

SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE

STAVEBNÁ FAKULTA

Mgr. Darina Kyselová - RNDr. Ladislav Mišík, CSc. - Mgr. Peter Struk

Mgr. Andrea Stupňanová, PhD.

UČEBNÉ TEXTY PRE KURZ MATEMATIKY

1999

Úvod

Skriptá sú určené pre študentov začínajúcich štúdium na Stavebnej fakulte STU (prípadne aj iných fakúlt STU). Sú tiež pomôckou ku kurzu z matematiky, ktorý prebieha pred začiatkom 1. semestra na Stavebnej fakulte STU. Ich cieľom je umožniť čitateľovi formou riešených a neriešených príkladov zopakovať podstatné časti stredoškolského učiva matematiky.

Na začiatku každej témy je podaný stručný výklad teórie a základných faktov. Potom nasledujú riešené príklady a na konci každej kapitoly sú v cvičeniach uvedené príklady pre samostatné riešenia čitateľom spolu s výsledkami, umožňujúcimi kontrolu správnosti. Na záver je uvedený zoznam literatúry, vhodnej pre hlbšie štúdium danej problematiky.

Autori želajú čitateľom týchto skrípt veľa úspechov pri štúdiu matematiky.

Autori

1. Výrazy

Za výraz považujeme zápis, ktorý je:

- číslícovým symbolom čísla (napr. -15 , $857,46$, $\frac{13}{5}$)
- konštantou (napr. 3π)
- premennou označujúcou ľubovoľné číslo zvoleného oboru (napr. $2xy$)
- vyjadrením výsledku operácií s číslami (napr. $27 + \sqrt{3}$)
- vyjadrením hodnôt funkcií s číselnými premennými (napr. $\cos(2x + y)$)...

Pri výrazoch s premennými treba udávať údaje o oboroch jednotlivých premenných.

Definičný obor výrazu s premennou je množina tých hodnôt premenej, ktoré po ich dosadení do výrazu ho zmenia na zápis čísla.

Zjednodušenie výrazu (v množine M) znamená takú úpravu výrazu, po ktorej dostaneme výraz s menším počtom znakov oprácií, zátvoriek, funkcií, prípadne s menším počtom premenných.

Dva výrazy s tými istými premennými sa (v množine M) rovnajú práve vtedy, keď:

- a) do oboch výrazov môžeme za premenné dosadiť všetky prvky množiny M
- b) pre rovnaké hodnoty premenných dávajú oba výrazy rovnaké výsledky.

1.1 Úpravy výrazov

Upraviť výraz (v množine M) znamená, že výraz nahradíme iným výrazom, ktorý sa mu rovná (v množine M).

Pri úpravách výrazov používame niektoré známe pravidlá a vzorce:

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2, \\(a - b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2, \\(a + b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \\(a - b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3, \\a^2 - b^2 &= (a + b) \cdot (a - b), \\a^3 + b^3 &= (a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2), \\a^3 - b^3 &= (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2).\end{aligned}$$

Pravidlá pre počítanie s mocninami:

Nech $a, b \in (0, \infty)$; $m, n \in \mathbb{R}$. Potom platí:

$$\begin{aligned}a^n \cdot a^m &= a^{n+m}, \\ \frac{a^n}{a^m} &= a^{n-m},\end{aligned}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n},$$

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m},$$

$$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n},$$

$$a^n \cdot b^n = (ab)^n,$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n,$$

$$a^0 = 1, a^1 = a, 0^n = 0 (n \neq 0).$$

Pravidlá pre počítanie s odmocninami:

Nech $a, b \in (0, \infty)$; $m, n \in \mathbb{R}$. Potom platí:

$$\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n = a,$$

$$\sqrt[m \cdot r]{a^{n \cdot r}} = \sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}},$$

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b},$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}},$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}.$$

Často sa pri úpravách výrazov využíva aj delenie mnohočlenov.

Príklad 1:

Rozložte daný mnohočlen v $\mathbb{R}$ na súčin mnohočlenov čo najnižšieho stupňa:

a) $(x-y)z^2 + (y-x)z^4,$

b) $z^2 - xy + x^2 - yz + 2xz.$

Riešenie:

Využijeme rozklad na súčin vynímaním a úpravu podľa vzorca:

a) $(x-y)z^2 + (y-x)z^4 = (x-y)(z^2 - z^4) = (x-y)z^2(1 - z^2) = (x-y)z^2(1-z)(1+z),$

b) $z^2 - xy + x^2 - yz + 2xz = x^2 + 2xz + z^2 - xy - yz = (x+z)^2 - y(x+z) = (x+z)(x+z-y).$

Príklad 2:

Vypočítajte: $(4x^3 + 10x^2 - 5x + 3) : (x + 3)$

Riešenie:

Delenie mnohočlenov sa písomne vysvetľuje pomerne ťažko, hoci jeho mechanizmus je rovnaký ako pri delení prirodzených čísel. Pre zopakovanie a ukážku analógie si pozrite na nasledujúcom príklade postup delenia prirodzených čísel:

$$\begin{array}{r}
 13975 : 43 = 325 \\
 \underline{-129} \\
 107 \\
 \underline{-86} \\
 215 \\
 \underline{-215} \\
 0
 \end{array}$$

A teraz k pôvodnému zadaniu:

$$(4x^3 + 10x^2 - 5x + 3) : (x + 3) =$$

Najprv sa pýtame, koľkokrát sa x (vo všeobecnosti prvý člen deliteľa) nachádza v $4x^3$ (prvý člen delenca). Odpoveď zapíšeme ako prvý člen podielu.

$$(4x^3 + 10x^2 - 5x + 3) : (x + 3) = 4x^2$$

Potom spätne vynásobíme $4x^2$ krát $(x + 3)$, výsledný súčin podpíšeme pod pôvodný mnohočlen tak, aby členy s rovnakými stupňami mocnín boli pod sebou a odčítame od pôvodného mnohočlena:

$$\begin{array}{r}
 (4x^3 + 10x^2 - 5x + 3) : (x + 3) = 4x^2 \\
 \underline{-(4x^3 + 12x^2)} \\
 -2x^2 - 5x
 \end{array}$$

K rozdielu sme pripísali ďalší člen mnohočlena a pýtame sa znovu koľkokrát sa nachádza x v $-2x^2$. Odpoveď $(-2x)$ napíšeme ako ďalší člen podielu. Opäť spätne vynásobíme s deliteľom, súčin podpíšeme pod mnohočlen $-2x^2 - 5x$ a odčítame ho. K rozdielu pripíšeme ďalší člen pôvodného delenca a takto pokračujeme, až kým nepodelíme celého delenca a nezostane nám zvyšok nula, alebo iné reálne číslo (mnohočlen menšieho stupňa ako deliteľ). Celý zápis pôvodného príkladu by teda vyzeral takto:

$$\begin{array}{r}
 (4x^3 + 10x^2 - 5x + 3) : (x + 3) = 4x^2 - 2x + 1 \\
 \underline{-(4x^3 + 12x^2)} \\
 -2x^2 - 5x \\
 \underline{-(-2x^2 - 6x)} \\
 x + 3 \\
 \underline{-(x + 3)} \\
 0
 \end{array}$$

Teda podielom dvoch mnohočlenov zo zadania je mnohočlen $4x^2 - 2x + 1$, pričom toto delenie je bezo zvyšku.

Príklad 2a:

Vypočítajte: $(x^3 - 5x^2 + 5x - 2) : (x - 4)$

Riešenie:

Celý postup výpočtu príkladu bude zapísaný takto:

$$\begin{array}{r}
 (x^3 - 5x^2 + 5x - 2) : (x - 4) = x^2 - x + 1 \\
 \underline{-(x^3 - 4x^2)} \\
 -x^2 + 5x \\
 \underline{-(-x^2 + 4x)} \\
 x - 2 \\
 \underline{-(x - 4)} \\
 2 \text{ (zvyšok)}.
 \end{array}$$

Výsledok tohto príkladu teda zapíšeme takto:

$$(x^3 - 5x^2 + 5x - 2) : (x - 4) = x^2 - x + 1 + \frac{2}{x - 4}.$$

Príklad 3:

Nájdite najväčší spoločný deliteľ a najmenší spoločný násobok výrazov v R :

$$x^4 - y^4, x^2 - y^2, x^2 - 2xy + y^2.$$

Riešenie:

Všetky výrazy upravíme na súčin:

$$x^4 - y^4 = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2) = (x^2 + y^2)(x - y)(x + y),$$

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y),$$

$$x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2 = (x - y)(x - y).$$

Najväčším spoločným deliteľom je výraz $x - y$ a najmenším spoločným násobkom výraz

$$(x^2 + y^2)(x + y)(x - y)^2.$$

Príklad 4:

Upravte výraz na jeden zlomok a nájdite tie $x \in R$, pre ktoré sa pôvodný výraz rovná upravenému.

$$\frac{1 + \frac{1+x}{1-x}}{1 - \frac{1+x}{1-x}}.$$

Riešenie:

Zložený zlomok upravíme:

$$1 + \frac{1+x}{1-x} = \frac{1-x+1+x}{1-x} = \frac{2}{1-x} = -\frac{1}{x}.$$

Platí pre $x \neq 1, x \neq 0$.

Príklad 5:

V R zjednodušte výraz: $\frac{9x^2 - y^2}{(2x + 3y)^2 - (x^2 + 6y^2 + 2xy)}$.

Riešenie:

$$\begin{aligned} \frac{9x^2 - y^2}{(2x + 3y)^2 - (x^2 + 6y^2 + 2xy)} &= \frac{(3x - y)(3x + y)}{(4x^2 + 12xy + 9y^2) - x^2 - 6y^2 - 2xy} = \frac{(3x - y)(3x + y)}{3x^2 + 10xy + 3y^2} = \\ &= \frac{(3x - y)(3x + y)}{(x + 3y)(3x + y)} = \frac{(3x - y)}{(x + 3y)} \end{aligned}$$

Platí pre $x + 3y \neq 0, 3x + y \neq 0$.

Pri úprave menovateľa na súčin nie je použitý žiaden vzorec. Pokiaľ predpokladáme, že v takomto zlomku budeme môcť krátiť, pokúsime sa vydeliť menovateľa niektorým z výrazov, ktoré sú v čitateli (v tomto prípade je menovateľ deliteľný výrazom $3x + y$) a tak upraviť mnohočlen v menovateli na súčin.

Príklad 6:

Upravte zlomok tak, aby nemal v menovateli odmocninu: $\frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}$.

Riešenie:

Zlomok vynásobíme jednotkou (čím sa nezmení jeho hodnota), ktorú napíšeme v nám vyhovujúcom tvare:

$$\begin{aligned} \frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{2 - \sqrt{3}}} \cdot \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{\sqrt{2 - \sqrt{3}}} &= \frac{(2 + \sqrt{3}) \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2 - \sqrt{3}} = \frac{(2 + \sqrt{3}) \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2 - \sqrt{3}} \cdot \frac{2 + \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = \frac{(2 + \sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}}}{4 - 3} = \\ &= (2 + \sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Príklad 7:

Čiastočným odmocnením zjednodušte: $3\sqrt{12} - 8\sqrt{27} + 5\sqrt{48}$.

Riešenie:

$$3\sqrt{12} - 8\sqrt{27} + 5\sqrt{48} = 3\sqrt{2^2 \cdot 3} - 8\sqrt{3^2 \cdot 3} + 5\sqrt{4^2 \cdot 3} = 6\sqrt{3} - 24\sqrt{3} + 20\sqrt{3} = 2\sqrt{3}.$$

Príklad 8:

Vyjadrite pomocou jedinej odmocniny: $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} \sqrt{\frac{a}{b}}$.

Riešenie:

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} \sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{a^2}{b^2}} \cdot \frac{a}{b}} = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^3}} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{\left(\frac{a}{b}\right)^3}} = \sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Príklad 9:

Vypočítajte:
$$\left[\frac{\left(x^{\frac{1}{3}}y^{-1}\right)^{-2}}{z^{-3}u^{\frac{1}{2}}} \right]^{-3} \cdot \left[\frac{x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{2}{5}}u^{\frac{1}{4}}}{\left(z^{\frac{3}{2}}\right)^4} \right]^{-1}.$$

Riešenie:

Pomocou viet o počítaní s mocninami upravíme výraz do tvaru súčinu jednotlivých premenných:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\left(x^{\frac{1}{3}}y^{-1}\right)^{-2}}{z^{-3}u^{\frac{1}{2}}} \right]^{-3} \cdot \left[\frac{x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{2}{5}}u^{\frac{1}{4}}}{\left(z^{\frac{3}{2}}\right)^4} \right]^{-1} = \frac{\left(x^{\frac{1}{3}}y^{-1}\right)^6}{\left(z^{-3}u^{\frac{1}{2}}\right)^{-3}} \cdot \frac{\left(z^{\frac{3}{2}}\right)^4}{x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{2}{5}}u^{\frac{1}{4}}} = \frac{x^2y^{-6}z^6}{z^9u^{-\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{2}{5}}u^{\frac{1}{4}}} = \frac{x^2y^{-6}z^6}{z^9u^{-\frac{5}{4}}x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{2}{5}}} = \\ & = \frac{x^{\frac{5}{4}}y^{-\frac{32}{5}}z^{-3}}{u^{-\frac{5}{4}}} = x^{\frac{5}{4}}y^{-\frac{32}{5}}z^{-3}u^{\frac{5}{4}}. \end{aligned}$$

Cvičenia

1. Upravte na súčin:

a) $(x+y+z)^3 - (x+y-z)^3,$

b) $(x-y-z) \cdot (y-x-z) - (y+z-x) \cdot (y+x-z).$

Výsledky: a) $2z[3(x+y)^2 + z^2],$ b) $2(x-y-z)(y-z).$

2. Vypočítajte:

a) $(x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 3x + 4) : (x + 4),$

b) $(6x^3 - 17x^2 + 14x - 3) : (2x - 3),$

c) $(x^3 + y^3) : (x^2 - xy + y^2).$

Výsledky: a) $x^3 + 2x^2 - x + 1$, b) $3x^2 - 4x + 1$, c) $x + y$.

3. Vypočítajte:

a) $(3x^4 - 4x^3 - 5x^2 + 2x + 3) : (x - 2)$,

b) $(8x^3 - 14x^2 + 5x - 2) : (2x - 1)$.

Výsledky: a) $3x^3 + 2x^2 - x + \frac{3}{x-2}$, b) $4x^2 - 5x - \frac{2}{2x-1}$.

4. Určte najväčší spoločný deliteľ daných mnohočlenov v R :

a) x^2y , $4xy^2z$, $3x^3yz^3$,

b) $a^3 - 1$, $2a - 2$, $3a^2 - 6a + 3$.

Výsledky:

a) najväčší spoločný deliteľ: xy ,

b) najväčší spoločný deliteľ: $a - 1$.

5. Určte najmenší spoločný násobok mnohočlenov z predošlého príkladu:

Výsledky:

a) najmenší spoločný násobok: $12x^3y^2z^3$,

b) najmenší spoločný násobok: $6(a-1)^2(a^2 + a + 1)$.

6. Upravte výrazy na jeden zlomok:

a) $\frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{2x}}{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x^2}}$, b) $\frac{1-x}{1-\frac{x}{x+1}}$.

Výsledky: a) x pre $x \neq 0$, b) $1 - x^2$ pre $x \neq -1$.

7. Zjednodušte zlomky:

a) $\frac{\frac{1}{y} + y^2}{\frac{1}{y} + y - 1}$, b) $\frac{\frac{x+y}{x-y}}{\frac{(x+y)^2}{x^2 - y^2}}$.

Výsledky: a) $y + 1$ pre $y \neq 0$, b) 1 pre $x \neq \pm y$.

8. Upravte výraz:

$$\left(\frac{1}{2x-y} + \frac{3y}{y^2-4x^2} - \frac{2}{2x+y} \right) : \left(\frac{4x^2+y^2}{4x^2-y^2} + 1 \right).$$

Výsledok: $\frac{-1}{4x}$ pre $x \neq 0$, $2x - y \neq 0$, $2x + y \neq 0$.

9. Zjednodušte zlomky:

$$\text{a) } \frac{1 - \frac{2y}{x} + \frac{y^2}{x^2}}{x - y}, \quad \text{b) } \frac{a - \frac{a-1}{a+1}}{1 + \frac{a(a-1)}{a+1}}.$$

Výsledky: a) $\frac{x-y}{x^2}$ pre $x \neq 0, y \neq 0$, b) 1 pre $a \neq -1$.

10. Upravte:

$$\text{a) } \frac{1}{(x+y)^2} \cdot \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right) + \frac{2}{(x+y)^3} \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right), \quad \text{b) } \frac{\frac{1-x}{1-x+x^2} + \frac{1+x}{1+x+x^2}}{\frac{1+x}{1+x+x^2} - \frac{1-x}{1-x+x^2}}.$$

Výsledky:

$$\text{a) } \frac{1}{x^2 y^2} \text{ pre } x \neq 0, y \neq 0, x \neq -y,$$

$$\text{b) } \frac{1}{x^3} \text{ pre } x \neq 0.$$

11. Upravte výraz:

$$\left[\frac{a^2 - b^2}{ab} - \frac{1}{a+b} \cdot \left(\frac{a^2}{b} - \frac{b^2}{a} \right) \right] : \frac{a-b}{a}.$$

Výsledok: $\frac{a}{a+b}$ pre $a \neq 0, b \neq 0, a+b \neq 0, a-b \neq 0$.

12. Upravte výraz:

$$1 - \frac{a+b}{a-b} \left(\frac{a}{a+b} - \frac{a-b}{a} + \frac{a-b}{a+b} \right).$$

Výsledok: $\frac{-b^2}{a(a-b)}$ pre $a \neq 0, a \neq b, a \neq -b$.

13. Upravte výraz:

$$\left(1 - \frac{a}{a-b} \right) \left(a - b + \frac{a^2 + b^2}{b} \right) + b - \frac{a^2}{b-a}.$$

Výsledok: $\frac{b^2}{b-a}$ pre $b \neq 0, a \neq b$.

14. Upravte výraz:

$$\left(1 - \frac{p-q}{p+q} \right) \left(2 + \frac{2q}{p-q} \right) + 2 + \frac{4q^2}{p^2 - q^2}.$$

Výsledok: $\frac{2(p+q)}{p-q}$ pre $p \neq q, p \neq -q$.

15. Odstráňte odmocniny z menovateľa zlomku:

a) $\frac{1}{\sqrt{5}-1}$,

b) $\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$,

c) $\frac{3-\sqrt{15}}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}$.

Výsledky: a) $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$, b) $\sqrt{2-\sqrt{3}}$, c) $\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{6}-\sqrt{10}$.

16. Vyčísľite:

a) $\frac{5}{4-\sqrt{11}} + \frac{1}{3-\sqrt{7}} - \frac{6}{\sqrt{7}-2} - \frac{\sqrt{7}-5}{2}$,

b) $4 \cdot \sqrt{7} \frac{1}{2} - \frac{2\sqrt{10}}{2\sqrt{3}-\sqrt{10}}$,

c) $-19 \cdot \sqrt{\frac{3}{38}} - \frac{13\sqrt{19}}{2\sqrt{19}+\sqrt{24}}$.

Výsledky: a) $4+\sqrt{11}-2\sqrt{7}$, b) -10 , c) $-\frac{19}{2}$.

17. Čiastočným odmocnením zjednodušte výraz:

a) $\sqrt[3]{16}$, b) $\sqrt[3]{24x^4y^6z^2}$, c) $\sqrt[n]{a^{2n}b^{n+1}}$.

Výsledky: a) $2\sqrt[3]{2}$, b) $2xy^2\sqrt[3]{3xz^2}$, c) $a^2b\sqrt[n]{b}$.

18. Vyjadrite výraz ako odmocninu:

a) $6x\sqrt{y}$, b) $3a \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{a^2}}$, c) $(a-b) \cdot \sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$.

Výsledky: a) $\sqrt{36x^2y}$, b) $\sqrt[3]{27a}$, c) $\sqrt{a^2-b^2}$.

19. Zjednodušte výraz:

a) $20\sqrt{245} - \sqrt{5} + \sqrt{125} - \frac{5}{2}\sqrt{180}$,

b) $5\sqrt[3]{16} + 3\sqrt[3]{54} - 6\sqrt[3]{128} + 7\sqrt[3]{250}$,

c) $4\sqrt{3a} - 7\sqrt{12a^2} + 5\sqrt{48a} + 6\sqrt{27a^2} - 5\sqrt{75a}$.

Výsledky: a) $129\sqrt{5}$, b) $30\sqrt[3]{2}$, c) $4a\sqrt{3} - \sqrt{3a}$.

20. Vyjadrite pomocou jedinej odmocniny:

$$\text{a) } \sqrt[3]{9x\sqrt{\frac{x^2}{16}}\sqrt{81x^4}}, \quad \text{b) } \sqrt{\frac{x}{y}\sqrt[3]{\frac{x^2}{y^2}}\sqrt[4]{\frac{x^3}{y^3}}}.$$

$$\text{Výsledky: a) } \frac{3x}{4}\sqrt[3]{16}, \quad \text{b) } \sqrt[24]{\left(\frac{x}{y}\right)^{23}}.$$

21. Vypočítajte:

$$\text{a) } \sqrt[6]{\frac{5^3\sqrt{3}}{6}} : \sqrt[3]{\frac{6\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}}, \quad \text{b) } \sqrt{\frac{x^2-y^2}{(a+b)^2}} : \sqrt[6]{\frac{(x-y)^2}{a^2-b^2}}.$$

$$\text{Výsledky: a) } \sqrt[18]{\frac{3}{512}}, \quad \text{b) } \sqrt[6]{\frac{(x+y)^3(x-y)(a-b)}{(a+b)^5}}.$$

22. Vypočítajte:

$$\sqrt[3]{\frac{a^2x^4}{b^2y^6}} : \left(\sqrt[4]{\frac{b^2x^5}{a^2y^6}} \cdot \sqrt[12]{\frac{a^5b^5x^5}{y^7}} \right).$$

$$\text{Výsledok: } \sqrt[12]{\frac{a^9y}{b^{19}x^4}}.$$

23. Zjednodušte výraz:

$$\left[\left(\frac{a^2b}{cd^3} \right)^3 \cdot \frac{ac^4}{b^2d^3} \right] : \left[\left(\frac{a^2b^2}{cd^3} \right)^4 \cdot \left(\frac{c^2}{b^3d} \right)^3 \right].$$

$$\text{Výsledok: } \frac{b^2d^3}{ac}, \text{ pre } a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0.$$

24. Zjednodušte výraz:

$$\frac{a^{2r+3s} \cdot b^{4r-3s}}{a^{5r-s} \cdot b^{3r+s}} \cdot \frac{a^{8r+2s} \cdot b^{r+2s}}{a^{4r+5s} \cdot b^{2r-4s}}.$$

$$\text{Výsledok: } a^{r+s} \cdot b^{2s}, \text{ pre } a > 0, b > 0.$$

25. Vypočítajte (najprv preved'te odmocniny na mocniny):

$$\sqrt[3]{\frac{x}{y}\sqrt{\frac{y}{x}}} \cdot \sqrt{\frac{y}{x}\sqrt[3]{\frac{y}{x}}}.$$

$$\text{Výsledok: } x^{\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{1}{2}}, \text{ pre } x > 0, y > 0.$$

26. Vypočítajte (najprv preved'te odmocniny na mocniny):

$$\left[\frac{\left(a^{\frac{1}{4}} b^{-1} \right)^{-1}}{c^{-2} d^{\frac{1}{2}}} \right]^{-3} : \left[\frac{a^{\frac{3}{4}} \sqrt[3]{b^2} \sqrt{d^5}}{c^{\frac{3}{2}}} \right]^{-1}.$$

Výsledok: $a^{\frac{3}{2}} b^{\frac{-7}{3}} c^{\frac{-15}{2}} d^4$, pre $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$.

2. Rovnice

2.1 Lineárne a kvadratické rovnice

Rovnica typu

$$ax + b = 0 \quad (1)$$

kde koeficienty $a, b \in R, a \neq 0$, x je neznáma, sa nazýva *lineárna rovnica*. Výraz ax nazývame lineárnym členom a b absolútnym členom lineárnej rovnice (1). Pomocou ekvivalentných úprav ľahko nájdeme reálne riešenie pre ľubovoľné čísla $a, b \in R, a \neq 0$, v tvare

$$x = \frac{-b}{a}.$$

Rovnica typu

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad (2)$$

kde koeficienty $a, b, c \in R, a \neq 0$, x je neznáma, sa nazýva *kvadratická rovnica*. Výraz ax^2 nazývame kvadratickým členom, bx lineárnym a c absolútnym členom kvadratickej rovnice. Nájdime riešenie kvadratickej rovnice (2) pomocou *doplňenia kvadratického trojčlena na úplný štvorec*. Rovnicu (2) vyňatím koeficientu a a následným pripočítaním a odpočítaním

výrazu $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ upravíme na nasledujúci tvar:

$$a \left[x^2 + 2 \frac{b}{2a} x + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} \right] = 0, \\ a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] = 0. \quad (3)$$

Označme výraz $D = b^2 - 4ac$. Poslednú rovnosť (3) možno písať v tvare

$$a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{D}}{2a} \right)^2 \right] = 0.$$

Nakoniec použitím známeho vzorca $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$ dostaneme ekvivalentnú rovnosť

$$a \left(x + \frac{b - \sqrt{D}}{2a} \right) \left(x + \frac{b + \sqrt{D}}{2a} \right) = 0,$$

čiže $x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$ alebo $x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$.

Zvyčajne označujeme korene kvadratickej funkcie x_1, x_2 a vzorec pre ich výpočet stručne zapisujeme v tvare:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad (4)$$

Výraz $D = b^2 - 4ac$ nazývame *diskriminantom kvadratickej rovnice*.

- Ak $D > 0$, kvadratická rovnica má dva rôzne reálne korene $x_1 \neq x_2$ a rovnicu (2) môžeme rozložiť na súčin koreňových činiteľov v tvare $a(x - x_1)(x - x_2) = 0$.
- Ak $D = 0$, potom $x_1 = x_2$, čiže kvadratická rovnica má jeden reálny dvojnásobný koreň a rovnicu (2) môžeme písať v tvare $a(x - x_1)^2 = 0$.
- Ak $D < 0$, kvadratická rovnica nemá riešenie v obore reálnych čísel, má len dva komplexne združené korene $x_1 = \frac{-b}{2a} + \frac{\sqrt{-D}}{2a}i$, $x_2 = \frac{-b}{2a} - \frac{\sqrt{-D}}{2a}i$, kde i je imaginárna jednotka, $i = \sqrt{-1}$.

Lahko možno odvodiť vzťahy medzi koeficientmi kvadratickej rovnice a jej koreňmi. Pre každé x platí rovnosť

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) = ax^2 - ax(x_1 + x_2) + ax_1x_2.$$

Ak odčítame od obidvoch strán ax^2 a upravíme, dostaneme rovnicu:

$$x[b + a(x_1 + x_2)] = ax_1x_2 - c,$$

ktorá platí pre všetky x , teda aj pre $x = 0$. Po dosadení $x = 0$, dostávame

$$x_1x_2 = \frac{c}{a},$$

potom musí platiť aj

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}.$$

Príklad 1:

Riešte kvadratické rovnice a rozložte ich na súčin koreňových činiteľov

- a) $2x^2 + 5x - 3 = 0$,
- b) $-x^2 + 6x = 0$,
- c) $-x^2 + 6x - 9 = 0$.

Riešenie: a) V danej rovnici $a = 2$, $b = 5$, $c = -3$. Po dosadení do vzorca (4) dostaneme

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 \pm 7}{4} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = -3.$$

Teda rovnica má množinu koreňov $K = \left\{\frac{1}{2}, -3\right\}$. Tak môžeme rovnicu rozložiť na súčin

koreňových činiteľov a dostaneme

$$2x^2 + 5x - 3 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 3).$$

b) V danej rovnici $c = 0$. V tomto prípade nájdeme korene bez použitia vzorca (4) priamo rozložením na koreňové činitele a to vyňatím $-x$:

$$-x^2 + 6x = -x(x - 6).$$

Teda rovnica má množinu koreňov $K = \{0, 6\}$.

c) V danej rovnici $a = -1, b = 6, c = -9$. Po dosadení do vzorca (4) dostaneme

$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-9)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-6}{-2} = 3.$$

Teda rovnica má množinu koreňov $K = \{3\}$. Tak môžeme rovnicu rozložiť na súčin koreňových činiteľov a dostaneme

$$-x^2 + 6x - 9 = -(x - 3)^2.$$

Príklad 2:

Riešte kvadratickú rovnicu v C : $x^2 - 2x + 5 = 0$.

Riešenie: V danej rovnici $a = 1, b = -2, c = 5$. Po dosadení do vzorca (4) dostaneme

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 4i}{2} = \begin{cases} 1 + 2i \\ 1 - 2i \end{cases}.$$

Teda rovnica má len komplexné korene. Množina koreňov je $K = \{1 + 2i, 1 - 2i\}$.

Príklad 3:

Ktorá kvadratická rovnica s koeficientom kvadratického člena $a = 6$ má množinu koreňov

$$K = \left\{\frac{5}{2}, -3\right\}?$$

Riešenie: Vieme, že korene sú $x_1 = \frac{5}{2}$ a $x_2 = -3$. To znamená, že hľadaná kvadratická

rovnica má tvar:

$$6\left(x - \frac{5}{2}\right)(x + 3) = 0 \quad \text{t.j.} \quad 6x^2 + 3x - 45 = 0.$$

2.2 Iracionálne rovnice

Rovnica, v ktorej neznáma vystupuje vo výraze pod odmocninou, sa nazýva *iracionálna rovnica*. Iracionálne rovnice riešime obyčajne tak, že umocňujeme obidve strany rovnice, pokiaľ neodstránime všetky odmocniny, v ktorých vystupuje neznáma. Ak sa v rovnici vyskytuje len jeden člen s odmocninou, snažíme sa ho osamostatniť na niektorej strane rovnice a až potom umocňujeme. Pretože umocňovanie je implikačná (nie ekvivalentná) úprava, treba vždy urobiť na záver skúšku.

Príklad 4:

Riešte rovnicu $\sqrt{x+1} + 1 = x - 40$.

Riešenie: Najskôr osamostatníme odmocninu

$$\sqrt{x+1} = x - 41.$$

Teraz výraz umocníme a upravíme

$$\begin{aligned}x+1 &= x^2 - 82x + 1681, \\x^2 - 83x + 1680 &= 0.\end{aligned}$$

Nájdeme korene $x_1 = 35$ a $x_2 = 48$. Teraz musíme urobiť skúšku dosadením do pôvodnej rovnice:

$$L(35) = \sqrt{35+1} + 1 = 7, \quad P(35) = 35 - 40 = -5.$$

Odtiaľ $L(35) \neq P(35)$.

Číslo 35 nie je koreňom pôvodnej rovnice.

$$L(48) = \sqrt{48+1} + 1 = 8, \quad P(48) = 48 - 40 = 8.$$

Odtiaľ $L(48) = P(48)$.

Číslo 48 je koreňom pôvodnej rovnice, $K = \{48\}$.

Príklad 5:

Riešte rovnicu $\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} = 1$.

Riešenie: Umocníme obidve strany rovnice a upravíme:

$$\begin{aligned}(\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x})^2 &= 1, \\x+1 - 2\sqrt{x+1}\sqrt{4-x} + 4-x &= 1, \\\sqrt{x+1}\sqrt{4-x} &= 2.\end{aligned}$$

Znova umocníme obidve strany a upravíme:

$$\begin{aligned}(x+1)(4-x) &= 4, \\-x^2 + 3x &= 0,\end{aligned}$$

$$-x(x-3)=0.$$

Koreňmi kvadratickej rovnice sú čísla $x_1 = 0$ a $x_2 = 3$. Urobíme skúšku dosadením do pôvodnej rovnice.

$$L(0) = \sqrt{0+1} - \sqrt{4-0} = -1, \quad P(0) = 1$$

Odtiaľ $L(0) \neq P(0)$.

$$L(3) = \sqrt{3+1} - \sqrt{4-3} = 1, \quad P(3) = 1$$

Odtiaľ $L(3) = P(3)$.

Množina koreňov pôvodnej rovnice je $K = \{3\}$.

Príklad 6:

Riešte rovnicu $\sqrt{1+x\sqrt{2x^2+8}} = x+1$.

Riešenie: Umocníme obidve strany rovnice a upravíme. Dostaneme

$$x\sqrt{2x^2+8} = x(x+2).$$

Posledná rovnosť je splnená v prípade, že

1. $x = 0$, alebo
2. $\sqrt{2x^2+8} = x+2$.

Ďalším umocňovaním a úpravami dostaneme z rovnice v 2. prípade kvadratickú rovnicu:

$$x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 = 0,$$

ktorá má jediný koreň $x = 2$.

Máme teda dve riešenia $x = 0$ a $x = 2$. Urobíme skúšku:

$$L(0) = \sqrt{1+0\sqrt{2\cdot 0^2+8}} = 1 = P(0),$$

$$L(2) = \sqrt{1+2\sqrt{2\cdot 2^2+8}} = 3 = P(2).$$

Tak $K = \{0, 2\}$.

2.3 Rovnice s absolútnou hodnotou

V tejto časti sa budeme zaoberať riešením rovníc s neznámou v absolútnej hodnote.

Pripomeňme si preto definíciu absolútnej hodnoty ako funkcie $x \in \mathbf{R}$:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{ak } x \geq 0, \\ -x & \text{ak } x < 0. \end{cases}$$

Čiže absolútna hodnota reálneho čísla je vždy nezáporné reálne číslo. Z geometrického hľadiska je to vzdialenosť obrazu reálneho čísla od počiatku na reálnej osi (t.j. od 0).

Príklad 7:

Riešme rovnice: a) $|x| = 2$, b) $|x| = 0$, c) $|x| = -2$.

Riešenie. a) $K = \{-2, 2\}$, pretože existujú práve dve reálne čísla 2 a -2 , ktorých vzdialenosť od počiatku reálnej osi je 2.

b) $K = \{0\}$, pretože existuje len jediné číslo, ktoré má nulovú vzdialenosť od počiatku, a to sám počiatok, t. j. 0.

c) $K = \emptyset$, keďže vzdialenosť nemôže byť záporná.

Ľahko si teraz dokážeme predstaviť geometrickú interpretáciu $|a - b|$ ako vzdialenosť dvoch obrazov reálnych čísel a, b .

Príklad 8:

Riešme rovnice: a) $|x - 1| = 2$, b) $|x + 3| = 0$, c) $|x - 7| = -2$, d) $|x + 2| = \sqrt{2} + 1$.

Riešenie: a) $K = \{-1, 3\}$, b) $K = \{3\}$, c) $K = \emptyset$, d) $K = \{-3 - \sqrt{2}, \sqrt{2} - 1\}$.

Vo všetkých príkladoch sme doteraz využili len geometrickú predstavu o absolútnej hodnote. Tie isté výsledky by sme dostali použitím definície absolútnej hodnoty. Ukážeme si to na príklade v časti d).

Z definície vieme, že

$$|x + 2| = \begin{cases} x + 2 & \text{ak } x + 2 \geq 0, \text{ t.j. } x \geq -2, \\ -x - 2 & \text{ak } x + 2 < 0, \text{ t.j. } x < -2. \end{cases}$$

Určíme teda číslo x , pre ktoré je argument absolútnej hodnoty, t.j. výraz $x + 2$, rovný 0.

Čiže dostaneme nulový bod, $x = -2$ a uvažujeme dva prípady:

a) ak $x \geq -2$, tak $|x + 2| = x + 2$, čiže na intervale $I_1 = \langle -2, \infty \rangle$ je rovnica $|x + 2| = \sqrt{2} + 1$ ekvivalentná s rovnicou

$$x + 2 = \sqrt{2} + 1, \text{ odkiaľ dostaneme } x = \sqrt{2} - 1 \in I_1, \text{ teda } K_1 = \{\sqrt{2} - 1\}.$$

b) ak $x < -2$, tak $|x + 2| = -x - 2$, čiže na intervale $I_2 = (-\infty, -2)$ je rovnica $|x + 2| = \sqrt{2} + 1$ ekvivalentná s rovnicou

$$-x - 2 = \sqrt{2} + 1, \text{ odkiaľ dostaneme } x = -3 - \sqrt{2} \in I_2, \text{ teda } K_2 = \{-3 - \sqrt{2}\}.$$

Pretože $R = I_1 \cup I_2$, dostávame $K = K_1 \cup K_2$, t.j. $K = \{-3 - \sqrt{2}, \sqrt{2} - 1\}$.

Tento postup, použitie definície absolútnej hodnoty, je všeobecný a môžeme ho používať pri riešení ľubovoľnej rovnice s neznámou v absolútnej hodnote.

Príklad 9:

Riešme rovnicu $|x+3| = 2|x-2| + 6$.

Riešenie: Určíme najskôr nulové body pre obe absolútne hodnoty. Dostaneme

$$x+3=0 \text{ a } x-2=0, \text{ odkiaľ } x=-3 \text{ a } x=2.$$

Z definície absolútnej hodnoty máme:

1) ak $x \geq -3$, tak $|x+3| = x+3$,

2) ak $x < -3$, tak,

3) ak $x \geq 2$, tak $|x-2| = x-2$,

4) ak $x < 2$, tak $|x-2| = 2-x$.

Danú rovnicu budeme riešiť v intervaloch $I_1 = (-\infty, -3)$, $I_2 = \langle -3, 2 \rangle$ a $I_3 = \langle 2, \infty \rangle$.

a) Ak $x \in I_1$, tak $|x+3| = -x-3$ a $|x-2| = 2-x$ a riešime rovnicu

$$-x-3 = 2(2-x) + 6, \text{ odkiaľ dostaneme } x=13 \notin I_1. \text{ Čiže } K_1 = \emptyset.$$

b) Ak $x \in I_2$, tak $|x+3| = x+3$ a $|x-2| = 2-x$ a riešime rovnicu

$$x+3 = 2(2-x) + 6, \text{ odkiaľ dostaneme } x = \frac{7}{3} \notin I_2. \text{ Čiže } K_2 = \emptyset.$$

c) Ak $x \in I_3$, tak $|x+3| = x+3$ a $|x-2| = x-2$ a riešime rovnicu

$$x+3 = 2(x-2) + 6, \text{ odkiaľ dostaneme } x=1 \notin I_3. \text{ Čiže } K_3 = \emptyset.$$

Takže daná rovnica nemá riešenie, $K = \emptyset$.

V niektorých prípadoch je vhodnejšie odstrániť absolútnu hodnotu umocnením obidvoch strán rovnice (platí $|a|^2 = a^2$). Pretože umocňovanie je implikačná úprava, treba vždy urobiť skúšku.

Príklad 10:

Riešme rovnicu $|2x+3| = 2|x-5|$.

Riešenie: Vyriešme tento príklad umocnením obidvoch strán rovnice. Dostaneme

$$(2x+3)^2 = 4(x-5)^2$$

t.j. $52x - 91 = 0,$

takže $x = \frac{7}{4}$. Po dosadení tohoto čísla do pôvodnej rovnice zistíme, že je skutočne jej

koreňom:

$$L\left(\frac{7}{4}\right) = \left|2\frac{7}{4} + 3\right| = \frac{13}{2} = 2\left|\frac{7}{4} - 5\right| = P\left(\frac{7}{4}\right).$$

2.4 Iné typy rovníc

Príklad 11:

Riešte rovnicu $x^3 - 2x^2 - 3x = 0$.

Riešenie: V danej kubickej rovnici chýba absolútny člen. Preto sa dá ľahko upraviť na súčin dvoch polynómov nižšieho rádu a to vyňatím premenej x :

$$x^3 - 2x^2 - 3x = x(x^2 - 2x - 3).$$

Čiže prvým koreňom je $x_1 = 0$. Ďalšie dva korene nájdeme riešením kvadratickej rovnice

$$x^2 - 2x - 3 = 0, \text{ teda}$$

$$x_{2,3} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Riešením danej rovnice je $K = \{-1, 0, 3\}$.

Príklad 12:

Riešte rovnicu v R : $x^4 - x^2 - 20 = 0$.

Riešenie: V tejto polynomickej rovnici 4. rádu vystupujú len párne členy. Preto jednoduchou substitúciou $t = x^2$ môžeme túto rovnicu previesť na kvadratickú. Teraz riešime rovnicu

$$t^2 - t - 20 = 0,$$

ktorej riešením sú korene $t_{1,2} = \frac{1 \pm 9}{2} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$. Teraz dosadíme späť do substitúcie.

Dostaneme $x^2 = 5$ a $x^2 = -4$. Z prvej rovnice dostaneme $x_1 = \sqrt{5}$ a $x_2 = -\sqrt{5}$. Druhá rovnica nemá v R riešenie. Teda daná rovnica má len dva korene, $K = \{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$.

Príklad 13:

Riešte v R rovnicu $\frac{3x+1}{x-1} + \frac{x+1}{x-1} = 7$.

Riešenie: Ukážeme dva spôsoby riešenia.

1) Rovnicu vynásobíme výrazom $x-1$ a dostaneme

$$(3x+1) + (x+1) = 7(x-1)$$

odkiaľ $x = 3$. Pretože prvá úprava, násobenie výrazom, je len implikačná, je nutnosťou urobiť nakoniec skúšku

$$L'(3) = \frac{3 \cdot 3 + 1}{3 - 1} + \frac{3 + 1}{3 - 1} = 7 = P(3).$$

Preto $K = \{3\}$. Pri tomto spôsobe sme neurčovali definičný obor rovnice.

2) Najskôr určíme definičný obor rovnice, t.j. pre ktoré x má rovnica zmysel. Definičným oborom je množina $D = R - \{1\}$. Ako v prvom spôsobe vynásobíme rovnicu výrazom $x - 1$. V definičnom obore je to ekvivalentná úprava. Po úpravách dostaneme $x = 3$. Keďže $3 \in D$ a používali sme len ekvivalentné úpravy, tak $K = \{3\}$. Skúška nie je nutná.

Príklad 14:

Riešte v R rovnicu $\frac{1}{2-x} - 1 = \frac{1}{x-2} - \frac{6-x}{3x^2-12}$.

Riešenie: Najskôr určíme definičný obor $D = R - \{-2, 2\}$. Vynásobíme celú rovnicu výrazom $3(x-2)(x+2)$.

$$\begin{aligned} \frac{-1}{x-2} - 1 &= \frac{1}{x-2} - \frac{6-x}{3(x-2)(x+2)} \quad | \cdot 3(x-2)(x+2), \\ -3(x+2) - 3(x^2-4) &= 3(x+2) - (6-x), \\ -3x^2 - 7x + 6 &= 0. \end{aligned}$$

Teraz určíme korene kvadratickej rovnice

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm 11}{-6} \Rightarrow x_1 = -3, x_2 = \frac{2}{3}.$$

Keďže čísla $-3, \frac{2}{3} \in D$, množinou všetkých koreňov je $K = \left\{-3, \frac{2}{3}\right\}$.

2.5 Rovnice s parametrom

Ak v rovnici okrem neznámej vystupuje ešte ďalšia premenná, za ktorú môžeme dosadiť prvky z nejakej množiny a po dosadení dostaneme rovnicu o jednej neznámej, túto rovnicu nazývame *rovnica s parametrom*. Riešiť rovnicu s parametrom znamená nájsť ku každej prípustnej hodnote parametra množinu koreňov. Ak nie je určené inak, za obor parametra berieme celé R .

Príklad 15:

Riešte v R rovnicu s neznámou x a parametrom a

$$\frac{x}{5} - \frac{1-3x}{a+2} = 1.$$

Riešenie: Určíme najskôr obor parametra a . Druhý výraz v rovnici nemá zmysel pre $a = -2$, t.j. obor parametra je $R - \{-2\}$. Ak $a \neq -2$, potom rovnici upravíme na tvar

$$(a+2)x - 5(1-3x) = 5(a+2),$$

odkiaľ $(a+17)x = 5a+15$.

➤ Ak $a \neq -17$, potom $x = \frac{5a+15}{a+17}$.

➤ Ak $a = -17$, potom dostávame rovnicu $0x = -70$, ktorá nemá riešenie.

Výsledky zhrnieme do tabuľky, kde K_a označíme množinu koreňov danej rovnice patriacu parametru a .

a	K_a
$a = -17$	$\emptyset$
$a \neq -17 \wedge a \neq -2$	$\left\{ \frac{5a+15}{a+17} \right\}$

Príklad 16:

Riešte v R rovnicu s neznámou x a parametrom p

$$2 - p = \frac{2p}{x-1} + 3p^2.$$

Riešenie: Obor parametra je celé R . Definičný obor rovnice je $D = R - \{1\}$. Ekvivalentnými úpravami rovnicu upravíme na tvar:

$$(3p^2 + p - 2)x = 3p^2 - p - 2.$$

Z rovnice $3p^2 + p - 2 = 0$ dostaneme $p_1 = -1$ a $p_2 = \frac{2}{3}$.

➤ Ak $p = -1$, tak $0x = 2$. Potom $K_{-1} = \emptyset$.

➤ Ak $p = \frac{2}{3}$, tak $0x = -\frac{4}{3}$. Potom $K_{\frac{2}{3}} = \emptyset$.

➤ Ak $p \neq -1$ a $p \neq \frac{2}{3}$, potom $K_p = \left\{ \frac{3p^2 - p - 2}{3p^2 + p - 2} \right\}$.

Pretože rovnica nie je definovaná pre $x = 1$ a obor parametra je celé R , treba ešte vyšetriť prípad, keď

$$\frac{3p^2 - p - 2}{3p^2 + p - 2} = 1.$$

Ten nastane pre $p = 0$. To znamená, že keď $p = 0$, tak $x = 1 \notin D$. Čiže $K = \emptyset$.

Zhrnutie:

p	K_p
$p = -1$	$\emptyset$
$p = \frac{2}{3}$	$\emptyset$
$p = 0$	$\emptyset$
$p \neq -1 \wedge p \neq \frac{2}{3}$ $\wedge p \neq 0$	$\left\{ \frac{3p^2 - p - 2}{3p^2 + p - 2} \right\}$

Príklad 17:

Pre ktoré hodnoty parametra p má rovnica $4x^2 + 9 = px$ jediné riešenie?

Riešenie: Kvadratická rovnica má jediné riešenie, ak diskriminant $D = 0$. Riešime

kvadratickú rovnicu $4x^2 - px + 9 = 0$, $D = (-p)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = p^2 - 144$. Odtiaľ $p = \pm 12$. Ak

$$p = 12, \text{ potom } K = \left\{ \frac{3}{2} \right\}, \text{ ak } p = -12, \text{ potom } K = \left\{ -\frac{3}{2} \right\}.$$

2.6 Sústavy dvoch rovníc o dvoch neznámych

Vyriešiť *sústavu dvoch rovníc o dvoch neznámych* znamená nájsť všetky usporiadané dvojice čísel, ktoré sú riešením oboch rovníc. Metóda riešenia spočíva vo vylúčení jednej neznámej z niektorej z rovníc. To je možné dosiahnuť dvomi spôsobmi:

- ❖ *Sčítacou metódou*, keď jednu z rovníc násobíme vhodným číslom tak, aby sa po pričítaní k druhej rovnici jedna neznáma vylúčila.
- ❖ *Dosadzovacou metódou*, keď z jednej rovnice vyjadríme jednu neznámu pomocou druhej neznámej a dosadíme do druhej rovnice.

Príklad 18:

V R riešte sústavu rovníc

$$3x - 2y = 4$$

$$x + 3y = 5.$$

Riešenie: Vyriešime danú sústavu obidvomi metódami.

1.) *Sčítacou metódou:* Vynásobíme druhú rovnicu -3 a pripočítame ju k prvej rovnici.

$$3x - 2y = 4$$

$$\underline{-3x - 9y = -15}$$

$$-11y = -11$$

odtiaľ $y = 1$. Dosadíme za y napríklad do druhej rovnice. Dostaneme $x = 2$. To znamená, že riešením sústavy je dvojica $[2, 1]$, teda. O správnosti výsledku sa môžeme, ale nemusíme presvedčiť skúškou.

2.) *Dosadzovacou metódou*: Z druhej rovnice si vyjadríme neznámu x a dosadíme do prvej rovnice.

$$x = 5 - 3y,$$

$$3(5 - 3y) - 2y = 4,$$

odtiaľ $y = 1$. Dosadíme za y napríklad do druhej rovnice. Dostaneme $x = 2$. To znamená, že riešením sústavy je dvojica $[2, 1]$, teda $K = \{[2, 1]\}$. O správnosti výsledku sa zase môžeme, ale nemusíme presvedčiť skúškou.

Príklad 19:

V R riešte sústavu rovníc

$$x - 2y = 4$$

$$-3x + 6y = -12.$$

Riešenie: Ak použijeme sčítaciu metódu, je najvhodnejšie vynásobiť prvú rovnicu 3 a pripočítať k druhej rovnici:

$$3x - 6y = 12$$

$$\underline{-3x + 6y = -12}$$

$$0 = 0.$$

Pri použití dosadzovacej metódy vyjadríme z prvej rovnice neznámu x a dosadíme do druhej rovnice:

$$-3(4 + 2y) + 6y = -12,$$

$$0 = 0.$$

Hoci sme použili obidva postupy, predsa sme nedospeli k rovnici o jednej neznámej.

Všimnime si, že druhá rovnica je -3 – násobkom prvej rovnice. Takú sústavu, kde jedna rovnica je násobkom druhej rovnice, nazývame sústavou dvoch lineárne závislých rovníc.

Riešiť takúto sústavu znamená riešiť jednu rovnicu s dvomi neznámymi, kde jednu z neznámych pokladáme za parameter a riešime ako rovnicu s parametrom. Čiže v našom prípade vezmeme napríklad prvú rovnicu a vyhlásme y za parameter. Dostaneme

$$x = 2y + 4.$$

Potom riešením danej sústavy je $K = \{[2y + 4, y], y \in R\}$, teda sústava má nekonečne veľa riešení.

Cvičenia

1. Riešte kvadratické rovnice

a) $2x^2 - 3x + 1 = 0$,

b) $2x^2 + 3x - 5 = 0$,

c) $4x^2 + 4x + 1 = 0$,

d) $2x^2 - 6x = 0$,

e) $x^2 + 2x + 2 = 0$,

f) $x^2 - 2x + 8 = 0$,

g) $9x^2 - 12x + 4 = 0$.

Výsledky: a) $K = \{1/2, 1\}$, b) $K = \{-5/2, 1\}$, c) $K = \{-1/2\}$, d) $K = \{0, 3\}$,

e) $K = \{-1 - i, -1 + i\}$, f) $K = \{1 - \sqrt{7}i, 1 + \sqrt{7}i\}$, g) $K = \{2/3\}$.

2. Rozložte kvadratické rovnice na súčin koreňových činiteľov

a) $9x^2 - 3x - 2 = 0$,

b) $x^2 + 11ax - 26a^2 = 0$,

c) $18x^2 - 12x + 2 = 0$,

d) $6x^2 + x - 1 = 0$.

Výsledky: a) $9\left(x - \frac{2}{3}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right)$, b) $(x - 2a)(x + 13a)$, c) $18\left(x - \frac{1}{3}\right)^2$, d) $6\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)$.

3. Ktorá kvadratická rovnica s koeficientom kvadratického člena a má množinu koreňov K ?

a) $a = 3, K = \left\{\frac{5}{3}, -2\right\}$,

b) $a = 9, K = \left\{-\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right\}$.

Výsledky: a) $3x^2 + x - 10 = 0$, b) $9x^2 + 9x - 10 = 0$.

4. Riešte rovnice

a) $\sqrt{x+5} - 2 = x - 3$,

b) $\sqrt{x^2 + 8} = 2x + 1$,

c) $\sqrt{x^2 + 5} - \sqrt{x^2 - 3} = x$,

d) $\sqrt{x+5} - \sqrt{5-x} = 2$,

e) $1 - \sqrt{1 + x\sqrt{x}} = x$,

f) $\sqrt{x} + \sqrt{x + \sqrt{1-x}} = 1$.

Výsledky: a) $K = \{4\}$, b) $K = \{1\}$, c) $K = \{2\}$, d) $K = \{4\}$, e) $K = \{0\}$, f) $K = \{0\}$.

5. Riešte rovnice

a) $|3x - 6| = x + 2$,

b) $|2x + 1| = x$,

c) $2|x + 2| = |3 - x| + 4$,

d) $|x + 5| - |x + 4| = x$,

e) $\frac{|2x - 3|}{|x + 2|} = 2$,

f) $\frac{|2x - 3|}{|x - 4|} = 3$.

Výsledky: a) $K = \{1, 4\}$, b) $K = \emptyset$, c) $K = \{-11, 1\}$, d) $K = \{1\}$, e) $K = \left\{-\frac{1}{4}\right\}$,
f) $K = \{3, 9\}$.

6. Riešte rovnice

a) $x^3 + x^2 - 2x = 0$,

b) $3x^3 + 10x^2 + 3x = 0$,

c) $2x^4 + x^2 - 3 = 0$,

d) $2x^4 - 12x^2 + 16 = 0$,

e) $\frac{1}{x-2} + 3 = \frac{3-x}{x-2}$,

f) $\frac{x+2}{x+4} = \frac{x-4}{x+8}$,

g) $\frac{x-1}{x+1} - \frac{x+1}{x-1} = \frac{4x}{1-x^2}$,

h) $\frac{x-2}{x-1} - \frac{x-1}{x-2} = \frac{2}{x^2 - 3x + 2}$.

Výsledky: a) $K = \{-2, 0, 1\}$, b) $K = \left\{-3, -\frac{1}{3}, 0\right\}$, c) $K = \{-1, 1\}$, d) $K = \{-2, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2\}$,

e) $K = \emptyset$, f) $K = \left\{-\frac{16}{5}\right\}$, g) $K = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$, h) $K = \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

7. Riešte rovnice s neznámou x a parametrom p

a) $\frac{2x-5}{p-2} - x = 1$.

Výsledok:

p	K_p
$p = 4$	$\emptyset$
$p \neq 4 \wedge p \neq 2$	$\left\{ \frac{p+3}{4-p} \right\}$

$$b) \frac{x-1}{x} = \frac{2-p}{3p}.$$

Výsledok:

p	K_p
$p = \frac{1}{2}$	$\emptyset$
$p \neq 0 \wedge p \neq \frac{1}{2}$	$\left\{ \frac{3p}{4p-2} \right\}$

$$c) 3-p = \frac{2}{x-2}.$$

Výsledok:

p	K_p
$p = 3$	$\emptyset$
$p \neq 3$	$\left\{ \frac{8-2p}{3-p} \right\}$

$$d) \frac{2p}{x} - \frac{p-2}{3} = \frac{5}{x}.$$

Výsledok:

p	K_p
$p = 2$	$\emptyset$
$p = \frac{5}{2}$	$\emptyset$
$p \neq 2 \wedge p \neq \frac{5}{2}$	$\left\{ \frac{6p-15}{p-2} \right\}$

8. Určte hodnoty parametra a tak, aby pre reálne korene rovnice $x^2 + ax + 20 = 0$ platilo

$$|x_1 - x_2| = 1.$$

Výsledok: Ak $a = 9$, tak $K = \{-5, -4\}$, ak $a = -9$, tak $K = \{5, 4\}$.

9. Určte hodnoty parametra a tak, aby rovnica $2x^2 + ax + 2 = 0$ mala jediný koreň.

Výsledok: Ak $a = 4$, tak $K = \{-1\}$, ak $a = -4$, tak $K = \{1\}$.

10. Pre ktoré číslo p má rovnica $x^2 + 3x + p = 0$ riešenie $x = -4$?

Výsledok: $p = -4$.

11. Riešte sústavy rovníc

a) $2x - y = -5$

$$-5x + 3y = 14,$$

b) $3x - 2y = 4$

$$x + 3y = 5,$$

c) $x - 3y = -5$

$$-2x + 6y = 14,$$

d) $2x - \frac{y}{3} = 7$

$$6x - y = 21,$$

e) $10x - \frac{y-10}{3} = 2$

$$30x - y = -4.$$

Výsledky: a) $K = \{[-1, 3]\}$, b) $K = \{[2, 1]\}$, c) $K = \emptyset$ d) $K = \{[x, 6x - 21]\}$, $x \in R$,

e) $K = \{[x, 30x + 4]\}$, $x \in R$.

12. Pre ktorú hodnotu parametra c nemá sústava rovníc riešenie?

$$cx - 4y = 1$$

$$-2x + 8y = -3.$$

Výsledok: $c = 1$.

13. Riešte sústavy rovníc s parametrom a

a) $3x + 7y = a$

$$2x + 5y = 20,$$

b) $x + y = a$

$$ax + y = a^2.$$

Výsledky: a) $K = \{[-140 + 5a, 60 - 2a]\}$,

b) ak $a \neq 1$, $K = \{[a, 0]\}$, ak $a = 1$, $K = \{[1 - y, y], y \in R\}$.

3. Nerovnice

V tejto kapitole budeme využívať poznatky z predchádzajúcej kapitoly Rovnice (riešenie kvadratickej rovnice, jej rozklad na súčin koreňových činiteľov, doplnenie na úplný štvorec, riešenie rovníc s absolútnou hodnotou) ako aj poznatky z kapitoly o funkciách (kvadratická funkcia).

3.1 Lineárne a kvadratické nerovnice

Nerovnice typu $ax + b > 0$, $ax + b < 0$, $ax + b \geq 0$, $ax + b \leq 0$, kde $a, b \in R$, $a \neq 0$, sú dané čísla, nazývame *lineárnymi nerovnicami* s neznámou x .

Príklad 1:

Nájďme všetky reálne čísla x , pre ktoré platí

$$x - \frac{x-4}{3} - \frac{2x+1}{2} < 5.$$

Riešenie: Najskôr vynásobíme obidve strany rovnice číslom 6. Keďže $6 > 0$, nemá táto úprava vplyv na zmenu znamienka. Dostaneme:

$$6x - 2(x-4) - 3(2x+1) < 30, \text{ odkiaľ po úprave } -2x + 5 < 30, \text{ teda} \\ -2x < 25.$$

Teraz vynásobíme rovnicu číslom $-\frac{1}{2}$. Keďže $-\frac{1}{2} < 0$, znamienko nerovnosti sa zmení:

$$x > -\frac{25}{2}.$$

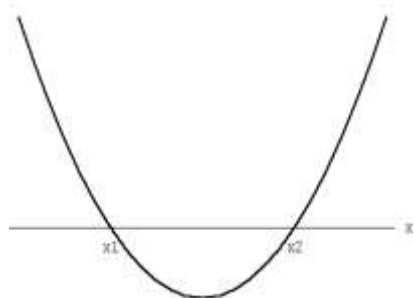
Teda riešením danej nerovnice je interval $\left(-\frac{25}{2}, \infty\right)$.

Ak v kvadratickej rovnici nahradíme znak „ $=$ “ jedným zo znakov nerovnosti $<$, $>$, $\geq$, $\leq$, dostaneme *kvadratickú nerovnicu*, napríklad:

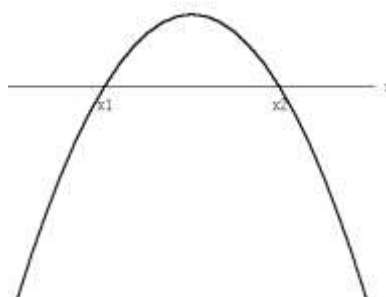
$$ax^2 + bx + c \leq 0, \text{ kde } a, b, c \in R, a \neq 0.$$

Kvadratické nerovnice môžeme riešiť dvomi spôsobmi: graficky a algebraicky.

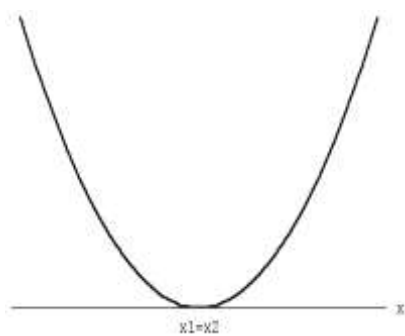
- ❖ *Graficky:* Vychádzame zo znalostí o kvadratickej funkcii. Vieme, že jej grafom je parabola, ktorej os je rovnobežná s osou y a orientácia závisí od znamienka koeficientu kvadratického člena a . Body x_1, x_2 , kde parabola pretína os x , sú koreňmi kvadratickej rovnice $ax^2 + bx + c = 0$. Takže poloha paraboly závisí od znamienka diskriminantu D a koeficientu kvadratického člena a . Dostaneme šesť možných polôh grafu paraboly:

a) $D > 0, a > 0$ 

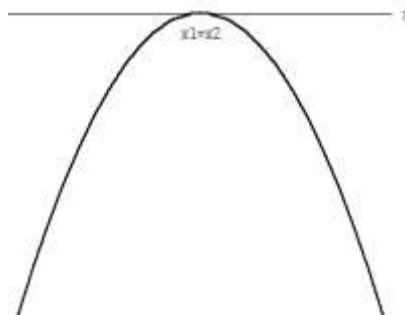
Obr. 1

b) $D > 0, a < 0$ 

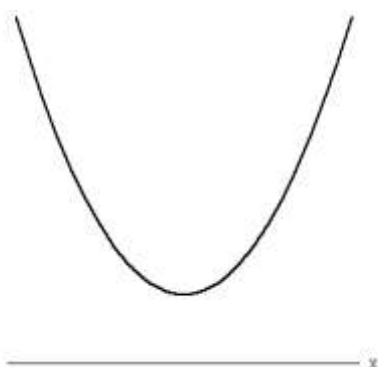
Obr. 2

c) $D = 0, a > 0$ 

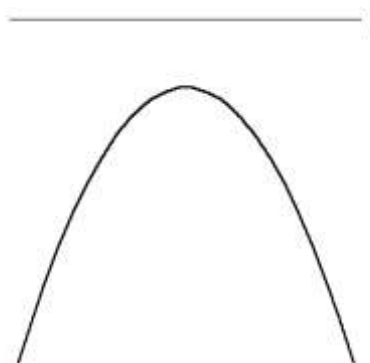
Obr. 3

d) $D = 0, a < 0$ 

Obr. 4

e) $D < 0, a > 0$ 

Obr. 5

d) $D < 0, a < 0$ 

Obr. 6

Takže postup riešenia je nasledovný:

- Vypočítame hodnotu diskriminantu D kvadratickej rovnice $ax^2 + bx + c = 0$.
- Ak $D \geq 0$, vypočítame korene kvadratickej rovnice.
- Zistíme znamienko koeficientu kvadratického člena a .
- Načrtne graf paraboly $y = ax^2 + bx + c$.
- Na základe grafu určíme obor pravdivosti danej kvadratickej nerovnice (t.j. hodnoty x , pre ktoré je nerovnica splnená).

❖ *Algebraicky:*

Kvadratické nerovnice môžeme riešiť aj algebraicky, úpravou kvadratického trojčlena

$ax^2 + bx + c$. Majme napríklad nerovnicu $ax^2 + bx + c > 0$.

- Ak $D > 0$, nerovnicu upravíme na súčin koreňových činiteľov $a(x - x_1)(x - x_2) > 0$, kde x_1, x_2 sú korene kvadratickej rovnice $ax^2 + bx + c = 0$. Ďalej vyšetrujeme jednotlivé možnosti, kedy je súčin kladný.
- Ak $D \leq 0$, je výhodné doplniť kvadratický trojčlen na úplný štvorec.

Oba prístupy ukážeme na príkladoch.

Príklad 2:

Riešte kvadratickú nerovnicu $2x^2 + 3x - 2 \leq 0$.

Riešenie:

Grafické riešenie: Vypočítame najskôr diskriminant $D = 25$, následne korene kvadratickej

rovnice $2x^2 + 3x - 2 = 0$. Dostaneme $x_1 = -2$, $x_2 = \frac{1}{2}$. Keďže koeficient pri kvadratickom

člene $a = 2 > 0$, graf kvadratickej funkcie $y = 2x^2 + 3x - 2$ zodpovedá Obr.1. Riešením

nerovnice sú čísla z intervalu $\left\langle -2, \frac{1}{2} \right\rangle$.

Algebraické riešenie: Vypočítame najskôr diskriminant $D = 25$, následne korene kvadratickej

rovnice $2x^2 + 3x - 2 = 0$. Dostaneme $x_1 = -2$, $x_2 = \frac{1}{2}$. Teda kvadratický trojčlen môžeme

rozložiť na súčin koreňových činiteľov:

$$2x^2 + 3x - 2 = 2(x + 2)\left(x - \frac{1}{2}\right) \leq 0.$$

Skúmame, kedy je súčin na ľavej strane nekladný. Sú dve možnosti:

$$x + 2 \leq 0 \wedge x - \frac{1}{2} \geq 0, \text{ teda } x \leq -2 \wedge x \geq \frac{1}{2}, \text{ odtiaľ } x \in \emptyset$$

alebo $x + 2 \geq 0 \wedge x - \frac{1}{2} \leq 0$, teda $x \geq -2 \wedge x \leq \frac{1}{2}$, odtiaľ $x \in \left\langle -2, \frac{1}{2} \right\rangle$.

Čiže výsledným riešením danej nerovnice je interval $\left\langle -2, \frac{1}{2} \right\rangle$.

Príklad 3:

Riešte kvadratickú nerovnicu $-x^2 + 6x - 9 < 0$.

Riešenie:

Grafické riešenie: Najprv vypočítame diskriminant $D = 0$, následne dvojnásobný koreň kvadratickej rovnice $-x^2 + 6x - 9 = 0$, $x_1 = 3$. Keďže koeficient $a = -1 < 0$, poloha grafu paraboly $y = -x^2 + 6x - 9$ zodpovedá Obr. 4. Z grafu vidno, že riešením je $R - \{3\}$.

Algebraické riešenie: Keďže diskriminant $D = 0$, doplníme kvadratický trojčlen na úplné štvorce $-x^2 + 6x - 9 = -(x^2 - 6x + 9) = -(x - 3)^2$. Dostaneme nerovnosť $-(x - 3)^2 < 0$. Táto nerovnosť platí pre všetky $x \in R - \{3\}$.

Príklad 4:

Riešte kvadratickú nerovnicu $2x^2 + 4x + 3 \leq 0$.

Riešenie:

Grafické riešenie: Najprv vypočítame diskriminant $D = -8 < 0$, teda kvadratická rovnica $2x^2 + 4x + 3 = 0$ nemá reálny koreň. Keďže koeficient $a = 2 > 0$, poloha grafu paraboly $y = 2x^2 + 4x + 3$ zodpovedá Obr.5. Z grafu vidno, že nerovnica nemá riešenie.

Algebraické riešenie: Keďže diskriminant $D < 0$, doplníme kvadratický trojčlen na úplné štvorce $2x^2 + 4x + 3 = 2\left(x^2 + 2x + 1 - 1 + \frac{3}{2}\right) = 2\left((x + 1)^2 + \frac{1}{2}\right)$. Dostaneme nerovnosť

$$2\left((x + 1)^2 + \frac{1}{2}\right) < 0, \text{ teda } (x + 1)^2 < -\frac{1}{2}.$$

Táto nerovnosť neplatí pre žiadne $x \in R$.

3.2 Nerovnice s absolútnymi hodnotami

V tejto časti sa budeme zaoberať riešením nerovníc s neznámou v absolútnej hodnote.

Pripomeňme si preto definíciu absolútnej hodnoty ako funkcie $x \in R$:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{ak } x \geq 0 \\ -x & \text{ak } x < 0. \end{cases}$$

Čiže absolútna hodnota reálneho čísla je vždy nezáporné reálne číslo.

Z geometrického hľadiska je to vzdialenosť obrazu reálneho čísla od počiatku na reálnej osi. Teda riešením nerovnosti $|x| > b$ je zjednotenie intervalov $(-\infty, -b) \cup (b, \infty)$. Ako bolo spomínané už pri riešení rovníc s absolútnymi hodnotami pod geometrickou interpretáciou $|a - b|$ si možno predstaviť vzdialenosť dvoch obrazov reálnych čísel a, b . Teda nerovnica $|x - b| < c$ predstavuje len iný zápis intervalu $(b - c, b + c)$ (v prípade neostrej nerovnosti je interval uzavretý), a naopak nerovnica $|x - b| > c$ je doplnkom tohoto intervalu do $\mathbb{R}$, čiže $(-\infty, b - c) \cup (b + c, \infty)$.

Príklad 5:

Riešte nerovnice: a) $|x - 1| < 2$, b) $|x + 3| \geq 0$, c) $|x - 7| \leq -2$, d) $|x + 2| > \sqrt{2} + 1$.

Riešenie: a) $(-1, 3)$, b) $\mathbb{R}$, c) $\emptyset$, d) $(-\infty, -3 - \sqrt{2}) \cup (-1 + \sqrt{2}, \infty)$.

Podobne môžeme riešiť nerovnice typu $|ax + b| < c$ ($|ax + b| \leq c$), resp.

$|ax + b| > c$ ($|ax + b| \geq c$).

Príklad 6:

Riešte nerovnice: a) $|2x - 1| < 3$, b) $|-3x + 1| \geq 2$

Riešenie: a) $-3 < 2x - 1 < 3$, odkiaľ $-1 < x < 2$. Teda $x \in (-1, 2)$.

b) $-2 \geq -3x + 1 \geq 2$, odkiaľ $x \geq 1$ alebo $x \leq -\frac{1}{3}$. Teda $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right] \cup [1, \infty)$.

Vo všetkých príkladoch sme doteraz využili len geometrickú predstavu o absolútnej hodnote. Podobne, ako pri riešení rovníc, tie isté výsledky by sme dostali použitím definície absolútnej hodnoty. Ukážme si to na príklade 5d).

Z definície vieme, že

$$|x + 2| = \begin{cases} x + 2 & \text{ak } x + 2 \geq 0, \text{ t.j. } x \geq -2 \\ -x - 2 & \text{ak } x + 2 < 0, \text{ t.j. } x < -2. \end{cases}$$

Určíme teda číslo x , pre ktoré je argument absolútnej hodnoty, t.j. výraz $x + 2 = 0$. Čiže dostaneme nulový bod $x = -2$ a uvažujeme dva prípady:

1) ak $x \geq -2$, tak $|x + 2| = x + 2$, čiže na intervale $I_1 = [-2, \infty)$ je nerovnica $|x + 2| > \sqrt{2} + 1$

ekvivalentná s nerovnicou $x + 2 > \sqrt{2} + 1$, odkiaľ dostaneme

$x > \sqrt{2} - 1$, teda $x \in (\sqrt{2} - 1, \infty) \cap [-2, \infty)$. Riešením je interval $(\sqrt{2} - 1, \infty)$.

2) ak $x < -2$, tak $|x+2| = -x-2$, čiže na intervale $I_2 = (-\infty, -2)$ je nerovnica

$|x+2| > \sqrt{2}+1$ ekvivalentná s nerovnicou $-x-2 > \sqrt{2}+1$, odkiaľ dostaneme

$x < -3-\sqrt{2}$, teda $x \in (-\infty, -3-\sqrt{2}) \cap (-\infty, -2)$. Riešením je interval $(-\infty, -3-\sqrt{2})$.

Pretože $R = I_1 \cup I_2$, dostávame výsledné riešenie $(-\infty, -3-\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}-1, \infty)$.

Tento postup, použitie definície absolútnej hodnoty, je všeobecný a môžeme ho používať pri riešení ľubovoľnej nerovnice s neznámou v absolútnej hodnote.

Príklad 7:

Riešte nerovnicu $x - |2x-1| < |x-2|$.

Riešenie: Najskôr nájdeme nulové body absolútnych hodnôt vystupujúcich v nerovnici: Z

rovnice $2x-1=0$ dostaneme $x = \frac{1}{2}$. Podobne z druhého výrazu v absolútnej hodnote

dostaneme druhý nulový bod $x = 2$. Rozdelíme reálnu os na tri časti $I_1 = \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$,

$I_2 = \left(\frac{1}{2}, 2\right)$ a $I_3 = (2, \infty)$.

➤ Pre $x \in I_1$ je $|2x-1| = 1-2x$ a $|x-2| = 2-x$.

➤ Pre $x \in I_2$ je $|2x-1| = 2x-1$ a $|x-2| = 2-x$.

➤ Pre $x \in I_3$ je $|2x-1| = 2x-1$ a $|x-2| = x-2$.

Čiže v intervale I_1 riešime nerovnicu:

$$x-1+2x < 2-x, \text{ odkiaľ } x < \frac{3}{4}. \text{ Teda } x \in \left(-\infty, \frac{3}{4}\right) \cap \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) = \left(-\infty, \frac{1}{2}\right).$$

V intervale I_2 riešime nerovnicu:

$$x-2x+1 < 2-x, \text{ odkiaľ } 1 < 2. \text{ Teda } x \in R \cap \left(\frac{1}{2}, 2\right) = \left(\frac{1}{2}, 2\right).$$

V intervale I_3 riešime nerovnicu:

$$x-2x+1 < x-2, \text{ odkiaľ } x > \frac{3}{2}. \text{ Teda } x \in \left(\frac{3}{2}, \infty\right) \cap (2, \infty) = (2, \infty).$$

Takže riešením na celej reálnej osi je $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 2\right) \cup (2, \infty) = R$.

Iný prístup pri riešení nerovnic s absolútnou hodnotou je grafický, kde vychádzame zo znalosti grafu funkcií.

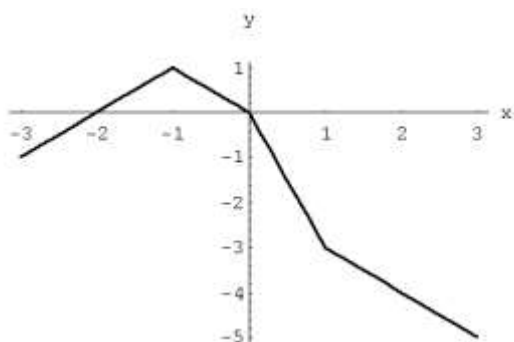
Príklad 8:

Riešte nerovnicu: $|x| < |x-1| - |x+1|$.

Riešenie: Danú nerovnicu môžeme upraviť do tvaru $0 < |x-1| - |x+1| - |x|$. Graf funkcie

$f(x) = |x-1| - |x+1| - |x|$ je lomená čiara, ktorá sa lomí v nulových bodoch absolútnych hodnôt vystupujúcich vo funkcii, t.j. v bodoch 1, -1, 0.

Zo zostrojeného grafu ľahko vidíme, že funkcia $f(x) > 0$ len pre $x \in (-2, 0)$.

**3.3 Iné typy nerovníc****Príklad 9:**

Riešte nerovnicu: $\frac{2x-3}{x-1} \leq x+1$.

Riešenie: Definičný obor nerovnice je $R - \{1\}$. Danú nerovnicu môžeme riešiť dvomi spôsobmi:

A) Nerovnicu upravíme tak, aby sme na jednej strane nerovnice dostali 0.

$$\frac{2x-3}{x-1} - x - 1 \leq 0, \text{ teda } \frac{(2x-3) - (x^2-1)}{x-1} \leq 0.$$

Dostali sme nerovnicu $\frac{-x^2 + 2x - 2}{x-1} \leq 0$. Daná nerovnosť je splnená v dvoch prípadoch:

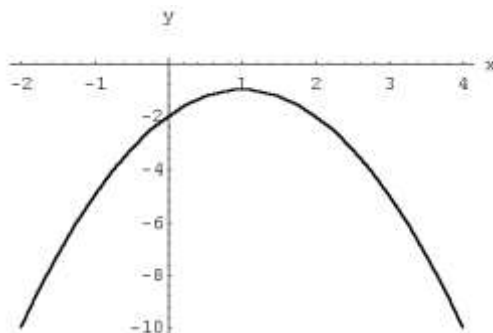
$$\text{i) } -x^2 + 2x - 2 \leq 0 \quad \wedge \quad x-1 > 0,$$

$$\text{ii) } -x^2 + 2x - 2 \geq 0 \quad \wedge \quad x-1 < 0.$$

Rozoberme si prípad i). Vyríšime najskôr kvadratickú nerovnicu $-x^2 + 2x - 2 \leq 0$.

Diskriminant $D = -4 < 0$, koeficient $a = -1$. Nakreslíme graf funkcie

$$y = -x^2 + 2x - 2.$$



Z grafu vidno, že nerovnosť $-x^2 + 2x - 2 \leq 0$ je splnená pre všetky $x \in \mathbb{R}$. Z druhej nerovnice $x > 1$. Takže výsledným riešením prípadu i) je interval $(1, \infty)$.

Rozoberme si prípad ii). Kvadratická nerovnica $-x^2 + 2x - 2 \geq 0$ nemá riešenie (pozri graf). Takže výsledným riešením prípadu ii) je prázdna množina $\emptyset$.

Riešením danej nerovnice je teda interval $(1, \infty)$.

B) Nerovnicu vynásobíme výrazom $x - 1$. Musíme uvažovať dva prípady.

- i) $x - 1 > 0$, t.j. $x > 1$,
- ii) $x - 1 < 0$, t.j. $x < 1$.

V prípade i) dostaneme nerovnicu $2x - 3 \leq x^2 - 1$, t.j. $-x^2 + 2x - 2 \leq 0$. Riešením danej nerovnice je celé $\mathbb{R}$. Keďže pracujeme s $x > 1$, riešením v prípade i) je interval $(1, \infty)$.

V prípade ii) dostaneme nerovnicu $-x^2 + 2x - 2 \geq 0$. Daná nerovnica nemá riešenie. Takže riešením pôvodnej nerovnice je interval $(1, \infty)$.

Príklad 10:

Riešte nerovnicu: $3\sqrt{1-x^2} < 3-x$.

Riešenie: Najskôr nájdeme definičný obor danej nerovnice, čiže všetky x , pre ktoré platí $1-x^2 \geq 0$. Dostaneme $D = \langle -1, 1 \rangle$.

Keďže obidve strany nerovnice sú pre $x \in D$ nezáporné, po umocnení obidvoch strán dostaneme nerovnicu $9(1-x^2) < 9-6x+x^2$, odkiaľ $x(10x-6) > 0$. Riešenie tejto

kvadratickej nerovnice je zjednotenie intervalov $(-\infty, 0) \cup \left(\frac{3}{5}, \infty\right)$. Doterajšie úpravy boli

ekvivalentné len pre $x \in D$, takže riešením pôvodnej nerovnice je

$\langle -1, 1 \rangle \cap \left((-\infty, 0) \cup \left(\frac{3}{5}, \infty\right) \right)$, teda zjednotenie intervalov $\langle -1, 0 \rangle \cup \left(\frac{3}{5}, 1\right)$.

Príklad 11:

Riešte nerovnicu s parametrom a : $\frac{a}{2} - \frac{x}{a} \geq \frac{x}{2} + \frac{2}{a}$, $a \in \mathbb{R}$.

Riešenie: Určíme najskôr obor parametra a , $a \neq 0$, a definičný obor nerovnice $D = \mathbb{R}$.

Potom vynásobíme celú nerovnicu výrazom $2a$. Uvažujeme dva prípady:

➤ Ak $a > 0$, tak dostaneme nerovnosť $a^2 - 4 \geq ax + 2x$, odkiaľ $x \leq \frac{a^2 - 4}{a + 2} = a - 2$.

➤ Ak $a < 0$, tak dostaneme nerovnosť $a^2 - 4 \leq ax + 2x$, odkiaľ

- ak $a + 2 > 0$, t.j. $a > -2$, $x \geq \frac{a^2 - 4}{a + 2} = a - 2$,

- ak $a + 2 < 0$, t.j. $a < -2$, $x \leq \frac{a^2 - 4}{a + 2} = a - 2$,

- ak $a = -2$, $x \in \mathbb{R}$.

Výsledky zhrnieme do tabuľky:

$a > 0 \vee a < -2$	$(-\infty, a - 2)$
$a \in (-2, 0)$	$\langle a - 2, \infty)$
$a = -2$	$\mathbb{R}$

Príklad 12:

Riešte sústavu nerovníc: $3x - 4 < 2x + 5 < 4x - 1$.

Riešenie: Vyriešime najskôr nerovnicu $3x - 4 < 2x + 5$. Jej riešením je interval $(-\infty, 9)$.

Riešením druhej nerovnice $2x + 5 < 4x - 1$ je interval $(3, \infty)$. Takže riešením sústavy je $(-\infty, 9) \cap (3, \infty) = (3, 9)$.

Cvičenia

1. Riešte nerovnice:

a) $\frac{4x + 7}{-2} \geq 3 - 5x$,

b) $x - \frac{x - 4}{3} - \frac{2x + 1}{2} < 5$,

c) $x^2 + 5x - 3 \leq 2x + 1$,

d) $2x^2 + 7x + 5 \leq 0$,

e) $3x^2 - 2x + 1 < 0$,

f) $x^2 - 4x + 5 > 0$,

g) $x^2 - 10x + 25 \leq 0$,

h) $x^2 - 7x - 8 > 0$,

i) $(2 - 3x) - (x - 1) > -4 - (x - 2)^2$.

Výsledky: a) $K = \left\langle \frac{13}{6}, \infty \right\rangle$, b) $K = \left\langle -\frac{25}{2}, \infty \right\rangle$, c) $K = \langle -4, 1 \rangle$, d) $K = \left\langle -\frac{5}{2}, -1 \right\rangle$, e) $K = \emptyset$,

f) $K = \mathbb{R}$, g) $K = \{5\}$, h) $K = (-\infty, -1) \cup (8, \infty)$, i) $K = (-\infty, 4 - \sqrt{5}) \cup (4 + \sqrt{5}, \infty)$.

2. Riešte nerovnice:

a) $|2x - 5| \leq 3$,

b) $|x + 3| \geq 4$,

c) $|3x - 6| < x + 2$,

d) $|3x - 1| < 4 - 2x$,

e) $|x| + |x - 2| \leq 2$,

f) $|x - 1| \leq |x + 2| + 1$,

g) $|x + 1| + |x - 1| < 2$,

h) $|x^2 - x| > 6$

Výsledky: a) $K = \langle 1, 4 \rangle$, b) $K = (-\infty, -7) \cup \langle 1, \infty \rangle$, c) $K = (1, 4)$, d) $K = (-3, 1)$, e) $K = \langle 0, 2 \rangle$,

f) $K = \langle -1, \infty \rangle$, g) $K = \emptyset$, h) $K = (-\infty, -2) \cup (3, \infty)$.

3. Riešte nerovnice:

a) $\sqrt{x^2} < x + 2$,

b) $\sqrt{x^2 - 3x - 4} \leq x - 1$,

c) $\sqrt{\frac{x-2}{1-2x}} > -1$,

d) $\frac{\sqrt{x} - 3}{x - 2} \geq 0$,

e) $\frac{2x - 3}{x - 1} \leq x + 1$,

f) $\frac{x+1}{x-2} > \frac{3}{x-2} - \frac{1}{2}$,

g) $\frac{|x+3| + x}{x+2} > 1$,

h) $\left| \frac{3x-1}{x+1} \right| \leq 2.$

Výsledky: a) $K = (-1, \infty)$, b) $K = \langle 4, \infty \rangle$, c) $K = \left(\frac{1}{2}, 2 \right)$, d) $K = \langle 0, 2 \rangle \cup \langle 9, \infty \rangle$,

e) $K = (1, \infty)$, f) $K = \mathbb{R} - \{2\}$, g) $K = (-5, -2) \cup (-1, \infty)$, h) $K = \left\langle -\frac{1}{5}, 3 \right\rangle$.

4. Riešte sústavy nerovníc

a) $2x - 3 \leq x + 1$

$$\frac{3x+1}{x+2} \leq 2,$$

b) $x - 2 \geq x + 1$

$$-x - 8 \leq 5 - 5x.$$

Výsledky: a) $K = (-2, 3]$, b) $K = \left\langle \frac{3}{2}, \frac{13}{4} \right\rangle$.

5. Riešte nerovnicu s parametrom a

$$|x - 5| \leq a.$$

Výsledok:

$a > 0$	$\langle 5 - a, 5 + a \rangle$
$a = 0$	$\{5\}$
$a < 0$	$\emptyset$

6. Pre ktoré hodnoty parametra a má rovnica $x^2 + ax + 9 = 0$ dvojnásobný koreň?

Výsledok: $a \in \{-6, 6\}$.

7. Pre ktorú hodnotu parametra p je riešením nerovnice $|p - x| > |2x|$ interval dĺžky 8?

Výsledok: $p \in \{-6, 6\}$.

8. Pre ktoré hodnoty parametra a nemá nerovnica $ax^2 + 4x - 1 > 0$ riešenie?

Výsledok: $a \leq -4$.

9. Pre ktorú hodnotu parametra b je riešením nerovnice $|x + 4| \geq b - |x - 3|$ celá množina $\mathbb{R}$?

Výsledok: $b \leq 7$.

10. Pre ktorú hodnotu parametra a je riešením zadanej sústavy nerovníc interval dĺžky 1?

$$2x - 3 \geq 5$$

$$ax + 2 > -1.$$

Výsledok: $a = -\frac{3}{5}$.

4. Funkcie

4.1 Funkcia a jej vlastnosti

Funkcia je jeden z najdôležitejších pojmov v matematike.

Funkcia f je taký vzťah medzi veličinami x a y , ktorý každej hodnote nezávislej premennej x z niektorej podmnožiny $D(f)$ množiny reálnych čísel R priradí **jedinú** hodnotu závislej premennej y . Tento vzťah matematicky zapisujeme rovnicou

$$y = f(x). \quad (1)$$

Množinu $D(f)$ (v ďalšom texte ju budeme označovať len ako D) voláme *definičný obor funkcie f* a množinu všetkých možných čísel $f(x)$ voláme *obor hodnôt funkcie f* a označujeme $H(f)$. Ak definičný obor nie je inak určený, tak je ním množina všetkých reálnych čísel, pre ktoré má rovnica (1) význam. Dve funkcie *sa rovnajú*, ak sa rovnajú ich definičné obory a ak sa rovnajú ich hodnoty v každom čísle definičného oboru.

Graf funkcie f je množina $\{[x, f(x)] \in R^2; x \in D\}$. Grafy väčšiny funkcií, s ktorými prideme do styku sú rovinné krivky. Funkciu, ktorej graf je súvislá krivka (t.j. je z jednej čiary) voláme *spojitá*.

Nasleduje prehľad niektorých vlastností, podľa ktorých funkcie triedime.

Funkcia f je *rastúca (klesajúca)*, ak pre každé dve čísla $u < v$ z jej definičného oboru platí $f(u) < f(v)$ ($f(u) > f(v)$). Na grafe funkcie sa táto vlastnosť prejaví tak, že graf funkcie v smere zľava doprava smeruje nahor (nadol).

Funkcia f je *zhora (zdola) ohraničená*, ak existuje také číslo h , že pre každé číslo x z jej definičného oboru platí $f(x) \leq h$ ($f(x) \geq h$). Funkcia je *ohraničená*, ak je ohraničená súčasne zhora aj zdola. Na grafe sa ohraničenosť prejaví tak, že celý graf je medzi dvoma priamkami rovnobežnými s osou o_x .

Funkcia f je *prostá*, ak pre každé dve rôzne čísla u a v z jej definičného oboru sú aj ich hodnoty rôzne, t.j. $f(u) \neq f(v)$. Na grafe sa táto vlastnosť prejaví tak, že každá priamka rovnobežná s osou o_x pretne graf funkcie najviac v jednom bode.

Funkcia f je *periodická*, ak existuje číslo p tak, že

- ak $x \in D$, tak aj $x + p \in D$,
- pre každé $x \in D$ platí $f(x + p) = f(x)$.

Na grafe sa táto vlastnosť prejaví tak, že graf funkcie sa opakuje, presnejšie: ak posunieme graf v smere osi o_x o hodnotu p , tak sa bude kryť s pôvodným grafom.

Funkcia f je *párna*, ak

- $x \in D$, potom aj $-x \in D$,
- pre každé $x \in D$ platí $f(-x) = f(x)$.

Graf párnej funkcie je súmerný podľa osi o_y .

Funkcia f je *nepárna*, ak

- $x \in D$, potom aj $-x \in D$,
- pre každé $x \in D$ platí $f(-x) = -f(x)$.

Graf nepárnej funkcie je súmerný podľa začiatku súradnicovej sústavy.

S funkciami môžeme vykonávať algebraické operácie podobné operáciám s číslami: súčet, rozdiel, súčin a podiel.

Inou operáciou s funkciami je *skladanie funkcií*. Funkcia h je *zloženou funkciou* z funkcií f a g , ak $h(x) = g(f(x))$ pre každé $x \in D(f)$, pre ktoré je $f(x) \in D(g)$. Tento fakt zapisujeme symbolom $h = g \circ f$.

Funkcia f^{-1} je *inverzná funkcia* k funkcii f , ak $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = i$, kde i je *identická funkcia*, t.j. $i(x) = x$. Inverzné funkcie majú zamenené svoje obory ($D(f) = H(f^{-1})$ a $H(f) = D(f^{-1})$) a ich grafy sú súmerné podľa priamky $y = x$.

Postupnosť je funkcia, ktorej definičný obor je množina prirodzených čísel N . Postupnosti na rozdiel od funkcií zvykneme označovať symbolikou a_n , čo znamená n -tý člen postupnosti, t.j. hodnotu v čísle n .

Poznáme dva významné typy postupností.

Aritmetická postupnosť (AP) je taká postupnosť, v ktorej je **rozdiel** dvoch susedných členov **konštantný**, t.j. pre každé prirodzené číslo n platí $a_{n+1} - a_n = d$, kde konštantu d voláme *diferenciou* AP. AP je preto úplne určená dvoma veličinami: prvým členom a_1 a diferenciou d . Pre všeobecný člen AP platí

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

a pre súčet prvých n členov AP platí

$$S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d.$$

Geometrická postupnosť (GP) je taká postupnosť, v ktorej je **podiel** dvoch susedných členov **konštantný**, t.j. pre každé prirodzené číslo n platí $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, kde konštantu q voláme

kvocientom GP. GP je preto úplne určená dvoma veličinami: prvým členom a_1 a kvocientom q . Pre všeobecný člen GP platí

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

a pre súčet prvých n členov GP platí

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Ak $q = 1$, potom $S_n = na_1$.

V prípade, ak $|q| < 1$, existuje aj *súčet nekonečného geometrického radu*, t.j. súčet **všetkých** (nekonečne veľa) členov GP

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots = \frac{a_1}{1 - q}.$$

Príklad 1:

Nájďme definičný obor a obor hodnôt funkcií

a) $y = \sqrt{x^2 - 7},$

b) $y = \frac{2x + 3}{6 - x - x^2},$

c) $y = \log(\operatorname{tg} x).$

Riešenie:

a) Funkcia je definovaná pre všetky hodnoty premennej x , pre ktoré je výraz pod odmocninou nezáporný, t.j. $x^2 - 7 \geq 0$. Riešením nerovnice je množina

$$D = (-\infty, -\sqrt{7}) \cup (\sqrt{7}, \infty).$$

b) Funkcia je definovaná pre všetky hodnoty premennej x , pre ktoré je výraz v menovateli rôzny od nuly, t.j. $D = \mathbb{R} - \{-3, 2\}$.

c) Funkcia je definovaná pre všetky hodnoty premennej x , pre ktoré je výraz, ktorý logaritmuje kladný, t.j. $\operatorname{tg} x > 0$. Riešením tejto nerovnosti je množina

$$D = \left(k\pi, (2k+1)\frac{\pi}{2} \right), k \in \mathbb{Z}.$$

Príklad 2:

Ukážeme, ako súvisia grafy funkcií $y = 3f(x)$, $y = f(x) + 3$, $y = f(3x)$, $y = f(x + 3)$ s grafom funkcie $y = f(x)$.

Riešenie:

Každý bod grafu funkcie $y = 3f(x)$ vznikne z bodu $[x, f(x)]$ grafu funkcie f tak, že trojnásobne „natiahneme“ jeho súradnicu y . Preto celý graf funkcie $y = 3f(x)$ je trojnásobným „natiahnutím“ grafu funkcie $y = f(x)$.

Každý bod grafu funkcie $y = f(x) + 3$ vznikne z bodu $[x, f(x)]$ grafu funkcie f tak, že posunieme jeho súradnicu y o dĺžku 3 v kladnom smere osi y .

Bod $[a, b]$ leží na grafe funkcie $y = f(3x)$ práve vtedy, ak platí $b = f(3a)$ a to je práve vtedy, ak bod $[3a, b]$ leží na grafe funkcie $y = f(x)$. Graf funkcie $y = f(3x)$ vznikne teda z grafu funkcie $y = f(x)$ jeho trojnásobným „stlačením“ v smere osi x .

Bod $[a, b]$ leží na grafe funkcie $y = f(x + 3)$ práve vtedy, ak platí $b = f(a + 3)$ a to je práve vtedy, ak bod $[a + 3, b]$ leží na grafe funkcie $y = f(x)$. Graf funkcie $y = f(x + 3)$ vznikne teda z grafu funkcie $y = f(x)$ jeho posunutím o dĺžku 3 doľava v smere osi x .

Príklad 3:

Určíme vlastnosti funkcií

a) $y = 3x^2 - 5x + 2$,

b) $y = \frac{2x + 4}{x - 3}$,

c) $y = \sqrt{\cos x}$,

d) $y = 2^{\frac{1}{x}}$.

Riešenie:

a) Funkcia $y = 3x^2 - 5x + 2$ má definičný obor množinu $\mathbb{R}$. Jej grafom je parabola otočená nahor, pretínajúca os x v bodoch $\left[\frac{2}{3}, 0\right]$ a $[1, 0]$. Jej vrchol je v bode $\left[\frac{5}{6}, -\frac{1}{12}\right]$. Preto jej obor hodnôt je množina $\langle -1/12, \infty \rangle$, je zdola ohraničená, zhora neohraničená, klesá v intervale $\left(-\infty, \frac{5}{6}\right)$, rastie v intervale $\left(\frac{5}{6}, \infty\right)$. Nie je prostá, párna ani nepárna, ani periodická.

b) Upravíme danú funkciu delením na tvar $y = 2 + \frac{10}{x - 3}$. Jej definičný obor je množina

$\mathbb{R} - \{3\}$, obor hodnôt množina $\mathbb{R} - \{2\}$, lebo výraz $\frac{10}{x - 3}$ nadobúda všetky možné

reálne hodnoty okrem 2. Preto je funkcia neohraničená. Ako vidieť z výrazu $\frac{10}{x-3}$, funkcia je klesajúca v oboch intervaloch $(-\infty, 3)$ a $(3, \infty)$. Funkcia je prostá. Poslednú vlastnosť dokážeme takto: Nech $\frac{2x_1+4}{x_1-3} = \frac{2x_2+4}{x_2-3}$. Potom aj $2 + \frac{10}{x_1-3} = 2 + \frac{10}{x_2-3}$, teda aj $\frac{10}{x_1-3} = \frac{10}{x_2-3}$ a po úprave aj $x_1 = x_2$. Teda ak $x_1 \neq x_2$, tak $f(x_1) \neq f(x_2)$.

- c) Definičný obor funkcie $y = \sqrt{\cos x}$ je množina všetkých hodnôt x , pre ktoré je $\cos x \geq 0$, teda zjednotenie množín $\left\langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right\rangle$, kde $k \in \mathbb{Z}$. Obor hodnôt je $\langle 0, 1 \rangle$, teda funkcia je ohraničená. Rastie v každom z intervalov $\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, 0 + 2k\pi \right)$ a klesá v každom z intervalov $\left(0 + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right)$, kde $k \in \mathbb{Z}$. Funkcia je párna a periodická s periódou 2π .

- d) Funkcia $y = 2^{\frac{1}{x}}$ má definičný obor $\mathbb{R} - \{0\}$, obor hodnôt množinu všetkých kladných čísel s výnimkou čísla 1 (pretože funkcia $\frac{1}{x}$ nikdy nenadobudne hodnotu 0). Preto je funkcia zdola ohraničená a zhora neohraničená. V oboch intervaloch svojho definičného oboru $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$ je funkcia klesajúca. Funkcia je prostá, nie je párna ani nepárna, ani periodická.

Príklad 4:

Nájdeme zložené funkcie $f \circ g$ a $g \circ f$, ak

a) $f(x) = x^2 - 3x + 1$, $g(x) = \cos x$,

b) $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$,

c) $f(x) = 3^x$, $g(x) = \frac{1}{3x+1}$.

Riešenie:

a) $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(\cos x) = \cos^2 x - 3\cos x + 1$.

$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x^2 - 3x + 1) = \cos(x^2 - 3x + 1)$.

$$b) \quad f \circ g(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x, \text{ kde } x \in \langle 0, \infty \rangle.$$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x^2) = \sqrt{x^2} = |x|, \text{ kde } x \in \mathbb{R}.$$

$$c) \quad f \circ g(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{1}{3x+1}\right) = 3^{\frac{1}{3x+1}}.$$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(3^x) = \frac{1}{3 \cdot 3^x + 1} = \frac{1}{3^{x+1} + 1}.$$

Príklad 5:

Dané funkcie rozložíme na jednoduché zložky.

$$a) \quad f(x) = (2x^3 - 3x + 11)^5,$$

$$b) \quad g(x) = \log\left(\sqrt{\frac{4}{2x+3}}\right),$$

$$c) \quad h(x) = \cos(2^{-x}\pi).$$

Riešenie:

Rozklad funkcií na zložky naznačíme graficky postupnosťou jednotlivých zložiek.

$$a) \quad x \xrightarrow{2x^3-3x+11} 2x^3 - 3x + 11 \xrightarrow{(\quad)^5} (2x^3 - 3x + 11)^5.$$

$$b) \quad x \xrightarrow{2x+3} 2x + 3 \xrightarrow{\frac{4}{(\quad)}} \frac{4}{2x+3} \xrightarrow{\sqrt{(\quad)}} \sqrt{\frac{4}{2x+3}} \xrightarrow{\log(\quad)} \log\left(\sqrt{\frac{4}{2x+3}}\right).$$

$$c) \quad x \xrightarrow{-x} -x \xrightarrow{2^{(\quad)}} 2^{-x} \xrightarrow{\pi(\quad)} 2^{-x}\pi \xrightarrow{\cos(\quad)} \cos(2^{-x}\pi).$$

Príklad 6:

Nájdeme inverznú funkciu k funkcii

$$a) \quad y = \frac{5x-2}{3-4x},$$

$$b) \quad y = \sqrt{5-3x},$$

$$c) \quad y = \log(2x+1)$$

Riešenie:

a) Nájsť inverznú funkciu znamená vyjadriť premennú x v závislosti od premennej y

z rovnice definujúcej pôvodnú funkciu. Rovnicu $y = \frac{5x-2}{3-4x}$ vynásobíme výrazom

$(3-4x)$, po roznásobení dostávame $3y - 4xy = 5x - 2$. Všetky výrazy obsahujúce x

v poslednej rovnici združíme na ľavej strane a všetky ostatné výrazy na pravej strane,

$$(-4y-5)x = -3y-2. \text{ Po úprave a vydelení dostávame } x = \frac{3y+2}{4y+5}.$$

- b) Najskôr si všimnime, že obor hodnôt danej funkcie (a preto aj definičný obor inverznej funkcie) je interval $y \in \langle 0, \infty \rangle$. Vyjadríme premennú x v závislosti od y . Po umocnení rovnice $y = \sqrt{5-3x}$ na druhú a ďalších úpravách dostávame vyjadrenie inverznej

$$\text{funkcie } x = \frac{5-y^2}{3}, \text{ kde } y \in \langle 0, \infty \rangle.$$

- c) Vyjadríme premennú x v závislosti od y . Umocníme číslo 10 na obidve strany rovnice $y = \log(2x+1)$. Dostaneme $10^y = 10^{\log(2x+1)} = (2x+1)$. Posledná rovnosť vyplýva z toho, že funkcie $\log x$ a 10^x sú navzájom inverzné. Po úprave dostávame vyjadrenie inverznej

$$\text{funkcie } x = \frac{10^y - 1}{2}.$$

Príklad 7:

Nájdime prvý člen a diferenciu aritmetickej postupnosti, ak je dané

a) $a_7 = 13, a_3 = 5,$

b) $S_n = \frac{n^2 - 125n}{4},$

c) $a_5 = 13, S_5 = 35.$

Riešenie:

- a) Platí $a_7 = a_1 + 6d, a_3 = a_1 + 2d$. Preto $a_7 - a_3 = 4d = 8$ a $d = 2$. Dosadením do vzťahu pre a_3 dostaneme $a_3 = 5 = a_1 + 2d = a_1 + 4$ a $a_1 = 1$.

- b) Vzťah $S_n = \frac{n^2 - 125n}{4}$ platí pre každé prirodzené číslo n . Pre $n = 1$ dostaneme

$$S_1 = a_1 = \frac{1^2 - 125}{4} = -31. \text{ Pre } n = 2 \text{ potom je}$$

$$S_2 = a_1 + a_2 = a_1 + (a_1 + d) = 2 \cdot (-31) + d = -62 + d = \frac{2^2 - 125 \cdot 2}{4} = -61,5. \text{ Preto } d = \frac{1}{2}.$$

Overíme ešte vzorec pre n -tý čiastočný súčet aritmetickej postupnosti

$$S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = -31n + \frac{n^2 - n}{4} = \frac{n^2 - 125n}{4}.$$

c) Z daných údajov vyjadríme dve rovnice pre neznáme a_1 a d . $a_5 = a_1 + 4d = 13$ a

$$S_5 = 5a_1 + 10d = 35. \text{ Riešením tejto sústavy sú hodnoty } a_1 = 1 \text{ a } d = 3.$$

Príklad 8:

Nájdime prvý člen a kvocient geometrickej postupnosti, ak je dané

a) $a_2 = 3, a_5 = -24,$

b) $S_2 = 3S_1, a_3 = -12,$

c) $S_n = \frac{(-1)^n}{2^{n-1}} - 2.$

Riešenie:

a) $a_5 = -24 = a_1 q^4$ a $a_2 = 3 = a_1 q$. Vydelením týchto rovníc dostávame $q^3 = -8, q = -2$.

Dosadením do druhej rovnice dostaneme $a_1 = -\frac{3}{2}$.

b) $S_2 = a_1 + a_1 q = a_1(1+q) = 3S_1 = 3a_1$. Z toho vyplýva, že $q = 2$. Ďalej

$$a_3 = -12 = a_1 q^2 = 4a_1 \text{ a preto } a_1 = -3.$$

c) Pre $n = 1$ dostávame $a_1 = S_1 = -3$ a pre $n = 2$ dostávame

$$S_2 = a_1 + a_2 = a_1(1+q) = -3(1+q) = -\frac{3}{2}. \text{ Z toho vyplýva, že } q = -\frac{1}{2}. \text{ Overíme ešte}$$

vzorec pre výpočet n -tého čiastočného súčtu geometrickej postupnosti.

$$S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q} = -3 \frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = -3 \frac{1-\frac{(-1)^n}{2^n}}{\frac{3}{2}} = -2 \left(1 - \frac{(-1)^n}{2^n}\right) = \frac{(-1)^n}{2^{n-1}} - 2$$

Príklad 9:

Nájdime súčty nekonečných geometrických radov

a) $-\frac{1}{3} + \frac{2}{9} - \frac{4}{27} + \frac{8}{81} - \dots,$

b) $\frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 + 2 + \dots,$

c) $\cos^2 x + \cos^2 x \sin^2 x + \cos^2 x \sin^4 x + \cos^2 x \sin^6 x + \dots$

Riešenie:

a) Podiel dvoch susedných členov radu je $-\frac{2}{3}$, preto sa jedná o geometrický rad s týmto

kvocientom. Podmienka konvergenzie radu $\left|-\frac{2}{3}\right| < 1$ je splnená, preto hľadaný súčet je

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{-\frac{1}{3}}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)} = -\frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{3}} = -\frac{1}{5}.$$

b) Podiel dvoch susedných členov radu je 2, kvocient radu teda nespĺňa podmienku konvergenzie $|2| > 1$, preto daný rad diverguje a jeho súčet neexistuje.

c) Podiel dvoch susedných členov radu je $\sin^2 x$. Kvocient geometrického radu spĺňa podmienku konvergenzie pre všetky hodnoty x , pre ktoré je $\sin^2 x < 1$, t.j.

$$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}. \text{ Pre tieto hodnoty platí } S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\cos^2 x}{1-\sin^2 x} = 1.$$

Cvičenia

1. Nájdite definičné obory funkcií:

a) $y = \frac{5x+1}{x^2+4x-5},$

b) $y = \sqrt{3x+7},$

c) $y = \sqrt{12-x-x^2},$

d) $y = \log \frac{2x+3}{x-4},$

e) $y = 2^{\frac{1}{x}},$

f) $y = \cotg\left(2x + \frac{\pi}{3}\right).$

Výsledky: a) $\mathbf{R} - \{-5, 1\}$, b) $\langle -7/3, \infty \rangle$, c) $\langle -4, 3 \rangle$, d) $(-\infty, -3/2) \cup (4, \infty)$,

e) $\mathbf{R} - \{0\}$, f) $\mathbf{R} - \left\{\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\right\}.$

2. Nájdite obory hodnôt funkcií:

a) $y = 10 + 3x - x^2,$

b) $y = 7 - 3x,$

c) $y = \sqrt{4 - x^2}$,

d) $y = 5 - 3^{2x}$,

e) $y = 4 - 3\cos(2x - \pi)$,

f) $y = \frac{2}{3x + 5}$.

Výsledky: a) $\left(-\infty, \frac{49}{4}\right)$, b) R , c) $\langle 0, 2 \rangle$, d) $(-\infty, 5)$, e) $\langle 1, 7 \rangle$, f) $R - \{0\}$.

3. Zistite ohraničenosť funkcií:

a) $y = x^2 + x + 1$,

b) $y = 1 - 2^{-x}$,

c) $y = \operatorname{tg}(3x)$,

d) $y = \sqrt{3x + 2}$,

e) $y = \sin(100x)$,

f) $y = \operatorname{cotg}(\sin x)$,

g) $y = \operatorname{tg}(\sin x)$.

Výsledky: a) zdola ohraničená b) zhora ohraničená c) neohraničená d) zdola ohraničená
e) ohraničená f) neohraničená g) ohraničená.

4. Zistite, či nasledujúce funkcie sú prosté:

a) $y = 11 - 7x$,

b) $y = \frac{2x + 3}{4 - 5x}$,

c) $y = 4 - |3x + 5|$,

d) $y = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$,

e) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{3x}$,

f) $y = \log x^2$.

Výsledky: a) áno b) áno c) nie d) nie e) áno. f) nie.

5. Zistite, či daná funkcia je periodická (ak áno, určite jej periódu):

a) $y = 2x^2 + 4x - 1$,

b) $y = \operatorname{tg}(\pi - 2x)$,

c) $y = \frac{\cotg x}{x},$

d) $y = \log(\sin x),$

e) $y = \sqrt{\cos\left(\frac{x}{3}\right)},$

f) $y = \cos(\sqrt{x}).$

Výsledky: a) nie b) áno, $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ c) nie d) áno, (2π) e) áno, (6π) f) nie.

6. Zistite, či daná funkcie je párna alebo nepárna:

a) $y = |x| + 7,$

b) $y = x^5 + 6x^3,$

c) $y = \operatorname{tg}(3x),$

d) $y = \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right),$

e) $y = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right),$

f) $y = \frac{1}{(x-1)(x+1)}.$

Výsledky: a) párna b) nepárna c) nepárna d) nie e) nepárna f) párna.

7. Napíšte zložené funkcie $f \circ g(x)$ a $g \circ f(x)$:

a) $f(x) = -2x, \quad g(x) = \frac{3}{x},$

b) $f(x) = (x+1)^2, \quad g(x) = \sqrt{x-1},$

c) $f(x) = (x+1)^2, \quad g(x) = \sqrt{x} - 1,$

d) $f(x) = \sin x, \quad g(x) = 5x,$

e) $f(x) = 3^x, \quad g(x) = \sqrt[3]{x},$

f) $f(x) = \log(2x+3), \quad g(x) = x^2.$

Výsledky:

a) $f \circ g(x) = -\frac{6}{x}, \quad g \circ f(x) = -\frac{3}{2x},$

b) $f \circ g(x) = (\sqrt{x-1}+1)^2, \quad g \circ f(x) = \sqrt{(x+1)^2-1},$

c) $f \circ g(x) = |x+1|-1, \quad g \circ f(x) = x,$

$$d) f \circ g(x) = \sin 5x, \quad g \circ f(x) = 5 \sin x,$$

$$e) f \circ g(x) = 3^{\sqrt[3]{x}}, \quad g \circ f(x) = \sqrt[3]{3^x},$$

$$f) f \circ g(x) = \log(2x^2 + 3), \quad g \circ f(x) = \log^2(2x + 3).$$

8. Dané funkcie rozložte na zložky:

$$a) y = (3x + 1)^4,$$

$$b) y = \operatorname{tg} \sqrt{x},$$

$$c) y = 5^{\frac{1}{x+2}},$$

$$d) y = 2^{2^x},$$

$$e) y = \sin^2 x,$$

$$f) y = \sin x^2.$$

Výsledky:

$$a) x \longrightarrow 3x + 1 \xrightarrow{(\quad)^4} (3x + 1)^4,$$

$$b) x \xrightarrow{\sqrt{\quad}} \sqrt{x} \xrightarrow{\operatorname{tg}(\quad)} \operatorname{tg} \sqrt{x},$$

$$c) x \longrightarrow \frac{1}{x+2} \xrightarrow{5(\quad)} 5^{\frac{1}{x+2}},$$

$$d) x \xrightarrow{2(\quad)} 2^x \xrightarrow{2(\quad)} 2^{2^x},$$

$$e) x \xrightarrow{\sin} \sin x \xrightarrow{(\quad)^2} \sin^2 x,$$

$$f) x \xrightarrow{(\quad)^2} x^2 \xrightarrow{\sin} \sin x^2.$$

9. Nájdite inverznú funkciu k funkcii f (ak existuje):

$$a) f(x) = \sqrt{4 - 3x},$$

$$b) f(x) = \frac{2 - 3x}{5x + 1},$$

$$c) f(x) = 4 - |x|,$$

$$d) f(x) = \log(7 - 3x),$$

$$e) f(x) = x^3 + x^2,$$

$$f) f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{-5x+1}.$$

Výsledky: a) $f^{-1}(x) = \frac{4-x^2}{3}$, b) $f^{-1}(x) = \frac{2-x}{5x+3}$, c) f^{-1} neexistuje, d) $f^{-1}(x) = \frac{7-10^x}{3}$,

e) f^{-1} neexistuje, f) $f^{-1}(x) = \frac{\log_4 x + 1}{5}$.

10. Nájdite a_1, d, a_n, S_n pre aritmetickú postupnosť, v ktorej poznáte:

a) $a_3 = -1, a_5 = 1$,

b) $a_2 = 4, S_2 = 2$,

c) $a_7 = -4, S_7 = 14$,

d) $S_3 = 3, S_6 = 9$.

Výsledky:

a) $a_1 = -3, d = 1, a_n = n - 4, S_n = \frac{n(n-1)}{2} - 3n$,

b) $a_1 = -2, d = 6, a_n = 6n - 8, S_n = 3n^2 - 5n$,

c) $a_1 = 8, d = -2, a_n = 10 - 2n, S_n = 9n - n^2$,

d) $a_1 = \frac{2}{3}, d = \frac{1}{3}, a_n = \frac{1}{3}n + \frac{1}{3}, S_n = \frac{n^2 + 3n}{6}$.

11. Nájdite a_1, q, a_n, S_n pre geometrickú postupnosť, v ktorej poznáte:

a) $a_2 = \frac{1}{2}, a_4 = 2$,

b) $a_3 = \frac{2}{9}, a_6 = -\frac{2}{243}$,

c) $a_5 = -3, S_1 = -\frac{1}{27}$,

d) $S_2 = 6, S_3 = 31$.

Výsledky:

a) $a_1 = \frac{1}{4}, q = 2, a_n = 2^{n-3}, S_n = \frac{2^n - 1}{4}$,

b) $a_1 = 2, q = -\frac{1}{3}, a_n = \frac{2 \cdot (-1)^{n-1}}{3^{n-1}}, S_n = 3 \cdot \frac{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n}{2}$,

c) $a_1 = -\frac{1}{27}, q = -3, a_n = \frac{(-3)^{n-1}}{-27}, S_n = \frac{(-3)^n - 1}{108}$,

d) $a_1 = 1, q = 5, a_n = 5^{n-1}, S_n = \frac{5^n - 1}{4}$.

12. Nájdite súčet geometrického radu (ak existuje):

a) $a_1 = -4, q = -\frac{1}{2},$

b) $a_1 = 16, a_5 = 4,$

c) $a_5 = -6, a_6 = 8,$

d) $S_n = \frac{-2(4^n - 3^n)}{4^{n-2}}.$

Výsledky: a) $S = -\frac{8}{3}$ b) $S = \frac{16\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$ c) S neexistuje d) $S = -32.$

5. Exponenciálne a logaritmické funkcie

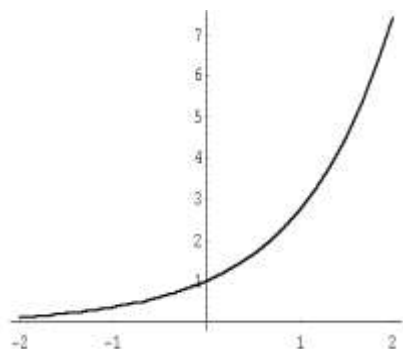
5.1 Exponenciálna funkcia

Definícia:

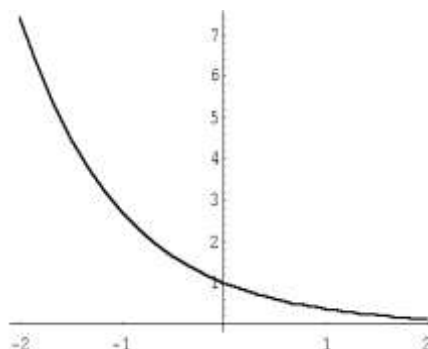
Nech $a > 0, a \neq 1$. Exponenciálnou funkciou so základom a nazývame funkciu v tvare

$$f: y = a^x, \text{ kde } x \in \mathbb{R}.$$

Definičným oborom exponenciálnej funkcie sú všetky reálne čísla, oborom hodnôt je interval $(0, \infty)$. Grafom exponenciálnej funkcie je exponenciálna krivka. Pretože $a > 0, a \neq 1$, existujú dva druhy exponenciálnej funkcie, líšiace sa grafmi a monotónnosťou (pozri obr.).



Graf funkcie $y = a^x, a > 1$



Graf funkcie $y = a^x, 0 < a < 1$

Vlastnosti exponenciálnej funkcie:

- Exponenciálna funkcia nie je párna, nie je nepárna.
- Exponenciálna funkcia je prostá.
- Exponenciálna funkcia je zdola ohraničená, nie je ohraničená zhora, a teda nie je ohraničená.
- K exponenciálnej funkcii existuje inverzná funkcia (je ňou logaritmická funkcia)
- Ak $a > 0$, tak exponenciálna funkcia je rastúca,
ak $0 < a < 1$, tak exponenciálna funkcia je klesajúca.
- Exponenciálna funkcia nie je periodická.
- Graf funkcie prechádza bodom $[0, 1]$ a celý leží nad osou x .

5.2 Exponenciálne rovnice a nerovnice

Exponenciálnymi rovnicami (nerovnicami) nazývame tie rovnice (nerovnice), v ktorých sa neznáma vyskytuje v exponente. Základom riešenia rovníc je využitie faktu, že exponenciálna funkcia je prostá. Zvyčajne rovnicu pomocou viet pre počítanie s mocninami (spomenuté sú v kapitole o výrazoch) upravíme na tvar $a^{f(x)} = a^{g(x)}$. Táto rovnica je potom v

dôsledku prostoty exponenciálnej funkcie ekvivalentná s rovnicou $f(x) = g(x)$. Toto už zvyčajne nie je exponenciálna rovnica a ďalej ju doriešime známymi spôsobmi. Pri riešení rovníc i nerovníc sa ďalej často využíva substitúcia a úprava rovnice (nerovnice) na kvadratickú rovnicu. V prípade, že nevieme rovnicu upraviť tak, aby boli na oboch stranách mocniny s rovnakým základom, rovnicu „zlogaritmujeme“ (obe strany rovnice napíšeme v tvare logaritmov s rovnakým vhodným základom). Pokiaľ pri úpravách rovnice nerobíme neekvivalentné úpravy, skúška nie je nutná (napriek tomu ju odporúčame aspoň ako kontrolu numerickej správnosti výpočtu).

Pri riešení exponenciálnych nerovníc sa využíva to, že exponenciálne funkcie sú rastúce (pre základ $a > 1$) alebo klesajúce (pre základ $a \in (0,1)$).

Ak máme nerovnicu v tvare $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ (alebo v tvare $a^{f(x)} < a^{g(x)}$), potom:

pre $a > 1$ platí $f(x) > g(x)$ [$f(x) < g(x)$],

pre $0 < a < 1$ platí $f(x) < g(x)$ [$f(x) > g(x)$].

Po vyriešení nerovnice nasleduje skúška, ktorá sa zvyčajne robí obrátením postupu riešenia.

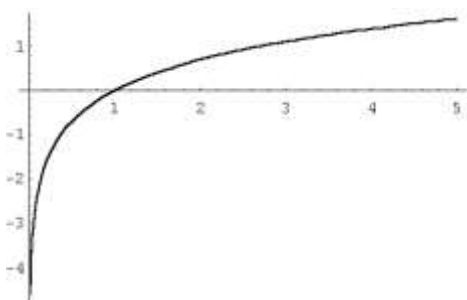
5.3 Logaritmická funkcia

Definícia:

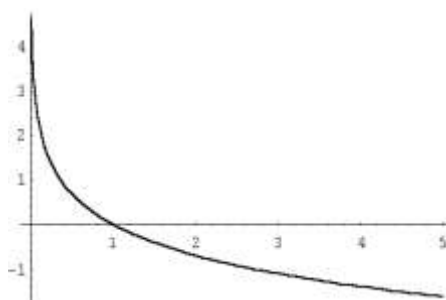
Nech $a > 0$, $a \neq 1$. Logaritmickou funkciou so základom a nazývame funkciu v tvare:

$$f: y = \log_a x, \text{ kde } x \in (0, \infty).$$

Definičným oborom logaritmickej funkcie sú kladné reálne čísla, oborom hodnôt sú všetky reálne čísla. Grafom logaritmickej funkcie je logaritmická krivka. Pretože $a > 0$, $a \neq 1$, existujú dva druhy logaritmickej funkcie, líšiace sa grafmi a monotónnosťou (pozri obr.)



Graf funkcie $y = \log_a x$, $a > 1$



Graf funkcie $y = \log_a x$, $0 < a < 1$

Vlastnosti logaritmickej funkcie:

- Logaritmická funkcia nie je párna, nie je nepárna.
- Logaritmická funkcia je prostá.
- Logaritmická funkcia nie je zdola ohraničená, nie je ohraničená zhora, a teda nie je ohraničená.

- K logaritmickej funkcii existuje inverzná funkcia (je ňou exponenciálna funkcia)
- Ak $a > 0$, tak logaritmická funkcia je rastúca,
ak $0 < a < 1$, tak logaritmická funkcia je klesajúca.
- Logaritmická funkcia nie je periodická.
- Graf prechádza bodom $[1, 0]$ a celý leží napravo od osi y .

Ak $a = e$, hovoríme o *prírodzenej* logaritmickej funkcii a namiesto $y = \log_e x$ píšeme $y = \ln x$. Takisto používame pojem prírodzený logaritmus x alebo logaritmus naturalis x .

Ak $a = 10$, hovoríme o *dekadickej* logaritmickej funkcii a namiesto $y = \log_{10} x$ píšeme $y = \log x$. Takisto používame pojem dekadický logaritmus x .

5.4 Logaritmické rovnice a nerovnice

Logaritmickými rovnicami nazývame také rovnice, kde neznáma vystupuje v argumente logaritmu. Logaritmické rovnice riešime zvyčajne tak, že ich upravíme na tvar:

$$\log_a f(x) = \log_a g(x), \text{ kde } a > 0, a \neq 1, f(x) > 0, g(x) > 0.$$

Využitím prostoty logaritmickej funkcie potom dostaneme rovnicu

$$f(x) = g(x).$$

Toto už zvyčajne nie je logaritmická rovnica a doriešime ju klasickými metódami. (Tejto úprave sa tiež hovorí „odlogaritmovanie“ rovnice).

Logaritmické rovnice sa však zriedka nachádzajú v základnom tvare, ktorý je použitý v uvedenej vete. Preto ich na tento tvar upravujeme použitím pravidiel pre počítanie s logaritmi:

Nech $u, v, a \in (0, \infty)$, $a \neq 1$, $r \in \mathbb{R}$. Potom platí:

$$\log_a (u \cdot v) = \log_a u + \log_a v,$$

$$\log_a \left(\frac{u}{v} \right) = \log_a u - \log_a v,$$

$$\log_a u^r = r \cdot \log_a u,$$

$$a^{\log_a u} = u.$$

Nech $a, b, u \in (0, \infty)$, $a \neq 1$, $b \neq 1$. Potom platí:

$$\log_a u = \frac{\log_b u}{\log_b a}.$$

Odlogaritmovanie rovnice je však dôsledkovou úpravou a preto je potrebné zobrať do úvahy pri stanovení koreňov logaritmickej rovnice jej definičný obor, alebo (čo býva niekedy jednoduchšie) vykonať skúšku správnosti.

Podobne ako pri exponenciálnych rovniciach sa používa vo vhodných prípadoch pri riešení substitúcia, ktorou si môžeme logaritmickú rovnicu previesť napríklad na kvadratickú rovnicu a zjednodušiť si tak situáciu. Po zistení koreňov novej rovnice sa potom pri návrate k pôvodnej neznámej riešia jednoduchšie logaritmické rovnice.

Postup pri riešení logaritmických nerovnic je podobný ako pri riešení exponenciálnych nerovnic. Rovnakým spôsobom sa pri nich využíva monotónnosť logaritmickej funkcie. Skúška sa zvyčajne robí obrátením postupu riešenia.

Príklad 1:

Riešte rovnicu v R : $16 \cdot \sqrt{(0,25)^{5-\frac{x}{4}}} = 2^{\sqrt{x+1}}$.

Riešenie:

Rovnicu upravíme tak, aby v nej vystupovali len mocniny so základom 2 :

$$2^4 \cdot \sqrt{(2^{-2})^{5-\frac{x}{4}}} = 2^{\sqrt{x+1}},$$

$$2^4 \cdot \sqrt{2^{-10+\frac{x}{2}}} = 2^{\sqrt{x+1}},$$

$$2^4 \cdot 2^{\frac{-10+\frac{x}{2}}{2}} = 2^{\sqrt{x+1}},$$

$$2^{4+\frac{-10+\frac{x}{2}}{2}} = 2^{\sqrt{x+1}}.$$

Keďže exponenciálna funkcia je prostá, tak platí:

$$\frac{8-10+\frac{x}{2}}{2} = \sqrt{x+1},$$

$$-2 + \frac{x}{2} = 2\sqrt{x+1},$$

$$-4 + x = 4\sqrt{x+1},$$

$$16 - 8x + x^2 = 16x + 16,$$

$$x^2 - 24x = 0.$$

Táto rovnica má korene $x_1 = 0$ a $x_2 = 24$.

Skúška:

$$L(x_1) = 16\sqrt{(0,25)^5} = 16\sqrt{2^{-10}} = 16 \cdot 2^{-5} = 2^4 \cdot 2^{-5} = 2^{-1} = \frac{1}{2},$$

$$P(x_1) = 2^{\sqrt{1}} = 2.$$

Číslo 0 teda nie je koreňom pôvodnej rovnice.

$$L(x_2) = 16\sqrt{(0,25)^{5-6}} = 16\sqrt{(2^{-2})^{-1}} = 16\sqrt{2^2} = 16 \cdot 2 = 32,$$

$$P(x_2) = 2^{\sqrt{24+1}} = 2^5 = 32.$$

Výsledok: $K = \{24\}$.

Príklad 2:

Riešte rovnicu v R : $3 \cdot (4^x + 9^{x+1}) = 2 \cdot \left(3 \cdot 4^{x+1} - \frac{9^{x+1}}{4} \right)$.

Riešenie:

Pomocou viet pre počítanie s mocninami upravujeme obe strany rovnice tak, aby boli vyjadrené v tvare mocnín s rovnakým základom:

$$3 \cdot (4^x + 9 \cdot 9^x) = 2 \cdot \left(3 \cdot 4 \cdot 4^x - \frac{9 \cdot 9^x}{4} \right),$$

$$3 \cdot 4^x + 27 \cdot 9^x = 24 \cdot 4^x - \frac{9}{2} \cdot 9^x,$$

$$9^x \cdot \left(27 + \frac{9}{2} \right) = 4^x \cdot (24 - 3),$$

$$9^x \cdot \frac{63}{2} = 4^x \cdot 21,$$

$$\left(\frac{9}{4} \right)^x = \frac{2}{3},$$

$$\left(\frac{3}{2} \right)^{2x} = \left(\frac{3}{2} \right)^{-1}.$$

Odtiaľ potom:

$$2x = -1,$$

$$x = -\frac{1}{2}.$$

Skúška:

$$L\left(-\frac{1}{2}\right) = 3 \cdot \left(4^{-\frac{1}{2}} + 9^{\frac{1}{2}} \right) = 3 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{4}} + \sqrt{9} \right) = \frac{21}{2},$$

$$P\left(-\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \left(3 \cdot 4^{\frac{1}{2}} - \frac{9^{\frac{1}{2}}}{4} \right) = 2 \cdot \left(3 \cdot 2 - \frac{3}{4} \right) = \frac{21}{2}.$$

Výsledok: $K = \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$.

Príklad 3:

Riešte rovnicu v R : $2^x \cdot \left(\frac{1}{8} \right)^{1-x} + 2^{1-x} \cdot \left(\frac{1}{8} \right)^x = 1$.

Riešenie:

Všetky mocniny vyjadríme ako mocniny so základom 2 :

$$2^x \cdot 2^{-3(1-x)} + 2^{1-x} \cdot 2^{-3x} = 1,$$

$$2^{x-3+3x} + 2^{1-x-3x} = 1,$$

$$2^{4x-3} + 2^{1-4x} = 1,$$

$$\frac{2^{4x}}{2^3} + \frac{2}{2^{4x}} = 1.$$

Odstránime zlomky vynásobením rovnice spoločným menovateľom:

$$2^{8x} + 2^4 = 2^3 \cdot 2^{4x},$$

$$2^{8x} - 8 \cdot 2^{4x} + 16 = 0.$$

Zavedením substitúcie $2^{4x} = y$ dostaneme kvadratickú rovnicu $y^2 - 8y + 16 = 0$. Jej koreňom je číslo $y = 4$. Vrátime sa k pôvodnej neznámej x a riešime rovnicu:

$$2^{4x} = 4,$$

$$2^{4x} = 2^2.$$

teda $4x = 2$, t.j. $x = \frac{1}{2}$.

Skúška:

$$L\left(\frac{1}{2}\right) = 2^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{-\frac{3}{2}} + 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{-\frac{3}{2}} = 2^{-1} + 2^{-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = 1.$$

$$\text{Výsledok: } K = \left\{\frac{1}{2}\right\}.$$

Príklad 4:

Riešte rovnicu v R : $6^{1+x} + 6^{1-x} = 13$.

Riešenie:

Po použití vety o násobení mocnín s rovnakým základom dostaneme rovnicu:

$$6 \cdot 6^x + \frac{6}{6^x} = 13.$$

Z rovnice odstránime zlomok a po úprave dostaneme:

$$6 \cdot 6^{2x} - 13 \cdot 6^x + 6 = 0.$$

Po substitúcii $y = 6^x$ dostaneme kvadratickú rovnicu $6y^2 - 13y + 6 = 0$ s koreňmi

$y_1 = \frac{3}{2}; y_2 = \frac{2}{3}$. Vrátime sa k neznámej x a riešime rovnice

$$6^x = \frac{3}{2} \quad \text{a} \quad 6^x = \frac{2}{3}$$

Obe rovnice sa nedajú upraviť tak, aby ich obe strany boli v tvare mocniny s rovnakým základom, preto ich musíme logaritmovať a použitím viet o počítaní s logaritmi vyjadríme x :

$$\begin{aligned} x \cdot \log 6 &= \log 3 - \log 2 & x \cdot \log 6 &= \log 2 - \log 3 \\ x_1 &= \frac{\log 3 - \log 2}{\log 6} & x_2 &= \frac{\log 2 - \log 3}{\log 6} \end{aligned}$$

Skúška (urobíme skúšku pre číslo x_1 , skúška pre číslo x_2 sa robí analogicky):

$$\begin{aligned} L(x_1) &= 6^{1 + \frac{\log 3 - \log 2}{\log 6}} + 6^{1 - \frac{\log 3 - \log 2}{\log 6}} = 6^{\frac{\log 6 + \log 3 - \log 2}{\log 6}} + 6^{\frac{\log 6 - \log 3 + \log 2}{\log 6}} = 6^{\frac{\log(3 \cdot 2) + \log 3 - \log 2}{\log 6}} + \\ &+ 6^{\frac{\log(3 \cdot 2) - \log 3 + \log 2}{\log 6}} = 6^{\frac{\log 3 + \log 2 + \log 3 - \log 2}{\log 6}} + 6^{\frac{\log 3 + \log 2 - \log 3 + \log 2}{\log 6}} = 6^{\frac{2 \log 3}{\log 6}} + 6^{\frac{2 \log 2}{\log 6}}. \end{aligned}$$

Označme ďalej

$$a = 6^{\frac{2 \log 3}{\log 6}}, \quad b = 6^{\frac{2 \log 2}{\log 6}}.$$

Potom

$$\log a = \frac{2 \log 3}{\log 6} \cdot \log 6, \quad \log b = \frac{2 \log 2}{\log 6} \cdot \log 6.$$

teda

$$\log a = \log 3^2, \quad \log b = \log 2^2$$

a po odlogaritmovaní

$$a = 9, \quad b = 4.$$

To znamená, že $L(x_1) = 9 + 4 = 13$, $P(x_1) = 13$.

$$\text{Výsledok: } K = \left\{ \frac{\log 3 - \log 2}{\log 6}, \frac{\log 2 - \log 3}{\log 6} \right\}.$$

Príklad 5:

Riešte rovnicu v R : $2 \cdot 4^x - 7 \cdot 2^x + 3 = 0$

Riešenie:

Po zavedení substitúcie $y = 2^x$, (teda $4^x = 2^{2x} = (2^x)^2 = y^2$) dostaneme kvadratickú rovnicu

$$2y^2 - 7y + 3 = 0$$

s koreňmi $y_1 = 3$ a $y_2 = \frac{1}{2}$.

Po návrate k pôvodnej premennej x dostaneme dve exponenciálne rovnice:

$$2^x = 3 \text{ alebo } 2^x = \frac{1}{2}.$$

Prvú rovnicu zlogaritmujeme:

$$\begin{aligned}\log 2^x &= \log 3, \\ x \log 2 &= \log 3, \\ x_1 &= \frac{\log 3}{\log 2}.\end{aligned}$$

Z druhej rovnice:

$$\begin{aligned}2^x &= 2^{-1}, \\ x_2 &= -1.\end{aligned}$$

Skúška:

$$L(x_1) = 2 \cdot 4^{\frac{\log 3}{\log 2}} - 7 \cdot 2^{\frac{\log 3}{\log 2}} + 3 = 2 \cdot 4^{\frac{\log_4 3}{\log_4 2}} - 7 \cdot 2^{\frac{\log_2 3}{\log_2 2}} + 3 = 2 \cdot 3^2 - 7 \cdot 3 + 3 = 0 = P(x_1).$$

Pri úpravách v dosadení do výrazu na ľavej strane boli použité vzťahy:

$$\log 3 = \frac{\log_4 3}{\log_4 10} \text{ a } \log 2 = \frac{\log_4 2}{\log_4 10}, \text{ teda } \frac{\log 3}{\log 2} = \frac{\frac{\log_4 3}{\log_4 10}}{\frac{\log_4 2}{\log_4 10}} = \frac{\log_4 3}{\log_4 2} = \frac{\log_4 3}{\frac{1}{2}} = 2 \log_4 3$$

$$\log 3 = \frac{\log_2 3}{\log_2 10} \text{ a } \log 2 = \frac{\log_2 2}{\log_2 10}, \text{ teda } \frac{\log 3}{\log 2} = \frac{\frac{\log_2 3}{\log_2 10}}{\frac{\log_2 2}{\log_2 10}} = \frac{\log_2 3}{\log_2 2} = \frac{\log_2 3}{1} = \log_2 3$$

Potom:

$$\begin{aligned}4^{\frac{\log 3}{\log 2}} &= 4^{2 \log_4 3} = 4^{\log_4 3^2} = 3^2 \\ 2^{\frac{\log 3}{\log 2}} &= 2^{\log_2 3} = 3\end{aligned}$$

$$L(x_2) = 2 \cdot 4^{-1} - 7 \cdot 2^{-1} + 3 = \frac{1}{2} - \frac{7}{2} + 3 = 0,$$

$$P(x_2) = 0.$$

$$\text{Výsledok: } K = \left\{ -1, \frac{\log 3}{\log 2} \right\}$$

Príklad 6:

Riešte rovnicu v R : $\sqrt{3^{4x} + 1} + \sqrt{2 \cdot 3^{4x} + 3} = 5.$

Riešenie:

Rovnicu zbavíme odmocnín postupným umocňovaním a upravíme:

$$\begin{aligned}
3^{4x} + 1 + 2\sqrt{(3^{4x} + 1)(2 \cdot 3^{4x} + 3)} + 2 \cdot 3^{4x} + 3 &= 25, \\
2\sqrt{(3^{4x} + 1)(2 \cdot 3^{4x} + 3)} &= 21 - 3 \cdot 3^{4x}, \\
8 \cdot 3^{8x} + 20 \cdot 3^{4x} + 12 &= 441 - 126 \cdot 3^{4x} + 9 \cdot 3^{8x}, \\
3^{8x} - 146 \cdot 3^{4x} + 429 &= 0.
\end{aligned}$$

Zavedieme substitúciu $y = 3^{4x}$ a dostaneme kvadratickú rovnicu

$$y^2 - 146y + 429 = 0 \text{ s koreňmi } y_1 = 143 \text{ a } y_2 = 3.$$

Vrátíme sa k pôvodnej neznámej x a riešime dve exponenciálne rovnice:

$$3^{4x} = 143 \quad \text{alebo} \quad 3^{4x} = 3.$$

Prvú rovnicu zlogaritmujeme:

$$4x \cdot \log 3 = \log 143,$$

$$x_1 = \frac{\log 143}{4 \log 3},$$

$$x_1 = \frac{\log 143}{\log 81}.$$

Z druhej rovnice platí $4x = 1$, teda $x_2 = \frac{1}{4}$.

Skúška:

Pre číslo $x_1 = \frac{\log 143}{\log 81}$ platí, že $3^{4x} = 143$. Potom

$$L(x_1) = \sqrt{143+1} + \sqrt{2 \cdot 143+3} = \sqrt{144} + \sqrt{289} = 12 + 17 = 29,$$

$$P(x_1) = 5.$$

Číslo x_1 teda nie je koreňom pôvodnej rovnice.

Pre číslo $x_2 = \frac{1}{4}$ platí, že $3^{4x} = 3$. Potom

$$L(x_2) = \sqrt{3+1} + \sqrt{2 \cdot 3+3} = \sqrt{4} + \sqrt{9} = 2 + 3 = 5,$$

$$P(x_2) = 5.$$

$$\text{Výsledok: } K = \left\{ \frac{1}{4} \right\}.$$

Príklad 7:

Riešte rovnicu v R : $4^{-x} - 3^{-x-\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{2}-x} - 2^{-2x-1}$.

Riešenie:

Rovnicu pomocou viet o počítaní s mocninami upravíme na tvar:

$$\begin{aligned}
2^{-2x} - 3^{-x} \cdot 3^{-\frac{1}{2}} &= 3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{-x} - 2^{-2x} \cdot 2^{-1}, \\
2^{-2x} + \frac{1}{2} \cdot 2^{-2x} &= 3^{-x} \cdot 3^{\frac{1}{2}} + 3^{-x} \cdot 3^{-\frac{1}{2}}, \\
\frac{3}{2} \cdot 2^{-2x} &= 3^{-x} \cdot \left(\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right), \\
\frac{3}{2} \cdot 2^{-2x} &= 3^{-x} \cdot \frac{4}{\sqrt{3}}, \\
\frac{2^{-2x}}{(\sqrt{3})^{-2x}} &= \frac{2^3}{(\sqrt{3})^3}, \\
\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{-2x} &= \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^3, \\
-2x &= 3, \\
x &= -\frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Skúška:

$$\begin{aligned}
L\left(-\frac{3}{2}\right) &= 4^{\frac{3}{2}} - 3^{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}} = 4 \cdot 2 - 3 = 5, \\
P\left(-\frac{3}{2}\right) &= 3^{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}} - 2^{3-1} = 3^2 - 2^2 = 5.
\end{aligned}$$

Výsledok: $K = \left\{ -\frac{3}{2} \right\}.$

Príklad 8:

Riešte rovnicu v Z : $x^x - x^{-x} = 3(1 + x^{-x})$.

Riešenie:

Definičným oborom tejto rovnice je množina $Z = \{0\}$. Rovnicu upravíme na tvar

$$x^x - \frac{1}{x^x} = 3\left(1 + \frac{1}{x^x}\right),$$

a po zavedení substitúcie $y = x^x$ dostaneme

$$y - \frac{1}{y} = 3\left(1 + \frac{1}{y}\right),$$

a po úprave máme kvadratickú rovnicu

$$y^2 - 3y - 4 = 0$$

s koreňmi $y_1 = 4$ a $y_2 = -1$.

Pre pôvodnú neznámu x teda platí:

$$x^x = 4 \quad \text{alebo} \quad x^x = -1,$$

čo sa dá zapísať v tvare

$$x^x = 2^2 \quad \text{alebo} \quad x^x = (-1)^{-1}$$

teda

$$x_1 = 2, \quad x_2 = -1.$$

Skúška:

$$L(2) = 2^2 - 2^{-2} = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4},$$

$$P(2) = 3(1 + 2^{-2}) = 3\left(1 + \frac{1}{4}\right) = 3\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{15}{4}.$$

$$L(-1) = (-1)^{-1} + (-1)^1 = \frac{1}{-1} - (-1) = 0,$$

$$P(-1) = 3(1 + (-1)^1) = 3(1 - 1) = 0.$$

Výsledok: $K = \{-1, 2\}$.

Príklad 9:

Riešte nerovnicu v R : $3 \cdot 7^x + 5 - 2 \cdot 7^{-x} < 0$.

Riešenie:

Celú nerovnicu vynásobíme výrazom 7^x , ktorý je vždy kladný:

$$3 \cdot (7^x)^2 + 5 \cdot 7^x - 2 < 0.$$

Zavedieme substitúciu $y = 7^x$. Dostaneme kvadratickú nerovnicu $3y^2 + 5y - 2 < 0$, ktorú riešime niektorým zo známych spôsobov. Výsledkom je sústava nerovníc

$$-2 < 7^x < \frac{1}{3},$$

teda

$$0 < 7^x < \frac{1}{3}.$$

Prvá nerovnosť platí vždy, druhú nerovnosť zlogaritmujeme. Keďže dekadický logaritmus je rastúca funkcia, z druhej nerovnice potom vyplýva:

$$\begin{aligned}\log 7^x &< \log \frac{1}{3}, \\ x \log 7 &< \log 1 - \log 3, \\ x \log 7 &< -\log 3, \\ x &< -\frac{\log 3}{\log 7}.\end{aligned}$$

Skúška (urobí sa obrátením uvedeného postupu):

Ukážeme, že pre každé reálne číslo x , spĺňajúce podmienku $x < -\frac{\log 3}{\log 7}$ platí, že

$$3 \cdot 7^x + 5 - 2 \cdot 7^{-x} < 0.$$

Ak $x < -\frac{\log 3}{\log 7}$, potom :

$$\begin{aligned}x &< \frac{0 - \log 3}{\log 7}, \\ x &< \frac{\log 1 - \log 3}{\log 7}, \\ x \log 7 &< \log \frac{1}{3}, \\ \log 7^x &< \log \frac{1}{3}, \\ 7^x &< \frac{1}{3}, \\ -2 &< 7^x < \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Ak $-2 < 7^x$ a $7^x < \frac{1}{3}$, potom $(7^x + 2) > 0$ a $\left(7^x - \frac{1}{3}\right) < 0$. Pre súčin týchto dvojčlenov platí:

$$(7^x + 2) \cdot \left(7^x - \frac{1}{3}\right) < 0.$$

Po vynásobení nerovnice 3 a roznásobením zátvoriek dostaneme:

$$\begin{aligned}3(7^x + 2)\left(7^x - \frac{1}{3}\right) &< 0, \\ 3(7^x)^2 + 5 \cdot 7^x - 2 &< 0.\end{aligned}$$

Nerovnicu vydělíme kladným číslom 7^x a dostávame pôvodnú nerovnicu

$$3 \cdot 7^x + 5 - 2 \cdot 7^{-x} < 0.$$

Výsledok: $K = \left(-\infty, -\frac{\log 3}{\log 7}\right)$.

Príklad 10:

Riešte rovnicu v R : $\log(x^3 + 1) - \log 7 - \log x = \log(x + 1) - \log 6$.

Riešenie:

Použijeme vety pre počítanie s logaritmami a upravíme rovnicu do tvaru:

$$\log \frac{x^3 + 1}{7x} = \log \frac{x + 1}{6}.$$

Keďže logaritmická funkcia je prostá, tak platí:

$$\begin{aligned} \frac{x^3 + 1}{7x} &= \frac{x + 1}{6}, \\ 6(x^3 + 1) &= 7x(x + 1), \\ 6(x + 1)(x^2 - x + 1) - 7x(x + 1) &= 0, \\ (x + 1)(6x^2 - 13x + 6) &= 0. \end{aligned}$$

Táto rovnica platí práve vtedy, keď:

$$x + 1 = 0 \quad \text{alebo} \quad 6x^2 - 13x + 6 = 0.$$

Z prvej rovnice je $x_1 = -1$, z druhej potom $x_2 = \frac{3}{2}$, $x_3 = \frac{2}{3}$.

Skúška:

$$L(-1) = \log(-1 + 1) - \log 7 - \log(-1).$$

Logaritmus je ale definovaný len pre kladné čísla a preto číslo x_1 nemôže byť koreňom pôvodnej rovnice.

$$L\left(\frac{3}{2}\right) = \log \frac{35}{8} - \log 7 - \log \frac{3}{2} = \log \left(\frac{35}{8} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{2}{3} \right) = \log \frac{5}{12},$$

$$P\left(\frac{3}{2}\right) = \log \left(\frac{3}{2} + 1 \right) - \log 6 = \log \left(\frac{5}{2} \cdot \frac{1}{6} \right) = \log \frac{5}{12}.$$

$$L\left(\frac{2}{3}\right) = \log \frac{35}{27} - \log 7 - \log \frac{2}{3} = \log \left(\frac{35}{27} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{3}{2} \right) = \log \frac{5}{18},$$

$$P\left(\frac{2}{3}\right) = \log \frac{5}{3} - \log 6 = \log \left(\frac{5}{3} \cdot \frac{1}{6} \right) = \log \frac{5}{18}.$$

$$\text{Výsledok: } K = \left\{ \frac{2}{3}, \frac{3}{2} \right\}.$$

Príklad 11:

Riešte rovnicu v R : $\frac{1}{5 - \log x} + \frac{2}{1 + \log x} = 1$.

Riešenie:

Rovnicu vynásobíme spoločným menovateľom a použijeme vety o počítaní s logaritmi:

$$\begin{aligned} 1 + \log x + 2 \cdot (5 - \log x) &= (5 - \log x) \cdot (1 + \log x), \\ 1 + \log x + 10 - 2 \log x &= 5 - \log x + 5 \log x - \log^2 x, \\ \log^2 x - 5 \log x + 6 &= 0. \end{aligned}$$

Po zavedení substitúcie $y = \log x$ dostávame kvadratickú rovnicu $y^2 - 5y + 6 = 0$ s koreňmi

$$y_1 = 2 \text{ a } y_2 = 3.$$

Po návrate k pôvodnej premennej x dostávame rovnice $\log x = 2$ a $\log x = 3$, ktoré majú korene $x_1 = 10^2$ a $x_2 = 10^3$.

Skúška:

$$\begin{aligned} L(10^2) &= \frac{1}{5 - \log 10^2} + \frac{2}{1 + \log 10^2} = \frac{1}{5 - 2} + \frac{2}{1 + 2} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1, \\ P(10^2) &= 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L(10^3) &= \frac{1}{5 - \log 10^3} + \frac{2}{1 + \log 10^3} = \frac{1}{5 - 3} + \frac{2}{1 + 3} = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} = 1, \\ P(10^3) &= 1. \end{aligned}$$

$$\text{Výsledok: } K = \{10^2, 10^3\}.$$

Príklad 12:

$$\text{Riešte rovnicu v } R: \left(\log_{\sqrt{2}} x \right)^2 + 3 \log_2 x + \log_{\frac{1}{2}} x = 2.$$

Riešenie:

Všetky logaritmy na ľavej strane rovnice upravíme tak, aby mali spoločný základ, číslo 2:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\log_2 x}{\log_2 \sqrt{2}} \right)^2 + 3 \log_2 x + \frac{\log_2 x}{\log_2 \frac{1}{2}} &= 2, \\ \frac{(\log_2 x)^2}{\frac{1}{4}} + 3 \log_2 x + \frac{\log_2 x}{-1} &= 2, \\ 4(\log_2 x)^2 + 3 \log_2 x - \log_2 x - 2 &= 0, \\ 2(\log_2 x)^2 + \log_2 x - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Po zavedení substitúcie $y = \log_2 x$ dostávame kvadratickú rovnicu $2y^2 + y - 1 = 0$, ktorá má

$$\text{korene } y_1 = -1 \text{ a } y_2 = \frac{1}{2}.$$

Po návrate k pôvodnej premennej x dostávame rovnice:

$$\log_2 x = -1 \quad \text{a} \quad \log_2 x = \frac{1}{2}.$$

Z nich potom platí:

$$x_1 = \frac{1}{2} \quad \text{a} \quad x_2 = \sqrt{2}.$$

Skúška:

$$L\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\log_{\sqrt{2}} \frac{1}{2}\right)^2 + 3\log_2 \frac{1}{2} + \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = (-2)^2 + 3(-1) + 1 = 2,$$

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = 2.$$

$$L(\sqrt{2}) = \left(\log_{\sqrt{2}} \sqrt{2}\right)^2 + 3\log_2 \sqrt{2} + \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{2} = 1 + \frac{3}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) = 2,$$

$$P(\sqrt{2}) = 2.$$

$$\text{Výsledok: } K = \left\{\frac{1}{2}, \sqrt{2}\right\}.$$

Príklad 13:

$$\text{Riešte v } R: \log x^{2\log \sqrt{x}} + \log \frac{1}{x^2} = 3.$$

Riešenie:

Použitím viet pre počítanie s logaritmami môžeme rovnicu upraviť na tvar:

$$2\log \sqrt{x} \cdot \log x - 2\log x = 3,$$

$$2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \log x \cdot \log x - 2\log x = 3,$$

$$\log^2 x - 2\log x - 3 = 0.$$

Po zavedení substitúcie $y = \log x$ dostaneme kvadratickú rovnicu $y^2 - 2y - 3 = 0$, ktorá má korene $y_1 = 3$ a $y_2 = -1$. Po návrate k pôvodnej premennej x dostaneme rovnicu:

$$\log x = 3 \quad \text{alebo} \quad \log x = -1,$$

odkiaľ

$$x = 10^3 \quad \text{alebo} \quad x = 10^{-1}.$$

Skúška:

$$L(10^3) = \log(10^3)^{2\log \sqrt{10^3}} + \log \frac{1}{(10^3)^2} = \log(10^3)^{2 \cdot \frac{3}{2}} + \log(10^{-6}) = \log 10^9 + \log 10^{-6} = 3,$$

$$P(10^3) = 3.$$

$$L(10^{-1}) = \log(10^{-1})^{2\log\sqrt{10^{-1}}} + \log \frac{1}{(10^{-1})^2} = \log(10^{-1})^{2 \cdot (-\frac{1}{2})} + \log(10^2) = \log 10 + \log 10^2 = 3,$$

$$P(10^{-1}) = 3.$$

$$\text{Výsledok: } K = \{10^{-1}, 10^3\}.$$

Príklad 14:

$$\text{Riešte rovnicu v } R: (\log_x 3) \cdot \left(\log_{\frac{x}{3}} 3 \right) = \log_{\frac{x^2}{9}} 3.$$

Riešenie:

Pomocou príslušnej vety prevedieme všetky logaritmy na rovnaký základ (v tomto prípade na základ 10, teda dekadické logaritmy):

$$\frac{\log 3}{\log x} \cdot \frac{\log 3}{\log \frac{x}{3}} = \frac{\log 3}{\log \frac{x^2}{9}}.$$

Rovnicu podelíme $\log 3$ a po použití viet pre počítanie s logaritmami upravíme na tvar:

$$\begin{aligned} \frac{\log 3}{\log x(\log x - \log 3)} &= \frac{1}{\log x^2 - \log 9}, \\ \frac{\log x(\log x - \log 3)}{\log 3} &= \log x^2 - \log 3^2, \\ \frac{\log x(\log x - \log 3)}{\log 3} - 2(\log x - \log 3) &= 0, \\ (\log x - \log 3) \left(\frac{\log x}{\log 3} - 2 \right) &= 0. \end{aligned}$$

Z toho potom $\log x - \log 3 = 0$, teda $\log x = \log 3$ a teda $x_1 = 3$, alebo $\frac{\log x}{\log 3} - 2 = 0$ a teda

$$\log x = 2\log 3, \text{ a tak } x_2 = 9.$$

Skúška:

Číslo 3 nemôže byť koreňom, lebo po dosadení do rovnice dostaneme logaritmy s neprípustným základom.

$$L(9) = \log_9 3 \cdot \log_3 3 = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2},$$

$$P(9) = \log_9 3 = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Výsledok: } K = \{9\}.$$

Príklad 15:

Riešte nerovnicu v R : $x^{1+\log_3 x} > 81x$.

Riešenie:

Na ľavej strane nerovnice je mocnina s reálnym exponentom a tá je definovaná len pre kladné čísla. Teda $81x$ je kladné číslo a ľavá strana nerovnice, ktorá je väčšia ako x musí byť teda tiež kladné číslo. Na oboch stranách nerovnice sú kladné čísla, môžeme ju teda zlogaritmoviť. Funkcia $y = \log_3 x$ je rastúca a teda platí:

$$\begin{aligned}\log_3 x^{1+\log_3 x} &> \log_3(81x), \\ (1 + \log_3 x)\log_3 x &> \log_3 81 + \log_3 x, \\ (\log_3 x)^2 + \log_3 x &> 4 + \log_3 x, \\ (\log_3 x)^2 &> 4.\end{aligned}$$

Použijeme substitúciu $y = \log_3 x$ a dostaneme nerovnicu $y^2 > 4$, ktorej riešenie je $|y| > 2$.

Po návrate k pôvodnej premennej x dostaneme:

$$\log_3 x < -2 \quad \text{alebo} \quad \log_3 x > 2,$$

teda

$$\log_3 x < \log_3 \frac{1}{9} \quad \text{alebo} \quad \log_3 x > \log_3 9.$$

Keďže $y = \log_3 x$ je rastúca funkcia, platí:

$$x < \frac{1}{9} \quad \text{alebo} \quad x > 9.$$

Po zohľadnení podmienky zo začiatku príkladu ($x > 0$), teda platí:

$$x \in \left(0, \frac{1}{9}\right) \cup (9, \infty).$$

Skúška:

Skúška pri nerovniciach sa robí zvyčajne obrátením postupu riešenia.

Výsledok: $K = \left(0, \frac{1}{9}\right) \cup (9, \infty).$

Cvičenia**Exponenciálne rovnice a nerovnice**

1. Riešte v R :

$$2^{x+7}\sqrt[7]{4^{13-x}} = 1024$$

Výsledok: $K = \{-2\}$

2. Riešte v R :

$$2^x \cdot 5^x = 0,1 \cdot (10^{x-1})^5$$

$$\text{Výsledok: } K = \left\{ \frac{3}{2} \right\}$$

3. Riešte v R :

$$\text{a) } 3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} = \frac{40}{3},$$

$$\text{b) } 3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} = 40,$$

$$\text{c) } 3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} = 80.$$

$$\text{Výsledky: a) } K = \{-1\}, \text{ b) } K = \{0\}, \text{ c) } K = \left\{ \frac{\log 2}{\log 3} \right\}.$$

4. Riešte v R :

$$5 \cdot 2^{x+2} - 6 \cdot 3^{x+2} = 3^{x+3} + 2 \cdot 2^{x+1}$$

$$\text{Výsledok: } K = \{-4\}$$

5. Riešte v R :

$$\sqrt{5^{3x} + 19} - \sqrt{5^{3x} - 4} = 1$$

$$\text{Výsledok: } K = \{1\}$$

6. Riešte v R :

$$\frac{2^x \cdot 3^{x+3}}{6^{7-x} \cdot 8^{x-4}} = 9^{x-2}$$

$$\text{Výsledok: } K = \{5\}$$

7. Riešte v R :

$$\sqrt[x]{81} + \frac{27}{\sqrt[x]{81}} = 12$$

$$\text{Výsledok: } K = \{2, 4\}$$

8. Riešte v R :

$$81^x - 9^{x+1} = 3 \log_3 \frac{1}{27} + 3^{2x}$$

$$\text{Výsledok: } K = \{0, 1\}$$

9. Riešte v R :

$$2^{4x+1} + 8 = 17 \cdot 2^{2x}$$

$$\text{Výsledok: } K = \left\{ -\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right\}$$

10. Riešte v R :

$$3^{2x-1} + 3^x - 3^0 = 3^{-1}$$

Výsledok: $K = \{0\}$

11. Riešte v R :

$$2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3} = 3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3}$$

Výsledok: $K = \left\{ \frac{\log \frac{8}{3}}{\log \frac{2}{3}} \right\}$

12. Riešte v R :

$$4^{x-1} - 17 \cdot 2^{x-3} + 1 = 0$$

Výsledok: $K = \{-1, 3\}$

13. Riešte v R :

$$3 \cdot 4^x + 2 \cdot 25^x = 5 \cdot 10^x$$

Výsledok: $K = \left\{ 0, \frac{\log \frac{2}{3}}{\log \frac{2}{5}} \right\}$

14. Riešte v R :

$$4^x - 2 \cdot 6^x = 9^{x+\frac{1}{2}}$$

Výsledok: $K = \left\{ \frac{\log 3}{\log \frac{2}{3}} \right\}$

15. Riešte v R :

$$9^{\frac{1}{x}} + 12^{\frac{1}{x}} = 16^{\frac{1}{x}}$$

Výsledok: $K = \left\{ \frac{\log \frac{4}{3}}{\log \frac{1+\sqrt{5}}{2}} \right\}$

16. Riešte v R :

$$2^x - 5 \cdot 4^{x-2} > 1 - 2^{x-1}$$

Výsledok: $K = \left(\log_2 \frac{4}{5}, 2 \right)$

17. Riešte v R :

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+3} - \left(\frac{1}{3}\right)^{x+\frac{1}{2}} > \left(\frac{1}{3}\right)^{x+\frac{3}{2}} - \left(\frac{1}{4}\right)^{x+1}$$

Výsledok: $K = \left(-\infty, -\frac{5}{2}\right)$

18. Riešte v R :

$$\frac{1}{3^{x+1}-1} > \frac{1}{1-3^x}$$

Výsledok: $K = (-1, -\log_3 2) \cup (0, \infty)$

Logaritmické rovnice a nerovnice

1. Riešte v R :

$$\log(x+3)^2 - \log[4 \cdot (x+1)^2] = 0$$

Výsledok: $K = \left\{-\frac{5}{3}, 1\right\}$

2. Riešte v R :

$$\log(x+1) + \log(x-1) - \log(x-2) = \log 8$$

Výsledok: $K = \{3, 5\}$

3. Riešte v R :

$$\log(2x-3) + \log 3x = \log(8x-12)$$

Výsledok: $K = \emptyset$

4. Riešte v R :

$$\frac{\log(x-3)}{\log(x^2-21)} = \frac{1}{2}$$

Výsledok: $K = \{5\}$

5. Riešte v R :

$$\log(x+6) - 2 = \frac{1}{2} \cdot \log(2x-3) - \log 25$$

Výsledok: $K = \{6, 14\}$

6. Riešte v R :

$$\frac{1}{2} \cdot \log \sqrt{x^2 + x - 5} = \log x + \log \frac{1}{x}$$

Výsledok: $K = \{2\}$

7. Riešte v R :

$$\log \sqrt{3x-5} + \log \sqrt{7x-3} = 1 + \log \frac{\sqrt{11}}{10}$$

Výsledok: $K = \{2\}$

8. Riešte v R :

$$\frac{\log(2x+4)}{\log|4x-7|} = 2$$

Výsledok: $K = \left\{\frac{9}{8}, \frac{5}{2}\right\}$

9. Riešte v R :

$$\log[(x-1)(x+3)] + \log \frac{x+3}{x-1} = 0$$

Výsledok: $K = \{-4\}$

10. Riešte v R :

$$\frac{1}{12} \cdot \log^2 x = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \cdot \log x$$

Výsledok: $K = \{10^{-4}, 10\}$

11. Riešte v R :

$$\left[2 \cdot (\log x)^3 - \frac{3}{2} \log x\right] \cdot \log x = \log \sqrt{10}$$

Výsledok: $K = \{10^{-1}, 10\}$

12. Riešte v R :

$$\log_6 \left[\log_5 \left(\log_4 x + \frac{4}{\log_4 x} \right) \right] = 0$$

Výsledok: $K = \{4, 256\}$

13. Riešte v R :

$$\log_2(x^2 - 3) - \log_2(6x - 10) + 1 = 0$$

Výsledok: $K = \{2\}$

14. Riešte v R :

$$\log_8 \sqrt{3-x} + \log_8 \sqrt{2x+18} = 1$$

Výsledok: $K = \{-5, -1\}$

15. Riešte v R :

$$\log_4(x+2) - \log_4(x-2) = 2 - \log_4 8$$

$$\text{Výsledok: } K = \{6\}$$

16. Riešte v R :

$$\left(\frac{\log_2 4x}{\log_2 0.5}\right)^2 + \log_2\left(\frac{x^2}{8}\right) = 8$$

$$\text{Výsledok: } K = \{2^{-7}, 2\}$$

17. Riešte v R :

$$x^{3+4\log x} - 10x^6 = 0$$

$$\text{Výsledok: } K = \left\{10^{\frac{1}{4}}, 10\right\}$$

18. Riešte v Z :

$$x^{2\log x + 1} = 100x^{\log x}$$

$$\text{Výsledok: } K = \{10\}$$

19. Riešte v N :

$$3 \cdot 2^{\log x} + 8 \cdot 2^{-\log x} = 5 \cdot \left(1 + 10 \log \sqrt[5]{100}\right)$$

$$\text{Výsledok: } K = \{10^3\}$$

20. Riešte v R :

$$\log(2^{2\log x}) - \log(2^{3\sqrt{\log x}}) = 2 \log 2$$

$$\text{Výsledok: } K = \{10^4\}$$

21. Riešte v R :

$$4^{(\log_9 x^2)} - 1 = 4^{(1+\log_9 x)} - 4^{(-1+\log_9 x)}$$

$$\text{Výsledok: } K = \{9\}$$

22. Riešte v R :

$$\log_{(x-1)} 9 = 2 + \log_{(x-1)} 3$$

$$\text{Výsledok: } K = \{1 + \sqrt{3}\}$$

23. Riešte v R :

$$\log_x 2 \cdot \log_{\frac{x}{16}} 2 = \log_{\frac{x}{64}} 2$$

$$\text{Výsledok: } K = \{4, 8\}$$

24. Riešte v R :

$$\log_x 10 \cdot \log_{0,1x} 10 = \log_{0,01x^2} 10$$

Výsledok: $K = \{100\}$

25. Riešte v R :

$$\log_3(x+4) < \log_3(x^2 + 2x - 2)$$

Výsledok: $K = (-4, -3) \cup (2, \infty)$

26. Riešte v R :

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x+7}{2x+3}\right) < \log_{\frac{1}{2}}(5-x)$$

Výsledok: $K = \left(-\frac{3}{2}, -1\right) \cup (4, 5)$

27. Riešte v R :

$$\log_{0,5}(x^2 - x - 12) > \log_{0,5}(x+3)$$

Výsledok: $K = (4, 5)$

28. Riešte v R :

$$\sqrt{\log_2 \frac{3x-2}{1-x}} < 1$$

Výsledok: $K = \left(\frac{3}{4}, \frac{4}{5}\right)$

6. Goniometrické funkcie

6.1 Goniometrické funkcie

Každému reálnemu číslu x je priradený práve jeden orientovaný uhol JON kde O je začiatok súradnicovej sústavy a bod $J[1, 0]$. Veľkosť orientovaného uhla môžeme vyjadriť v stupňovej alebo oblúkovej miere. Jednotkou oblúkovej miery je radián. Prevod pre stupňovú a oblúkovú mieru vyjadruje vzťah:

$$\frac{\alpha^\circ}{180^\circ} = \frac{\alpha}{\pi},$$

napríklad nech $\alpha^\circ = 30^\circ$. Vyjadrime v radiánoch: $\frac{30^\circ}{180^\circ} = \frac{\alpha}{\pi} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$.

Každé $x \in \mathbb{R}$ (v rad) môžeme vyjadriť v tvare $x = x' + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, pričom $x' \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

Koncové rameno ON orientovaného uhla JON pretína jednotkovú kružnicu v bode $M[a, b]$, ktorý je jediný.

Kosínus je funkcia, ktorá každému reálnemu číslu x priradí číslo a (1. súradnica bodu M), označujeme $a = \cos x$.

Sínus je funkcia, ktorá každému reálnemu číslu x priradí číslo b (2. súradnica bodu M), označujeme $b = \sin x$.

Tangens je funkcia, ktorá každému reálnemu číslu x , pre ktoré $\cos x \neq 0$, priradí číslo

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Kotangens je funkcia, ktorá každému reálnemu číslu x , pre ktoré $\sin x \neq 0$, priradí číslo

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Niektoré vlastnosti goniometrických funkcií zapíšeme do tabuľky:

$k \in \mathbb{Z}$	$y = \sin x$	$y = \cos x$	$y = \operatorname{tg} x$	$y = \operatorname{cotg} x$
$D(f)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$x \neq (2k+1)\pi/2$	$x \neq k\pi$
$H(f)$	$\langle -1, 1 \rangle$	$\langle -1, 1 \rangle$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Párnosť, Nepárnosť	Nepárna	Párna	Nepárna	Nepárna
Periodičnosť	2π	2π	π	π

Rastie na	$\langle -\pi/2 + 2k\pi, \pi/2 + 2k\pi \rangle$	$\langle -\pi + 2k\pi, 2k\pi \rangle$	$\langle -\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi \rangle$	Nie je rastúca
Klesá na	$\langle \pi/2 + 2k\pi, 3\pi/2 + 2k\pi \rangle$	$\langle 2k\pi, \pi + 2k\pi \rangle$	Nie je klesajúca	$\langle k\pi, \pi + k\pi \rangle$
$f(x) = 0$	$x = k\pi$	$x = (2k+1)\pi/2$	$x = k\pi$	$x = (2k+1)\pi/2$

Interval $(0, 2\pi)$ rozdeľujeme na štyri kvadranty, v nich sa mení kladnosť, zápornosť hodnôt goniometrických funkcií:

$f(x)$	$(0, \pi/2)$	$(\pi/2, \pi)$	$(\pi, 3\pi/2)$	$(3\pi/2, 2\pi)$
$\sin x$	+	+	-	-
$\cos x$	+	-	-	+
$\operatorname{tg} x$	+	-	+	-
$\operatorname{cotg} x$	+	-	+	-

Ak $x' \in (0, \pi/2)$, potom uhol x v 2. kvadrante vyjadríme ako $x = \pi - x'$,
 x v 3. kvadrante vyjadríme ako $x = \pi + x'$,
 x v 4. kvadrante vyjadríme ako $x = 2\pi - x'$.

Pre každé $x \in (0, \pi/2)$ platí :

$$\sin x = \sin(\pi - x) = -\sin(\pi + x) = -\sin(2\pi - x),$$

$$\cos x = -\cos(\pi - x) = -\cos(\pi + x) = \cos(2\pi - x),$$

$$\operatorname{tg} x = -\operatorname{tg}(\pi - x) = \operatorname{tg}(\pi + x) = -\operatorname{tg}(2\pi - x),$$

$$\operatorname{cotg} x = -\operatorname{cotg}(\pi - x) = \operatorname{cotg}(\pi + x) = -\operatorname{cotg}(2\pi - x).$$

Pri riešení úloh často potrebujeme hodnoty goniometrických funkcií pre nasledujúce uhly:

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1

$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Nie je def.	0	Nie je def.	0
$\operatorname{cotg} x$	Nie je def.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	Nie je def.	0	Nie je def.

Ďalej uvedieme vzťahy medzi goniometrickými funkciami, ktoré najčastejšie využívame pri riešení rôznych úloh:

$$\forall x \in R : \sin^2 x + \cos^2 x = 1,$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x,$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x,$$

$$\sin(\pi/2 - x) = \cos x,$$

$$\cos(\pi/2 - x) = \sin x.$$

$$\forall x \in R, x \neq k \frac{\pi}{2}, k \in Z : \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x = 1,$$

$$\left| \sin \frac{x}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}, \quad \left| \cos \frac{x}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}.$$

$$\text{Pre prípustné hodnoty } x, y \in R : \operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x},$$

$$\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}.$$

$$\forall x, y \in R : \sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y,$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y,$$

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2},$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2},$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2},$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}.$$

6.2 Goniometrické rovnice a nerovnice

Goniometrické rovnice (nerovnice) obsahujú neznámu v argumente jednej alebo viacerých goniometrických funkcií. Základné goniometrické rovnice sú typu: $\sin x = a$, $\cos x = a$,

$\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{cotg} x = a$, kde $a \in R$.

Riešime ich na základe vlastností jednotlivých goniometrických funkcií. Rovnice (nerovnice), ktoré obsahujú viac goniometrických funkcií sa snažíme upraviť tak, aby sme dostali jednu, prípadne viac základných goniometrických rovníc (nerovnic), využívajúc vzťahy pre goniometrické funkcie, súčtové vzorce, vzorce pre polovičný, dvojnásobný argument a podobne. Úpravami sa snažíme získať rovnice (nerovnice), ktoré vieme riešiť. Napríklad kvadratickú rovnicu, rovnicu v súčinovom alebo v podielovom tvare.

Príklad 1:

Vyjadrite $\sin \frac{7\pi}{6}$ a $\operatorname{tg}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$.

Riešenie: Uhol $\frac{7\pi}{6}$ je z 3. kvadrantu, $\sin \frac{7\pi}{6} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$.

Uhol $\frac{3\pi}{4}$ je z 2. kvadrantu, funkcia tangens je nepárna,

$$\operatorname{tg}\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\operatorname{tg} \frac{3\pi}{4} = -\operatorname{tg}\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\left(-\operatorname{tg} \frac{\pi}{4}\right) = -(-1) = 1.$$

Príklad 2:

Vyjadrite $\sin\left(-\frac{22\pi}{3}\right)$.

Riešenie: $\frac{22\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} + 6\pi$, funkcia sinus je nepárna, s periodou 2π ,

$$\begin{aligned} \sin\left(-\frac{22\pi}{3}\right) &= -\sin \frac{22\pi}{3} = -\sin\left(\frac{4\pi}{3} + 6\pi\right) = -\sin \frac{4\pi}{3} = -\sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\left(-\sin \frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{3} = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Príklad 3:

Určte $\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x$, ak $\operatorname{cotg} x = \frac{4}{3}$ a $x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$.

Riešenie: $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x = 1$, $\operatorname{tg} x \cdot \frac{4}{3} = 1$, $\operatorname{tg} x = \frac{3}{4}$, $\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{3}{4}$, $\sin x = \frac{3}{4} \cos x$. Ďalej riešime

sústavu týchto rovníc: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ a $\sin x = \frac{3}{4} \cos x$. Z nej $\frac{9}{16} \cos^2 x + \cos^2 x = 1$, teda

$\cos^2 x = \frac{16}{25}$. Z toho $|\cos x| = \frac{4}{5}$ a súčasne $x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, potom $\cos x = -\frac{4}{5}$,

$$\sin x = \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{3}{5}.$$

Príklad 4:

Určte $\sin 2x$, $\cos 2x$, $\sin \frac{x}{2}$ ak $\sin x = \frac{3}{5}$ a $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Riešenie: Pretože $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $\frac{9}{25} + \cos^2 x = 1$, teda $\cos^2 x = \frac{16}{25}$, $|\cos x| = \frac{4}{5}$ a

súčasne $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \cos x = \frac{4}{5}$.

$$\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{24}{25}, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{7}{25}.$$

$$\frac{x}{2} \text{ je z 1. kvadrantu } \Rightarrow \sin \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{4}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}.$$

Príklad 5:

Dokážte, že platí rovnosť $\cos x + \sin x = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ a potom zostrojte graf funkcie

$$f : y = \sin x + \cos x.$$

Riešenie: Rovnosť dokážeme tak, že jednu stranu rovnosti upravíme pomocou platných vzťahov na výraz nachádzajúci sa na druhej strane rovnosti. Použijeme vzťah pre $\cos(x - y)$.

$$\begin{aligned} P(x) &= \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} \cos x + \sin \frac{\pi}{4} \sin x \right) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x \right) = \\ &= \cos x + \sin x = L(x). \end{aligned}$$

Pretože $L(x) = P(x)$ a definičné obory funkcií na obidvoch stranách rovnosti sú množiny R ,

graf funkcie $f : y = \sin x + \cos x$ je zhodný s grafom funkcie $g : y = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$.

Zostrojíme teda graf funkcie g . Platí $\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$. Graf funkcie

$g_1 = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ dostaneme posunutím grafu funkcie $y = \cos x$ v smere osi x o $\frac{\pi}{4}$ doprava.

Graf funkcie g dostaneme vynásobením funkčných hodnôt funkcie g_1 číslom $\sqrt{2}$.

Príklad 6:

Zostrojte graf funkcie $f : y = \frac{\cos^2 x}{1 - \sin x}$.

Riešenie: Najskôr upravíme rovnicu funkcie: $y = \frac{\cos^2 x}{1 - \sin x} = \frac{1 - \sin^2 x}{1 - \sin x} =$
 $= \frac{(1 - \sin x)(1 + \sin x)}{1 - \sin x} = 1 + \sin x.$

Určíme definičný obor funkcie: $1 - \sin x \neq 0, \sin x \neq 1, x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Platí $f : y = \sin x + 1$ a $x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Graf funkcie f dostaneme posunutím grafu funkcie $y = \sin x$ o 1 v smere osi y a vynechaním bodov $\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, 2\right], k \in \mathbb{Z}.$

Príklad 7:

Zostrojte graf funkcie $f : y = \frac{\cotg x}{|\cotg x|}$ a určte definičný obor funkcie.

Riešenie: Funkcia kotangens je definovaná pre $x \neq k\pi, k \in \mathbb{R}$ a musí platiť

$$\cotg x \neq 0 \Rightarrow x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

$D(f) = \mathbb{R} - \left\{k\frac{\pi}{2}\right\}, k \in \mathbb{Z}.$ Zjednodušíme rovnicu funkcie f .

$$\text{Ak } \cotg x > 0 \Rightarrow y = \frac{\cotg x}{\cotg x} = 1, \quad \cotg x > 0 \Rightarrow x \in \left(k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right) \text{ a } y = 1.$$

$$\text{Ak } \cotg x < 0 \Rightarrow y = -\frac{\cotg x}{\cotg x} = -1, \quad \cotg x < 0 \Rightarrow x \in \left(\frac{\pi}{2} + k\pi, \pi + k\pi\right) \text{ a } y = -1.$$

Grafom funkcie je zjednotenie úsečiek s rovnicou $y = 1$ pre $x \in \left(k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ a s rovnicou

$$y = -1 \text{ pre } x \in \left(\frac{\pi}{2} + k\pi, \pi + k\pi\right), \text{ pričom } k \in \mathbb{Z}.$$

Príklad 8:

Určte definičný obor funkcie $f : y = \sqrt{(\sin x + \cos x)^2 - 1}$.

Riešenie: Pod odmocninou musí byť nezáporné reálne číslo: $(\sin x + \cos x)^2 - 1 \geq 0$,

$$\sin^2 x + 2 \sin x \cdot \cos x + \cos^2 x - 1 \geq 0,$$

$$\sin 2x \geq 0,$$

teda ak $2x \in \langle 0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi \rangle, k \in \mathbb{Z}$, potom $x \in \left\langle k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right\rangle$. Definičný obor je

$$D(f) = \left\langle k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right\rangle, k \in \mathbb{Z}.$$

Príklad 9:

Dokážte, že platí rovnosť $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos 2x$.

Riešenie: Upravujeme ľavú stranu rovnosti,

$$L(x) = \cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) = (\cos^2 x - \sin^2 x) \cdot 1 = \cos 2x = P(x).$$

Rovnosť platí pre každé reálne číslo x .

Príklad 10:

Riešte rovnicu $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ v množine reálnych čísel.

Riešenie: Definičný obor rovnice je množina $\mathbb{R}$. Najskôr nájdeme tie $x' \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$, pre ktoré je

$$\sin x = \left| -\frac{\sqrt{2}}{2} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x' = \frac{\pi}{4}. \text{ Funkcia sinus je záporná pre } x \text{ z III. alebo IV. kvadrantu,}$$

preto $x = x' + \pi$ alebo $x = 2\pi - x'$.

$$\text{Platí } x = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4} \text{ alebo } x = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}.$$

$$\text{Perioda funkcie sinus je } 2\pi \Rightarrow K = \left\{ \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, \frac{7\pi}{4} + 2k\pi \right\}, k \in \mathbb{Z}.$$

Príklad 11:

Riešte rovnicu $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ v $\mathbb{R}$.

Riešenie: Rovnica je definovaná pre každé reálne číslo x . Použijeme substitúciu

$$z = 2x - \frac{\pi}{3}, \text{ dostaneme základnú goniometrickú rovnicu } \cos z = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Riešením rovnice } \cos z = \left| -\frac{\sqrt{3}}{2} \right| = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ je } z' = \frac{\pi}{6} \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle.$$

Funkcia kosinus je záporná v II. a III. kvadrante a má periodu 2π , preto $z = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$,

alebo $z = \pi + \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Potom $z = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ alebo $z = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Pre x

dostaneme: $\frac{5\pi}{6} + 2k\pi = 2x - \frac{\pi}{3}$ alebo $\frac{7\pi}{6} + 2k\pi = 2x - \frac{\pi}{3}$, z toho potom $x = \frac{7\pi}{12} + k\pi$ alebo

$$x = \frac{9\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}. \text{ Výsledkom je } K = \left\{ \frac{7\pi}{12} + k\pi, \frac{9\pi}{12} + k\pi \right\}, k \in \mathbb{Z}.$$

Príklad 12:

Riešte rovnicu $2\sin^2 x - 5\cos x - 5 = 0$ v množine $\mathbb{R}$.

Riešenie: Rovnica je definovaná pre všetky $x \in \mathbb{R}$. Snažíme sa ju upraviť tak, aby obsahovala len jednu goniometrickú funkciu. Platí $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$. Dosadíme do rovnice a upravíme:

$$2(1 - \cos^2 x) - 5\cos x - 5 = 0 \Rightarrow 2\cos^2 x + 5\cos x + 3 = 0. \text{ Ak položíme } z = \cos x, \text{ dostaneme}$$

kvadratickú rovnicu $2z^2 + 5z + 3 = 0$ s koreňmi $z_1 = -1, z_2 = -\frac{3}{2}$. Koreň $-\frac{3}{2} \notin \langle -1, 1 \rangle \Rightarrow$

vyhovuje len $z = -1$. Pre x platí: $\cos x = -1, x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, teda

$$K = \{ \pi + 2k\pi \}, k \in \mathbb{Z}.$$

Príklad 13:

Riešte rovnicu v množine reálnych čísel: $\sin^2 x - \sqrt{3} \sin x \cdot \cos x = 0$.

Riešenie: Rovnica je definovaná pre všetky reálne čísla x . Vydělíme rovnicu výrazom $\cos^2 x \neq 0$, dostaneme kvadratickú rovnicu pre neznámu $\operatorname{tg} x$.

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{\sqrt{3} \sin x \cos x}{\cos^2 x} = 0, \operatorname{tg}^2 x - \sqrt{3} \operatorname{tg} x = 0, \text{ vyberieme pred zátvorku } \operatorname{tg} x,$$

$\operatorname{tg} x (\operatorname{tg} x - \sqrt{3}) = 0$. Súčin sa rovná 0 práve vtedy, ak aspoň jeden činiteľ sa rovná 0, teda

$\operatorname{tg} x = 0$, alebo $\operatorname{tg} x - \sqrt{3} = 0$. Z toho $\operatorname{tg} x = \sqrt{3} \Rightarrow x = k\pi$ alebo $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Táto

rovnica je ekvivalentná s pôvodnou rovnicou ak platí $\cos x \neq 0 \Rightarrow x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Tieto čísla x však nie sú koreňmi pôvodnej rovnice. Preto $K = \left\{ k\pi, \frac{\pi}{3} + k\pi \right\}, k \in \mathbb{Z}$.

Príklad 14:

V množine reálnych čísel riešte rovnicu $\cos 4x + \cos 2x = 0$.

Riešenie: Použijeme vzťah pre $\cos x + \cos y$:

$$\cos 4x + \cos 2x = 2 \cos \frac{4x+2x}{2} \cos \frac{4x-2x}{2} = 2 \cos 3x \cos x.$$

Platí $2 \cos 3x \cos x = 0$, $\cos 3x \cos x = 0$. Teda $\cos 3x = 0$ alebo $\cos x = 0$, z toho

$$3x = (2k+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow x_1 = (2k+1)\frac{\pi}{6}, \text{ alebo } x_2 = (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

Urobíme skúšku správnosti dosadením do pôvodnej rovnice.

$$L(x_1) = \cos(2k+1)2\frac{\pi}{3} + \cos(2k+1)\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0 = P(x_1),$$

$$L(x_2) = \cos(2k+1)2\pi + \cos(2k+1)\pi = 1 - 1 = 0 = P(x_2).$$

Vyhovujú obidva korene, preto $K = \left\{ (2k+1)\frac{\pi}{6}, (2k+1)\frac{\pi}{2} \right\}, k \in \mathbb{Z}$.

Príklad 15:

Riešte nerovnicu $\sin x + \sqrt{3} \cos x > 0$ v množine $\mathbb{R}$.

Riešenie: Vynásobíme nerovnicu číslom $\frac{1}{2} > 0$. Nezmení sa znamienko nerovnosti.

$$\frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x > 0.$$

Platí $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ a $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, dosadíme do nerovnice:

$$\cos \frac{\pi}{3} \sin x + \sin \frac{\pi}{3} \cos x > 0.$$

Na ľavú stranu nerovnice použijeme vzťah $\sin(x+y)$, dostaneme $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) > 0$.

Nech $z = x + \frac{\pi}{3}$, potom dostaneme nerovnicu $\sin z > 0$.

To platí pre $z \in (0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$, dostávame sústavu $2k\pi < z < \pi + 2k\pi$,

$$2k\pi < x + \frac{\pi}{3} < \pi + 2k\pi, \text{ teda } -\frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{2\pi}{3} + 2k\pi.$$

Výsledkom je množina $K = \left(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$.

Príklad 16:

Riešte nerovnicu $\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} \leq 3$ v množine $\mathbb{R}$.

Riešenie: Nech $z = \frac{x}{2}$, potom $\operatorname{tg}^2 z \leq 3$. Obidve strany nerovnice sú kladné, preto môžeme

obidve strany odmocniť: $|\operatorname{tg} z| \leq \sqrt{3}$, to je sústava $-\sqrt{3} \leq \operatorname{tg} z \leq \sqrt{3}$.

$\operatorname{tg} z = -\sqrt{3}$ pre $z = -\frac{\pi}{3} + k\pi$, $\operatorname{tg} z = \sqrt{3}$ pre $z = \frac{\pi}{3} + k\pi$. Pre naše z platí:

$$-\frac{\pi}{3} + k\pi \leq z \leq \frac{\pi}{3} + k\pi.$$

Keď dosadíme za $z = \frac{x}{2}$, dostaneme: $-\frac{\pi}{3} + k\pi \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\pi}{3} + k\pi$, teda:

$$-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{2\pi}{3} + 2k\pi.$$

$$K = \left[-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right], k \in \mathbb{Z}.$$

Cvičenia

1. Vyjadrite $\sin \frac{79\pi}{6}$, $\cos \frac{79\pi}{6}$.

$$\text{Výsledok: } \sin \frac{79\pi}{6} = -\frac{1}{2}, \quad \cos \frac{79\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

2. Rozhodnite o pravdivosti nasledujúcich výrokov : a) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} > \operatorname{tg} \frac{\pi}{6}$, b) $\sin \frac{3\pi}{4} < \sin \frac{5\pi}{4}$.

Výsledky: a) platí, b) neplatí.

3. Zostrojte graf funkcie $f: y = \cotg x - 1$.

Výsledok: graf funkcie $f_1: y = \cotg x$ posunieme v smere osi y o 1 dole.

4. Zostrojte graf funkcie $f: y = \frac{\sin x}{|\sin x|}$ a určte definičný obor.

Výsledok: $D(f) = \mathbb{R} - \{k\pi\}, k \in \mathbb{Z}$,

$y = 1$ pre $x \in (2k\pi, \pi + 2k\pi)$, $y = -1$ pre $x \in (\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

5. Určte definičný obor funkcie $f : y = \sqrt{\operatorname{tg} x}$.

Výsledok: $D(f) = \left\langle k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right\rangle, k \in \mathbb{Z}$.

6. Určte definičný obor funkcie $f : y = \frac{1 + \sin^2 x}{1 - \cos 2x}$.

Výsledok: $D(f) = \mathbb{R} - \{k\pi\}, k \in \mathbb{Z}$.

7. Zostrojte graf funkcie $f : y = \sin^2 x + \cos^2 x$ a určte definičný obor.

Výsledok: grafom je $y = 1$, $D(f) = \mathbb{R}$.

8. Určte definičný obor funkcie $f : y = \sqrt{2 \sin \frac{x}{2}}$.

Výsledok: $D(f) = \langle 4k\pi, 2\pi + k\pi \rangle, k \in \mathbb{Z}$.

9. Zistite, či platí rovnosť funkcií $f = g$:

a) $f : y = 1 + \cos x$, $g : y = 2 \cos^2 \frac{x}{2}$.

b) $f : y = \cos^4 x - \sin^4 x$, $g : y = \cos 2x$.

Výsledky: a) $f = g$, b) $f = g$.

10. Dokážte, že pre každé $x \in \mathbb{R} - \left\{k \frac{\pi}{2}\right\}, k \in \mathbb{Z}$ platí $(\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x)^2 - (\operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x)^2 = 4$:

11. Vyjadrite $\sin 3x$ pomocou hodnôt $\sin x$.

Výsledok: $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$.

12. Dokážte, že platí rovnosť: a) $\frac{1}{\cos^2 x} - \operatorname{tg}^2 x = 1$ pre $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$,

$$\text{b) } \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 1 \text{ pre } x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi.$$

13. Zjednodušte výraz $\frac{(\sin x + \cos x)^2}{1 + \sin 2x}$.

Výsledok: pre $x \neq \frac{3\pi}{4} + k\pi$ sa rovná 1.

14. Zjednodušte výraz: a) $\frac{\cos 2x}{\sin x + \cos x}$, b) $\frac{1 + \cos 2y}{1 - \cos 2y}$.

Výsledky: a) $\cos x - \sin x$ pre $x \neq \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, x \neq \frac{7\pi}{4} + 2k\pi$, b) $\operatorname{cotg}^2 y$ pre $y \neq k\pi$.

15. Dokážte, že platí rovnosť $\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = \sin x$.

16. Zjednodušte výraz $\frac{\cos x - \cos 2x}{\sin x + \sin 2x}$.

Výsledok: $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ pre $x \neq \frac{2k\pi}{3}$ a $x \neq (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$.

17. Zjednodušte výraz $-1 + \frac{1 - \sin^2 x}{1 + \sin x}$.

Výsledok: $-\sin x$ pre $x \neq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

18. Dokážte, že pre prípustné hodnoty x, y platí rovnosť $\frac{\sin(x-y)}{\sin x \cos y} = 1 - \cotg x \operatorname{tg} y$.

19. Riešte rovnicu v množine $R: \sin x + \cos^2 x = \frac{1}{4}$.

Výsledok: $K = \left\{ \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \right\}, k \in \mathbb{Z}$.

20. Riešte rovnicu v množine $R: 5\sin x - \sin^5 x = 0$.

Výsledok: $K = \{k\pi\}, k \in \mathbb{Z}$.

21. Riešte rovnicu v množine $R: \sin 2x = (\cos x - \sin x)^2$.

Výsledok: $K = \left\{ \frac{\pi}{12} + k\pi, \frac{5\pi}{12} + k\pi \right\}, k \in \mathbb{Z}$.

22. Určte, pre ktoré $x \in R$ nadobúda funkcia $f: y = 2 \operatorname{tg} x - \frac{1}{\cos^2 x}$ hodnotu rovnú 0.

Výsledok: $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

23. Riešte nerovnicu v množine $R: \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x - 1 < 0$.

Výsledok: $K = \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, -\frac{\pi}{4} + k\pi \right) \cup \left(-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi \right), k \in \mathbb{Z}$.

24. Riešte rovnicu v množine $R: \cos 2x - \cos x = \sin x - \sin 2x$.

Výsledok: $K = \left\{ 2k\pi, \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \right\}, k \in \mathbb{Z}$.

25. Riešte rovnicu v množine $R: \operatorname{tg} x + \cotg x = 2$.

Výsledok: $K = \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi \right\}, k \in \mathbb{Z}$.

26. Riešte rovnicu v množine $R: \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) = -1$.

Výsledok: $K = \left\{ \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{3} \right\}, k \in \mathbb{Z}.$

27. Riešte rovnicu v množine $R: 3^{4\sin^2 x} = 27$.

Výsledok: $K = \left\{ \frac{\pi}{3} + k\pi, -\frac{\pi}{3} + k\pi \right\}, k \in \mathbb{Z}.$

28. Riešte nerovnicu $\sin x \geq -\frac{1}{2}$ na intervale $\langle 0, 2\pi \rangle$.

Výsledok: $K = \left\langle 0, \frac{7\pi}{6} \right\rangle \cup \left\langle \frac{11\pi}{6}, 2\pi \right\rangle.$

29. Riešte nerovnicu $\sin x + \cos 2x > 1$ na intervale $\langle 0, 2\pi \rangle$.

Výsledok: $K = \left(0, \frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6}, \pi\right).$

30. Určte definičný obor funkcie $f: y = \sqrt{\cos \frac{x}{2}}$.

Výsledok: $D(f) = \langle -\pi + 4k\pi, \pi + 4k\pi \rangle, k \in \mathbb{Z}.$

31. Riešte rovnicu v množine $R: 2\sin x = \sqrt{3} \operatorname{tg} x$.

Výsledok: $K = \left\{ k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \right\}, k \in \mathbb{Z}.$

7. Analytická geometria v rovine a priestore

Analytická geometria v rovine a priestore sa zaoberá problémami planimetrie a stereometrie pomocou analytických prostriedkov, pomocou rovníc, nerovníc a sústav rovníc a nerovníc. V zvolenej súradnicovej sústave vieme geometrické útvary vyjadriť rovnicou, prípadne nerovnicou. Prienik útvarov je určený riešením sústavy rovníc (nerovníc) daných útvarov.

7.1 Vektorová algebra

Sústava súradníc v priestore

Dané sú tri vektory $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ktoré majú umiestnenia $\mathbf{OI}, \mathbf{OJ}, \mathbf{OK}$ na troch rôznych priamkach, ktoré neležia v jednej rovine. Potom každému vektoru $\mathbf{m} = \mathbf{OM}$ v priestore môžeme priradiť práve jednu usporiadanú trojicu $[x, y, z] \in R^3$ tak, že $\mathbf{m} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Usporiadanú trojicu čísel $[x, y, z]$ nazývame *súradnice vektora* $\mathbf{m}$ a zapisujeme $\mathbf{m} = [x, y, z]$. Podobne zavedieme sústavu súradníc v rovine, vektor bude mať dve súradnice $\mathbf{m} = [x, y]$.

Ak sú úsečky $\mathbf{OI}, \mathbf{OJ}, \mathbf{OK}$ zhodné a navzájom kolmé, nazývame sústavu *ortonormálnou*. Bod $\mathbf{O}$ je začiatok sústavy, priamka $\mathbf{OI}$ je os x , priamka $\mathbf{OJ}$ je os y a priamka $\mathbf{OK}$ je os z .

Nech $A = [a_1, a_2, a_3]$ a $B = [b_1, b_2, b_3]$, potom vektor $\mathbf{v} = \mathbf{AB} = B - A$ má súradnice $\mathbf{v} = [b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3]$.

Nech, $\mathbf{v} = [v_1, v_2, v_3]$. Potom platí :

1. $\mathbf{u} = \mathbf{v} \Leftrightarrow u_1 = v_1, u_2 = v_2, u_3 = v_3$,
2. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = [u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3]$,
3. $-\mathbf{u} = [-u_1, -u_2, -u_3]$,
4. $k \cdot \mathbf{u} = [ku_1, ku_2, ku_3]$.

Vektor $-\mathbf{u}$ je *opačný vektor* k vektoru $\mathbf{u}$.

Vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ sú *lineárne závislé* $\Leftrightarrow \exists k \in R : \mathbf{u} = k \cdot \mathbf{v}$.

Body A, B, C ležia na jednej priamke $\Leftrightarrow \exists k \in R : \mathbf{u} = k \cdot \mathbf{v}$, kde vektor $\mathbf{u} = B - A$ a vektor $\mathbf{v} = C - A$.

Vektor $\mathbf{v}$ je *lineárnou kombináciou* vektorov $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$, ak platí

$\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \dots + a_n\mathbf{v}_n$, kde $a_1, a_2, \dots, a_n \in R$.

Veľkosť vektora $\mathbf{u} = [u_1, u_2, u_3]$ v ortonormálnej sústave súradníc je nezáporné číslo

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}.$$

Uhol vektorov. Ak majú dva nenulové vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ umiestnenia $\mathbf{AB}, \mathbf{AC}$, potom konvexný uhol BAC nazývame uhlom vektorov $\mathbf{u}, \mathbf{v}$. Uhol nedefinujeme, ak aspoň jeden z vektorov je nulový.

Pre veľkosť uhla φ nenulových vektorov $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ platí :

1. $\varphi \in \langle 0^\circ, 180^\circ \rangle$,
2.
$$\cos \varphi = \frac{|u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}.$$

Skalárny súčin vektorov. Ak sú $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ dva nenulové vektory, ktorých uhol má veľkosť φ , nazývame číslo

$$|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| \cdot \cos \varphi$$

skalárny súčin vektorov $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ a zapisujeme ho v tvare $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$.

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}$ alebo $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ alebo $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ a $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$.

Vektorový súčin dvoch vektorov. Vektorovým súčinom vektorov $\mathbf{u}, \mathbf{v}$, z ktorých aspoň jeden je nulový je nulový vektor. Vektorovým súčinom nenulových vektorov $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ (v danom poradí) nazývame vektor $\mathbf{w}$, ktorý má tieto vlastnosti:

1. $\mathbf{w}$ je kolmý na $\mathbf{u}$ aj $\mathbf{v}$.
2. Smer vektora $\mathbf{w}$ je určený pravidlom pravej ruky.
3. Veľkosť vektora $\mathbf{w}$ je daná:

$$|\mathbf{w}| = |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| \cdot \sin \varphi, \text{ kde } \varphi \text{ je uhol vektorov } \mathbf{u}, \mathbf{v}.$$

Vektorový súčin zapisujeme: $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

Súradnice vektora $\mathbf{w}$ ľahko vypočítame podľa nasledujúcej schémy :

$$\begin{array}{cccc} u_2 & u_3 & u_1 & u_2 \\ + & - & + & - \\ \otimes & \otimes & \otimes & \otimes \\ v_2 & v_3 & v_1 & v_2 \end{array}$$

$$\text{teda } \mathbf{w} = [u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1].$$

Využitie vektorového súčinu :

1. Pre obsah rovnobežníka $ABCD$, kde $\mathbf{u} = \mathbf{AB}, \mathbf{v} = \mathbf{AD}$ platí $S = |\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$.

2. Pre obsah trojuholníka ABC , kde $\mathbf{u} = \mathbf{AB}, \mathbf{v} = \mathbf{AC}$ platí $S = \frac{|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|}{2}$.

3. Pre objem rovnobežnostena $ABCDEFGH$, kde $\mathbf{u} = \mathbf{AB}, \mathbf{v} = \mathbf{AD}, \mathbf{w} = \mathbf{AE}$ platí

$$V = |(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}|.$$

7.2 Analytické vyjadrenie priamok a rovín

Parametrická rovnica priamky. Nech priamka p je určená bodmi A, B . Vektor $\mathbf{s} = B - A$ nazývame smerový vektor priamky p .

Rovnicu $X = A + k\mathbf{s}$, kde $k \in \mathbb{R}, \mathbf{s} \neq \mathbf{0}$ nazývame parametrická rovnica priamky, bod X je ľubovoľný bod priamky. Rozpíšeme ju do súradníc:

v rovine: $x = a_1 + ks_1, y = a_2 + ks_2, k \in \mathbb{R}$,

v priestore: pridáme ešte tretiu súradnicu $z = a_3 + ks_3$.

Polpriamka AB má parametrickú rovnicu: $X = A + k\mathbf{s}, k \geq 0$.

Polpriamka opačná k AB má parametrickú rovnicu: $X = A + k\mathbf{s}, k \leq 0$.

Úsečka AB má parametrickú rovnicu: $X = A + k\mathbf{s}, k \in \langle 0, 1 \rangle$.

Všeobecná rovnica priamky v rovine. Rovnica tvaru $ax + by + cz = 0$, kde aspoň jedno z čísel a, b je rôzne od nuly sa nazýva všeobecná rovnica priamky. Vektor $\mathbf{n} = [a, b]$ sa nazýva *normálový vektor priamky*. Je kolmý na priamku a teda aj na smerový vektor $\mathbf{s}$. Preto $\mathbf{s} \cdot \mathbf{n} = 0 \Rightarrow \mathbf{s} = [-b, a]$.

Každá priamka v rovine má nekonečne veľa všeobecných rovníc, ktoré sú nenulovými násobkami jednej z nich.

Smernicový tvar rovnice priamky. Ak vo všeobecnej rovnici priamky $ax + by + cz = 0$ je

$b \neq 0$, môžeme písať: $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$.

Nech $k = -\frac{a}{b}$ a $q = -\frac{c}{b}$. Rovnicu priamky tvaru $y = kx + q$ nazývame smernicový tvar

rovnice priamky, číslo k sa nazýva *smernica* priamky. Smernica $k = -\frac{a}{b}$ alebo $k = \operatorname{tg} \alpha$,

kde α je uhol ktorý priamka zvierá s kladnou časťou osi x . Ak $\alpha = 90^\circ$, $\operatorname{tg} \alpha$ nie je definovaný, preto priamka rovnobežná s osou y nemá smernicu!

Priamka daná bodmi $A[a_1, a_2]$ a $B[b_1, b_2]$ má smernicu $k = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}$.

Priamka daná bodom $[x_0, y_0]$ a smernicou k má rovnicu: $y - y_0 = k(x - x_0)$.

Úsekový tvar rovnice priamky. Ak $p \neq 0$ a $q \neq 0$, rovnicu tvaru $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$ nazývame

úsekový tvar rovnice priamky. Číslo p je úsek, ktorý priamka vytína na osi x , q je úsek na osi y .

Priamka v priestore je určená len parametrickou rovnicou!

Parametrická rovnica roviny. Body A, B, C určujú rovinu ak neležia na jednej priamke.

Nech $\mathbf{u} = B - A, \mathbf{v} = C - A$. Ľubovoľné nezávislé vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ roviny nazývame smerové vektory roviny.

Rovnica $X = A + t\mathbf{u} + k\mathbf{v}$, kde $t, k \in \mathbb{R}$ sa nazýva parametrická rovnica roviny, kde X je ľubovoľný bod roviny.

Všeobecná rovnica roviny je rovnica tvaru $ax + by + cz + d = 0$, kde $[a, b, c] \neq [0, 0, 0]$.

Vektor $\mathbf{n} = [a, b, c]$ sa nazýva normálový vektor roviny a je kolmý na rovinu, teda aj na každé dva smerové vektory roviny. Preto jedným normálovým vektorom roviny je vektorový súčin smerových vektorov $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

Každá rovina má nekonečne veľa všeobecných rovníc, ktoré sú nenulovými násobkami jednej z nich.

7.3 Vzájomná poloha priamok a rovín

Vzájomná poloha dvoch priamok: priamka $p(A, \mathbf{u})$ a priamka $q(B, \mathbf{v})$, kde $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ sú smerové vektory priamok (v rovine môžeme použiť aj normálové vektory).

$\mathbf{v} = k\mathbf{u}$ a $p \cap q = \emptyset$ priamky sú rovnobežné, rôzne,

$\mathbf{v} = k\mathbf{u}$ a $p \cap q \neq \emptyset$ priamky sú rovnobežné, totožné,

$\mathbf{v} \neq k\mathbf{u}$ a $p \cap q = \{P\}$ priamky sú rôznobežné.

V priestore je ešte prípad, keď $\mathbf{v} \neq k\mathbf{u}$ a $p \cap q = \emptyset$, potom ide o mimobežné priamky.

Mimobežné priamky neležia v jednej rovine!

Vzájomná poloha dvoch rovín:

Nech rovina α je určená rovnicou $ax + by + cz + d = 0$ a rovina β rovnicou

$ex + fy + gz + h = 0$, kde $\mathbf{n} = [a, b, c]$ a $\mathbf{m} = [e, f, g]$ sú normálové vektory rovín α a β .

$\exists k \in \mathbb{R}, k \neq 0 : \mathbf{n} = k \cdot \mathbf{m}$ a $d = k \cdot h$ roviny sú totožné,

$\exists k \in \mathbb{R}, k \neq 0 : \mathbf{n} = k \cdot \mathbf{m}$ a $d \neq k \cdot h$ roviny sú rovnobežné, ale rôzne,

$\exists k \in \mathbb{R}, k \neq 0 : \mathbf{n} \neq k \cdot \mathbf{m}$ roviny sú rôznobežné.

Vzájomná poloha priamky a roviny. Nech priamka $p(A, \mathbf{s})$ a rovina

$\alpha : ax + by + cz + d = 0$, kde $\mathbf{s}$ je smerový vektor priamky p a $\mathbf{n} = [a, b, c]$ je normálový vektor roviny

$\mathbf{s} \cdot \mathbf{n} = 0$ a $p \cap \alpha \neq \emptyset$ priamka p leží v rovine,

$\mathbf{s} \cdot \mathbf{n} = 0$ a $p \cap \alpha = \emptyset$ priamka p je rovnobežná s rovinou, ale neleží v nej,

$\mathbf{s} \cdot \mathbf{n} \neq 0$ priamka p je rôznobežná s rovinou.

7.4 Metrické úlohy

Metrické úlohy sú úlohy na výpočet vzdialeností a odchýliek. Riešime ich pomocou vektorov.

Uhol dvoch priamok. Priamky p, q vytvoria dvojicu vedľajších uhlov. Uhlom priamok nazveme ten z uhlov, ktorého veľkosť je z intervalu $\langle 0^\circ, 90^\circ \rangle$, označme ho α . Veľkosť uhla dvoch priamok v rovine, ale aj v priestore počítame pomocou ich smerových vektorov (v rovine aj pomocou normálových vektorov).

Ich uhol môže byť α alebo $180^\circ - \alpha$. Platí $\cos \alpha = -\cos(180^\circ - \alpha)$, preto uhol dvoch priamok vypočítame zo vzťahu:

$$\cos \alpha = \frac{|u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}, \text{ kde } \mathbf{u}, \mathbf{v} \text{ sú smerové alebo normálové vektory}$$

priamok.

Ak sú priamky určené smernicovými rovnicami $p: y = k_1x + q_1$ a $q: y = k_2x + q_2$, pričom nie

sú na seba kolmé, potom pre uhol α platí: $\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{k_1 + k_2}{1 - k_1k_2} \right|$.

Uhol priamky a roviny. Môžeme ho určiť pomocou kolmice k na rovinu. Nech priamky p a k zvierajú uhol β , priamka p a rovina uhol α . Platí $\alpha = 90^\circ - \beta$,

$\sin \alpha = \sin(90^\circ - \beta) = \cos \beta$. Uhol dvoch priamok vieme vypočítať pomocou ich smerových vektorov. Smerový vektor kolmice je normálový vektor roviny.

Preto uhol priamky a roviny vypočítame zo vzťahu: $\sin \alpha = \frac{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{s}|}{|\mathbf{n}| \cdot |\mathbf{s}|}$, kde $\mathbf{n}$ je normálový

vektor roviny a $\mathbf{s}$ je smerový vektor priamky.

Uhol dvoch rovín. Uhol dvoch rovín sa rovná uhlu dvoch priamok, z ktorých jedna je kolmá na jednu a druhá na druhú rovinu. Priamka kolmá na rovinu má smerový vektor rovný normálovému vektoru roviny.

Preto uhol dvoch rovín vypočítame pomocou ich normálových vektorov: $\cos \alpha = \frac{|\mathbf{n}_\alpha \cdot \mathbf{n}_\beta|}{|\mathbf{n}_\alpha| \cdot |\mathbf{n}_\beta|}$.

Vzdialenosť bodu od priamky. Zápis $|A, p|$ je vzdialenosť bodu od päty kolmice vedenej daným bodom na danú priamku. V rovine vzdialenosť bodu $A[x_0, y_0]$ od priamky $p: ax + by + c = 0$ vypočítame zo vzťahu:

$$|A, p| = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

V priestore:

1. spôsob - smerový vektor priamky p je kolmý na vektor $\mathbf{AP}$, kde P je päta kolmice vedenej bodom A na danú priamku $\Rightarrow \mathbf{s} \cdot \mathbf{AP} = 0$ a veľkosť vektora $\mathbf{AP}$ je vzdialenosť bodu A od priamky p .

2. spôsob - bodom A vedieme rovinu α kolmú na priamku p , nájdeme $p \cap \alpha = \{P\}$, vzdialenosť bodov A a P je hľadaná vzdialenosť $|A, p|$.

Vzdialenosť bodu od roviny. Zápis $|A, \rho|$ je vzdialenosť bodu od päty kolmice vedenej daným bodom na danú rovinu. Nech bod $A[x_0, y_0, z_0]$ a rovina $\rho: ax + by + cz + d = 0$, potom vzdialenosť bodu od roviny vypočítame zo vzťahu:

$$|A, \rho| = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Počítať môžeme aj vzdialenosť dvoch rovnobežných priamok - úlohu prevedieme na vzdialenosť ľubovoľného bodu jednej priamky od druhej priamky. Vzdialenosť dvoch rovnobežných rovín prevedieme na výpočet vzdialenosti bodu od roviny.

Vzdialenosť priamky rovnobežnej s rovinou počítame ako vzdialenosť ľubovoľného bodu priamky od roviny.

7.5 Kuželosečky

Kuželosečky – sú to rovinné krivky, ktorých analytickým vyjadrením sú kvadratické rovnice, patria medzi ne kružnica, elipsa, parabola a hyperbola.

Kružnica - množina bodov roviny, ktoré majú od pevného bodu S roviny rovnakú vzdialenosť r . Bod S nazývame stred kružnice, číslo r nazývame polomer kružnice. Nech $S[m, n]$ je stred kružnice v karteziánskej súradnicovej sústave a bod $X[x, y]$ je ľubovoľný bod kružnice.

Stredový tvar rovnice kružnice: $(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$, pre $S[0, 0]: x^2 + y^2 = r^2$,

vnútorná oblasť kružnice: $(x - m)^2 + (y - n)^2 < r^2$,

vonkajšia oblasť kružnice: $(x - m)^2 + (y - n)^2 > r^2$.

Elipsa - nech F, G sú dva rôzne body roviny také, že $|F, G| < 2a, a > 0$. Množinu všetkých bodov roviny, ktorých súčet vzdialeností od bodov je rovný $2a$ nazývame elipsa. Body F, G nazývame ohniská elipsy. Body, v ktorých priamka FG pretína elipsu, sú hlavné vrcholy elipsy a označujeme ich zvyčajne A, B . Úsečku AB nazývame hlavná os elipsy a číslo $2a$ je veľkosť hlavnej osi. Jej stredom je bod S , ktorý je aj stredom elipsy. Priamka, prechádzajúca stredom S a kolmá na AB , pretína elipsu vo vedľajších vrcholoch elipsy,

ktoré zvyčajne označujeme C, D . Úsečku CD nazývame vedľajšia os elipsy, veľkosť vedľajšej polosi označujeme b . (Polosou nazývame ľubovoľnú úsečku, ktorej jedným koncovým bodom je bod S , a druhým ľubovoľný vrchol elipsy.) Vzdialenosť ohniska od stredu sa nazýva excentricita elipsy a označuje sa písmenom e . Vzťah medzi excentricitou, veľkosťou hlavnej a vedľajšej polosi je vyjadrený rovnicou:

$$e = \sqrt{a^2 - b^2}, a > b > 0.$$

Nech $X[x, y]$ je ľubovoľný bod elipsy, $S[m, n]$ je stred elipsy, o je hlavná os elipsy.

Stredový tvar rovnice elipsy:

$$o \parallel x, \frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1, a^2 > b^2, \text{ alebo } o \parallel y, \frac{(x-m)^2}{b^2} + \frac{(y-n)^2}{a^2} = 1, a^2 > b^2.$$

Všeobecná rovnica elipsy: $Kx^2 + Ly^2 + Mx + Ny + P = 0$, $K \neq L, K > 0, L > 0$, je rovnicou elipsy, len ak sa dá upraviť na stredový tvar.

$$\text{Vnútoraná oblasť elipsy : } \frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} < 1,$$

$$\text{vonkajšia oblasť elipsy : } \frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} > 1.$$

Hyperbola - nech F, G sú dva rôzne body roviny a $|F, G| > 2a > 0$. Množinu bodov roviny, pre ktoré absolútna hodnota rozdielu vzdialeností od bodov F, G je rovná $2a$ nazývame hyperbola. Body F, G voláme ohniská hyperboly, v strede medzi nimi leží bod S – stred hyperboly. Body A, B ležiace na priamke FG (hlavnej osi hyperboly) tak, že S je ich stredom a vzdialenosť $|AB| = 2a$, voláme hlavné vrcholy hyperboly. Vzdialenosť $|AS| = |BS| = a$ je veľkosťou hlavnej polosi. Vzdialenosť ohniska od stredu hyperboly je excentricita $e = |FS| = |GS|$. Veľkosť vedľajšej polosi, ktorú označujeme b , sa vypočíta zo vzťahu:

$$b = \sqrt{e^2 - a^2}.$$

Asymptoty hyperboly. Smery, v ktorých každá priamka má s hyperbolou najviac jeden spoločný bod sa nazývajú asymptotické smery hyperboly. Asymptoty hyperboly sú priamky týchto smerov, ktoré nemajú s hyperbolou ani jeden spoločný bod. Nech $X[x, y]$ je ľubovoľný bod hyperboly, $S[m, n]$ je stred hyperboly a o je hlavná os hyperboly.

$$\text{Stredová rovnica hyperboly: } o \parallel x, \frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1,$$

$$o \parallel y, \frac{(y-n)^2}{a^2} - \frac{(x-m)^2}{b^2} = 1.$$

Rovnice asymptot hyperboly: $o \parallel x, y - n = \pm \frac{b}{a}(x - m), \quad o \parallel y, y - n = \pm \frac{a}{b}(x - m).$

Všeobecná rovnica hyperboly je rovnica tvaru $Kx^2 + Ly^2 + Mx + Ny + P = 0$, $K \cdot L < 0$.

Parabola. Daná je priamka d a bod F , ktorý na nej neleží. Množinu všetkých bodov roviny, ktorých vzdialenosť od bodu F a od priamky d je rovnaká, nazývame parabola. Bod F je ohnisko paraboly a priamka d je riadiaca priamka paraboly. Bod, ležiaci na kolmici na priamku d , prechádzajúcej bodom F , v strede vzdialenosti $|F, d|$, sa volá vrchol paraboly a označuje sa zvyčajne V . Spomínaná kolmica sa nazýva os paraboly. Číslo, označujúce vzdialenosť $|F, d| = p$ sa nazýva parameter paraboly.

Nech $X[x, y]$ je ľubovoľný bod paraboly, $V[m, n]$ je vrchol paraboly a o je os paraboly.

Vrcholová rovnica paraboly: $o \parallel y, (x - m)^2 = \pm 2p(y - n),$

$$o \parallel x, (y - n)^2 = \pm 2p(x - m).$$

Všeobecná rovnica paraboly: $o \parallel y, x^2 + Kx + Ly + M = 0, \quad o \parallel x, y^2 + Kx + Ly + M = 0.$

Guľová plocha. Nech bod S je stred guľovej plochy a $r > 0$ je polomer. Množinu všetkých bodov priestoru, ktoré sú rovnako vzdialené od bodu S o polomer r , nazývame guľová plocha. Nech $X[x, y, z]$ je ľubovoľný bod guľovej plochy a $S[m, n, s]$ je jej stred.

Stredová rovnica guľovej plochy je rovnica $(x - m)^2 + (y - n)^2 + (z - s)^2 = r^2$.

Všeobecná rovnica guľovej plochy: $x^2 + y^2 + z^2 + Kx + Ly + Mz + N = 0$, táto rovnica je rovnicou guľovej plochy len vtedy, ak sa dá upraviť na stredový tvar.

Úlohy na vzájomnú polohu priamky a kuželosečky je výhodné riešiť pomocou všeobecnej rovnice kuželosečky. Hľadáme spoločné body priamky a kuželosečky, tieto musia mať súradnice vyhovujúce rovnici priamky aj kuželosečky. Riešime teda sústavu dvoch rovníc o dvoch neznámych. Z lineárnej rovnice vyjadríme jednu neznámu a dosadíme do kvadratickej rovnice.

Dostaneme kvadratickú rovnicu tvaru $Ax^2 + Bx + C = 0$ (alebo $Ay^2 + By + C = 0$) s diskriminantom D .

Pre vzájomnú polohu priamky a kuželosečky platí:

$A \neq 0 \wedge D = 0 \Rightarrow \exists$ jediné reálne riešenie, spoločný práve jeden bod, priamku nazývame dotyčnicou kuželosečky,

$A \neq 0 \wedge D > 0 \Rightarrow \exists$ dve reálne rôzne riešenia, spoločné dva body, priamku nazývame sečnicou kuželosečky,

$A \neq 0 \wedge D < 0 \Rightarrow \exists$ žiadne riešenie v R , nemajú spoločný bod, priamku nazývame nesečnica kuželosečky,

$A = 0 \wedge B \neq 0 \Rightarrow \exists$ jediné riešenie, jeden spoločný bod, priamku nazývame sečnicou.

Štvrtý prípad môže nastať len u hyperboly a paraboly. U hyperboly je to priamka rovnobežná s niektorou asymptotou a u paraboly je to priamka rovnobežná s osou paraboly.

Priamka sa nazýva dotyčnica kuželosečky, ak obsahuje jediný bod kuželosečky a všetky ostatné body priamky sú vonkajšie body kuželosečky.

Rovnica dotyčnice ku kružnici. Nech bod $T[x_0, y_0]$ je dotykový bod a kružnica je daná rovnicou $(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$, potom dotyčnica má rovnicu:

$$(x_0 - m)(x - m) + (y_0 - n)(y - n) = r^2.$$

Rovnica dotyčnice ku elipse. Nech bod $T[x_0, y_0]$ je dotykový bod.

Elipsa je daná rovnicou $\frac{(x - m)^2}{a^2} + \frac{(y - n)^2}{b^2} = 1$. Potom má dotyčnica rovnicu

$$\frac{(x - m)(x_0 - m)}{a^2} + \frac{(y - n)(y_0 - n)}{b^2} = 1.$$

Rovnica dotyčnice ku hyperbole. Nech bod $T[x_0, y_0]$ je dotykový bod a hyperbola má

rovnicu $\frac{(x - m)^2}{a^2} - \frac{(y - n)^2}{b^2} = 1$, potom rovnica dotyčnice ku hyperbole má tvar:

$$\frac{(x - m)(x_0 - m)}{a^2} - \frac{(y - n)(y_0 - n)}{b^2} = 1.$$

Rovnica dotyčnice ku parabole. Nech bod $T[x_0, y_0]$ je dotykový bod a parabola je určená

rovnicou $(x - v_1)^2 = \pm 2p(y - v_2)$, potom rovnica dotyčnice je:

$$(x_0 - v_1)(x - v_1) = \pm p(y_0 - v_2) \pm p(y - v_2),$$

ak rovnicou $(y - v_2)^2 = \pm 2p(x - v_1)$, potom rovnica dotyčnice je:

$$(y_0 - v_2)(y - v_2) = \pm p(x_0 - v_1) \pm p(x - v_1).$$

Príklad 1:

Dané sú vektory $\mathbf{a}[3,5]$ a $\mathbf{b}[6,2]$. Nájdite vektor $\mathbf{c}$ kolmý na vektor $\mathbf{b}$, pre ktorý platí

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = 0.$$

Riešenie: Nech je vektor $\mathbf{c}[x, y]$. Ak $\mathbf{c} \perp \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{c} \cdot \mathbf{b} = 0$, $6x + 2y = 0$. Platí

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = 4 \Rightarrow 3x + 5y = 4.$$

Riešime sústavu dvoch rovníc o dvoch neznámych,

$$6x + 2y = 0$$

$$3x + 5y = 4.$$

Dostávame $x = -\frac{1}{3}$ a $y = 1$. Vektor $\mathbf{c}$ má súradnice $\left[-\frac{1}{3}, 1\right]$.

Príklad 2:

Dané sú body $A[0,1,3]$, $B[2,2,4]$, $C[3,3,5]$.

- Zistite, či tvoria trojuholník.
- Vypočítajte veľkosť strany a a ťažnice na stranu c .
- Vypočítajte veľkosť vnútorného uhla β .
- Vypočítajte obsah trojuholníka ABC .

Riešenie: a) Body A, B, C ležia na jednej priamke, ak existuje $k \in \mathbb{R}$ tak, že $\mathbf{u} = k \cdot \mathbf{v}$. Vektor $\mathbf{u} = B - A$ a $\mathbf{v} = C - A$, $\mathbf{u} = [2, 1, 1]$, $\mathbf{v} = [3, 2, 2]$. V našom prípade neexistuje také $k \in \mathbb{R}$, aby $\mathbf{u} = k \cdot \mathbf{v}$, preto body A, B, C neležia na jednej priamke a tvoria trojuholník.

b) Strana a je úsečka BC . Jej veľkosť sa rovná veľkosti vektora $\mathbf{x} = C - B = [1, 1, 1]$,

$|\mathbf{x}| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$. Ťažnica t_c je úsečka CC' , kde C' je stred úsečky AB . $C' = \frac{A+B}{2}$,

$C' \left[1, \frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right]$, veľkosť ťažnice t_c je veľkosť vektora $\mathbf{z} = C - C' = \left[2, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$, $|\mathbf{z}| = \sqrt{\frac{17}{2}}$.

c) Uhol $\beta = \angle CBA$, vypočítame ho pomocou vektorov $\mathbf{u} = A - B$ a $\mathbf{x} = C - B$,

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{x}}{|\mathbf{u}| |\mathbf{x}|} = \frac{-2 - 1 - 1}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{3}} = -\frac{2 \cdot \sqrt{2}}{3}, \text{ uhol } \beta = 160^\circ 32'.$$

d) Obsah trjuholníka ABC vypočítame pomocou vektorov $\mathbf{u} = C - A$ a $\mathbf{v} = B - A$,

$$S = \frac{|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|}{2}, \mathbf{u} \times \mathbf{v} = [0, -1, 1], |\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = \sqrt{2}, S = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Príklad 3:

Dané sú vrcholy $A[1,2,3]$, $B[3,2,1]$, $C[4,3,3]$ rovnobežníka $ABCD$. Vypočítajte dĺžku uhlopriečky BD .

Riešenie: Uhlopriečky rovnobežníka sa navzájom rozpolujú. Preto stred úsečky AC je aj

stredom úsečky BD . Platí $\frac{A+C}{2} = \frac{B+D}{2}$, $A+C = B+D$, $D = A+C-B$, $D[2,3,5]$.

Nech $\mathbf{u} = B - D = [1, -1, -4]$, veľkosť vektora $\mathbf{u}$ je dĺžka uhlopriečky BD , $|\mathbf{u}| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

Príklad 4:

Dané sú body $A[4,0]$, $B[5,7]$, $C[1,1]$.

- Napíšte parametrickú rovnicu úsečky AB .
- Napíšte všeobecnú rovnicu priamky, na ktorej leží výška na stranu c .
- Napíšte smernicovú rovnicu priamky, ktorá prechádza bodom C a je rovnobežná s priamkou AB .

Riešenie: a) Smerový vektor úsečky AB je napríklad vektor $\mathbf{s} = B - A = [1,7]$, parametrické vyjadrenie úsečky AB : $X = A + k\mathbf{s}$, $k \in \langle 0,1 \rangle$. V súradniciach: $x = 4 + k$, $y = 7k$, $k \in \langle 0,1 \rangle$.

b) Výška na stranu c je kolmá na stranu AB . Preto normálový vektor priamky obsahujúci výšku je smerovým vektorom priamky AB , $\mathbf{n} = \mathbf{s}_{AB} = B - A = [1,7]$.

Všeobecná rovnica priamky je $ax + by + c = 0$, kde a, b sú súradnice normálového vektora:

$x + 7y + c = 0$. Výška prechádza bodom C , dosadením súradníc bodu C do rovnice dostaneme $c = -8$. Rovnica priamky: $x + 7y - 8 = 0$.

c) Rovnobežné priamky majú rovnaké smernice. Smernica priamky AB je: $k = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = 7$.

Smernicová rovnica má tvar $y = kx + q$, $y = 7x + q$, priamka prechádza bodom C , jeho súradnice vyhovujú rovnici priamky, $1 = 7 + q \Rightarrow q = -6$. Rovnica priamky je $y = 7x - 6$.

Príklad 5:

Zistite, či parametrické vyjadrenie $x = -t$, $y = 3 + t$, $t \in R$, určuje tú istú priamku ako parametrické vyjadrenie $x = 2 - s$, $y = 1$, $s \in R$.

Riešenie: Ak ide o vyjadrenie tej istej priamky, každý bod jednej priamky je totožný s bodom druhej priamky. To znamená, že ich súradnice budú rovnaké. Teda $x = -t = 2 - s$,

$y = 3 + t = 1$. Vyjadríme jeden parameter pomocou druhého z obidvoch rovníc, $t = s - 2$ a $t = -2$. Nedostali sme rovnaké vzťahy medzi t a s , to znamená, že ide o parametrické vyjadrenie dvoch rôznych priamok.

Príklad 6:

Dané sú body $A[5,1,3]$, $B[6,2,1]$.

- Napíšte rovnicu priamky AB .
- Napíšte rovnicu priamky, ktorá prechádza bodom A a je rovnobežná s osou x .

Riešenie: a) V priestore je priamka určená len parametrickou rovnicou $X = A + k\mathbf{s}$, $k \in R$, $\mathbf{s} = B - A = [1,1,-2]$ je smerový vektor priamky.

Priamka $AB: x = 5 + k, y = 1 + k, z = 3 - 2k, k \in R$.

b) Ak je priamka rovnobežná s osou x , majú tieto priamky rovnaké smerové vektory.

Najvýhodnejšie je vziať smerový vektor osi x , pre ktorý platí $\mathbf{s} = [1, 0, 0]$.

Rovnica priamky p je $x = 5 + t, y = 1, z = 3, t \in R$.

Príklad 7:

Napíšte parametrickú a všeobecnú rovnicu roviny $\rho = ABC$, ak $A[4, 0, 0], B[2, 2, 0], C[0, 1, 1]$.

Riešenie: Parametrická rovnica roviny má tvar $X = A + k\mathbf{u} + t\mathbf{v}, k, t \in R$, kde

$\mathbf{u} = B - A = [-2, 2, 0]$ a $\mathbf{v} = C - A = [-4, 1, 1]$ sú smerové, lineárne nezávislé vektory roviny.

Platí $\mathbf{u} \neq k\mathbf{v}$, body ABC určujú rovinu a parametrická rovnica je:

$$x = 4 - 2k - 4t, y = 2k + t, z = t, \quad k, t \in R.$$

Všeobecná rovnica roviny má tvar $ax + by + cz + d = 0$.

1. spôsob: Môžeme ju získať vylúčením parametra z parametrických rovníc. Keď vynásobíme rovnicu pre z tromi a sčítame s rovnicou pre x a y , dostaneme rovnicu $x + y + 3z - 4 = 0$.

2. spôsob: Normálový vektor roviny je vektorovým súčinom dvoch smerových vektorov (je kolmý na obidva smerové vektory), $\mathbf{n} = [2, 2, 6]$.

$\rho: 2x + 2y + 6z + d = 0, A \in \rho \Rightarrow 8 + d = 0, d = -8, 2x + 2y + 6z - 8 = 0$ (podelíme 2).

Rovnica je $x + y + 3z - 4 = 0$.

Príklad 8:

Napíšte všeobecnú rovnicu roviny ρ , ktorá prechádza bodom $A[2, -1, 3]$ a je kolmá na rovinu $\alpha: x + y - z - 2 = 0$ a súčasne na rovinu $\beta: 2x + 2y + 3z - 3 = 0$.

Riešenie: Rovina ρ je kolmá na rovinu, ak obsahuje priamku, ktorá je kolmá na túto rovinu.

Preto normálový vektor roviny α a roviny β leží v rovine ρ . To znamená, že vektory $\mathbf{n}_\alpha, \mathbf{n}_\beta$ sú smerovými vektormi roviny ρ . Preto $\mathbf{n}_\rho = \mathbf{n}_\alpha \times \mathbf{n}_\beta = [5, -5, 0]$.

Rovnica $\rho: 5x - 5y + 0z + d = 0, A \in \rho \Rightarrow d = -15, 5x - 5y - 15 = 0$ (podelíme 5).

Rovnica roviny je $x - y - 3 = 0$.

Príklad 9:

Napíšte všeobecnú rovnicu priamky p , ktorá prechádza bodom $A[2, 0]$ a s kladnou polosou x zvierá uhol 60° . Určte aj smernicu priamky.

Riešenie: Smernica priamky p je číslo $k = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$, smernicová rovnica priamky p je $y = \sqrt{3}x + q$, $A \in p \Rightarrow 0 = \sqrt{3} \cdot 2 + q$, $q = -2\sqrt{3}$, $y = \sqrt{3}x - 2\sqrt{3}$. Upravíme na všeobecnú rovnicu: $\sqrt{3}x - y - 2\sqrt{3} = 0$, po vynásobení $\sqrt{3}$ dostaneme rovnicu $3x - \sqrt{3}y - 6 = 0$.

Príklad 10:

Určte súradnice bodu C ležiaceho na osi x , ak C je vrchol trojuholíka ABC , ktorý má obsah $S = 2$ a vrcholy $A[2,1], B[3,2]$.

Riešenie: Ak bod C leží na osi $x \Rightarrow C[x,0]$. Obsah trojuholníka vieme vypočítať pomocou vektorov $\mathbf{u} = B - A = [1,1]$, $\mathbf{v} = C - A = [x-2, -1]$. Keďže vektorový súčin $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ vieme počítat len v priestore, vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ vložíme do priestoru tak, že im priradíme tretiu súradnicu rovnú

0, $\mathbf{u} = [1,1,0]$, $\mathbf{v} = [x-2, -1, 0]$, $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = [0, 0, 1-x]$, $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = \sqrt{(1-x)^2} = |1-x|$. $S = 2$ a

súčasne $S = \frac{|1-x|}{2}$, teda $|1-x| = 4$. Z geometrického hľadiska hľadáme také číslo x ,

ktorého vzdialenosť od čísla 1 je rovná 4. Sú to dve čísla $x = -3$ a $x = 5$. Body vyhovujúce úlohe sú dva, $C_1[-3,0]$ a $C_2[5,0]$.

Príklad 11:

Dané sú dve strany rovnobežníka rovnicami $8x + 3y + 1 = 0$ a $2x + y - 1 = 0$ a uhlopriečka rovnicou $3x + 2y + 3 = 0$. Vypočítajte súradnice vrcholov rovnobežníka.

Riešenie: Dve strany, ktoré ležia na priamkach p a q sú susedné, lebo nie sú vzájomne rovnobežné. Preto napr. $B = p \cap q$. Riešime sústavu rovníc

$$\begin{aligned} 8x + 3y + 1 &= 0, \\ 2x + y - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Riešením je bod $B[-2,5]$.

Bod $A = u \cap p$, $8x + 3y + 1 = 0$ a súčasne $3x + 2y + 3 = 0$, riešením je bod $A[1,-3]$.

Bod $C = u \cap q$, $2x + y - 1 = 0$, a súčasne $3x + 2y + 3 = 0$, riešením je bod $C[5,-9]$.

Na zistenie súradníc bodu D použijeme postup ako v príklade č.3, $D = A + C - B$, bod $D[8,-17]$.

Príklad 12:

Dané sú priamky $p: x = 1 - 2t, y = 3 + t, t \in \mathbb{R}$ a $q: 2x - y + 6 = 0$. Určte vzájomnú polohu priamok a ak sú rôznobežné, určte ich priesečník.

Riešenie: Ak je jedna priamka určená parametrickou a druhá všeobecnou rovnicou je výhodné predpokladať, že majú spoločný bod. Jeho súradnice vyhovujú rovniciam obidvoch priamok. Preto do rovnice priamky q dosadíme za x a y vyjadrenie priamky p :

$$2(1-2t) - (3+t) + 6 = 0 \Rightarrow -5t + 5 = 0 \Rightarrow t = 1.$$

Dostali sme lineárnu rovnicu o jednej neznámej. Ak existuje jediné riešenie tejto rovnice (ako v našom prípade $t = 1$), priamky sú rôznobežné. Ak existuje nekonečne veľa riešení ($0t = 0$), priamky sú totožné. Ak rovnica nemá riešenie ($0t \neq 0$), priamky sú rovnobežné a rôzne. Súradnice spoločného bodu vypočítame dosadením $t = 1$ do rovnice priamky p , $x = 1 - 2$, $y = 3 + 1$, spoločný bod je $R[-1, 4]$.

Príklad 13:

Určte vzájomnú polohu rovín $\alpha: 2x - 5y + 4z - 10 = 0$ a $\beta: x - y - z - 2 = 0$, ak sú rôznobežné, určte ich priesečnicu.

Riešenie: Použijeme normálové vektory rovín $\mathbf{n}_\alpha[2, -5, 4]$ a $\mathbf{n}_\beta[1, -1, 1]$. Platí $\mathbf{n}_\alpha \neq \mathbf{n}_\beta$, roviny α a β sú rôznobežné a majú spoločnú priamku $p = \alpha \cap \beta$. V priestore má priamka len parametrickú rovnicu, riešime sústavu dvoch rovníc o troch neznámych. Neznámych je o jednu viac ako rovníc, preto si jednu neznámu zvolíme za parameter. Nech $z = t$, $t \in R$. Potom $2x - 5y + 4t - 10 = 0$ a $x - y - t - 2 = 0$, dostaneme $y = -2 - 2t$, $x = 3t$. Rovnica spoločnej priamky je: $x = 3t$, $y = -2 - 2t$, $z = t$, $t \in R$.

Príklad 14:

Je daná priamka $p: x = 1 + 6t$, $y = 3 + at$, $z = b - 10t$, $t \in R$ a rovina $\alpha: 3x - 2y + z - 1 = 0$. Zistite pre aké čísla $a, b \in R$ je

- priamka p rovnobežná s rovinou α ,
- uhol priamky p od roviny $\alpha = 30^\circ$.

Riešenie: a) Priamka p je rovnobežná s rovinou $\alpha \Leftrightarrow \mathbf{s}_p \cdot \mathbf{n}_\alpha = 0$ a $p \cap \alpha = \emptyset$, to znamená, že určujúci bod $A[1, 3, b]$ priamky p neleží v rovine α . Vektory $\mathbf{s}_p[6, a, -10]$, $\mathbf{n}_\alpha[3, -2, 1]$, $\mathbf{s}_p \cdot \mathbf{n}_\alpha = 18 - 2a - 10$, $8 - 2a = 0$, teda $a = 4$. Dosadením súradníc bodu A do ľavej strany rovnice roviny α dostávame výraz $3 - 6 + b - 1 = b - 4$.

Tento musí byť rôzny od nuly ($A \notin \alpha \Rightarrow b - 4 \neq 0$, $b \neq 4$). Riešením je číslo $a = 4$, $b \neq 4$.

b) Uhol priamky od roviny vypočítame zo vzťahu

$$\sin \alpha = \left| \cos(\angle \mathbf{n}_\alpha, \mathbf{s}_p) \right| = \frac{|8 - 2a|}{\sqrt{14}\sqrt{a^2 + 136}}.$$

$$\frac{1}{2} = \frac{|8-2a|}{\sqrt{14}\sqrt{a^2+136}} \Rightarrow \sqrt{14}\sqrt{a^2+136} = 2 \cdot |8-2a|$$

Po úprave dostávame kvadratickú rovnicu $2a^2 - 128a - 1648 = 0$, ktorej diskriminant

$D = 7392 > 0$, preto má dve riešenia: $a_1 = 74,9$ a $a_2 = -10,95$, pritom b je ľubovoľné reálne číslo.

Príklad 15:

V súmernosti určenej rovinou $\alpha: x - 2y + 3z - 21 = 0$ určte obraz bodu $A[0,2,-1]$.

Riešenie: Bod A' súmerný k bodu A podľa roviny α leží na priamke $k \perp \alpha$ a $A \in k$. Body A a A' sú od roviny α rovnako vzdialené, pričom stred úsečky AA' je bod $S \in k \cap \alpha$.

Pretože $k \perp \alpha$, normálový vektor roviny α je smerovým vektorom priamky k . Parametrická rovnica priamky $k: x = t, y = 2 - 2t, z = -1 + 3t, t \in \mathbb{R}$.

Nájďme bod S , jeho súradnice vyhovujú rovniciam priamky k aj roviny α :

$$t - 2(2 - t) + 3(-1 + 3t) - 21 = 0,$$

z toho $t = 2$. Bod $S[2,-2,5]$ je stredom úsečky AA' , $S = \frac{A + A'}{2} \Rightarrow A' = 2S - A, A'[4,-6,11]$.

Príklad 16:

Vypočítajte uhol priamok $p: y = -\frac{2}{3}x + 5$ a $q: y = \frac{3}{2}x - 3$.

Riešenie: Priamky sú určené smernicovými rovnicami. Smernica priamky p je $k_1 = -\frac{2}{3}$ a

smernica priamky q je $k_2 = \frac{3}{2}$. Platí $k_1 \cdot k_2 = -1$, preto sú priamky na seba kolmé, zvierajú

uhol 90° .

Príklad 17:

Dané sú vrcholy štvorstena $A[6,0,0], B[0,5,0], C[5,6,0], D[2,3,8]$. Určte

a) uhol priamok AB a CD ,

b) uhol roviny ABD a priamky CD .

Riešenie: a) Uhol dvoch priamok vypočítame pomocou ich smerových vektorov. Smerový vektor priamky AB je $\mathbf{u} = B - A = [-6,5,0]$ a priamky CD je vektor $\mathbf{v} = D - C = [-3,-3,8]$.

Pre ich uhol platí nasledujúci vzťah:

$$\cos \alpha = \frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|}{|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|} = \frac{|18 - 15 + 0|}{\sqrt{36 + 25} \cdot \sqrt{9 + 9 + 64}} = \frac{3}{\sqrt{61}\sqrt{82}} \Rightarrow \alpha = 87^\circ 35'.$$

b) Uhol roviny a priamky počítame pomocou normálového vektora roviny a smerového vektora priamky, $\mathbf{s} = D - C = [-3, -3, 8]$. Musíme určiť normálový vektor roviny ABD .

Nech $\mathbf{u} = B - A = [-6, 5, 0]$ a $\mathbf{v} = D - B = [-4, 3, 8]$, $\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$, $\mathbf{n} = [40, 48, 2]$. Namiesto neho môžeme použiť aj vektor $\frac{\mathbf{n}}{2} = [20, 24, 1]$. Uhol roviny a priamky vypočítame zo vzťahu

$$\sin \alpha = |\cos(\angle \mathbf{n}, \mathbf{s})| = \frac{|-60 - 72 + 8|}{\sqrt{9 + 9 + 64} \sqrt{400 + 576 + 1}} \Rightarrow \alpha = 25^\circ 45'.$$

Príklad 18:

Vypočítajte uhol rovín $\alpha: 2x + y - z + 1 = 0$ a $\beta: x - y + z = 0$.

Riešenie: Použijeme normálové vektory rovín $\mathbf{n}_\alpha [2, 1, -1]$ a $\mathbf{n}_\beta [1, -1, 1]$. Platí:

$$\cos \phi = \frac{|2 - 1 - 1|}{\sqrt{4 + 1 + 1} \sqrt{1 + 1 + 1}} = 0 \Rightarrow \phi = 90^\circ.$$

Príklad 19:

Vypočítajte vzdialenosť bodu $M[8, -3]$ od priamky $p = AB$, $A[1, 1]$, $B[3, 2]$.

Riešenie: Vzdialenosť bodu od priamky v rovine môžeme počítat zo vzťahu

$$|M, p| = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \text{ Potrebujeme poznať všeobecnú rovnicu priamky } p. \text{ Smerový vektor}$$

$\mathbf{s} = B - A = [2, 1]$, pre normálový vektor platí $\mathbf{n} = [1, -2] \Rightarrow p: x - 2y + c = 0$. Pretože

$A \in p \Rightarrow 1 - 2 + c = 0, c = 1$, priamka má rovnicu $x - 2y + 1 = 0$ a platí, že

$$|M, p| = \frac{|8 + 6 + 1|}{\sqrt{1 + (-2)^2}} = \frac{15}{\sqrt{5}} = \frac{15\sqrt{5}}{5} = 3\sqrt{5}.$$

Príklad 20:

Určte vzdialenosť bodu $C[1, 4, 5]$ od priamky $p: x = 1 - t, y = 2 + 3t, z = 4 + t, t \in \mathbb{R}$.

Riešenie:

1. spôsob: Vzdialenosť bodu C od priamky p sa rovná vzdialenosti bodu C od päty kolmice vedenej bodom C na priamku p . Päta kolmice P leží na priamke p , má súradnice vyhovujúce jej rovniciam $P[1 - t, 2 + 3t, 4 + t]$. Vektor $\mathbf{n} = C - P$ je kolmý na smerový vektor priamky p , $\mathbf{s}_p [-1, 3, 1]$, preto ich skalárny súčin sa rovná 0. Vektor $\mathbf{n} [t, 2 - 3t, 1 - t]$,

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{s}_p = 0 \Rightarrow -t + 6 - 9t + 1 - t = 0 \Rightarrow t = \frac{7}{11}.$$

Veľkosť vektora $\mathbf{n}$ je hľadaná vzdialenosť bodu C od priamky p , $\mathbf{n} = \left[\frac{7}{11}, \frac{1}{11}, \frac{4}{11} \right]$,

$$|\mathbf{n}| = \sqrt{\frac{49+1+16}{121}} = \sqrt{\frac{66}{121}} = \frac{\sqrt{66}}{11}.$$

2. spôsob: Bodom C vedieme rovinu ρ kolmú na priamku p , $\rho \cap p = \{P\}$, $|C, p| = |C, P|$.

Smerový vektor priamky je normálový vektor roviny, $\mathbf{n}_\rho = \mathbf{s}_p = [-1, 3, 1]$. Rovnica roviny je:

$$-x + 3y + z + d = 0,$$

$C \in \rho \Rightarrow d = -16$, $x - 3y - z + 16 = 0$. Bod P má súradnice vyhovujúce rovnici roviny aj

priamky, riešením sústavy dostaneme bod $P \left[\frac{4}{11}, \frac{43}{11}, \frac{51}{11} \right]$, $|C, P| = \frac{\sqrt{66}}{11}$.

Príklad 21:

Vypočítajte vzdialenosť rovín $\alpha: 2x + y + 3z + 1 = 0$ a $\beta: 4x + 2y + 6z + 6 = 0$.

Riešenie: Vzdialenosť rovín vieme počítať len vtedy, ak sú roviny rovnobežné. Normálové vektory sú $\mathbf{n}_\alpha [2, 1, 3]$ a $\mathbf{n}_\beta [4, 2, 6]$. Platí $\mathbf{n}_\beta = 2 \cdot \mathbf{n}_\alpha \Rightarrow \alpha \parallel \beta$. Z roviny α vyberieme ľubovoľný bod a jeho vzdialenosť od roviny β je rovná vzdialenosti rovín α a β . Ak $A \in \alpha$, potom jeho súradnice vyhovujú rovnici roviny α .

Nech $x = 1$, $y = 0$ (zvolíme ľubovoľne) a vypočítame z , $2 + 3z + 1 = 0$, $z = -1$, $A[1, 0, -1]$.

$$\text{Vzdialenosť } |\alpha, \beta| = |A, \beta| = \frac{|4 + 0 - 6 + 6|}{\sqrt{16 + 4 + 36}} = \frac{4}{\sqrt{56}} = \frac{\sqrt{14}}{7}.$$

Príklad 22:

Napíšte rovnicu kružnice opísanej trojuholníku ABC , ak $A[-1, 3]$, $B[0, 2]$, $C[1, -1]$, určte súradnice stredu a polomer.

Riešenie:

1. spôsob: Všeobecná rovnica kružnice je $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$. Ak body ležia na kružnici, ich súradnice vyhovujú rovnici kružnice. Dostaneme sústavu

$$-a + 3b + c = -10$$

$$2b + c = -4$$

$$a - b + c = -2,$$

riešením dostaneme hodnoty $a = 8, b = 2, c = -8$, rovnica je $x^2 + y^2 + 8x + 2y - 8 = 0$.

Upravíme ju na stredový tvar doplnením na úplný štvorec:

$$(x^2 + 8x + 16) + (y^2 + 2y + 1) = 8 + 1 + 16,$$

$$(x + 4)^2 + (y + 1)^2 = 5^2,$$

stred $S[-4, -1]$ a $r = 5$.

2.spôsob: Stred kružnice opísanej dostaneme ako priesečník osí strán trojuholníka.

Vyjadríme všeobecné rovnice osi strany $AB : x - y + 3 = 0$ a osi strany $BC : x - 3y + 1 = 0$.

Bod S je ich priesečníkom, riešením sústavy rovníc

$$x - 3y + 1 = 0$$

$$x - y + 3 = 0$$

je bod $S[-4, -1]$. Polomer $r = |S, B| = \sqrt{16 + 9} = 5$.

Rovnica kružnice je $(x + 4)^2 + (y + 1)^2 = 5^2$.

Príklad 23:

Daná je kružnica $x^2 + y^2 = 13$ a priamka $p : x - 5y + 13 = 0$. Nájdite rovnice dotyčníc ku kružnici v spoločných bodoch priamky a kružnice.

Riešenie: Najskôr nájdeme spoločné body. Budeme riešiť sústavu rovníc:

$$x - 5y + 13 = 0$$

$$x^2 + y^2 = 13.$$

Z lineárnej rovnice vyjadríme napr. premennú $x = 5y - 13$ a dosadíme do rovnice kružnice,

dostaneme kvadratickú rovnicu $y^2 - 5y + 6 = 0$, ktorú vieme riešiť. Rozložíme ju na súčin

$(y - 3) \cdot (y - 2) = 0$. Priesečníkmi sú body $T_1[2, 3]$ a $T_2[-3, 2]$. Rovnica dotyčnice ku kružnici

v bode $T[x_0, y_0]$ má tvar $xx_0 + yy_0 = 13$.

Dotyčnica v bode T_1 je $2x + 3y - 13 = 0$, v bode T_2 je $-3x + 2y - 13 = 0$.

Príklad 24:

Nájdite všetky čísla a tak, aby priamka $p : ax + 4y - 25 = 0$ bola sečnicou kružnice

$$x^2 + y^2 = 25.$$

Riešenie: Priamka je sečnicou kružnice, ak má s ňou spoločné dva rôzne body. Riešením sústavy:

$$x^2 + y^2 = 25$$

$$ax + 4y - 25 = 0$$

musia byť dve rôzne dvojice $[x, y]$ reálnych čísel. Z lineárnej rovnice vyjadríme $y = \frac{25 - ax}{4}$

a dosadíme do rovnice kružnice. Získame kvadratickú rovnicu $(16 + a^2)x^2 - 50ax + 225 = 0$.

Aby mala dve rôzne riešenia, musí platiť, že $D > 0$. $D = 1600a^2 - 14400 > 0 \Leftrightarrow a^2 > 9$, teda $|a| > 3$. Tejto nerovnici vyhovujú čísla $a \in (-\infty, -3) \cup (3, \infty)$.

Príklad 25:

Napíšte rovnice dotyčníc ku kružnici $x^2 + y^2 = 25$ vedených z bodu $A[7,1]$ a vypočítajte ich uhol.

Riešenie: Rovnica dotyčnice v bode $T[x_0, y_0]$ ku kružnici k má tvar $xx_0 + yy_0 = 25$. Bod A je

tiež bodom tejto dotyčnice, dosadíme jeho súradnice za x, y . Platí $7x_0 + y_0 - 25 = 0$, odkiaľ

$y_0 = 25 - 7x_0$. Pretože bod $T[x_0, y_0]$ je bod kružnice, musí spĺňať aj jej rovnicu $x_0^2 + y_0^2 = 25$.

Riešením sústavy rovníc $y_0 = 25 - 7x_0$, $x_0^2 + y_0^2 = 25$ dostaneme dotykové body $T_1[3,4]$ a

$T_2[4,-3]$. Rovnice príslušných dotyčníc sú pre $T_1 : x \cdot 3 + y \cdot 4 = 25 \Rightarrow 3x + 4y - 25 = 0$, jej

smernica $k_1 = -\frac{3}{4}$. Pre $T_2 : x \cdot 4 + y \cdot (-3) = 25 \Rightarrow 4x - 3y - 25 = 0$, jej smernica $k_2 = \frac{4}{3}$.

Platí $k_1 \cdot k_2 = -1$, teda dotyčnice sú na seba kolmé.

Príklad 26:

Daná je elipsa $5x^2 + 9y^2 = 45$ a bod $M[0,-3]$. Dokážte, že bod M je vonkajší bod elipsy.

Riešenie: Pre vonkajší bod elipsy platí $b^2x^2 + a^2y^2 > a^2b^2$. Dosadíme súradnice bodu M do ľavej strany rovnice elipsy: $5 \cdot 0 + 9 \cdot (-3) = 81$. Platí $81 > 45$, teda bod M je z vonkajšej oblasti elipsy.

Príklad 27:

Napíšte rovnicu elipsy, ktorá prechádza bodmi $M[2,3], N[-1,-4]$ a osi má na súradnicových osiach.

Riešenie: Ak má osi na súradnicových osiach, stred je $S[0,0]$ a rovnica má tvar $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$,

$a > b > 0$. Ak body M, N ležia na elipse, ich súradnice vyhovujú rovnici elipsy.

$$M : \frac{4}{a^2} + \frac{9}{b^2} = 1 \quad \text{a} \quad N : \frac{1}{a^2} + \frac{16}{b^2} = 1.$$

Riešením sústavy dvoch rovníc o dvoch neznámých a, b dostaneme $a = \sqrt{\frac{55}{7}}, b = \sqrt{\frac{55}{3}},$

$$\sqrt{\frac{55}{3}} > \sqrt{\frac{55}{7}} \Rightarrow \text{hlavná os elipsy leží na osi } y \text{ a rovnica má tvar } \frac{x^2}{\frac{55}{7}} + \frac{y^2}{\frac{55}{3}} = 1.$$

Príklad 28:

Napíšte rovnice tých dotýčníc elipsy $9x^2 + 16y^2 = 144$, ktoré majú smernicu $k = 1$.

Riešenie: Smernicová rovnica dotýčnice je $y_0 = kx_0 + q$, kde $T[x_0, y_0]$ je dotykový bod elipsy. Po dosadení $k = 1$ dostávame $y_0 = x_0 + q$. Dotykový bod je aj bodom elipsy, preto platí rovnosť $9x_0^2 + 16y_0^2 = 144$. Riešime sústavy dvoch rovníc o dvoch neznámých x_0, y_0 .

Dosadením za y_0 dostaneme kvadratickú rovnicu $25x_0^2 + 32qx_0 + (16q^2 - 144) = 0$.

Dotýčnica má s elipsou práve jeden spoločný bod, to znamená, že kvadratická rovnica musí mať práve jedno riešenie. To bude vtedy, ak $D = 0$. $D = 14400 - 24q^2 = 0 \Leftrightarrow q^2 = 25$, teda $|q| = 5$. Existujú dve riešenia, $q = \pm 5$.

Rovnice dotýčníc sú: $y = x + 5 \Rightarrow x = y - 5 = 0$ alebo $y = x - 5 \Rightarrow x - y - 5 = 0$.

Príklad 29:

Napíšte rovnicu hyperboly, ktorá má ohniská $F[-10, 2], G[16, 2]$ a veľkosť hlavnej osi je 24.

Riešenie: Priamka FG určuje hlavnú os hyperboly, ktorá je rovnobežná s osou x . Stred úsečky FG je stred hyperboly, $S = \frac{F+G}{2}, S[3, 2], |F, S| = |G, S| = e = 13, 2a = 24, a = 12$.

Pre hyperbolu platí $a^2 + b^2 = e^2 \Rightarrow 144 + b^2 = 169, b^2 = 25, b = 5$. Rovnica hyperboly má

$$\text{tvar } \frac{(x-3)^2}{144} - \frac{(y-2)^2}{25} = 1.$$

Príklad 30:

Napíšte rovnicu hyperboly, ktorá má ohniská v hlavných vrchoch a vrcholy v ohniskách elipsy s rovnicou $x^2 + 2y^2 = 6$.

Riešenie: Upravíme rovnicu elipsy do tvaru $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$, jej stred je bod $S[0, 0], a = \sqrt{6},$

$b = \sqrt{3}, e^2 = a^2 - b^2, e^2 = 3, e = \sqrt{3}$. Hľadáme hyperbolu, ktorá má hlavné vrcholy v bodoch

$A[-\sqrt{3},0], B[\sqrt{3},0]$ a ohniská v bodoch $F[-\sqrt{6},0], G[\sqrt{6},0] \Rightarrow a = \sqrt{3}, e = \sqrt{6}$. Pre hyperbolu platí $e^2 = a^2 + b^2, b^2 = 6 - 3 = 3$.

Rovnica hyperboly je $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{3} = 1$. Ide o rovnoosú hyperbolu ($a = b$).

Príklad 31:

Daná je hyperbola $16x^2 - 25y^2 = 400$. Napíšte rovnice dotyčníc hyperboly, ktoré sú kolmé na priamku $p: x + y + 10 = 0$.

Riešenie: Priamka kolmá na priamku p má normálový vektor kolmý na normálový vektor priamky $p: \mathbf{n}_p[1,1]$. Je to napríklad vektor $\mathbf{n}[1,-1]$ ($\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_p = 0$). Dotyčnica má rovnicu $x - y + c = 0$ a s hyperbolou má práve jeden spoločný bod. Riešením sústavy

$$\begin{aligned} x - y + c &= 0 \\ 16x^2 - 25y^2 &= 400 \end{aligned}$$

musí byť práve jedna dvojica $[x, y]$ reálnych čísel. Diskriminant $D = 40^2 c^2 - 120^2 = 0$, $c^2 = 9 \Rightarrow c = \pm 3$. Existujú dve dotyčnice kolmé na priamku $p: x - y + 3 = 0$ a $x - y - 3 = 0$.

Príklad 32:

Určte vrchol, ohnisko, os a parameter paraboly určenej rovnicou $y^2 - 2y - 6x - 2 = 0$.

Riešenie: Všeobecnú rovnicu paraboly upravíme na vrcholový tvar rovnice doplnením na úplný štvorec pre premennú y :

$$y^2 - 2y + 1 = 6x + 2 + 1, (y - 1)^2 = 6x + 3, (y - 1)^2 = 6\left(x + \frac{1}{2}\right).$$

Vrchol $V\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$, os paraboly je rovnobežná s osou x , má rovnicu $y = 1$. Pre parameter

platí $2p = 6 \Rightarrow p = 3$, ohnisko je napravo od vrcholu vo vzdialenosti $\frac{p}{2}$ a má rovnakú

súradnicu y ako vrchol $x_F = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 1$, ohnisko je $F[1, 1]$.

Príklad 33:

Na parabole $y^2 - 10x - 2y - 9 = 0$ nájdite bod, ktorý má najmenšiu vzdialenosť od priamky $p: x - 3y + 18 = 0$.

Riešenie: Ak má priamka a parabola spoločné body, potom tieto majú najmenšiu vzdialenosť. Ak priamka nemá spoločné body s parabolou, potom hľadaným bodom bude

dotykový bod tej dotyčnice paraboly, ktorá je rovnobežná s danou priamkou. Upravíme rovnicu paraboly na vrcholový tvar, $(y-1)^2 = 10(x+1)$ (pozri predchádzajúci príklad). Nech je $T[x_0, y_0]$, rovnica dotyčnice k parabole je $(y-1)(y_0-1) = 5(x+1) + 5(x_0+1)$. Smernica danej priamky je $\frac{1}{3}$ a našej dotyčnice $\frac{5}{y_0-1}$. Preto $\frac{1}{3} = \frac{5}{y_0-1}$, $y_0 = 16$. Dotykový bod je aj bodom paraboly $(y_0-1)^2 = 10(x_0+1)$. Po dosadení za y_0 dostaneme $x_0 = \frac{43}{2}$. Hľadaným bodom je bod $T\left[\frac{43}{2}, 16\right]$.

Príklad 34:

Určte spoločné body paraboly $y^2 - 6x - 6y + 3 = 0$ a priamky $p: x - y + 4 = 0$.

Riešenie: Spoločné body majú súradnice vyhovujúce obidvom rovniciam. Z rovnice priamky p vyjadríme x , $x = y - 4$ a dosadíme do rovnice paraboly. Dostaneme kvadratickú rovnicu $y^2 - 12y + 27 = 0$. Jej riešením sú čísla $y = 9$ alebo $y = 3$. Priamka a parabola majú spoločné body $A[5, 9]$ a $B[-1, 3]$.

Príklad 35:

Znázorníte v rovine množinu bodov $[x, y]$, ktoré spĺňajú nerovnosti:

a) $(x-2)^2 + (y-2)^2 < 4$ a súčasne $y > x$,

b) $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{4} \leq 1$ a súčasne $|x| \geq 1$.

Riešenie:

a) Prvá nerovnica určuje vnútornú oblasť kružnice so stredom $S[2, 2]$ a polomerom $r = 2$. Druhá nerovnica určuje polrovinu nad priamkou určenou rovnicou $y = x$. Ich prienikom je časť vnútra kružnice.

b) Prvá nerovnica určuje vnútornú oblasť elipsy so stredom $S[1, 1]$, $a = 3$ a $b = 2$. Druhá nerovnica určuje množinu bodov $[x, y]$, pre ktoré $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ a $y \in \mathbb{R}$. Ich prienikom je časť vnútra elipsy.

Príklad 36:

Napíšte rovnicu guľovej plochy, ktorá má stred $S[4, 3, -1]$ a dotýka sa roviny

$$\tau: 2x + 6y + 3z + 5 = 0.$$

Riešenie: Rovnica guľovej plochy so stredom S je $(x-4)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = r^2$.

Potrebuje vypočítať polomer $r > 0$. Je to vzdialenosť stredu S od dotykovej roviny:

$$|S, \tau| = r, \text{ teda } \frac{|2 \cdot 4 + 6 \cdot 3 + 3 \cdot (-1) + 5|}{\sqrt{4 + 36 + 9}} = r \Rightarrow r = 4.$$

Rovnica guľovej plochy je $(x-4)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 16$.

Príklad 37:

Vypočítajte súradnice spoločných bodov guľovej plochy $(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 9$ a priamky $p: x = 3+t, y = 1-t, z = 1-2t, t \in \mathbb{R}$.

Riešenie: Aby sme zistili spoločné body, musíme vyriešiť sústavu rovníc

$$\begin{aligned} (x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 &= 9 \\ x &= 3+t \\ y &= 1-t \\ z &= 1-2t. \end{aligned}$$

Riešením sústavy dostaneme rovnicu $6t^2 - 6t = 0, 6t \cdot (t-1) = 0 \Rightarrow t = 0$ alebo $t = 1$. Existujú dva spoločné body, pre $t = 0$ bod $P[3,1,1]$ a pre $t = 1$ bod $Q[4,0,-1]$.

Cvičenia

1. Dané sú vektory $\mathbf{a}[2, -1, 3], \mathbf{b}[1, -2, 3], \mathbf{c}[3, 2, -4]$. Určte súradnice vektora $\mathbf{x}$ tak, aby súčasne platilo: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = -2, \mathbf{b} \cdot \mathbf{x} = 3, \mathbf{c} \cdot \mathbf{x} = 8$.

Výsledok: $\mathbf{x} \left[\frac{26}{15}, \frac{-101}{15}, \frac{-61}{15} \right]$.

2. Určte vektor $\mathbf{v}$ kolmý na vektor $\mathbf{u} = [-2, 3, -1]$.

Výsledok: $\mathbf{v} = \left[\frac{3y-z}{2}, y, z \right], y, z \in \mathbb{R}$.

3. Dané sú body $A[-1, 1], B[1, 4], C[-\sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}]$.

a) Napíšte parametrickú rovnicu úsečky AB a vypočítajte jej veľkosť,

b) Napíšte všeobecnú rovnicu priamky, ktorá obsahuje výšku na stranu AB ,

c) Vypočítajte obsah trojuholníka ABC .

Výsledky: a) $x = -1 + 2k, y = 1 + 3k, k \in \langle 0, 1 \rangle, |AB| = \sqrt{13},$ b) $2x + 3y - 6 - \sqrt{3} = 0,$

c) $S = \frac{5\sqrt{3}-1}{2}.$

4. Dané sú body $A[1,2,-5]$, $B[0,1,5]$, $C[2,1,3]$. Napíšte rovnicu priamky, ktorá prechádza bodom C a je rovnobežná s priamkou AB .

Výsledok: $x = 2 - k$, $y = 1 - k$, $z = 3 + 10k$, $k \in R$.

5. Napíšte všeobecnú rovnicu roviny ρ určenej bodmi $A[2,0,-3]$, $B[-1,1,5]$, $C[0,-2,-1]$.

Výsledok: $\rho: 9x - 5y + 4z - 6 = 0$.

6. Napíšte všeobecnú rovnicu roviny, ktorá prechádza bodom $A[6,3,2]$ a je kolmá na priamku $p: x = 0$, $y = -1 + 7t$, $z = 1 + 6t$, $t \in R$.

Výsledok: $7y + 6z - 33 = 0$.

7. Zistíte vzájomnú polohu priamok a ak majú spoločný bod, určte jeho súradnice.

a) $p: x = 2 + t$, $y = -9 - t$, $t \in R$, $q: x = 1 + 5k$, $y = -1 + 2k$, $k \in R$,

b) $p: x + 2y - 3 = 0$, $q: x = 1 + 2k$, $y = 2 - k$, $k \in R$.

Výsledky: a) rôznobežné, $P[-4, -3]$, b) rovnobežné.

8. Nájdite vrcholy trojuholníka, ak strany ležia na priamkach určených rovnicami $x + 3y = 0$, $x = 3$, $x - 2y + 3 = 0$.

Výsledok: $A[3, -1]$, $B[3, 3]$, $C\left[-\frac{9}{5}, \frac{3}{5}\right]$.

9. V rovnici $3x + by - 2 = 0$ určte parameter b tak, aby bod $M[2, 2]$ ležal na danej priamke.

Výsledok: $b = -2$.

10. Napíšte rovnicu osi úsečky AB , $A[5, 7]$, $B[3, 1]$.

Výsledok: $x + 3y - 16 = 0$.

11. Napíšte rovnicu roviny α , ktorá prechádza bodmi $A[2, 3, 4]$, $B[3, 4, 5]$ a je rovnobežná s priamkou $p: x = 1 + t$, $y = -3 + t$, $z = -1 + 2t$, $t \in R$.

Výsledok: $x - y + 1 = 0$.

12. Napíšte rovnicu roviny, ktorá prechádza bodmi $A[2, 3, 4]$, $B[3, 4, 5]$ a je kolmá na rovinu $2x - y - z + 5 = 0$.

Výsledok: $y - z + 1 = 0$.

13. Dané sú rovnice strán trojuholníka ABC : $x + y = 0$, $x - 2y + 3 = 0$, $5x + y - 18 = 0$.

Napíšte rovnice priamok na ktorých ležia výšky trojuholníka.

Výsledok: $x - y = 0$, $4x + 2y - 9 = 0$, $x - 5y + 6 = 0$.

14. Zistíte vzájomnú polohu rovín α a β . Ak sú rôznobežné, určte ich priesečnicu.

a) $\alpha: 4x + y - 2z + 1 = 0$, $\beta: 8x + 2y - 4z + 8 = 0$,

b) $\alpha: 2x + y - z + 2 = 0$, $\beta: x + y + z + 1 = 0$.

Výsledky: a) rovnobežné, b) rôznobežné, $\alpha \cap \beta: x = -1 + 2t, y = -3t, z = t, t \in R$.

15. Zistíte vzájomnú polohu priamky p a roviny ρ . Ak majú spoločný bod, aj jeho súradnice.

a) $p: x = 1 - t, y = 1 + t, z = 2 - t, t \in R, \rho: x - y - 2z - 1 = 0,$

b) $p: x = 2 + t, y = 1 + t, z = 3 - 2t, t \in R, \rho: x - y - z - 6 = 0.$

Výsledky: a) rovnobežné, b) rôznobežné, $p \cap \rho = \{P\}, P[6, 5, -5]$.

16. Napíšte rovnicu roviny, ktorá prechádza bodom $O[0, 0, 0]$ a je súčasne kolmá na roviny

$\alpha: x + y - z - 6 = 0$ a $\beta: x - z = 0$.

Výsledok: $x + z = 0$.

17. Vypočítajte vzdialenosť:

a) priamky $p: x = -1 + 2t, y = 1 - t, z = 2 + 3t, t \in R$ od roviny $\tau: x + 5y + z - 3 = 0,$

b) roviny $\alpha: x + 2y + z - 3 = 0$ od roviny $\beta: 3x + 6y + 3z - 12 = 0.$

Výsledky: a) $\frac{\sqrt{3}}{3},$ b) $\frac{\sqrt{6}}{6}.$

18. Vypočítajte veľkosť strany rovnostranného trojuholníka, ktorého vrchol je $A = [-2, 2]$ a protiľahlá strana BC leží na priamke $x + y - 9 = 0$.

Výsledok: $a = 3\sqrt{6}.$

19. Vypočítajte uhol priamok p, q .

a) $p: 3x - y - 4 = 0, q: x = 3 + t, y = -1 - 2t, t \in R,$

b) $p: x = 1 - t, y = 2 + t, z = 3 - t, t \in R, q: x = 3 + k, y = -1 - k, z = 1 - 2k, k \in R.$

Výsledky: a) $45^\circ,$ b) $90^\circ.$

20. Napíšte rovnicu priamky, ktorá prechádza bodom $M[-3, 1]$ a s priamkou

$p: 4x - 2y - 1 = 0$ zvierá uhol $\alpha = 45^\circ$.

Výsledok: $x - 3y + 6 = 0, 3x + y + 8 = 0.$

21. Vypočítajte uhol rovín α a β .

a) $\alpha: x + y - z + 3 = 0, \beta: 2x - 2y + z + 5 = 0,$

b) $\alpha: 2x + y - z - 5 = 0, \beta: 2x - 3y + z - 1 = 0.$

Výsledky: a) $78^\circ 54',$ b) $90^\circ.$

22. Vypočítajte uhol priamky $p: x = 3 + t, y = 2 - t, z = 4, t \in R$ a roviny $\rho: y + z - 3 = 0$.

Výsledok: $30^\circ.$

23. Napíšte rovnicu priamky, ktorá prechádza bodom $A[1, 3]$ tak, že s priamkou

$p: 4y - 5 = 0$ zvierá uhol $\alpha = 45^\circ$.

Výsledok: $x + y - 4 = 0, x - y + 2 = 0.$

24. Určte rovnicu kružnice, ktorej priemer je úsečka AB , $A[-1,2]$, $B[1,4]$.

Výsledok: $x^2 + (y-3)^2 = 2$.

25. Určte stred a polomer kružnice:

a) $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$,

b) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 8 = 0$.

Výsledky: a) $S[-2,1]$, $r = 2$, b) nie je rovnicou kružnice.

26. Napíšte rovnicu kružnice, ktorá prechádza bodmi $A[0,1]$, $B[-1,1+\sqrt{5}]$ a jej stred leží na priamke $p: x+3y=0$.

Výsledok: $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 9$.

27. Napíšte rovnicu guľovej plochy, ktorá prechádza bodom $A[-1,4,2]$ a so stredom v bode $S[-1,2,3]$.

Výsledok: $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 5$.

28. Vypočítajte súradnice spoločných bodov guľovej plochy $(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 14$ a priamky $p: x=3+t, y=1-t, z=1-3t, t \in R$.

Výsledok: $[4,0,-2], \left[\frac{28}{11}, \frac{16}{11}, \frac{26}{11}\right]$.

29. Napíšte rovnicu dotýčnice kružnice v bode T :

a) $x^2 + y^2 = 25$, $T[4, y > 0]$,

b) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$, $T[1, y < 0]$.

Výsledky: a) $4x+3y-25=0$, b) $y=-5$.

30. Napíšte rovnicu dotýčnice ku kružnici $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 3 = 0$

a) rovnobežnej s priamkou $6x+8y-21=0$,

b) kolmej na priamku $4x+y-9=0$.

Výsledky: a) $3x+4y-37=0, 3x+4y+3=0$,

b) $x-4y+5+4\sqrt{17}=0, x-4y+5-4\sqrt{17}=0$.

31. Napíšte rovnicu dotýčnice ku kružnici $x^2 + y^2 - 2x - 15 = 0$ z bodu $P[17,0]$.

Výsledok: $x+\sqrt{15}y-17=0, x-\sqrt{15}y-17=0$.

32. Určte druh kuželosečky, jej stred, vrcholy, ohniská a veľkosti a, b, e, p :

a) $y^2 - 2y - 4x - 11 = 0$,

b) $4x^2 + 9y^2 + 16x - 18y - 11 = 0$,

c) $x^2 - y^2 + 2y - 5 = 0$.

Výsledky:

a) parabola, $V[-3,1]$, $F[-2,1]$, $p = 2$,

b) elipsa, $S[-2,1]$, $A[-5,1]$, $B[1,1]$, $C[-2,3]$, $D[-2,-1]$, $F[-2-\sqrt{5},1]$, $G[-2+\sqrt{5},1]$,

$a = 3, b = 2, e = \sqrt{5}$,

c) hyperbola, $S[0,1]$, $A[-2,1]$, $B[2,1]$, $F[-\sqrt{8},1]$, $G[\sqrt{8},1]$, $a = b = 2$, $e = \sqrt{8}$.

33. Napíšte rovnicu elipsy, ktorá prechádza bodmi $M\left[0,1+\frac{\sqrt{20}}{3}\right]$, $N[1,1]$ a stred je $S[-2,1]$.

Výsledok: $\frac{(x+2)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$.

34. Napíšte rovnicu dotyčnice k elipse $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$, ktorá je kolmá na priamku

$p: 2x - 2y + 3 = 0$.

Výsledok: $x + y + 3 = 0$, $x + y - 3 = 0$.

35. Napíšte rovnicu hyperboly, ktorej vrcholy sú ohniskami a ohniská vrcholmi elipsy s rovnicou $9x^2 + 16y^2 = 144$.

Výsledok: $9x^2 - 7y^2 = 63$.

36. Napíšte rovnicu hyperboly, ktorej vrcholy sú body $A[-4,3]$, $B[6,3]$ a veľkosť $e = 6$.

Výsledok: $\frac{(x-1)^2}{25} - \frac{(y-3)^2}{11} = 1$.

37. Napíšte rovnicu dotyčnice ku hyperbole $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$, ktorá je rovnobežná s priamkou

$p: x - y - 7 = 0$.

Výsledok: $x - y + 3 \cdot \sqrt{\frac{6}{5}} = 0$, $x - y - 3 \cdot \sqrt{\frac{6}{5}} = 0$.

38. Napíšte rovnicu dotyčnice ku hyperbole $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ v bode $T[x > 0, 2]$.

Výsledok: $2\sqrt{2}x - 3y - 6 = 0$.

39. Napíšte rovnicu paraboly, ktorej os je rovnobežná s osou y a prechádza bodmi $A[1,2]$, $B[3,1]$, $C[7,5]$.

Výsledok: $(x-3)^2 = 4(y-1)$.

40. Napíšte rovnicu paraboly, ktorá má vrchol v bode $V[-2, -3]$, prechádza bodom $M[1, -6]$ a os má rovnobežnú s osou x .

Výsledok: $(y + 3)^2 = 3(x + 2)$.

41. Napíšte rovnicu dotyčnice paraboly $y^2 - 16x - 4y - 12 = 0$ vedenú z bodu $P[-7, 0]$.

Výsledok: $x - y + 7 = 0, 2x + 3y + 14 = 0$.

42. Zistíte spoločné body paraboly $y^2 - 2y - 4x - 7 = 0$ a priamky $p: x - y + 2 = 0$.

Výsledok: $A[1 + 2\sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2}], B[1 - 2\sqrt{2}, 3 - 2\sqrt{2}]$.

43. Zobraďte množinu bodov $[x, y]$ v rovine, ktoré spĺňajú nerovnosti:

a) $x^2 + y^2 \leq 9, |y| \leq 1,$

b) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} \leq 1, y > x.$

Výsledky: a) prienik kruhu so stredom $S[0, 0]$ a polomerom $r = 3$ a pásu so šírkou 2, ktorého osou je os x ,

b) prienik elipsy so stredom $S[0, 0]$, $a = 4$, $b = 3$ a jej vnútornej časti s polrovinou, ležiacou nad priamkou $y = x$ (bez tejto priamky).

Obsah

1. Výrazy.....	5
1.1 Úpravy výrazov	5
Cvičenia.....	10
2. Rovnice.....	16
2.1 Lineárne a kvadratické rovnice	16
2.2 Iracionálne rovnice	19
2.3 Rovnice s absolútnou hodnotou	20
2.4 Iné typy rovníc.....	23
2.5 Rovnice s parametrom.....	24
2.6 Sústavy dvoch rovníc o dvoch neznámých	26
Cvičenia.....	28
3. Nerovnice	32
3.1 Lineárne a kvadratické nerovnice	32
3.2 Nerovnice s absolútnymi hodnotami	35
3.3 Iné typy nerovnic.....	38
Cvičenia.....	40
4. Funkcie	43
4.1 Funkcia a jej vlastnosti.....	43
Cvičenia.....	51
5. Exponenciálne a logaritmické funkcie	57
5.1 Exponenciálna funkcia	57
5.2 Exponenciálne rovnice a nerovnice	57
5.3 Logaritmická funkcia	58
5.4 Logaritmické rovnice a nerovnice	59
Cvičenia.....	73
6. Goniometrické funkcie.....	80
6.1 Goniometrické funkcie	80
6.2 Goniometrické rovnice a nerovnice	82
Cvičenia.....	89
7. Analytická geometria v rovine a priestore	93
7.1 Vektrová algebra	93
7.2 Analytické vyjadrenie priamok a rovín	95
7.3 Vzájomná poloha priamok a rovín	96
7.4 Metrické úlohy	97
7.5 Kuželosečky	98
Cvičenia.....	115

Zoznam použitej literatúry

1. RNDr. Ľubomír Marko, CSc. - RNDr. Vladimír Baláž, CSc. – RNDr. Jaroslav Červeňanský, CSc. – RNDr. Agnesa Dicsöová, CSc. – RNDr. Viera Grusková, CSc. – Doc. RNDr. Marián Halabrín, CSc. – RNDr. Eva Marková – RNDr. Ladislav Mišík, CSc.,- RNDr. Ružena Pekárková – PhDr. Mária Sabolová – RNDr. Jozef Fecenko, CSc.:
Príprava na univerzitné štúdium – Matematika 2. Vydavateľstvo STU, Bratislava: 1997.
2. Ivan Bušek, PhDr: Řešené maturitní úlohy z matematiky. Státní pedagogické nakladatelství, Praha: 1988.
3. Prof. RNDr. Blanka Kolibiarová, Csc – RNDr. Tibor Wallner: Príklady na opakovanie stredoškolskej matematiky. Alfa, Bratislava: 1990.
4. RNDr. Angela Handlovičová, CSc. – RNDr. Ladislav Mišík, CSc. – RNDr. Zdenko Schneider, CSc. – Doc. RNDr. Jozef Širáň, DrSc.: Riešené úlohy z matematiky. Vydavateľstvo STU, Bratislava: 1998.
5. Doc. RNDr. Ing. František Peller, CSc. – RNDr. Viliam Šáner, CSc. – Doc. RNDr. Jozef Eliáš, CSc: Matematika (Požiadavky pre štúdium na EU). Vydavateľstvo EU, Bratislava: 1993.
6. Vladimír Burjan – Milan Maxian: Matematika (Opakovanie pre gymnázium s triedami zameranými na matematiku). SPN, Bratislava: 1989.
7. RNDr. Soňa Richtáriková – Mgr. Darina Kyselová: Matematika (pomôcka pre maturantov). ENIGMA, Nitra: 1998.