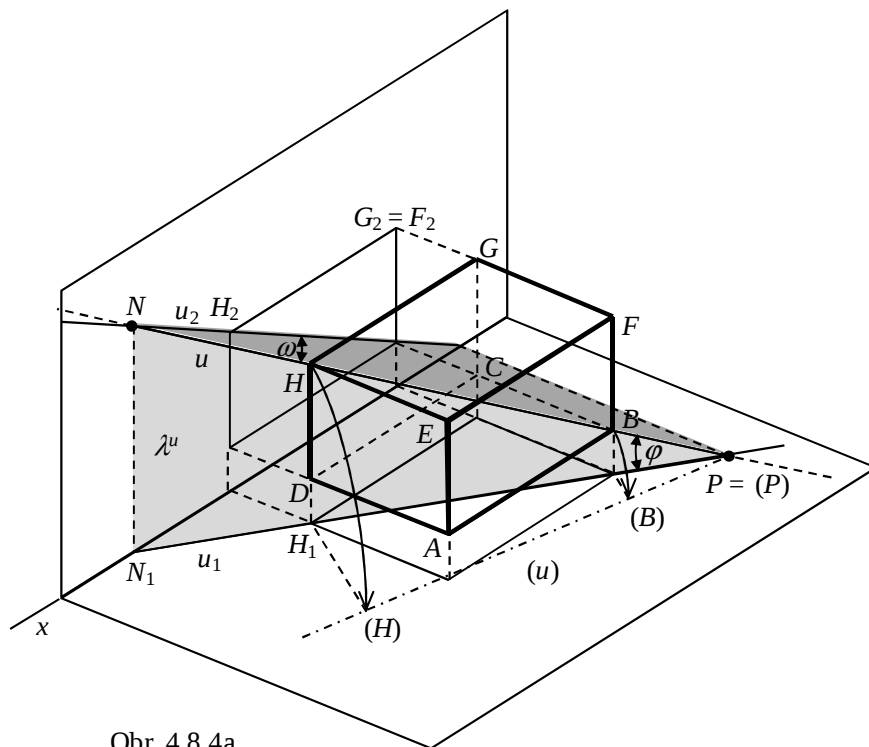
Poznámka: Uhol priamky s rovinou pozri v kapitole 2.2.

Definícia 4.8.2: Nech α je odchýlka priamky a od priemetne. Tangens uhla α nazývame **spád priamky a** .

Úloha 4.8.4: Dané sú združené priemety kvádra $ABCDEFGH$. Určte odchýlky telesovej uhlopriečky $u = BH$ od pôdorysne aj nárysne (Obr. 4.8.4b).

Riešenie (Obr. 4.8.4a):

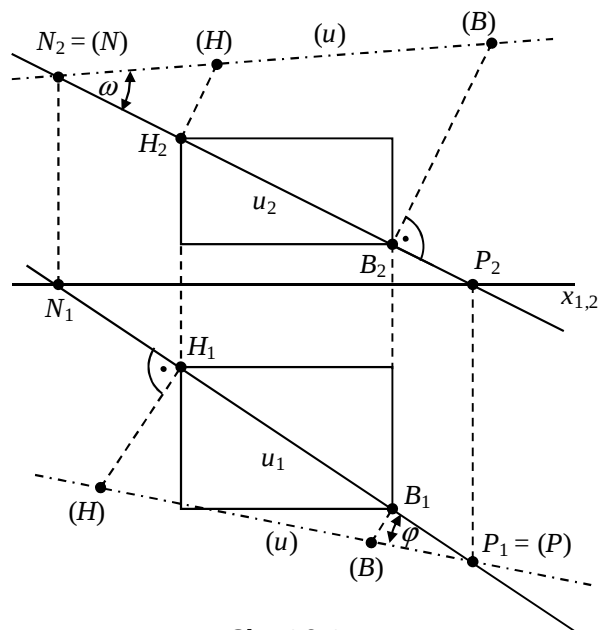
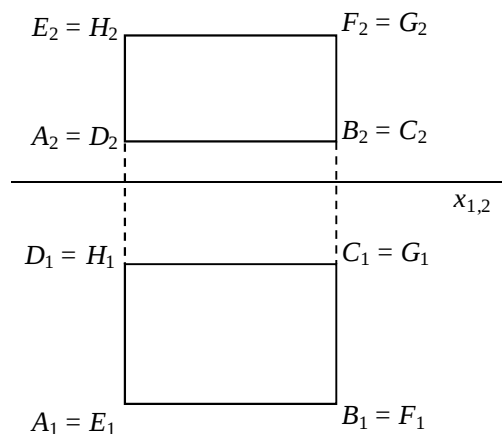
Odchýlka priamky od pôdorysne je uhol, ktorý zvierajú priamka so svojím pôdorysom. Odchýlka priamky u od pôdorysne je uhol, ktorý zvierajú priamky u, u_1 . Odchýlka priamky od nárysne je uhol, ktorý zvierajú priamka so svojím nárysom. Odchýlka priamky u od nárysne je uhol, ktorý zvierajú priamky u, u_2 .



Obr. 4.8.4a

Postup (Obr. 4.8.4c):

1. Odchýlku priamky u od pôdorysne určíme sklopením roviny $\lambda^u = uu_1$ do pôdorysne. Narýsujeme sklopenú polohu bodov B a H . $(u) = (B)(H)$.
Keďže sklopenie roviny je zhodnosť, platí: $|\angle(u, \pi)| = |\angle(u, u_1)| = |\angle((u), u_1)| = \varphi$.
Priesečník priamky u_1 s priamkou (u) je pôdorysný stopník priamky u ; $P_1 = (P)$.
2. Odchýlku priamky u od nárysne určíme sklopením roviny $\kappa^u = uu_2$ do nárysne. Narýsujeme sklopenú polohu bodov B a H . $(u) = (B)(H)$.
Keďže sklopenie roviny je zhodnosť, platí: $|\angle(u, \nu)| = |\angle(u, u_2)| = |\angle((u), u_2)| = \omega$.
Priesečník priamky u_2 s priamkou (u) je nárysný stopník priamky u ; $N_2 = (N)$.

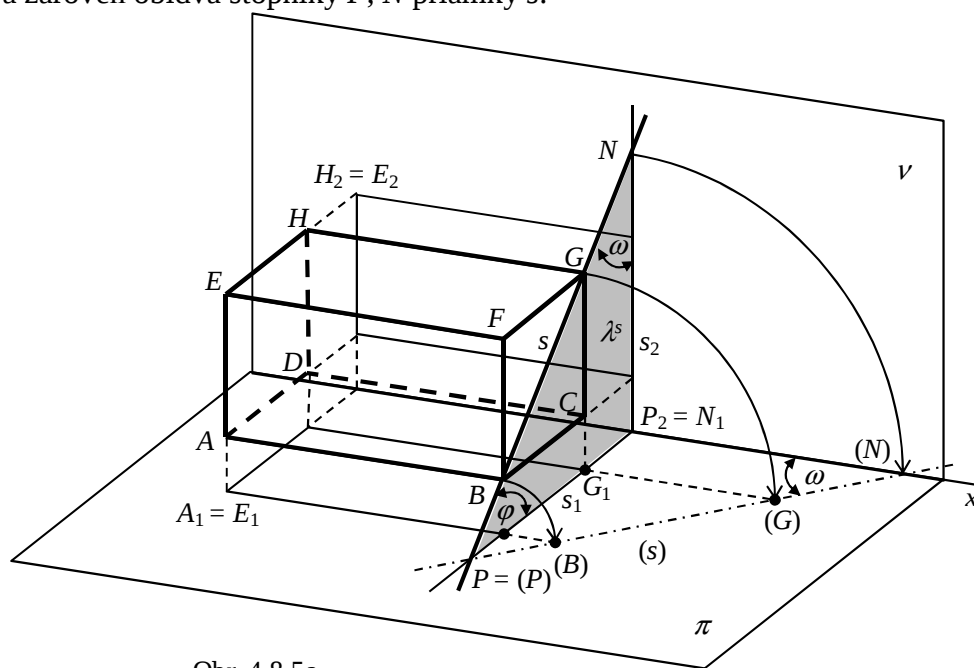


Poznámka: Spád priamky u vzhľadom na pôdorysňu je tangens uhla φ . Spád priamky u vzhľadom na nárysňu je tangens uhla ω .

Úloha 4.8.5: Dané sú združené priemety kvádra $ABCDEFGH$. Určte odchýlky stenovej uhlopriečky BG od pôdorysne aj nárysne (Obr. 4.8.5b).

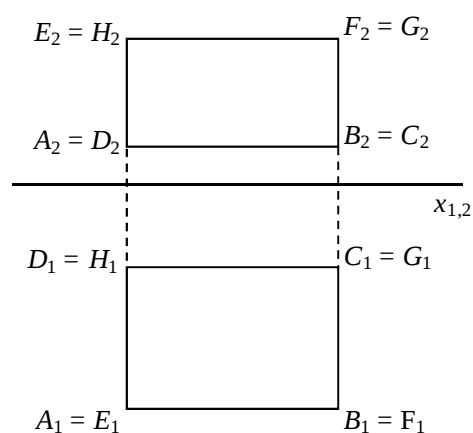
Riešenie (Obr. 4.8.5a):

Priamka $s = BG$ je mimobežná s osou x a kolmá na os x . Rovinu $\lambda^s = ss_1 = ss_2 = PNP_2$ sklopíme do pôdorysne. V sklopenej polohe určíme odchýlku priamky s od pôdorysne aj nárysne a zároveň obidva stopníky P, N priamky s .

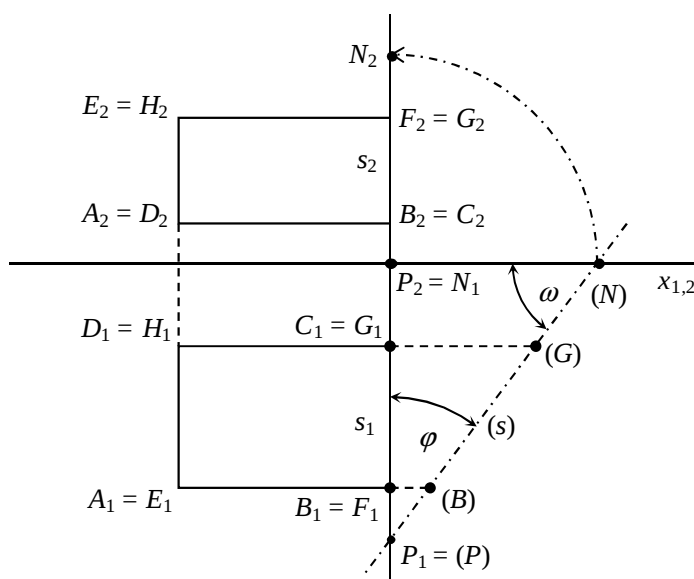


Postup (Obr. 4.8.5c):

1. (s): $(B)(G) = (s)$
2. P_1 : $(s) \cap s_1 = \{P_1\}$; $P_1 = (P)$
3. $P_2 = N_1 \in x_{1,2}$
4. (N): $(s) \cap x_1 = \{(N)\}$
5. N_2 : $N_2 \in s_2 \wedge |(N)N_1| = |N_1N_2| = z^N$
6. Odchýlka priamky s od pôdorysne: $|\angle(s, \pi)| = |\angle(s, s_1)| = |\angle((s), s_1)| = \varphi$.
7. Odchýlka priamky s od nárysne: $|\angle(s, \nu)| = |\angle((s), x_{1,2})| = \omega$.



Obr. 4.8.5b



Obr. 4.8.5c

Odchýlka roviny od priemetne

Definícia 4.8.3: Uhol roviny s priemetňou sa nazýva **odchýlka roviny od priemetne**.

Poznámka: Uhol dvoch rovín pozri v kapitole 2.2.

Definícia 4.8.4: Nech φ je odchýlka roviny α od priemetne. Tangens uhla φ nazývame **spád roviny α** .

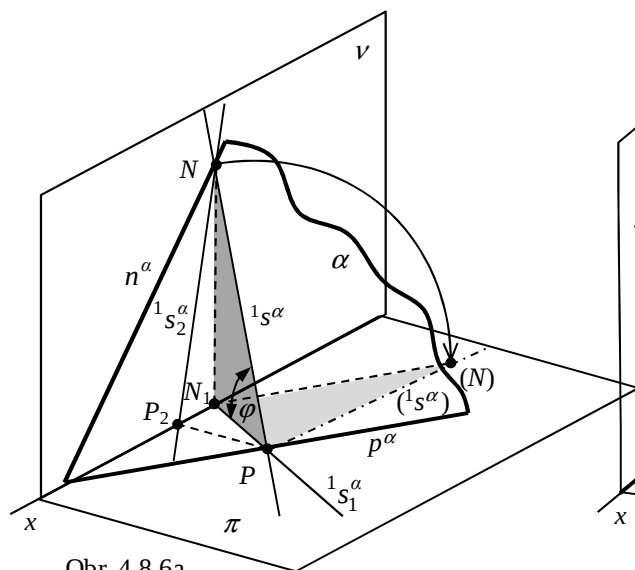
Úloha 4.8.6: Daná je rovina α . Určte jej odchýlky od pôdorysne a nárysne (Obr. 4.8.6c).

Riešenie (Obr. 4.8.6a, Obr. 4.8.6b):

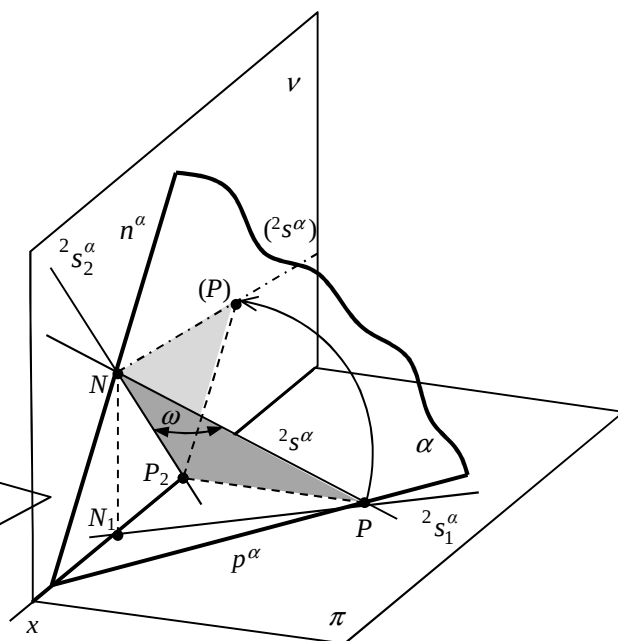
Odchýlka roviny od pôdorysne je odchýlka jej spádovej priamky prvej osnovy od pôdorysne. Odchýlka roviny od nárysne je odchýlka jej spádovej priamky druhej osnovy od nárysne.

Vhodne zvolíme ľubovoľnú spádovú priamku prvej osnovy roviny α a určíme jej odchýlku od pôdorysne. $|\angle(\alpha, \pi)| = |\angle(^1s^\alpha, \pi)| = \varphi$

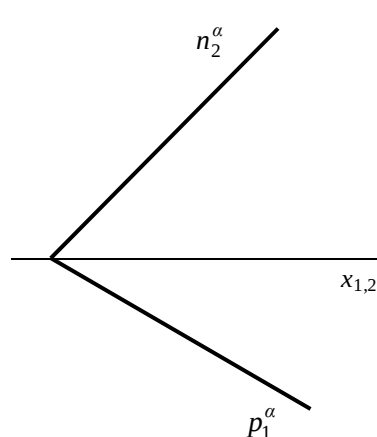
Vhodne zvolíme ľubovoľnú spádovú priamku druhej osnovy roviny α a určíme jej odchýlku od nárysne. $|\angle(\alpha, \nu)| = |\angle(^2s^\alpha, \nu)| = \omega$



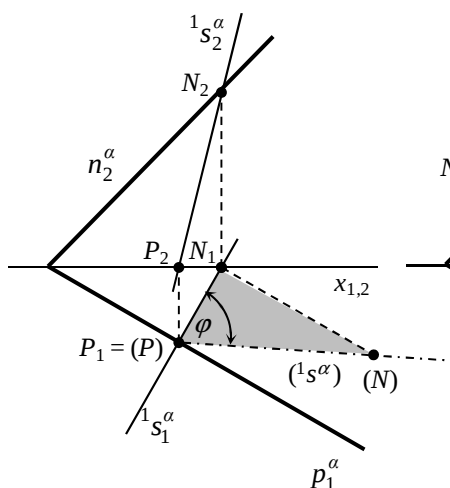
Obr. 4.8.6a



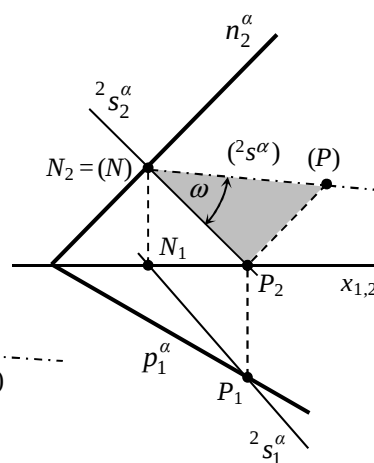
Obr. 4.8.6b



Obr. 4.8.6c



Obr. 4.8.6d



Obr. 4.8.6e

Postup:

Odchýlka roviny α od pôdorysne (Obr. 4.8.6d):

1. Narysujeme pôdorys $^1s_1^\alpha$ a nárys $^1s_2^\alpha$ ľubovoľnej spádovej priamky prvej osnvy roviny α . Spádové priamky pozri v kapitole 4.5.

2. Spádovú priamku sklopíme do pôdorysne. Využijeme jej pôdorysný a nárysný stopník.

$$(^1s^\alpha) = (P)(N)$$

3. $|\angle(\alpha, \pi)| = |\angle(^1s^\alpha, \pi)| = |\angle((^1s^\alpha), ^1s_1^\alpha)| = \varphi$

Odchýlka roviny α od nárysne (Obr. 4.8.6e):

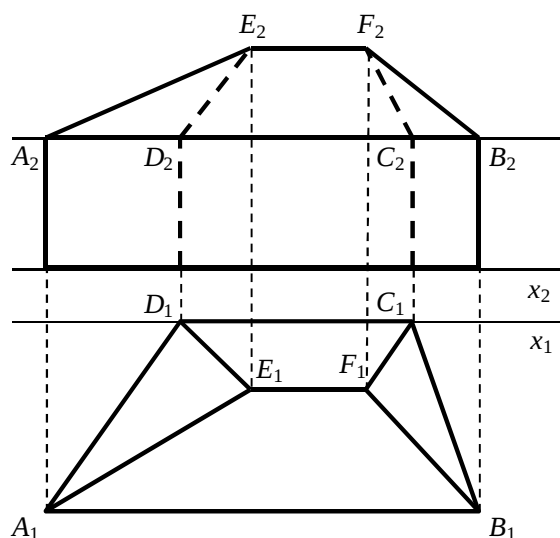
4. Narysujeme pôdorys $^2s_1^\alpha$ a nárys $^2s_2^\alpha$ ľubovoľnej spádovej priamky druhej osnvy roviny α .

5. Spádovú priamku sklopíme do nárysne. Využijeme jej pôdorysný a nárysny stopník.
 $(^2s^\alpha) = (P)(N)$

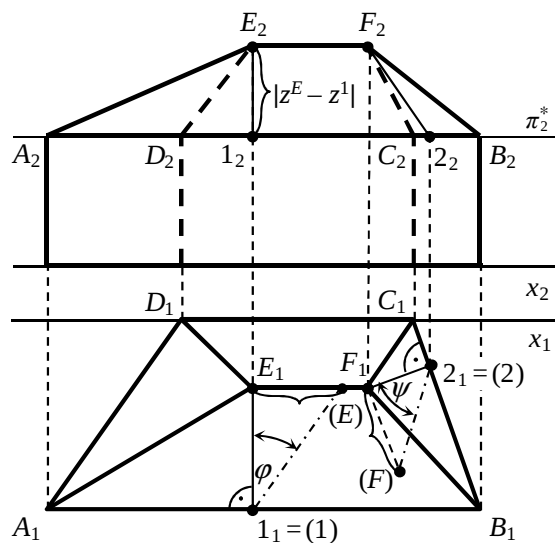
$$6. |\angle(\alpha, \nu)| = |\angle(^2s^\alpha, \nu)| = |\angle((^2s^\alpha), ^2s_2^\alpha)| = \omega$$

Poznámka: Spád roviny α vzhľadom na pôdorysňu je tangens uhla φ . Spád roviny α vzhľadom na nárysňu je tangens uhla ω . Spádová priamka (príslušnej osnovy) má najväčší spád spomedzi všetkých priamok danej roviny. Najmenší, t. j. nulový spád, má hlavná priamka (príslušnej osnovy).

Úloha 4.8.7: Daný je pôdorys a nárys domu. Určte spád strešnej roviny ABE a roviny BCF vzhľadom na pôdorysňu (Obr. 4.8.7a).



Obr. 4.8.7a



Obr. 4.8.7b

Postup (Obr. 4.8.7b):

Spád roviny ABE :

1. Priamka A_2B_2 je rovnobežná s osou $x_{1,2}$. Z toho vyplýva, že priamka AB je hlavná priamka prvej osnovy roviny ABE .

2. Narysujeme spádovú priamku prvej osnovy roviny ABE , ktorá prechádza bodom E .

Jej priesečník s priamkou AB označíme 1 .

$$E1 \perp AB \Rightarrow E_11_1 \perp A_1B_1.$$

3. Spádovú priamku $E1$ sklopíme do roviny π^* , ktorá je rovnobežná s pôdorysňou a prechádza bodom A . Sklopenie do úrovně pozri v úlohe 4.8.2.

$$1_1 = (1); |E_1(E)| = |z^E - z^1|$$

4. Uhol spádovej priamky $E1$ s rovinou π^* označíme φ . Pôdorysňa je rovnobežná s rovinou

$$\pi^*, \text{ preto platí: } \varphi = |\angle(E1, \pi)| = |\angle(E1, \pi^*)| = |\angle(E1, E_11_1)| = |\angle(E_11_1, (E)(1))|$$

5. Spád roviny ABE vzhľadom na pôdorysňu je tangens uhla φ .

Spád roviny BCF :

6. Priamka BC je hlavná priamka prvej osnovy roviny BCF . Narysujeme spádovú priamku prvej osnovy roviny BCF , ktorá prechádza bodom F . Jej priesečník s priamkou BC označíme 2 . $F2 \perp BC \Rightarrow F_12_1 \perp B_1C_1$.

7. Spádovú priamku $F2$ sklopíme do roviny π^* .

$$2_1 = (2); |F_1(F)| = |z^F - z^2| = |z^E - z^1|$$

8. Uhol spádovej priamky $F2$ s rovinou π^* označíme ψ . Pôdorysňa je rovnobežná s rovinou π^* , preto platí:

$$\psi = |\angle(F2, \pi)| = |\angle(F2, \pi^*)| = |\angle(F2, F_12_1)| = |\angle(F_12_1, (F)(2))|$$

9. Spád roviny BCF vzhľadom na pôdorysňu je tangens uhla ψ .

Poznámka: Všimnite si polohu osí x_1 a x_2 . V tomto prípade neplatí $x_1 = x_2$. Pôdorys a nárys sú v združenej polohe, ale sú od seba oddialené kvôli prehľadnosti. Pôdorysňa je na úrovni spodnej podstavy domu, nárysňa je totožná s rovinou zadnej steny domu.

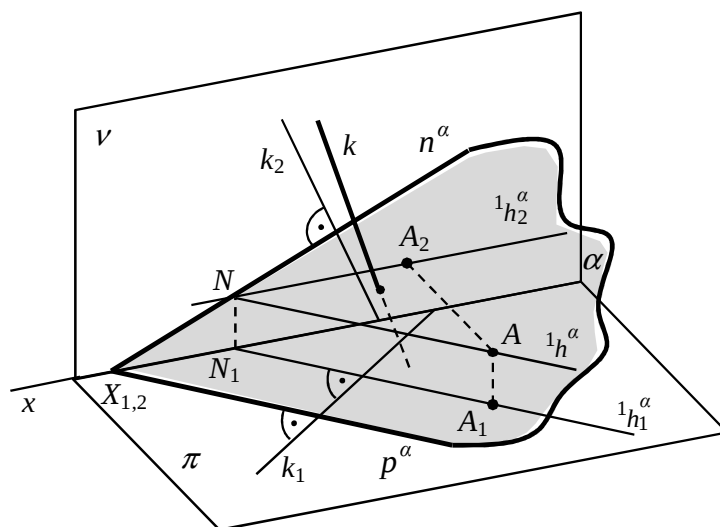
Rovina kolmá na priamku

Úloha 4.8.8: Dané sú združené priemety priamky k a bodu A . Zobraďte stopy roviny α , ktorá je kolmá na priamku k a prechádza bodom A (Obr. 4.8.8b).

Riešenie (Obr. 4.8.8a):

Kolmicu na rovinu pozri v kapitole 4.5.

Pre pôdorysnú stopu roviny α platí: $p_1^\alpha \perp k_1$. Pre nárysnú stopu roviny α platí: $n_2^\alpha \perp k_2$. To znamená, že na určenie stôp roviny α stačí poznať jeden stopník priamky ležiacej v rovine α . Využijeme hlavnú priamku prvej osnovy roviny α , ktorá prechádza bodom A .



Obr. 4.8.8a

Postup (Obr. 4.8.8c):

1. ${}^1h_1^\alpha: A_1 \in {}^1h_1^\alpha \wedge {}^1h_1^\alpha \perp k_1$

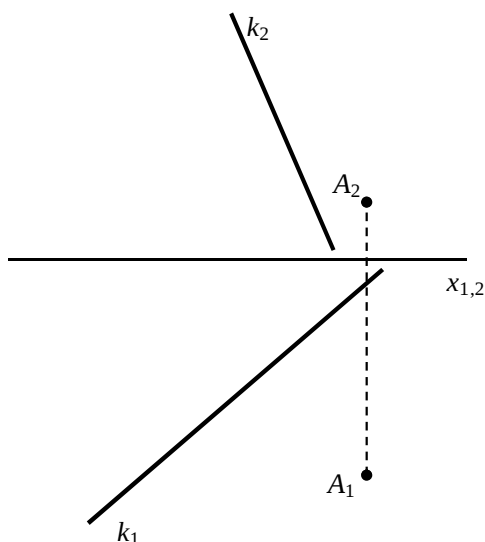
${}^1h_2^\alpha: A_2 \in {}^1h_2^\alpha \wedge {}^1h_2^\alpha \parallel x_{1,2}$

2. Určíme nárysný stopník N priamky ${}^1h^\alpha$.

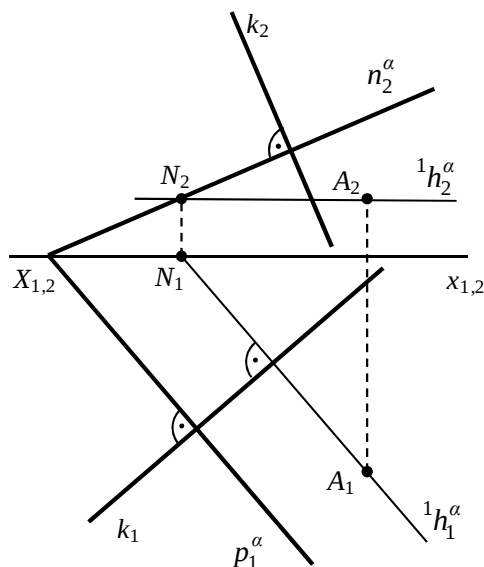
3. $n_2^\alpha: N_2 \in n_2^\alpha \wedge n_2^\alpha \perp k_2$

4. $\{X_{1,2}\} = n_2^\alpha \cap x_{1,2}$

5. $p_1^\alpha: X_{1,2} \in p_1^\alpha \wedge p_1^\alpha \perp k_1$



Obr. 4.8.8b



Obr. 4.8.8c

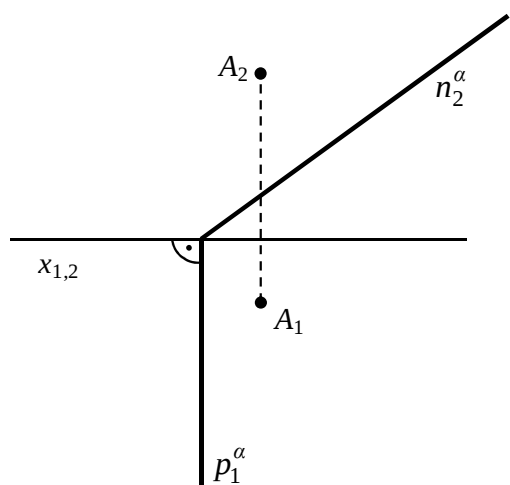
Vzdialenosť bodu od roviny

Úloha 4.8.9: Daná je rovina α kolmá na nárysňu a bod A . Určte vzdialenosť bodu A od roviny α (Obr. 4.8.9a).

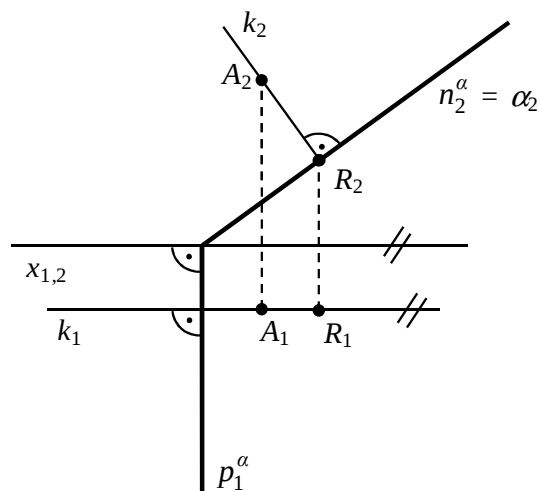
Riešenie:

1. Bodom A vedieme kolmicu k na rovinu α .
2. Určíme priesečník $\{R\} = k \cap \alpha$.
3. Vzdialenosť bodu A od roviny α je dĺžka úsečky AR .

Ak je rovina α kolmá na nárysňu, tak je určenie vzdialenosti bodu A od roviny α veľmi jednoduchá úloha, pretože v náryse sa rovina α premieta do priamky $\alpha_2 = n_2^\alpha$.



Obr. 4.8.9a



Obr. 4.8.9b

Postup (Obr. 4.8.9b):

1. Bodom A vedieme kolmicu k na rovinu α .

$$k_1: A_1 \in k_1 \wedge k_1 \perp p_1^\alpha$$

$$k_2: A_2 \in k_2 \wedge k_2 \perp n_2^\alpha$$

2. Určíme priesečník $\{R\} = k \cap \alpha$.

$$\{R_2\} = k_2 \cap \alpha_2.$$

3. Vzdialenosť bodu A od roviny α je dĺžka úsečky AR .

Priamka k je rovnobežná s nárysňou, preto platí: $|A, \alpha| = |AR| = |A_2R_2|$.

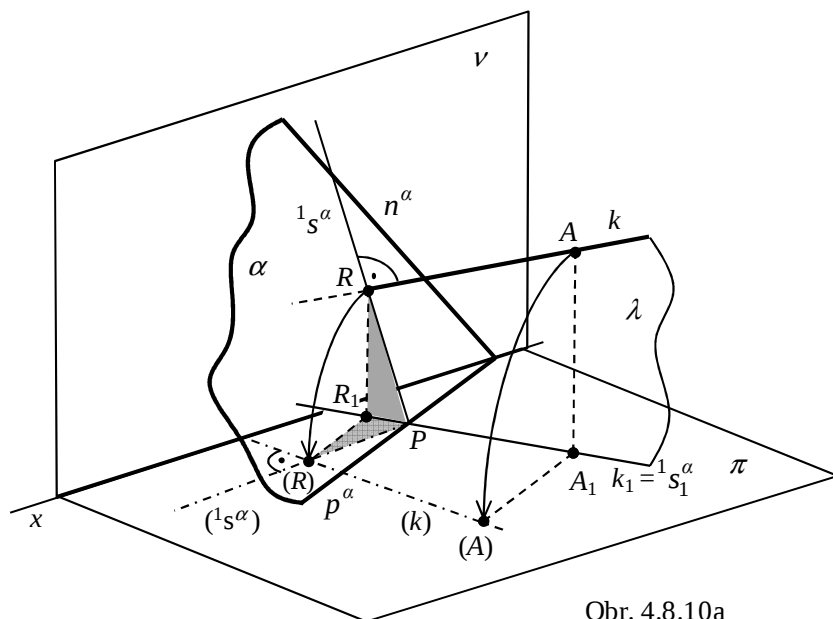
Úloha 4.8.10: Daná je rovina α a bod A . Určte vzdialenosť bodu A od roviny α (Obr. 4.8.10b).

Riešenie (Obr. 4.8.10a):

1. Bodom A vedieme kolmicu k na rovinu α .

2. Určíme priesečník $\{R\} = k \cap \alpha$.

3. Vzdialenosť bodu A od roviny α je dĺžka úsečky AR .



Obr. 4.8.10a

Postup (Obr. 4.8.10c):

1. Bodom A vedieme kolmicu k na rovinu α .

$$k_1: A_1 \in k_1 \wedge k_1 \perp p_1^\alpha$$

$$k_2: A_2 \in k_2 \wedge k_2 \perp n_2^\alpha$$

2. Priesečník $\{R\} = k \cap \alpha$ určíme metódou krycej priamky (pozri kapitolu 4.6).

3. Dĺžku úsečky AR určíme sklopením priamky k do pôdorysne (pozri úlohu 4.8.1).

$$|A, \alpha| = |AR| = |(A)(R)|$$

Poznámka: Krycia priamka je v tomto prípade spádová priamka prvej osnvy roviny α . Pôdorys kolmice k je totožný s pôdorysom spádovej priamky $^1s^\alpha$ prvej osnvy roviny α .

Obr. 4.8.10c

Riešenie (Obr. 4.8.11a):

The diagram illustrates the construction of the vector n^α . It features a plane π and a curve α . Points P , R , and A_1 are located on the plane. A vector k passes through point R . The vector p^α is defined as $k_1 = {}^1S_1^\alpha$. Other vectors shown include n^α , h^α , and h_1^α . Points B , R_1 , A_1' , and (A) are also indicated. Dashed lines represent various projections and auxiliary constructions used in the derivation.

Obr. 4.8.11a

Riešenie (Obr. 4.8.12b):

Postup je podobný ako v úlohe 4.8.10.

1. Bodom V vedieme kolmicu k na rovinu BCF .

Priamka BC je hlavná priamka prvej osnovy roviny $\alpha = BCF$, z toho vyplýva $k_1 \perp B_1C_1$.

2. Priamka $^1s^\alpha$ je spádová priamka prvej osnovy roviny $\alpha = BCF$, pre ktorú platí $k_1 = ^1s_1^\alpha$.

Označíme body: $\{1\} = ^1s^\alpha \cap BC$, $\{2\} = ^1s^\alpha \cap FB$.

3. Sklopíme priamku $12 = ^1s^\alpha$ a bod V do roviny π^* , ktorá je rovnobežná s pôdorysňou a inciduje s bodom B (sklopenie do úrovne pozri v úlohe 4.8.2).

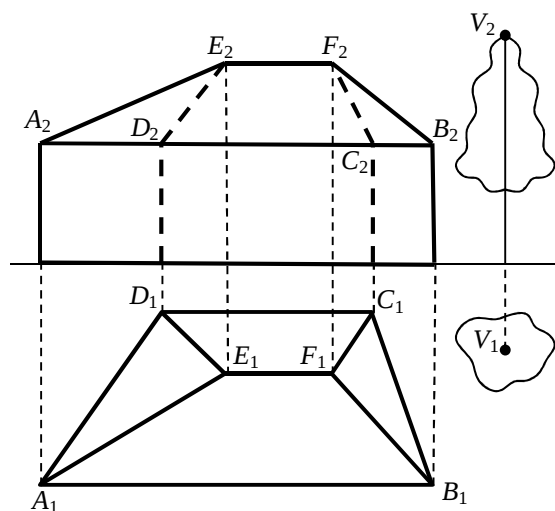
4. V skopenej polohe narýsujeme priamku (k) : $(V) \in (k) \wedge (k) \perp (^1s^\alpha)$.

5. (R) : $\{(R)\} = (^1s^\alpha) \cap (k)$

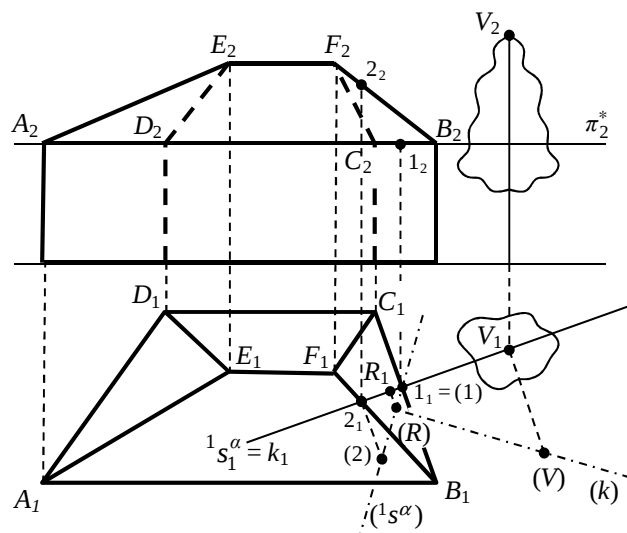
6. Vzdialenosť vrcholu V stromu od strešnej roviny BCF je vzdialenosť bodov V a R .

$$|V, BCF| = |VR| = |(V)(R)|$$

Poznámka: Všimnite si, že v zadaní nebola určená poloha osi x . Pri riešení tejto úlohy sme ju nepotrebovali.



Obr. 4.8.12a



Obr. 4.8.12b

4.9 Otočenie roviny

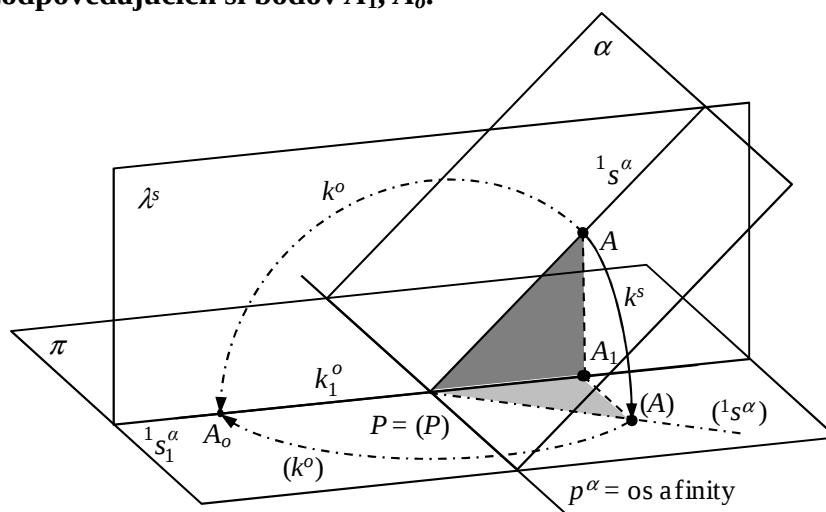
Ak skúmame metrické vlastnosti rovinného útvaru, je výhodné jeho rovinu otočiť okolo jej stopy do priemetne, alebo do roviny rovnobežnej s priemetňou okolo hlavnej priamky roviny. Otočenie roviny je zhodnosť, preto v otočenej polohe sú všetky útvary otáčanej roviny zhodné so skutočnými. Najskôr vysvetlíme metódu otáčania roviny. V ďalšej časti budeme riešiť pomocou otočenia roviny metrické úlohy uhol dvoch priamok a metrické vlastnosti rovinného útvaru.

Otočenie roviny do pôdorysne

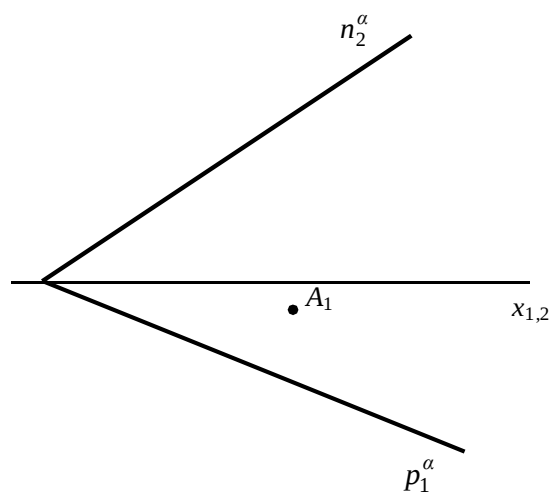
Úloha 4.9.1: Rovina α je daná pôdorysňou a nárysňou stopou. Daný je pôdorys bodu $A \in \alpha$. Určte otočenú polohu bodu A pri otočení roviny α do pôdorysne okolo pôdorysnej stopy (Obr. 4.9.1b).

Riešenie (Obr. 4.9.1a):

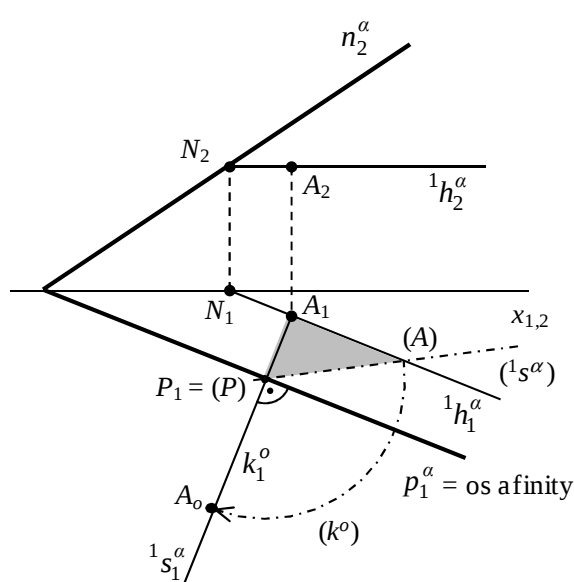
Os otáčania je pôdorysná stopa roviny α . Pri otáčaní roviny α sa bod A pohybuje po kružnici k^o , ktorá leží v rovine λ^s kolmej na pôdorysňu aj na rovinu α a inciduje s bodom A . Pôdorys kružnice k^o je úsečka kolmá na pôdorysnú stopu roviny α . Stred kružnice k^o je pôdorysný stopník P spádovej priamky prvej osnovy roviny α incidujúcej s bodom A . Kružnica k^o má polomer $r = |AP|$; to je polomer otáčania bodu A . Dĺžku úsečky AP určíme pomocou sklopenia pravouhlého trojuholníka APA_1 do pôdorysne. Úsečka AP je jeho prepona a leží na spádovej priamke prvej osnovy roviny α . Pri sklápaní sa bod A pohybuje po kružnici k^s . Otočenú polohu bodu A budeme označovať A_o . **Medzi pôdorysmi bodov roviny α a ich otočenými polohami do pôdorysne je vzťah perspektívnej afinity s osou afinity $p^\alpha = p_1^\alpha$ a s dvojicou zodpovedajúcich si bodov A_1, A_o .**



Obr. 4.9.1a



Obr. 4.9.1b



Obr. 4.9.1c

Postup (Obr. 4.9.1c):

1. Pomocou hlavnej priamky prvej osnovy roviny α určíme nárys bodu A .
2. Zobrazíme pôdorys tej spádovej priamky prvej osnovy roviny α , ktorá inciduje s bodom A .

$$1s_1^\alpha: A_1 \in 1s_1^\alpha \wedge 1s_1^\alpha \perp p_1^\alpha$$

$$\{P_1\} = 1s_1^\alpha \cap p_1^\alpha$$

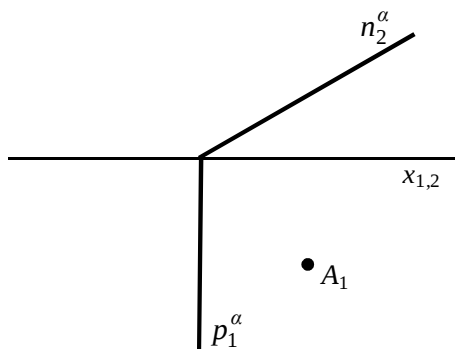
3. Sklopíme pravouhlý trojuholník APA_1 do pôdorysne. Dĺžka úsečky AP je polomer otáčania bodu A , t. j. $r = |AP| = |(A)(P)|$.

4. (k^o) : $(k^o) = (P_1; r)$

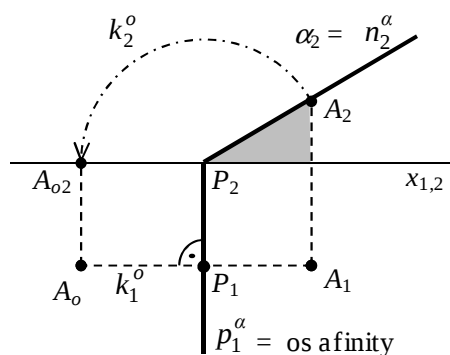
5. A_o : $\{A_o\} = 1s_1^\alpha \cap (k^o)$

6. Medzi pôdorysmi bodov roviny α a ich otočenými polohami do pôdorysne je vzťah kolmej afinity s osou p_1^α a dvojicou zodpovedajúcich si bodov A_1, A_o .

Úloha 4.9.2: Rovina α kolmá na nárysňu je daná pôdorysnou a nárysnou stopou. Daný je pôdorys bodu $A \in \alpha$. Určte otočenú polohu bodu A pri otočení roviny α do pôdorysne okolo pôdorysnej stopy (Obr. 4.9.2a).



Obr. 4.9.2a



Obr. 4.9.2b

Postup (Obr. 4.9.2b):

1. Určíme nárys bodu A : $A_2 \in n_2^\alpha$.
2. Bod A sa pri otáčaní roviny α pohybuje po kružnici $k^o(P; |AP|)$. Jej nárys je kružnica $k_2^o(P_2; |A_2P_2|)$ zhodná s kružnicou k^o . Preto nemusíme polomer kružnice k^o určovať sklopením.
3. A_o : $A_oA_1 \perp p_1^\alpha \wedge |A_oP_1| = |A_2P_2|$
4. Medzi pôdorysmi bodov roviny α a ich otočenými polohami do pôdorysne je vzťah kolmej afinity s osou p_1^α a dvojicou zodpovedajúcich si bodov A_1, A_o .

Úloha 4.9.3: Rovina α kolmá na bokorysňu je daná pôdorysnou a nárysnou stopou. Otočte rovinu α do pôdorysne okolo jej pôdorysnej stopy a určte afinitu medzi pôdorysmi bodov roviny α a ich otočenými polohami (Obr. 4.9.3a).

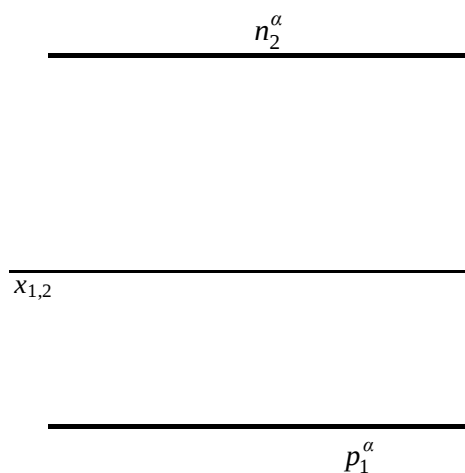
Postup (Obr. 4.9.3b):

1. Vhodne zvolíme pôdorys A_1 bodu A , ktorý leží v rovine α . Nárys bodu A určíme pomocou ľubovoľnej priamky a , ktorá inciduje s bodom A a leží v rovine α .
2. Bod A sa pri otáčaní roviny α pohybuje po kružnici $k^o(P; |AP|)$. Jej pôdorys je úsečka kolmá na pôdorysnú stopu.

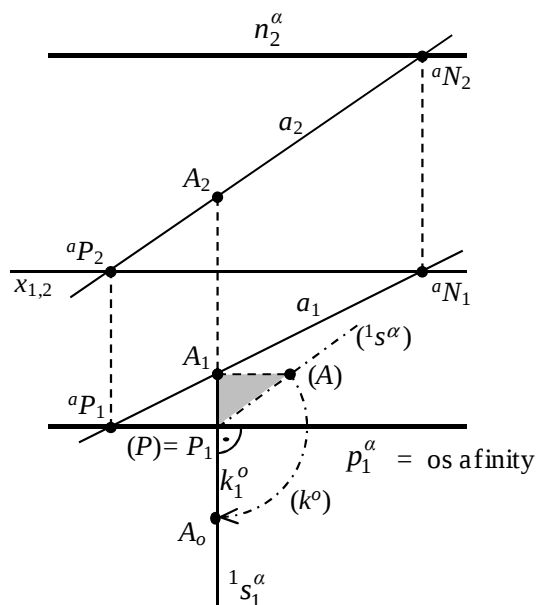
3. Polomer kružnice k^o určíme sklopením trojuholníka APA_1 do pôdorysne.

4. A_o : $\{A_o\} = {}^1s_1^\alpha \cap (k^o)$

5. Medzi pôdorysmi bodov roviny α a ich otočenými polohami do pôdorysne je vzťah kolmej afinity s osou p_1^α a dvojicou zodpovedajúcich si bodov A_1, A_o .



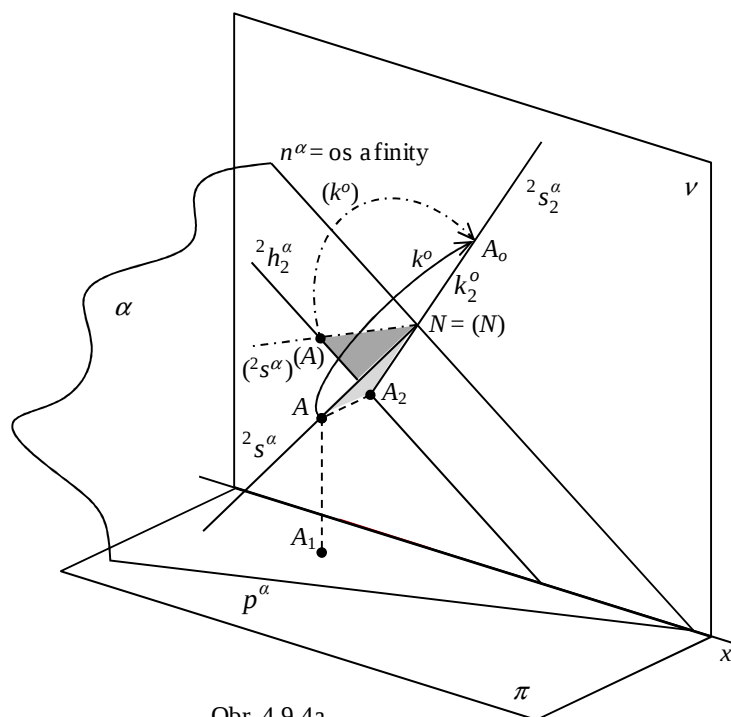
Obr. 4.9.3a



Obr. 4.9.3b

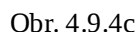
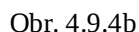
Otočenie roviny do nárysne

Úloha 4.9.4: Rovina α je daná pôdorysnou a nárysou stopou. Daný je pôdorys bodu $A \in \alpha$. Určte otočenú polohu bodu A pri otočení roviny α do nárysne okolo nárysnej stopy (Obr. 4.9.4b).



Obr. 4.9.4a

Os otáčania je nárysna stopa roviny α . Pri otáčaní roviny α sa bod A pohybuje po kružnici k^o . Nárys kružnice k^o je úsečka kolmá na nárysnú stopu roviny α . Stred kružnice k^o je nárysny stopník N spádovej priamky druhej osnovej roviny α incidujúcej s bodom A . Kružnica k^o má polomer $r = |AN|$; to je polomer otáčania bodu A . Dĺžku úsečky AN určíme pomocou sklopenia pravouhlého trojuholníka ANA_2 do nárysne. **Medzi nárysami bodov roviny α a ich otočenými polohami do nárysne je vzťah perspektívnej afinity s osou afinity $n^\alpha = n_2^\alpha$ a s dvojicou zodpovedajúcich si bodov A_2, A_o .**



1. Pomocou hlavnej priamky druhej osnovy roviny α určíme nárys bodu A.
2. Zobrazieme nárys spádovej priamky druhej osnovy roviny α , ktorá inciduje s bodom A.

$${}^2s_2^\alpha: A_2 \in {}^2s_2^\alpha \wedge {}^2s_2^\alpha \perp n_2^\alpha$$

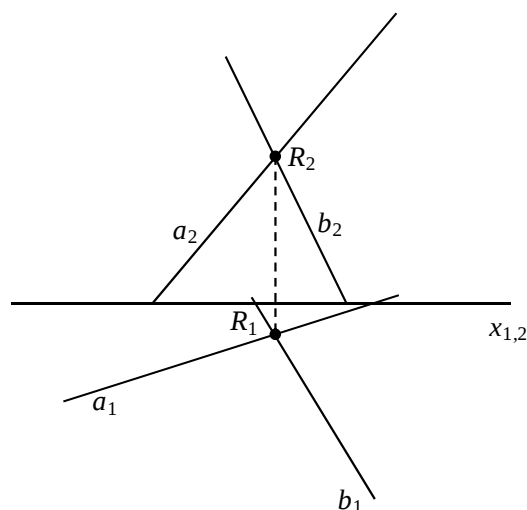
$$\{N_2\} = {}^2s_2^\alpha \cap n_2^\alpha$$
3. Bod A sa pri otáčaní roviny α pohybuje po kružnici $k^o(N; |AN|)$. Jej nárys je úsečka k_2^o kolmá na nárysnú stopu.
4. Polomer kružnice k^o určíme sklopením trojuholníka ANA_2 do nárysne. Dĺžka úsečky NA je polomer otáčania bodu A, t. j. $r = |AN| = |(A)(N)|$.
5. $(k^o): (k^o) = (N_2; r)$
6. $A_o: \{A_o\} = {}^2s_2^\alpha \cap (k^o)$
7. Medzi nárysami bodov roviny α a ich otočenými polohami do nárysne je vzťah kolmej afinity s osou n_2^α a dvojicou zodpovedajúcich si bodov A_2, A_o .

The diagram shows a coordinate system with a horizontal axis labeled $x_{1,2}$ and a vertical axis labeled n_2^α . A point labeled A_2 is located in the first quadrant. A line segment labeled p_1^α extends from the origin into the third quadrant.

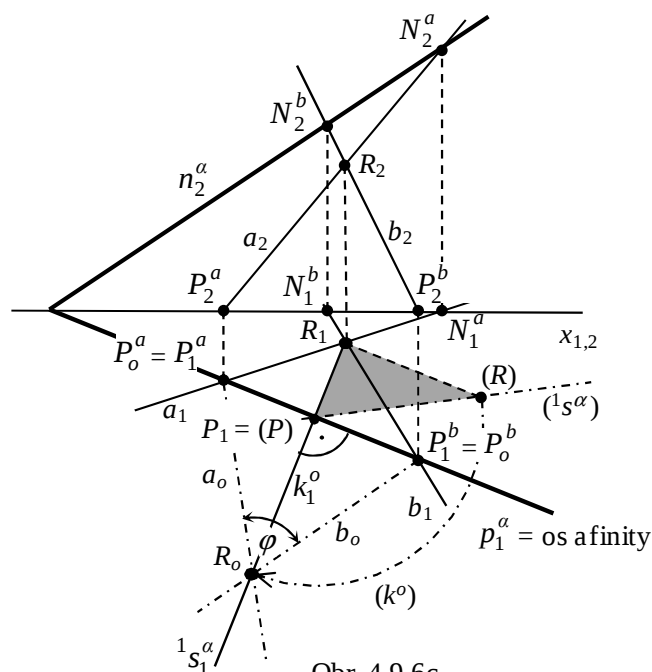
122

Riešenie (Obr. 4.9.6a):

Rôznobežné priamky a , b s priesečníkom R určujú rovinu, ktorú označíme α . Rovinu α otočíme okolo jej pôdorysnej stopy do pôdorysne. Pôdorysné stopníky priamok a a b sú samodružné body, preto na otočenie priamok a a b stačí otočiť ich priesečník R . Otočenie roviny je zhodnosť, preto platí: $|\angle(a, b)| = |\angle(a_o, b_o)| = \varphi$.



Obr. 4.9.6b



Obr. 4.9.6c

Postup (Obr. 4.9.6c):

1. Pomocou stopníkov priamok a , b určíme stopy roviny $\alpha = ab$.

2. ${}^1s_1^a$: $R_1 \in {}^1s_1^a \wedge {}^1s_1^a \perp p_1^a$

3. Bod R otočíme do pôdorysne ako v úlohe 4.9.1.

Medzi pôdorysmi bodov roviny α a ich otočenými polohami do pôdorysne je vzťah kolmej afinity s osou p_1^a a s dvojicou zodpovedajúcich si bodov R_1 , R_o .

4. $a_o = R_o P_o^a$

$b_o = R_o P_o^b$

Otočené útvary rysujeme bodkočiarkovanou čiarou.

5. $|\angle(a, b)| = |\angle(a_o, b_o)| = \varphi$.

Úloha 4.9.7: Určte päťuholník zhodný s päťuholníkom $ABCDE$, ktorý leží v rovine α (Obr. 4.9.7b).

Riešenie (Obr. 4.9.7a):

Rovinu α otočíme okolo nárysnej stopy do nárysne. Otočenie je zhodnosť a preto je päťuholník $A_oB_oC_oD_oE_o$ zhodný s päťuholníkom $ABCDE$, t. j. majú rovnaký tvar a veľkosť.

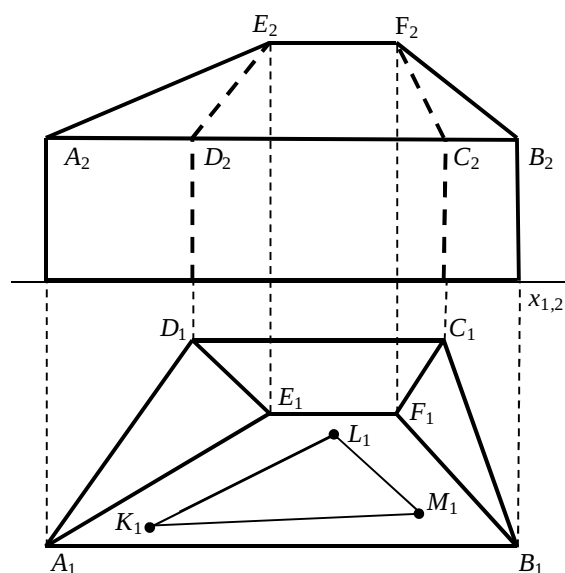
4. Určíme otočenú polohu bodu A . Bod A sa pri otáčaní roviny α pohybuje po kružnici $k^o(N; |AN|)$. Jej nárys je úsečka k_2^o kolmá na nárysnu stopu.
Polomer kružnice k^o určíme sklopením trojuholníka ANA_2 do nárysne (pozri úlohu 4.9.4).
5. Medzi nárysmi bodov roviny α a ich otočenými polohami do nárysne je vzťah kolmej afinity s osou n_2^α a dvojicou zodpovedajúcich si bodov A_2, A_o .
Pomocou afinity zobrazíme päťuholník $A_oB_oC_oD_oE_o$.

Poznámka: Všimnite si otočenú polohu pôdorysnej stopy roviny α .

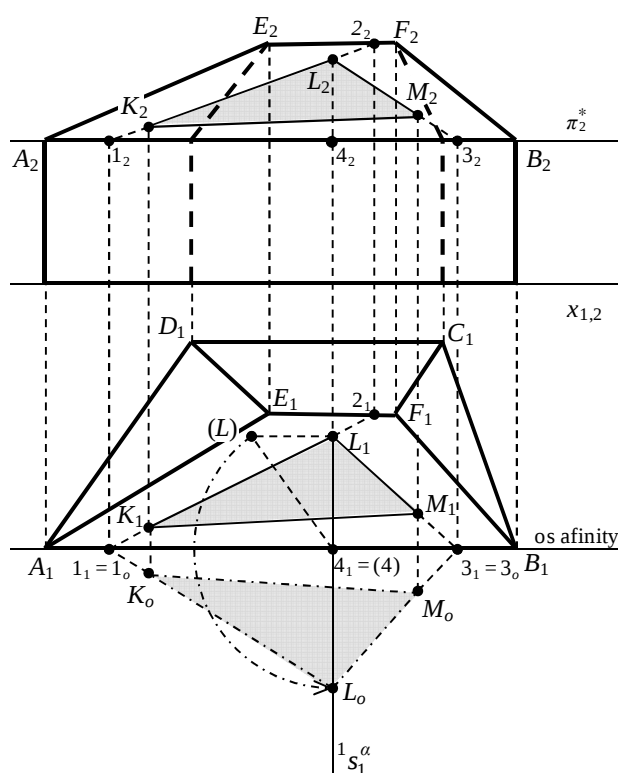
Úloha 4.9.8: Daný je pôdorys a nárys domu. Určte tvar strešného okna KLM , ktoré leží v rovine strechy ABE (Obr. 4.9.8a).

Riešenie (Obr. 4.9.8b):

Rovina $\alpha = ABE$ je kolmá na bokoryšnú. Úlohu vyriešime pomocou otočenia roviny ABE do roviny π^* , ktorá je rovnobežná s pôdorysňou a prechádza bodom A . Osou otáčania je priamka AB , ktorá je hlavnou priamkou prvej osnovy roviny ABE .



Obr. 4.9.8a



Obr. 4.9.8b

Postup:

1. Pomocou bodov 1, 2, 3 určíme nárys trojuholníka KLM .
2. Určíme otočenú polohu bodu L do roviny π^* :
Priamku $4L$ (spádová priamka prvej osnovy roviny ABE) sklopíme do roviny π^* .
Polomer otáčania bodu L je $|L(4)|$.
3. Medzi pôdorysmi bodov roviny ABE a ich otočenými polohami do roviny π^* je vzťah kolmej afinity s osou A_1B_1 a dvojicou zodpovedajúcich si bodov L_1, L_o .

4. Afinitou zobrazíme otočenú polohu $K_oL_oM_o$ trojuholníka KLM . Trojuholník $K_oL_oM_o$ je zhodný s trojuholníkom KLM .

Poznámka: V nasledujúcej kapitole budeme riešiť úlohy podobného typu. Pomocou otočenia roviny budeme zobrazovať združené priemety rovinného útvaru daných metrických vlastností.

4.10 Zobrazenie rovinného útvaru

V tejto kapitole budeme zobrazovať združené priemety, t. j. pôdorys a nárys rovinného útvaru (n -uholníka a kružnice) požadovaných metrických vlastností.

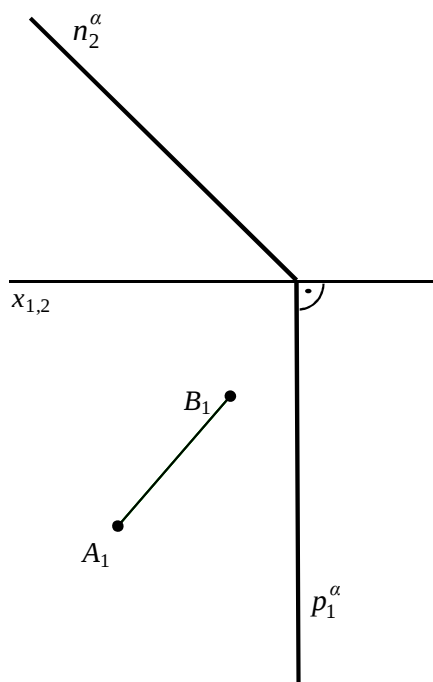
Zobrazenie rovinného n -uholníka

Úloha 4.10.1: Zobrazte pôdorys a nárys rovnostranného trojuholníka, ktorý leží v rovine $\alpha \perp v$. Daná je strana AB trojuholníka (Obr. 4.10.1a).

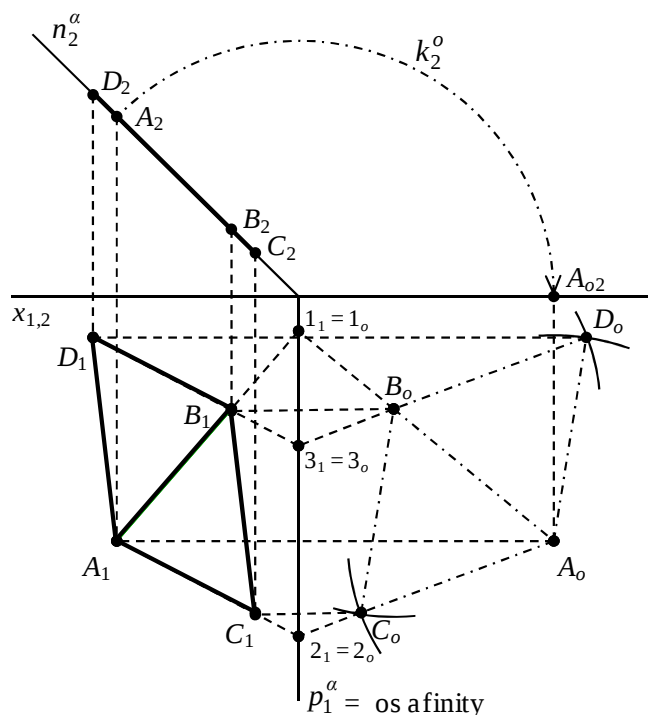
Riešenie (Obr. 4.10.1b):

Úlohu budeme riešiť pomocou otočenia roviny α do pôdorysne (pozri úlohu 4.9.2).

1. Narysujeme body A_2, B_2 .
2. Otočíme bod A . Získame dvojicu zodpovedajúcich si bodov A_1, A_o . Os afinity je priamka p_1^α . Afinitou určíme bod B_o .
3. V otočenej polohe narysujeme rovnostranný trojuholník. Úloha má dve riešenia: $A_oB_oC_o, A_oB_oD_o$.
4. Pomocou afinity zobrazíme body C_1, D_1 . Doplníme C_2, D_2 .

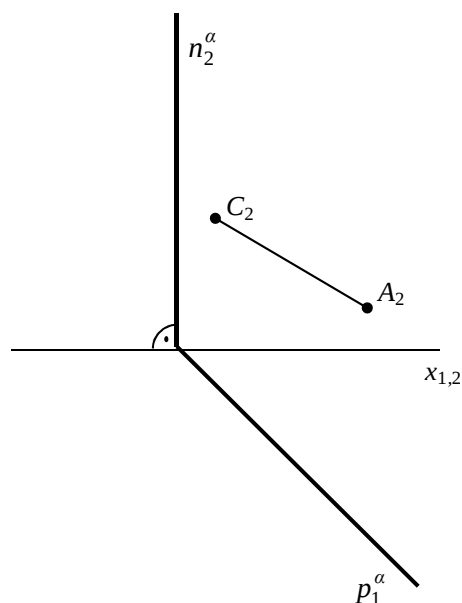


Obr. 4.10.1a

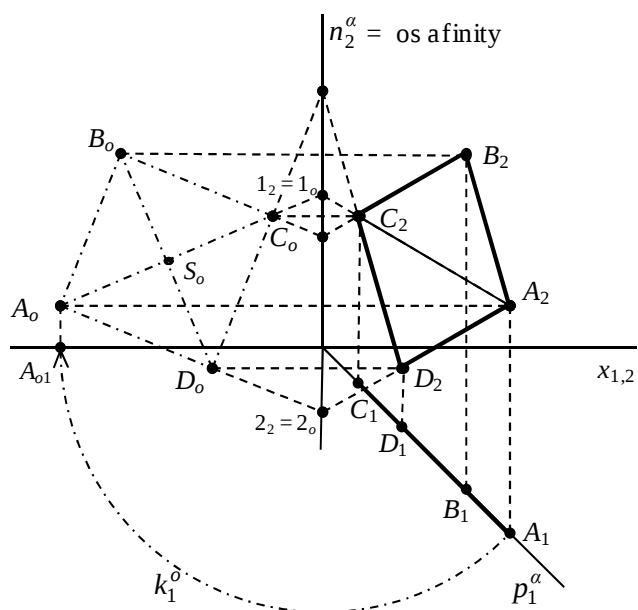


Obr. 4.10.1b

Úloha 4.10.2: Zobrazte pôdorys a nárys štvorca $ABCD$, ktorý leží v rovine $\alpha \perp \pi$. Daná je uhlopriečka AC štvorca (Obr. 4.10.2a).



Obr. 4.10.2a



Obr. 4.10.2b

Riešenie (Obr. 4.10.2b):

1. Narysujeme bod A_1 .
2. Rovinu α otočíme do nárysne okolo nárysnej stopy. Otočíme bod A (pozri úlohu 4.9.5). Získame dvojicu zodpovedajúcich si bodov A_2, A_0 . Os afinity je priamka n_2^α . Afinitou určíme bod C_0 .
3. V otočenej polohe narysujeme štvorec $A_0B_0C_0D_0$. Úloha má jedno riešenie.
4. Pomocou afinity zobrazíme body B_2, D_2 . Nárys štvorca $ABCD$ je rovnobežník $A_2B_2C_2D_2$.
5. Doplníme B_1, C_1, D_1 . Pôdorys štvorca $ABCD$ je úsečka A_1C_1 .

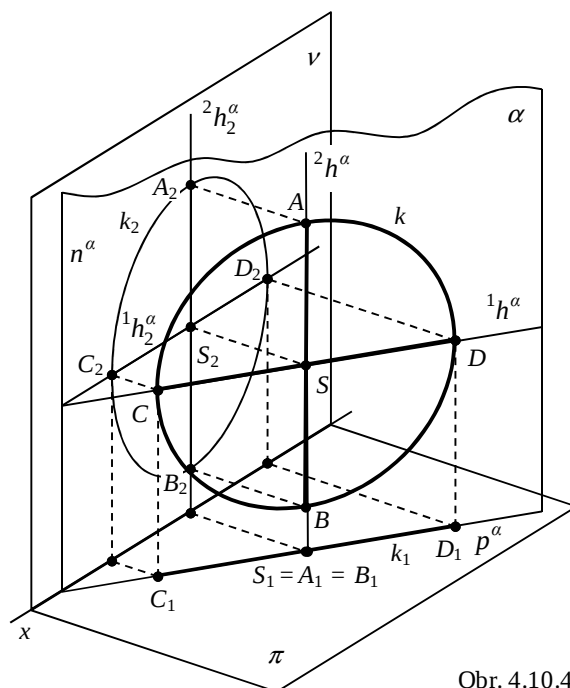
Úloha 4.10.3: Zobrazte pôdorys a nárys obdĺžnika $ABCD$, ktorý leží v rovine α . Dané sú body A, B a pomer strán $|AB| : |BC| = 2 : 1$ (Obr. 4.10.3a).

Riešenie (Obr. 4.10.3b):

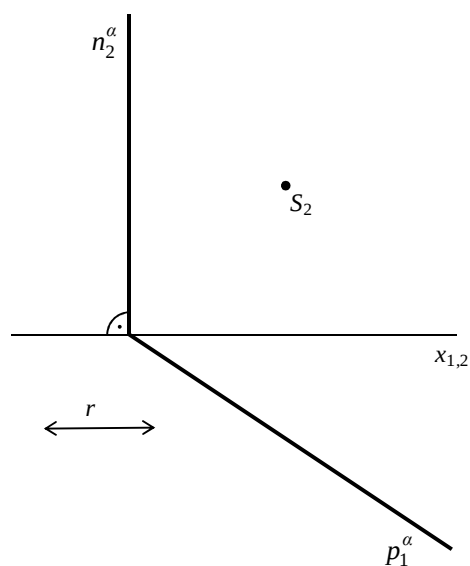
1. Pomocou hlavných priamok prvej osnove roviny α určíme body A_2 a B_1 .
2. Rovinu α otočíme do pôdorysne (pozri úlohu 4.9.1). Narysujeme otočenú polohu bodu A :
 ${}^1s_1^\alpha: A_1 \in {}^1s_1^\alpha \wedge {}^1s_1^\alpha \perp p_1^\alpha$
 Sklopíme pravouhlý trojuholník APA_1 do pôdorysne. Dĺžka jeho prepony je polomer otáčania bodu A , t. j. $r = |AP| = |(A)(P)|$.
 $(k^o): (k^o) = (P_1; r)$
 $A_o: \{A_o\} = {}^1s_1^\alpha \cap (k^o)$
 Medzi pôdorysmi bodov roviny α a ich otočenými polohami do pôdorysne je vzťah kolmej afinity s osou p_1^α a dvojicou zodpovedajúcich si bodov A_1, A_o .
3. Afinitou určíme bod B_o .

-

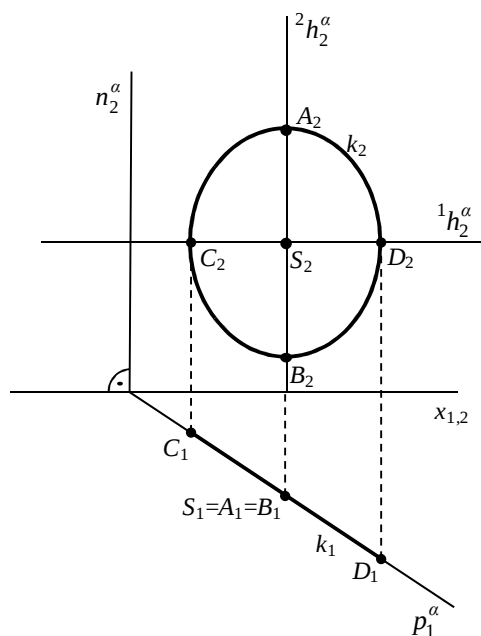
128



Obr. 4.10.4a



Obr. 4.10.4b



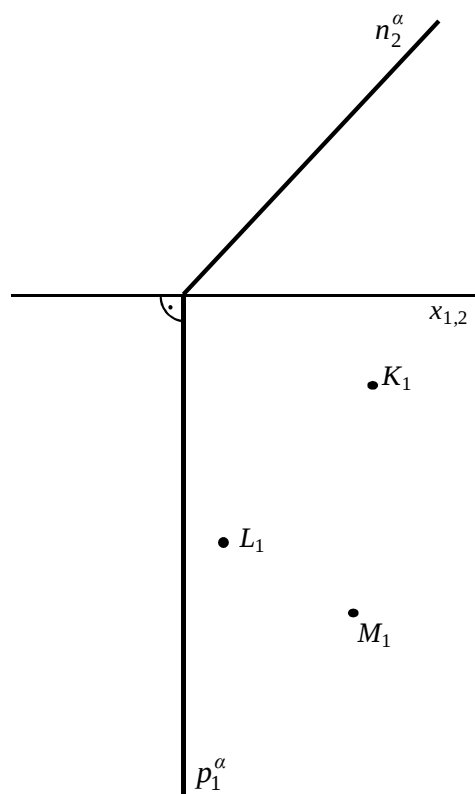
Obr. 4.10.4c

Postup (Obr. 4.10.4c):

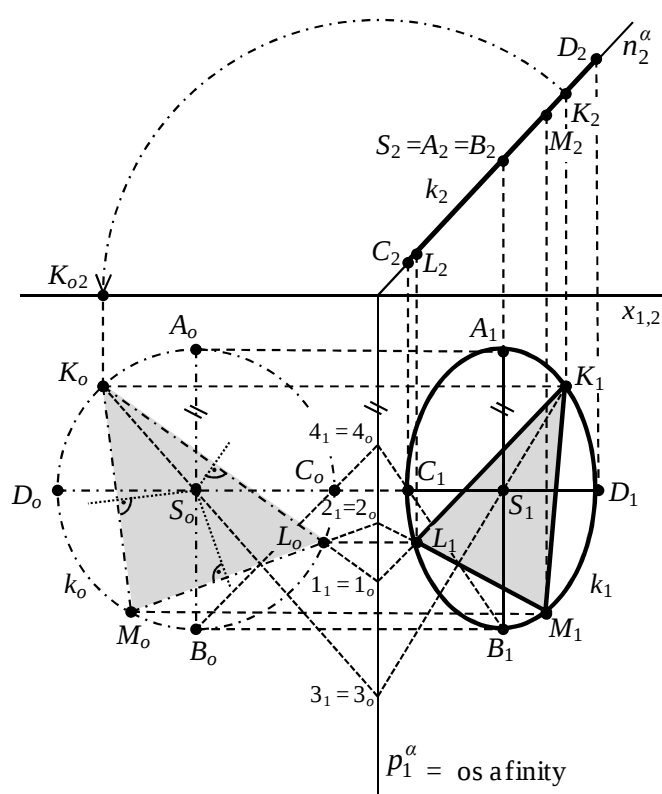
1. Narysujeme bod S_1 na pôdorysnej stope p_1^α a na ordinále bodu S . $S_1 = A_1 = B_1$.
 $|C_1S_1| = |CS| = |D_1S_1| = |DS| = r$
 Pôdorys kružnice k je úsečka C_1D_1 .
2. Body A_2, B_2 ležia na priamke ${}^2h_2^\alpha$ inciduujúcej s bodom S_2 a platí:
 $|A_2S_2| = |AS| = |B_2S_2| = |BS| = r$.
3. Body C_2 a D_2 ležia na priamke ${}^1h_2^\alpha$ inciduujúcej s bodom S_2 a na ordinálach bodov C a D .
4. Nárys kružnice k je elipsa k_2 určená hlavnými vrcholmi A_2, B_2 a vedľajšími vrcholmi C_2, D_2 .

Úloha 4.10.5: Daná je rovina α kolmá na nárysňu a trojuholník KLM , ktorý leží v rovine α . Zobraďte pôdorys a nárys kružnice k , ktorá je opísaná trojuholníku KLM (Obr. 4.10.5a).

Riešenie (Obr. 4.10.5b):



Obr. 4.10.5a



Obr. 4.10.5b

1. Rovinu α otočíme okolo pôdorysnej stopy do pôdorysne (pozri úlohu 4.9.2). Otočíme bod K a afinitou zobrazíme body L_1 a M_1 .
2. V otočenej polohe opíšeme trojuholníku $K_oL_oM_o$ kružnicu k_o . Jej stred S_o je priesečník osí strán trojuholníka $K_oL_oM_o$.
3. Pôdorys kružnice k je elipsa k_1 . Zobražíme ju pomocou kolmej afinity (pozri úlohu 3.5.3). Priemer A_oB_o rovnobežný s osou afinity sa zobrazí do priemeru A_1B_1 elipsy k_1 . Body A_1 a B_1 sú hlavné vrcholy elipsy k_1 . Priemer C_oD_o kolmý na os afinity sa zobrazí do priemeru C_1D_1 elipsy k_1 . Body C_1 a D_1 sú vedľajšie vrcholy elipsy k_1 .
4. Nárys kružnice k je úsečka C_2D_2 ležiaca na n_2^alpha .

Úloha 4.10.6: Zobraďte pôdorys a nárys kružnice k , ktorá leží v rovine α . Daný je stred S kružnice a jej polomer r (Obr. 4.10.6b).

Riešenie (Obr. 4.10.6a):

Pôdorys kružnice k je elipsa k_1 a nárys elipsa k_2 .

Kružnica k má nekonečne veľa priemerov s dĺžkou $2r$. Ich kolmé priemety sú úsečky kratšie, nanajvýš rovnako dlhé ako $2r$.

Pôdorys kružnice k :

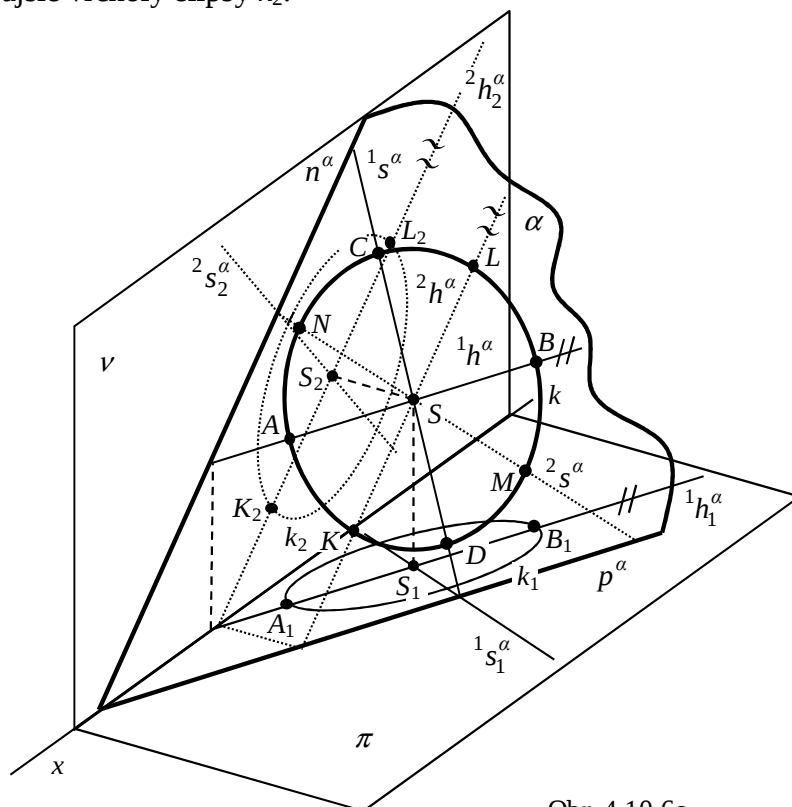
Priemer AB , ktorý je rovnobežný s pôdorysňou a leží na hlavnej priamke prvej osnove roviny α sa premieta do úsečky A_1B_1 s dĺžkou $2r$. Body A_1 a B_1 sú hlavné vrcholy elipsy k_1 .

Priemer CD , kolmý na priemer AB , leží na spádovej priamke prvej osnove roviny α . Body C_1 a D_1 sú vedľajšie vrcholy elipsy k_1 .

Nárys kružnice k :

Priemer KL , ktorý je rovnobežný s nárysňou a leží na hlavnej priamke druhej osnove roviny α sa premieta do úsečky K_2L_2 s dĺžkou $2r$. Body K_2 a L_2 sú hlavné vrcholy elipsy k_2 .

Priemer MN , kolmý na priemer KL , leží na spádovej priamke druhej osnove roviny α . Body M_2 a N_2 sú vedľajšie vrcholy elipsy k_2 .



Obr. 4.10.6a

Postup (Obr. 4.10.6c):

1. Pomocou hlavnej priamky $^1h^\alpha$ určíme bod S_2 .
2. Na priamku $^1h_1^\alpha$ nanesieme od bodu S_1 polomer r . Body A_1, B_1 sú hlavné vrcholy elipsy k_1 .
3. Určíme vedľajší vrchol C_1 elipsy k_1 :
Bodom S vedieme spádovú priamku prvej osnove roviny α . Sklopíme ju do pôdorysne a nanesieme na ňu od bodu (S) polomer r . $|(C)(S)| = r$.
 $C_1: (C)C_1 \perp ^1s_1^\alpha \wedge C_1 \in ^1s_1^\alpha$
4. Vedľajší vrchol D_1 elipsy k_1 je súmerný k bodu C_1 podľa stredu S_1 .
Elipsa k_1 je určená vrcholmi A_1, B_1 a C_1, D_1 .
5. Na priamku $^2h_2^\alpha$ nanesieme od bodu S_2 polomer r . Body K_2 a L_2 sú hlavné vrcholy elipsy k_2 .

6. Určíme vedľajší vrchol M_2 elipsy k_2 :

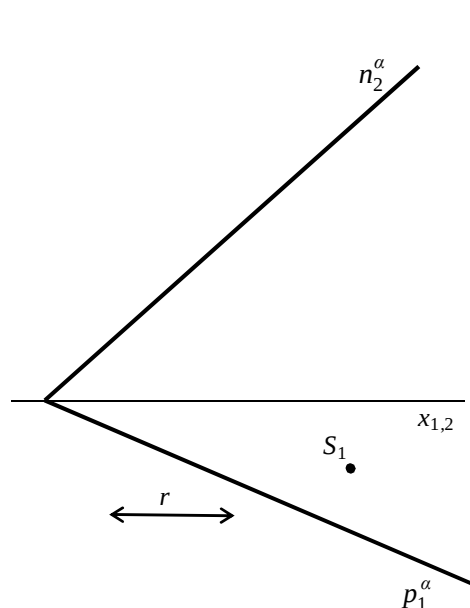
Bodom S vedieme spádovú priamku druhej osnovej roviny α . Sklopíme ju do nárysne a nanesieme na ňu od bodu (S) polomer r . $|(M)(S)| = r$.

$$M_2: (M)M_2 \perp {}^2s_2^\alpha \wedge M_2 \in {}^2s_2^\alpha$$

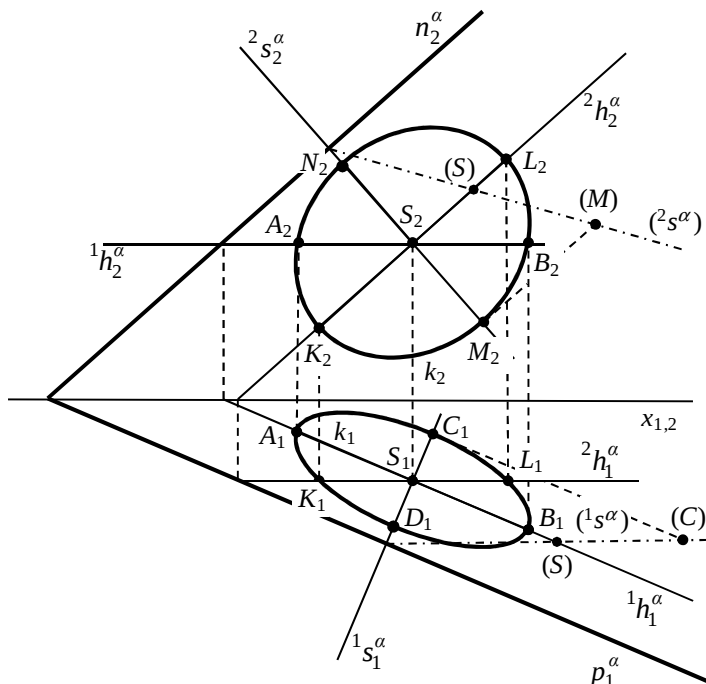
7. Vedľajší vrchol N_2 elipsy k_2 je súmerný k bodu M_2 podľa stredu S_2 .

Elipsa k_2 je určená vrcholmi K_2, L_2 a M_2, N_2 .

Poznámka: Na určenie dĺžok vedľajších osí elips k_1 a k_2 môžeme použiť rozdielovú konštrukciu (pozri úlohu 3.5.7).



Obr. 4.10.6b



Obr. 4.10.6c

4.11 Zobrazenie telies

V tejto kapitole budeme zobrazovať združené priemety, t. j. pôdorys a nárys pravidelných n -bokých hranolov a ihlanov, rotačných valcov a rotačných kužeľov.

Úloha 4.11.1: Zobraďte pôdorys a nárys pravidelného trojbokého ihlana $ABCV$. Trojuholník ABC leží v rovine α . Daná je jeho strana AB . Výška ihlana sa rovná dĺžke strany AB (Obr. 4.11.1a).

Riešenie:

Úloha má 4 riešenia. V rovine α ležia dva rovnostranné trojuholníky so spoločnou stranou AB a vrchol V môže ležať v opačných polpriestoroch vzhľadom na rovinu α . Zobražíme jedno z riešení.

Postup (Obr. 4.11.1b):

1. Rovnostranný trojuholník ABC zobražíme podľa úlohy 4.10.1.

2. Zobražíme bod S , stred rovnostranného trojuholníka ABC :

V otočenej polohe sme narysovali S_o ako priesečník dvoch ťažníc trojuholníka $A_oB_oC_o$. Bod S_1 určíme pomocou afinity, alebo ho môžeme narysovať priamo ako priesečník ťažníc trojuholníka $A_1B_1C_1$.

- ### 3. Zobrazíme vrchol V ihlana:

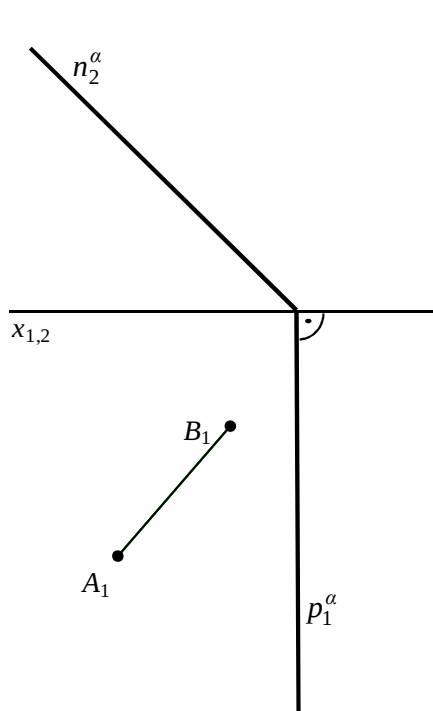
Bodom S zostrojíme priamku k kolmú na rovinu α a nanesieme na ňu výšku ihlana:

$$k_1 \perp p_1^\alpha \wedge k_2 \perp n_2^\alpha.$$

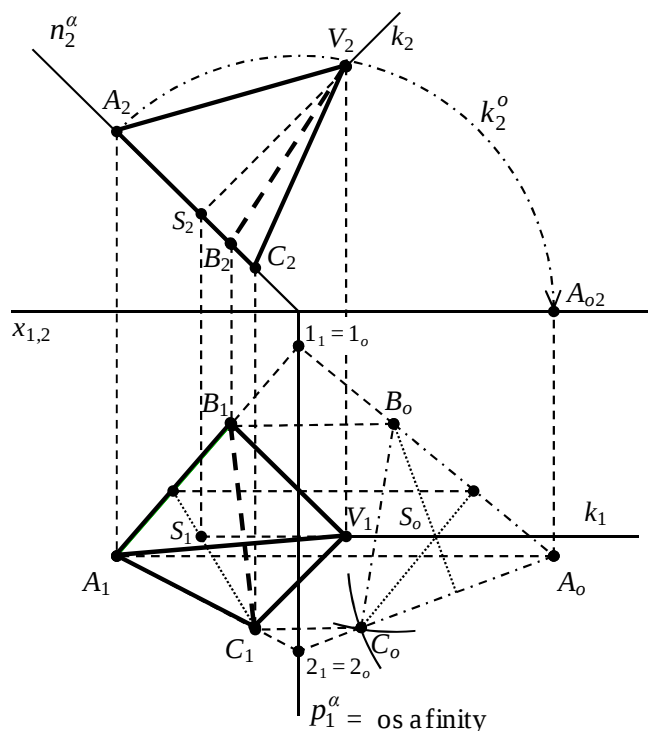
Priamka k je rovnobežná s nárysňou preto platí: $|V_2S_2| = |AB| = |A_0B_0| \wedge V_2 \in k_2$.

V_1 leží na priamke k_1 a na ordinále bodu V .

4. Doplníme hrany ihlana a určíme viditeľnosť v pôdoryse a v náryse. Na určenie viditeľnosti môžeme použiť krycie body (pozri úlohu 4.6.5).



Obr. 4.11.1a



Obr. 4.11.1b

Úloha 4.11.2: Zobraďte pôdorys a nárys kocky $ABCDEFGH$. Štvorec $ABCD$ leží v rovine α , daná je jeho uhlopriečka AC (Obr. 4.11.2a).

Riešenie:

Úloha má 2 riešenia. V rovine α leží jeden štvorec určený uhlopriečkou. Kocka môže ležať v opačných polpriestoroch vzhľadom na rovinu α . Zobrazieme jedno z riešení.

Postup (Obr. 4.11.2b):

- 1. Štvorec $ABCD$ zobrazíme podľa úlohy 4.10.2.**

2. Zobrazíme bod E :

Bodom A zostrojíme priamku k kolmú na rovinu α a nanesieme na ňu výšku kocky.

$$k_1 \perp p_1^\alpha \wedge k_2 \perp n_7^\alpha.$$

Priamka k je rovnobežná s pôdorysňou preto platí:

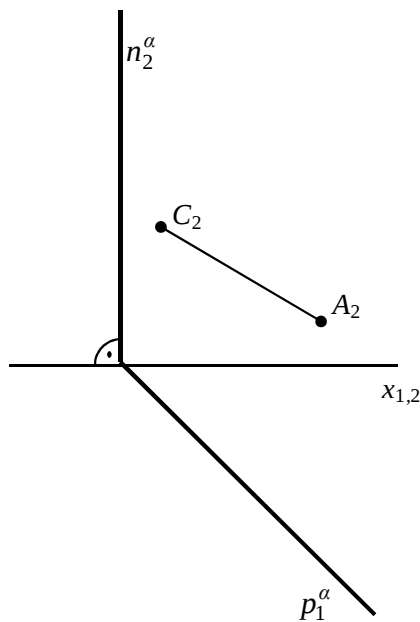
$$|A_1E_1| = |AB| = |A_0B_0| \wedge E_1 \in k_1$$

E_2 leží na priamke k_2 a na ordinále bodu E .

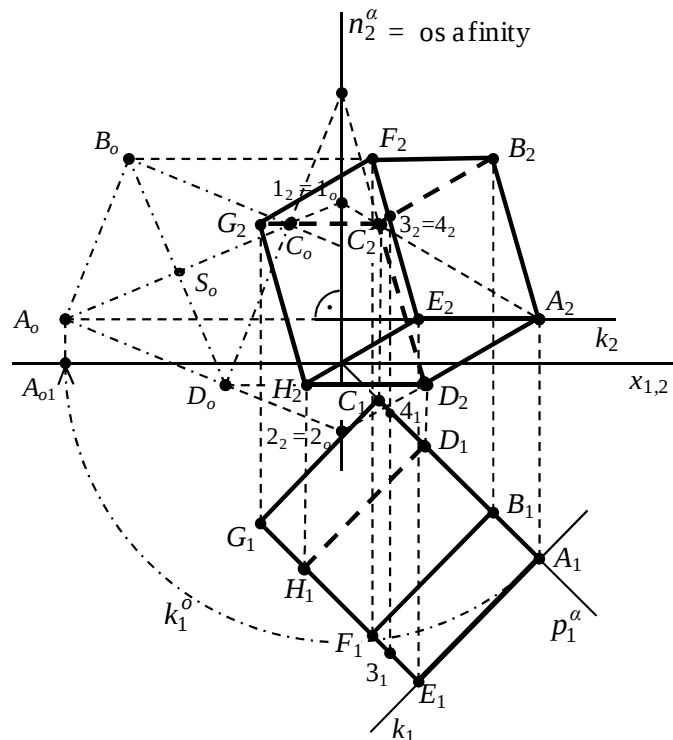
3. Doplníme ostatné hrany kocky v náryse aj v pôdoryse. Využijeme vlastnosti priemetu rovnobežných a rovnako dlhých úsečiek.

4. Určíme viditeľnosť hrán kocky v pôdoryse a v náryse.

Na určenie viditeľnosti v náryse môžeme použiť krycie body $3_2 = 4_2$ (pozri úlohu 4.6.5).



Obr. 4.11.2a



Obr. 4.11.2b

Úloha 4.11.3: Zobraďte pôdorys a nárys rotačného kužeľa s podstavou v rovine α . Daný je stred S podstavnej kružnice k a jej polomer r . Výška kužeľa sa rovná $2r$ (Obr. 4.11.3a).

Riešenie:

Úloha má 2 riešenia. V rovine α leží jedna kružnica daná stredom S a polomerom r . Kužeľ môže ležať v opačných polpriestoroch vzhľadom na rovinu α . Zobražíme jedno z riešení.

Postup (Obr. 4.11.3b):

1. Kružnicu k zobrazíme analogicky ako v úlohe 4.10.4.

2. Zobražíme vrchol V kužeľa:

Bodom S vedieme kolmicu $^S k$ na rovinu α a nanesieme na ňu výšku kužeľa:

$$^S k_1 \perp p_1^\alpha \wedge ^S k_2 \perp n_2^\alpha$$

Priamka $^S k$ je rovnobežná s pôdorysňou a preto platí: $|V_1S_1| = 2r \wedge V_1 \in ^S k_1$.

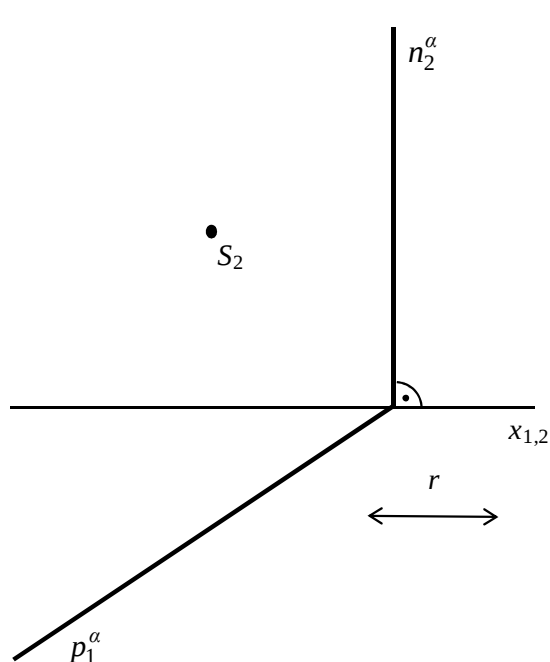
V_2 leží na priamke $^S k_2$ a na ordinále bodu V .

3. Pôdorys kužeľa je trojuholník $C_1D_1V_1$.

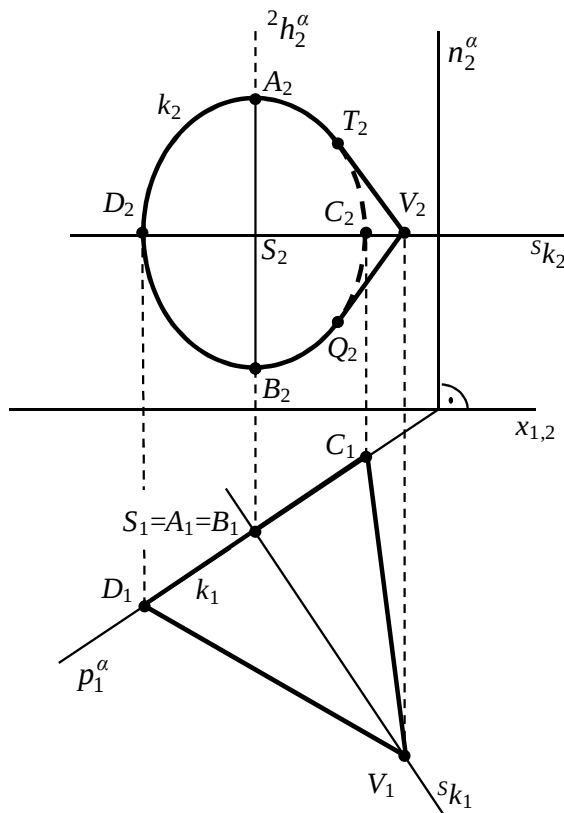
Obrys kužeľa v náryse tvoria dotýčnice elipsy k_2 vedené z bodu V_2 a časť elipsy k_2 po dotýkových bodoch T_2 a Q_2 .

4. Určíme viditeľnosť elipsy k_2 . Časť elipsy obsahujúca bod C_2 po dotykové body T_2 a Q_2 nie je viditeľná.

Poznámka: Dotyčnice elipsy k_2 z bodu V_2 aj dotykové body T_2 a Q_2 môžeme narysovať presne (pozri úlohu 3.5.6).



Obr. 4.11.3a



Obr. 4.11.3b

Úloha 4.11.4: Zobrazte pôdorys a nárys kvádra $ABCDEFGH$ s podstavou $ABCD$ v rovine α . Dané sú body A a B . Pomer dĺžok hrán $|AB| : |BC| : |AE| = 2 : 1 : 3$ (Obr. 4.11.4a).

Riešenie:

Úloha má 4 riešenia. V rovine α ležia dva obdĺžniky požadovaných vlastností a kváder môže ležať v opačných polpriestoroch vzhľadom na rovinu α . Zobrazíme jedno z riešení.

Postup (Obr. 4.11.4b):

1. Obdĺžnik $ABCD$ zobrazíme podľa úlohy 4.10.3.

2. Zobrazíme bod E :

Bodom A zostrojíme kolmicu k na rovinu α a nanesieme na ňu výšku kvádra podľa úlohy 4.8.11.

$$k_1 \perp p_1^\alpha \wedge k_2 \perp n_2^\alpha$$

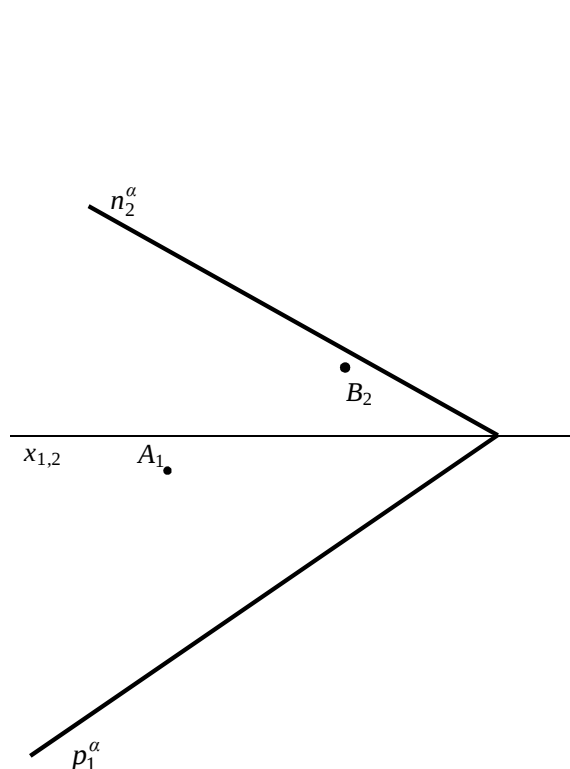
$$|(A)(E)| = 3|AD| = 3|A_oD_o|$$

Zvolili sme jedno z dvoch možných riešení tak, aby bod E ležal nad rovinou α .

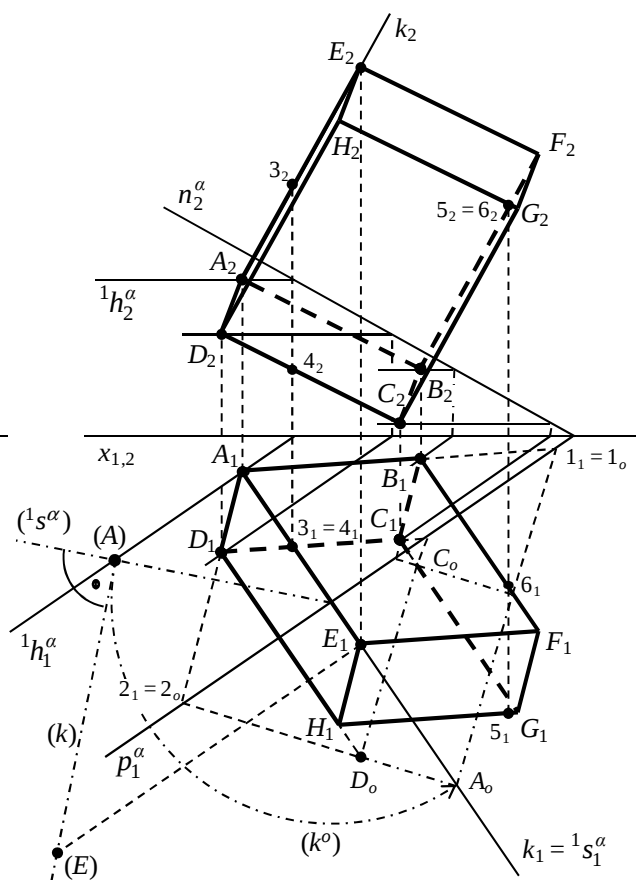
3. Doplníme ostatné hrany kvádra v náryse aj v pôdoryse. Využijeme vlastnosti priemetu rovnobežných a rovnako dlhých úsečiek.

4. Určíme viditeľnosť hrán kvádra v pôdoryse a v náryse.

Pre určenie viditeľnosti hrán môžeme použiť krycie body $3_1 = 4_1$ a $5_2 = 6_2$.



Obr. 4.11.4a



Obr. 4.11.4b

Úloha 4.11.5: Zobrazte pôdorys a nárys rotačného valca s podstavou v rovine α . Daný je stred S podstavnej kružnice k a jej polomer r . Výška valca sa rovná r (Obr. 4.11.5a).

Riešenie:

Úloha má dve riešenia. V rovine α existuje jedna kružnica k požadovaných vlastností. Valec môže ležať v opačných polpriestoroch vzhľadom na rovinu α . Zobrazíme jedno z riešení.

Postup (Obr. 4.11.5b):

1. Kružnicu k , ktorá tvorí podstavu valca zobrazíme podľa úlohy 4.10.6.

2. Výšku valca SO zobrazíme podľa úlohy 4.8.11.

Bodom S zostrojíme kolmicu o na rovinu α

$$o_1 \perp p_1^\alpha \wedge o_2 \perp n_2^\alpha$$

$$|(S)(O)| = r$$

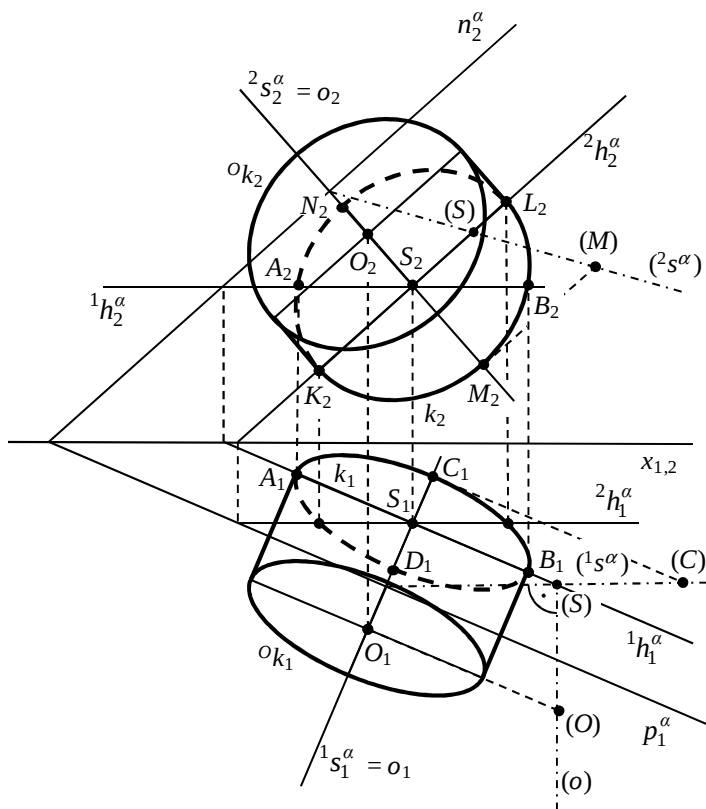
Zvolili sme jedno z dvoch možných riešení tak, aby bod O ležal nad rovinou α .

3. Druhá podstava rotačného valca je kružnica Ok so stredom v bode O a s polomerom r . Kružnice k a Ok ležia v navzájom rovnobežných rovinách, preto ich priemety sú zhodné elipsy.

4. Doplníme obrys valca a určíme viditeľnosť:

Časť obrysu tvoria spoločné dotyčnice elíps k_1 a Ok_1 . Elipsa Ok_1 je viditeľná celá. Viditeľnosť elipsy k_1 sa mení v hlavných vrchoch A_1, B_1 elipsy k_1 .

Časť obrysu tvoria spoločné dotyčnice elips k_2 a 0k_2 . Elipsa 0k_2 je viditeľná celá. Viditeľnosť elipsy k_2 sa mení v hlavných vrchoch K_2, L_2 elipsy k_2 .

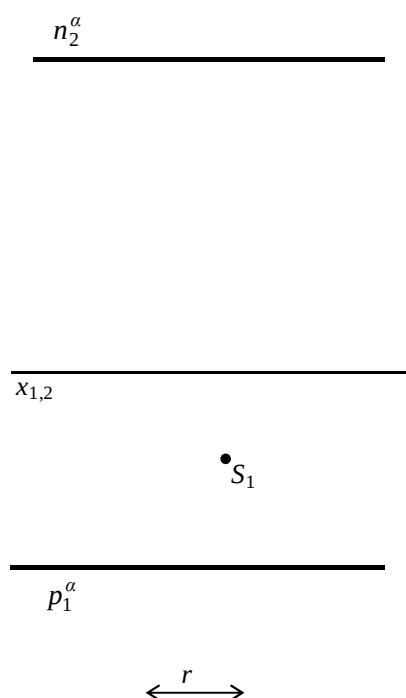


Obr. 4.11.5b

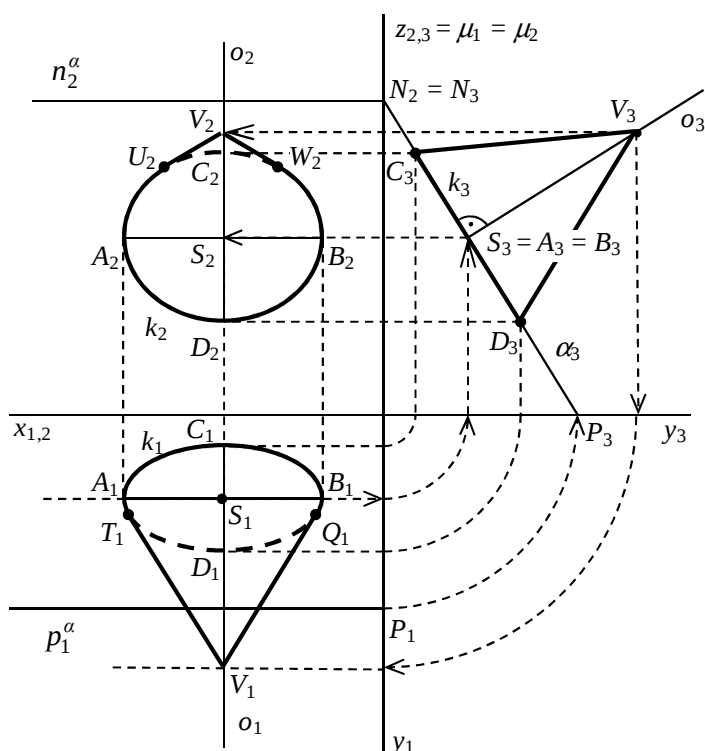
V tejto kapitole uvedieme niekoľko úloh, v ktorých je výhodné použiť pri riešení tretiu priemetňu, ktorá je kolmá na pôdorysňu, alebo nárysňu, alebo aj na pôdorysňu aj na nárysňu zároveň. Polohu tretej priemetne volíme podľa polohy prvkov v riešenej úlohe tak, aby riešenie úlohy bolo jednoduché a efektívne.

Riešenie:

137



Obr. 4.12.1a



Obr. 4.12.1b

Postup (Obr. 4.12.1b):

1. Vhodne zvolíme polohu bokorysne μ a tým aj polohu z-ovej súradnicovej osi. Bokorysňu združíme s nárysňou $\mu_1 = \mu_2 = z_{2,3}$.
2. Rovina α je kolmá na bokorysňu, preto jej bokorys je priamka. Na jej určenie stačia bokorysy ľubovoľných dvoch bodov, ktoré ležia v rovine α . Použijeme stopníky P a N .
 $\{P\} = p^\alpha \cap \mu$
 $\{N\} = n^\alpha \cap \mu$
 $\alpha_3 = P_3N_3$
 Podrobnejšie pozri úlohu 4.6.4.
3. Zobrazíme tretí priemet bodu S . $S_3 \in \alpha_3$.
4. Zobrazíme nárys bodu S . Bod S_2 narýsujeme ako priesečník ordinál:
 ordinála medzi prvým a druhým priemetom $S_1S_2 \perp x_{1,2}$,
 ordinála medzi druhým a tretím priemetom $S_2S_3 \perp z_{2,3}$.
5. Zobrazenie kružnice k :
 Pôdorys kružnice k je elipsa k_1 , nárys je elipsa k_2 a bokorys úsečka k_3 .
 Priemer AB kružnice k , ktorý je rovnobežný s pôdorysňou je zároveň rovnobežný aj s nárysňou a preto sa body A a B premietajú do hlavných vrcholov elipsy k_1 aj elipsy k_2 .
 $|S_1A_1| = |S_1B_1| = r$
 $|S_2A_2| = |S_2B_2| = r$
 V treťom priemete platí $S_3 = A_3 = B_3$.
 Bokorys kružnice k je úsečka C_3D_3 na priamke α_3 , pre ktorú platí:
 $|S_3C_3| = |S_3D_3| = r$
 Doplníme body C_2, D_2 a C_1, D_1 .

Elipsa k_1 je určená hlavnými vrcholmi A_1, B_1 a vedľajšími vrcholmi C_1, D_1 .

Elipsa k_2 je určená hlavnými vrcholmi A_2, B_2 a vedľajšími vrcholmi C_2, D_2 .

Poznámka: Dĺžky vedľajších polosí S_1C_1 a S_2C_2 sa rovnajú len vtedy, ak sú odchýlky roviny α od pôdorysne a nárysne rovnaké.

6. Zobrazieme bokorys kužeľa:

Os o rotačného kužeľa je kolmá na rovinu α , t. j. rovnobežná s bokorysňou. Preto v bokoryse platí: $o_3 \perp \alpha_3 \wedge S_3 \in o_3$.

Vrchol V kužeľa leží na osi o , výška kužeľa je $2r$, preto $V_3 \in o_3$ a $|S_3V_3| = 2r$. Úloha má dve riešenia, zvolili sme kužeľ ležiaci nad rovinou α .

Bokorys kužeľa je trojuholník $C_3D_3V_3$.

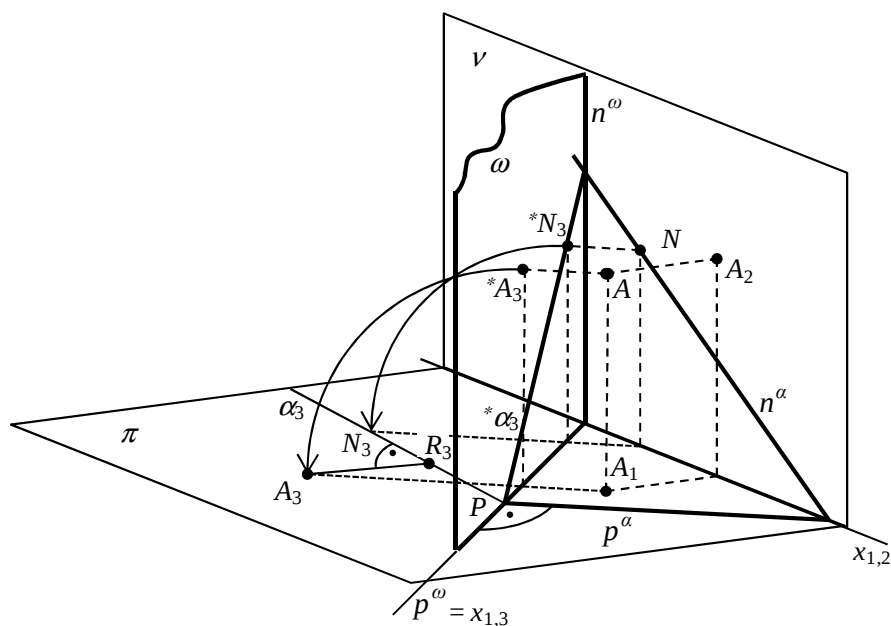
7. Doplníme body V_2 a V_1 .

Obrys kužeľa v pôdoryse tvoria dotyčnice elipsy k_1 vedené z bodu V_1 a časť elipsy k_1 po dotykové body T_1 a Q_1 , v ktorých sa mení aj viditeľnosť elipsy k_1 .

Obrys kužeľa v náryse tvoria dotyčnice elipsy k_2 vedené z bodu V_2 a časť elipsy k_2 po dotykové body U_2 a W_2 , v ktorých sa mení aj viditeľnosť elipsy k_2 .

Poznámka: Presná konštrukcia dotyčníc elipsy a ich dotykových bodov je v úlohe 3.5.6.

Úloha 4.12.2: Daná je rovina α a bod A . Určte ich vzdialenosť (Obr. 4.12.2b).



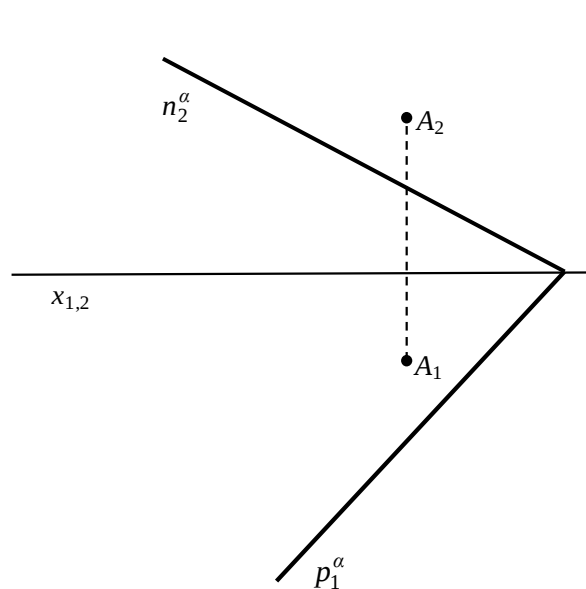
Obr. 4.12.2a

Riešenie (Obr. 4.12.2a):

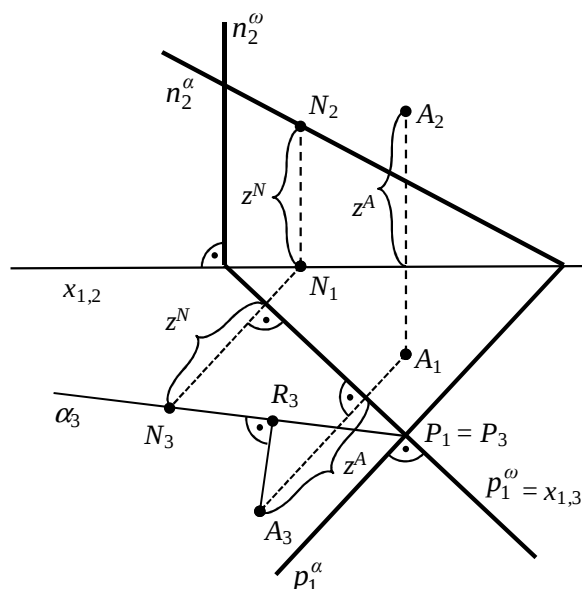
Podobnú úlohu sme riešili v kapitole Metrické úlohy (pozri úlohu 4.8.10). Teraz ukážeme iný spôsob riešenia, pri ktorom využijeme tretiu pomocnú priemetňu ω . Smer premietania do pomocnej priemetne je kolmý. Tretiu priemetňu ω zvolíme tak, aby bola kolmá na pôdorysňu a zároveň kolmá na rovinu α , aby tretí priemet roviny α bola priamka. Zostrojíme tretí priemet bodu A . Tretiu priemetňu ω združíme s pôdorysňou, t. j. sklopíme ju do pôdorysne okolo jej pôdorysnej stopy. Tým prevedieme riešenie úlohy so všeobecnou polohou roviny α na jednoduchšiu úlohu, v ktorej je rovina α kolmá na pomocnú priemetňu (pozri úlohu 4.8.9).

Postup (Obr. 4.12.2c):

1. Tretia pomocná priemetňa ω je kolmá na pôdorysňu a aj na rovinu α . Inak je jej poloha ľubovoľná. Vhodne zvolíme $p_1^\omega \perp p_1^\alpha$.
2. Zobrazíme tretí priemet bodu A:
Po združení priemetne ω s pôdorysňou platí, že zdužené priemety A_1 a A_3 ležia na ordinále, t. j. $A_1A_3 \perp x_{1,3}$. Vzdialenosť bodu A od pôdorysne (z-ová súradnica) sa v treťom priemete zachová. $|A_2, x_{1,2}| = |A_3, x_{1,3}| = |z^A|$
3. Zostrojíme tretí priemet roviny α
Tretí priemet roviny α je priamka. Na jej určenie stačia priemety ľubovoľných dvoch bodov, ktoré ležia v rovine α . Použijeme stopníky P a N. Stopník N je ľubovoľný nárysný stopník a $\{P\} = p^\alpha \cap p^\omega$.
 $\alpha_3 = P_3N_3$
4. Vzdialenosť bodu A od roviny α je zhodná so vzdialenosťou bodu A_3 od priamky α_3 .
 $|A, \alpha| = |A_3, \alpha_3| = |A_3R_3|$



Obr. 4.12.2b

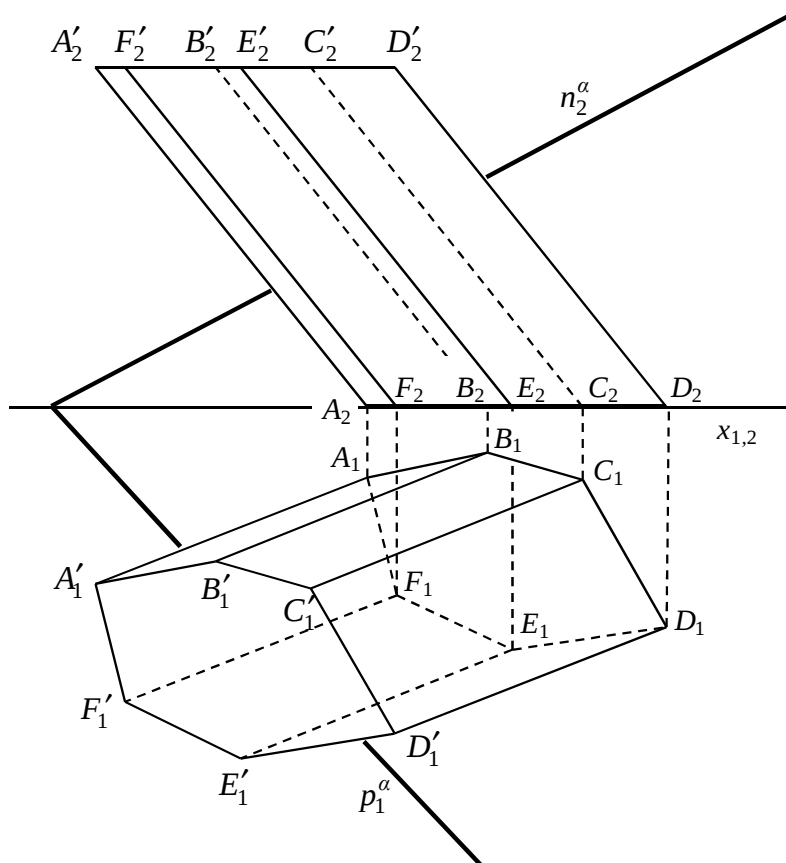


Obr. 4.12.2c

Úloha 4.12.3: Zobrazte rez šikmého hranola $ABCDEF A'B'C'D'E'F'$ rovinou α (Obr. 4.12.3a).

Riešenie:

Podobný príklad sme riešili v úlohe 4.7.5. Tam sme na riešenie použili metódu krycej priamky a afinitu. Teraz ukážeme iný spôsob riešenia, pri ktorom využijeme tretiu pomocnú priemetňu ω . Tretiu priemetňu ω zvolíme kolmú na pôdorysňu a zároveň kolmú na rovinu α , aby tretí priemet roviny α bola priamka. Rez hranola rovinou α je šesťuholník. Jeho tretí priemet bude úsečka.



Obr. 4.12.3a

Postup (Obr. 4.12.3b):

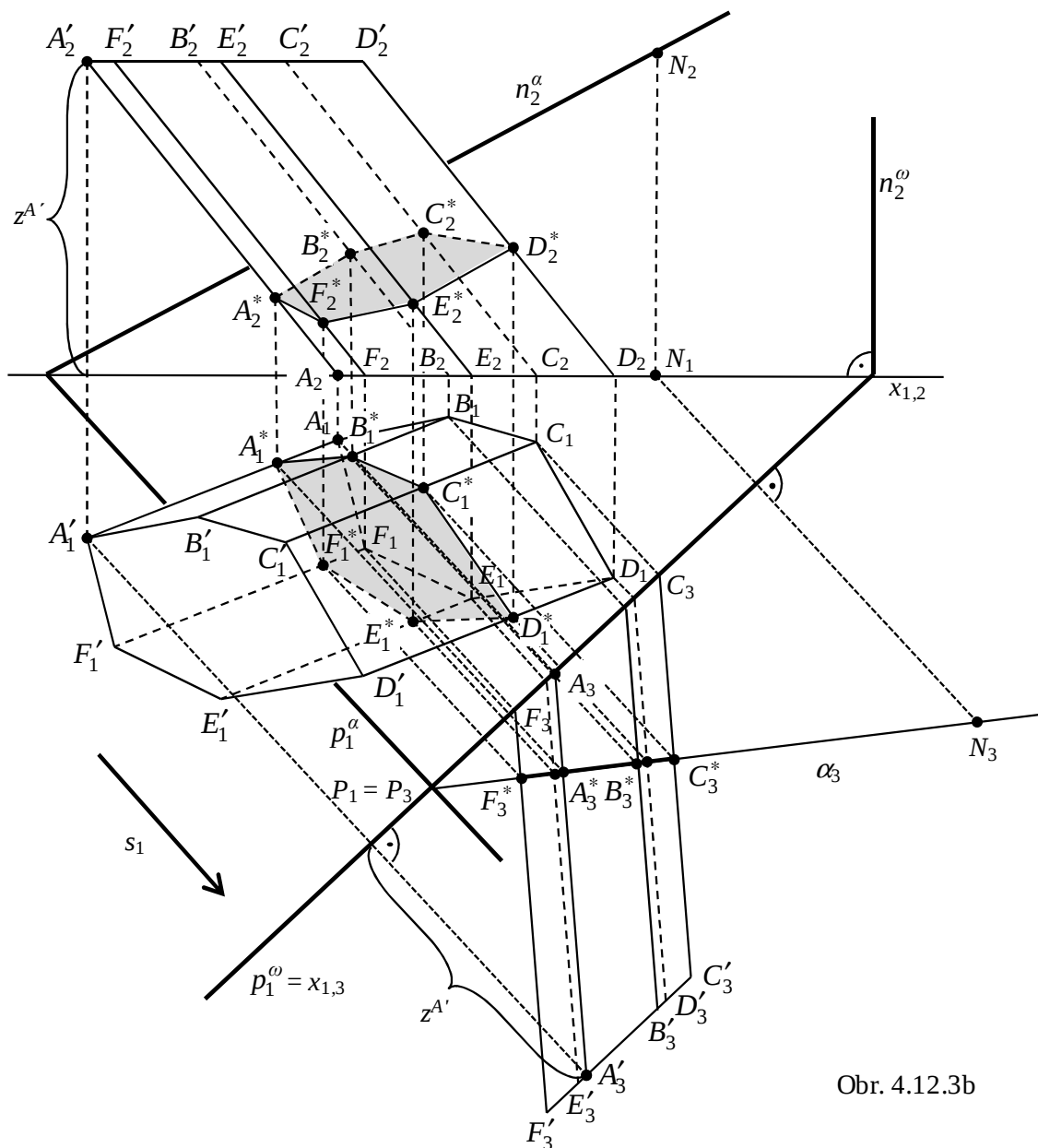
1. Vhodne zvolíme $p_1^\omega \perp p_1^\alpha$.
2. Zostrojíme tretí priemet roviny α . Postup je analogický ako v predchádzajúcej úlohe.
 $\alpha_3 = P_3 N_3$
3. Zobražíme tretí priemet hranola:
 - a) Body A, B, C, D, E, F ležia v pôdorysni (ich z -ové súradnice sú nulové) a preto tretie priemety týchto bodov ležia na osi $x_{1,3}$.
 - b) Zobražíme tretí priemet bodu A' :
 $A'_1 A'_3 \perp x_{1,3} \wedge |A'_2, x_{1,2}| = |A'_3, x_{1,3}| = |z^{A'}|$
 Hrana AA' a ostatné bočné hrany hranola sú navzájom rovnobežné a rovnako dlhé úsečky a to platí aj pre ich tretie priemety.
 - c) Určíme viditeľnosť hranola v treťom priemete.
 Pri určovaní viditeľnosti predpokladáme, že smer „pohľadu“ do tretej priemetne je určený smerom $s \perp \omega$.
4. Označme rezový šesťuholník $A^* B^* C^* D^* E^* F^*$, jeho tretí priemet je úsečka $F_3^* C_3^*$.
 $\{C_3^*\} = C_3 C_3' \cap \alpha_3$.
 $\{F_3^*\} = F_3 F_3' \cap \alpha_3$.
5. Pôdorys rezového šesťuholníka určíme pomocou ordinál medzi tretími a prvými priemetmi:
 $C_1^* : C_3^* C_1^* \perp x_{1,3} \wedge C_1^* \in C_1 C_1'$
 Ostatné body rezu určíme podobne.

6. Nárys rezového šesťuholníka určíme pomocou ordinál medzi prvými a druhými priemetmi:

$$C_2^* : C_2^* C_1^* \perp x_{1,2} \wedge C_2^* \in C_2 C_2'$$

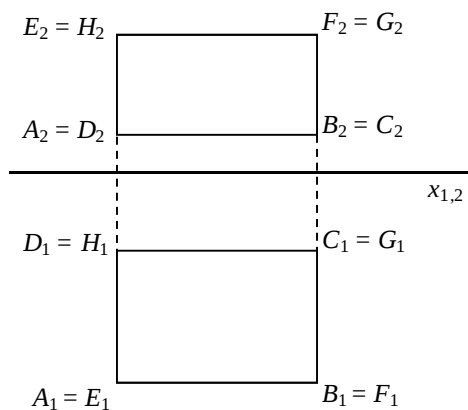
Ostatné body rezu určíme podobne.

7. Určíme viditeľnosť rezu v pôdoryse aj v náryse.



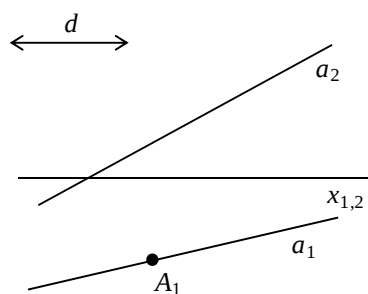
Cvičenia

1. Dané sú združené priemety kvádra $ABCDEFGH$ (Obr. 1). Určte dĺžky úsečiek AB , AD , AC , AF , FH a odchýlky priamok AB , AD , AC , AF , FH od priemetní.

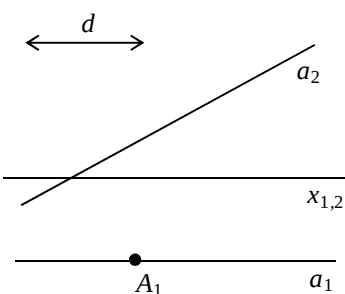


Obr. 1

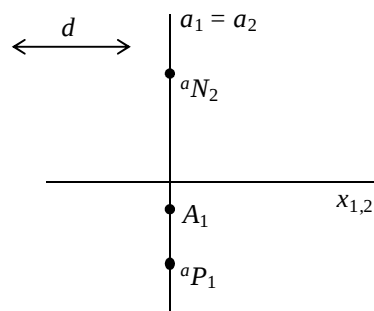
2. Daná je priamka a a bod $A \in a$ (Obr. 2a, b, c). Na priamku a naneste od bodu A dĺžku d .



Obr. 2a

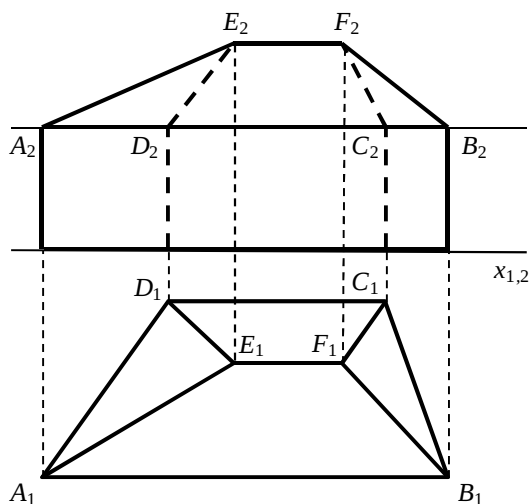


Obr. 2b



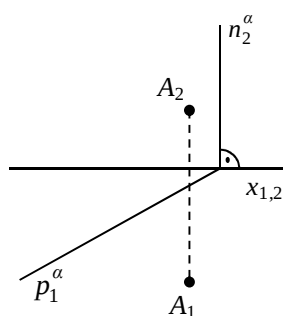
Obr. 2c

3. Daný je pôdorys a nárys domu (Obr. 3). Určte spád rovín CDE a ADE vzhľadom na pôdorysňu.

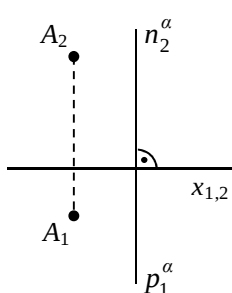


Obr. 3

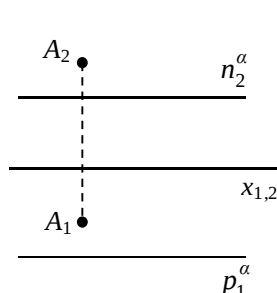
4. Určte vzdialenosť bodu A od roviny α (Obr. 4a, b, c, d).



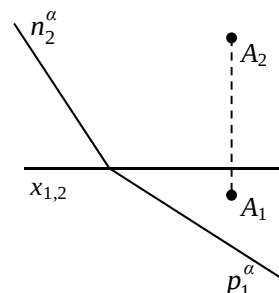
Obr. 4a



Obr. 4b

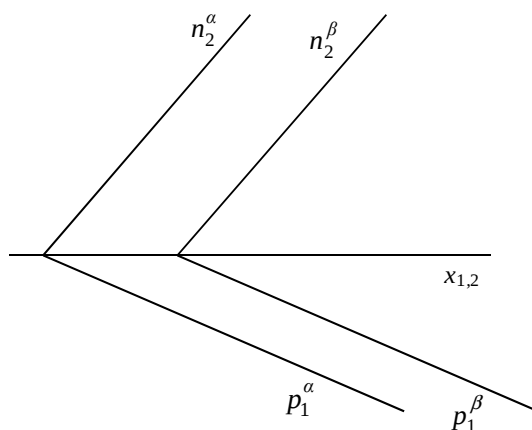


Obr. 4c



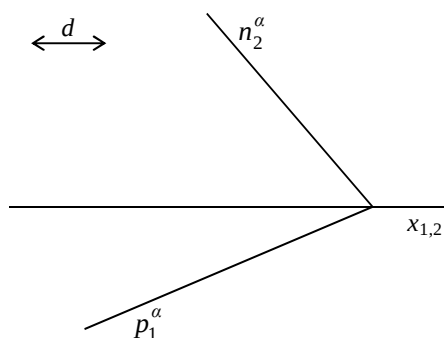
Obr. 4d

5. Určte vzdialenosť rovnobežných rovín α a β (Obr. 5). Pri riešení úlohy využite tretiu pomocnú priemetňu.

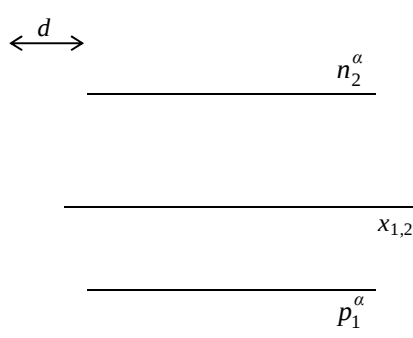


Obr. 5

6. Daná je rovina α (Obr. 6a, b). Zostrojte rovinu β , ktorá je rovnobežná s rovinou α tak, aby sa vzdialenosť rovín α a β rovnala d .



Obr. 6a

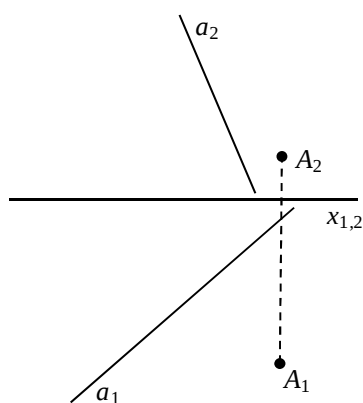


Obr. 6b

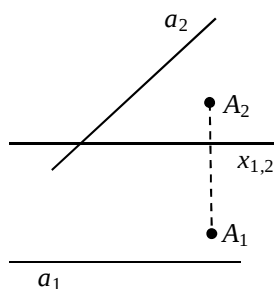
7. Určte vzdialenosť bodu A od priamky a (Obr. 7a, b, c, d).

Návod (1. spôsob): Zostrojte rovinu α , ktorá obsahuje bod A a je kolmá na priamku a . Určte priesečník $\{R\} = a \cap \alpha$. Vzdialenosť bodu A od priamky a je dĺžka úsečky AR .

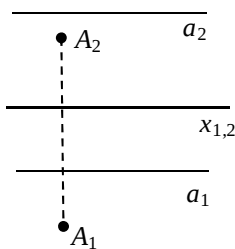
Návod (2. spôsob): Rovinu $\alpha = Aa$ otočte do priemetne. V otočenej polohe určte vzdialenosť bodu od priamky, t. j. $|A, a| = |A_o, a_o|$.



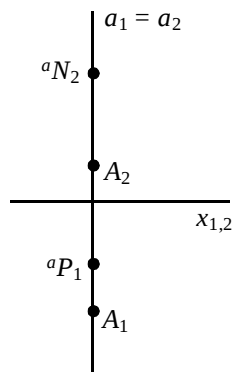
Obr. 7a



Obr. 7b



Obr. 7c

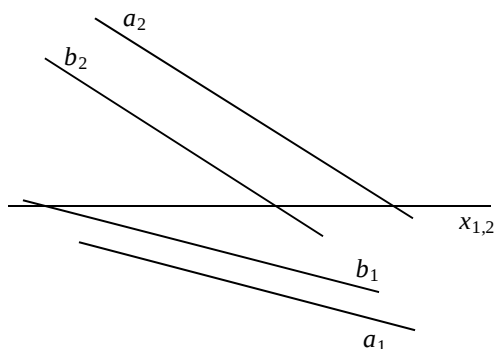


Obr. 7d

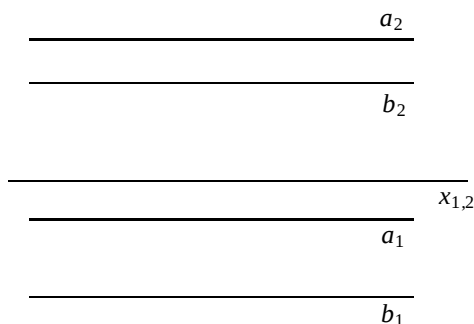
8. Určte vzdialenosť rovnobežných priamok a a b (Obr. 8a, b).

Návod (Obr. 8a): Rovinu $\alpha = ab$ otočte do priemetne. V otočenej polohe určte vzdialenosť rovnobežných priamok, t. j. $|a, b| = |a_o, b_o|$.

Návod (Obr. 8b): Zostrojte bokorys priamok a a b . Platí $|a, b| = |a_3, b_3|$.

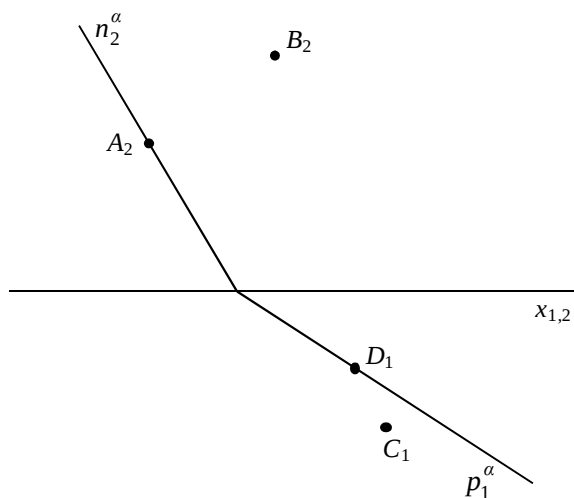


Obr. 8a

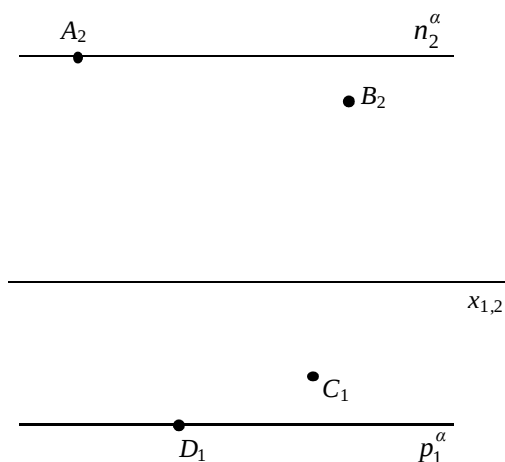


Obr. 8b

9. Daná je rovina α a body A, B, C, D , ktoré ležia v rovine α (Obr. 9a, b). Zostrojte útvar zhodný so štvoruholníkom $ABCD$.

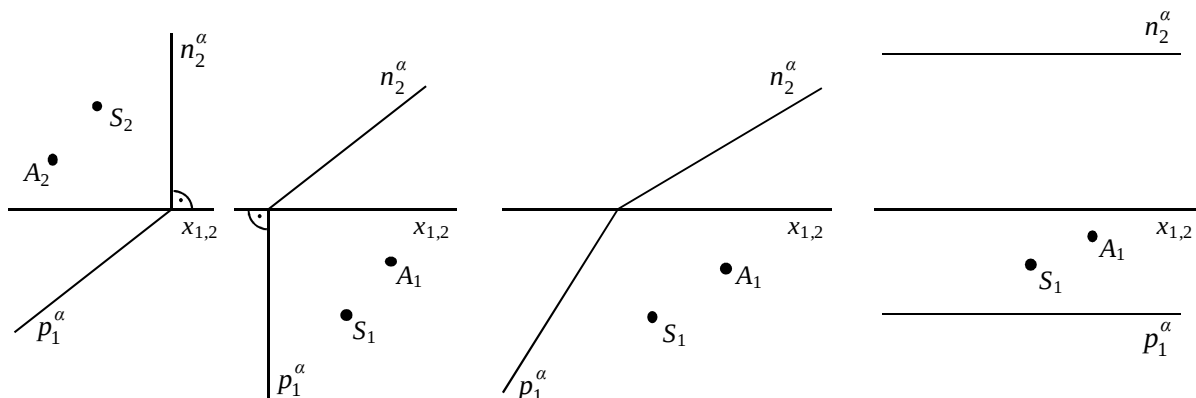


Obr. 9a



Obr. 9b

10. Zobrazte pôdorys a nárys pravidelného 6-uholníka $ABCDEF$, ktorý leží v rovine α . Daný je stred S a vrchol A 6-uholníka (Obr. 10a, b, c, d).



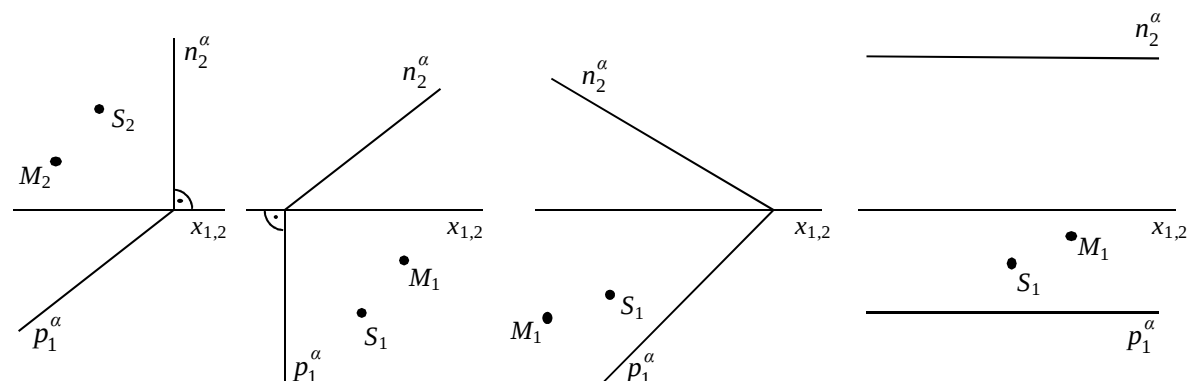
Obr. 10a

Obr. 10b

Obr. 10c

Obr. 10d

11. Zobrazte pôdorys a nárys kružnice k ležiacej v rovine α . Daný je stred S kružnice a jej bod M (Obr. 11a, b, c, d).



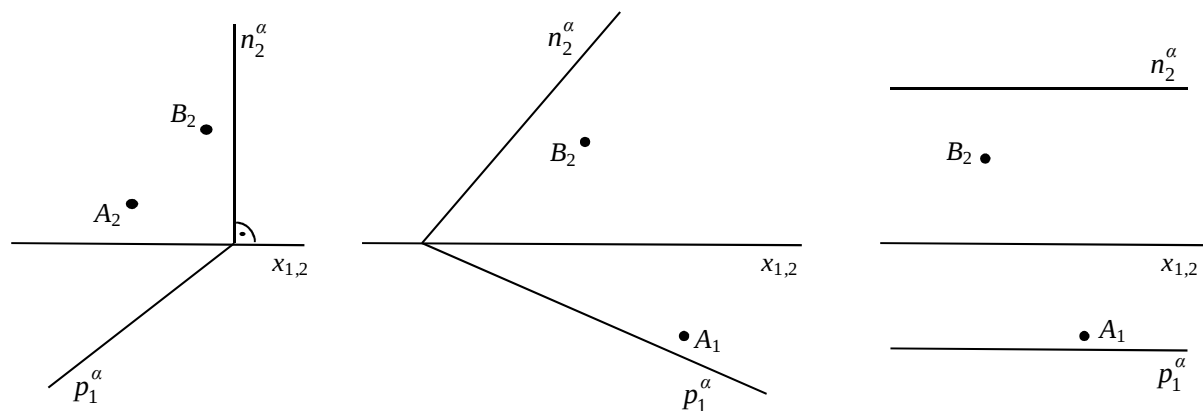
Obr. 11a

Obr. 11b

Obr. 11c

Obr. 11d

12. Zobrazte pôdorys a nárys pravidelného štvorbokého ihlana $ABCDV$. Štvorec $ABCD$ leží v rovine α . Dané sú body A a B . Výška ihlana sa rovná dĺžke $2|AC|$ (Obr. 12a, b, c).

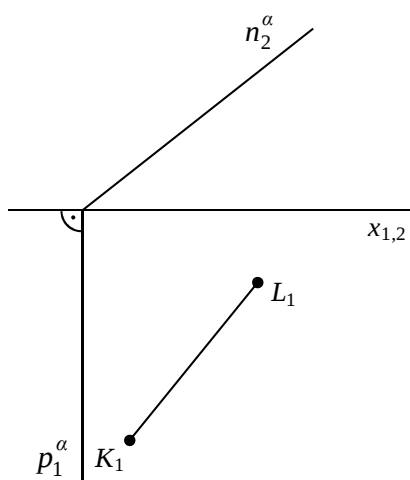


Obr. 12a

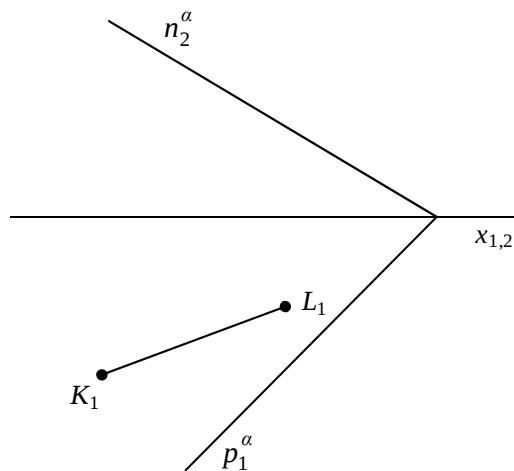
Obr. 12b

Obr. 12c

13. Zobrazte pôdorys a nárys rotačného kužeľa s podstavou v rovine α . Daný je priemer KL podstavnej kružnice k . Výška kužeľa sa rovná dĺžke úsečky KL (Obr. 13a, b).

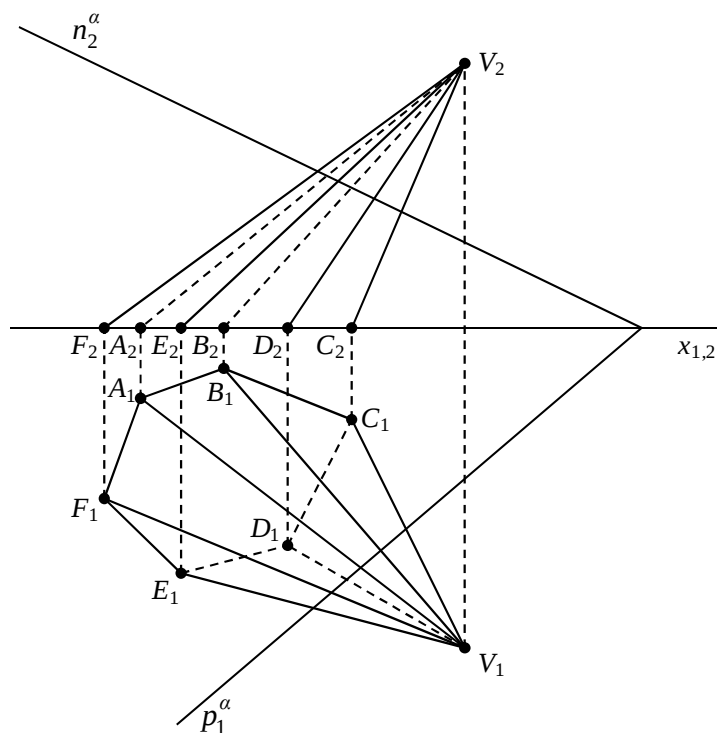


Obr. 13a



Obr. 13b

14. Zobrazte rez šikmého ihlana $ABCDEFV$ rovinou α (Obr. 14). Pri riešení úlohy využite tretiu pomocnú priemetňu. Zostrojte útvar zhodný s rezovým šesťuholníkom.



Obr. 14

LITERATÚRA

- [1] ČENĚK, G. – MEDEK, V. *Kurz deskriptívnej geometrie pre technikov I. Zobrazovacie metódy*. Bratislava: ŠNTL, 1953.
- [2] HOLÁŇ, Š. – HOLÁŇOVÁ, L. *Cvičení z deskriptivní geometrie I. – Kuželosečky*. 4. vyd. Brno: VUT, 1988.
- [3] KYSELOVÁ, D. a kol. *Deskriptívna geometria: Návod na cvičenia*. 2. vyd. Bratislava: STU, 2009. ISBN 978-80-227-3088-4
- [4] MEDEK, V. – ZÁMOŽÍK, J. *Konstruktívna geometria pre technikov*. 1. vyd. Bratislava: Alfa, 1978.
- [5] PALAJOVÁ, H. *Deskriptívna geometria I*. 3.vyd. Zvolen: TU, 1997.
ISBN 80-228-0659-5
- [6] PISKA, R. – MEDEK, V. *Deskriptívna geometria I*. Praha: SNTL, 1965.
- [7] SZÖKEOVÁ, D. *Deskriptívna geometria. I*. Bratislava: STU, 2001.
ISBN 80-227-1522-0
- [8] URBAN, A. *Deskriptivní geometrie I*. 1. vyd. Praha: SNTL, 1965.
- [9] VAJSÁBLOVÁ, M. *Deskriptívna geometria pre GaK*. [online] Bratislava: STU, 2009.
97 s. ISBN 978-80-227-3053-2
http://www.svf.stuba.sk/docs//dokumenty/skripta/deskiptivna_gak/index.html
- [10] VELICHOVÁ, D. *Konstruktivná geometria*. 1. vyd. Bratislava: STU, 2003.
ISBN 80-227-1839-4

RNDr. Ľubica Valášková, PhD., RNDr. Zuzana Tereňová, PhD.,
RNDr. Margita Vajsáblová, PhD., RNDr. Katarína Mészárosová, PhD.

ÚVOD DO PREDMETU DESKRIPTÍVNA GEOMETRIA

Vydala Slovenská technická univerzita v Bratislave v Nakladateľstve STU,
Bratislava, Vazovova 5, v roku 2014.

Edícia skrípt

Rozsah 148 strán, 393 obrázkov, 12,734 AH, 12,961 VH, 1. vydanie,
náklad 1000 výtlačkov, edičné číslo 5770, tlač Nakladateľstvo STU v Bratislave.

85 – 218 – 2014

ISBN 978-80-227-4160-6