

Kurz 6

Priesečník priamky a roviny v Mongeovej projekcii a v axonometrii

J. Beganová, T. Rückschlossová, Ľ. Valášková, M. Vajsáblová, Z. Tereňová: **Deskriptívna geometria pre stavebné odbory**, STU v Bratislave, 2022, ISBN 978-80-227-5256-5.

Kap. 4, 5

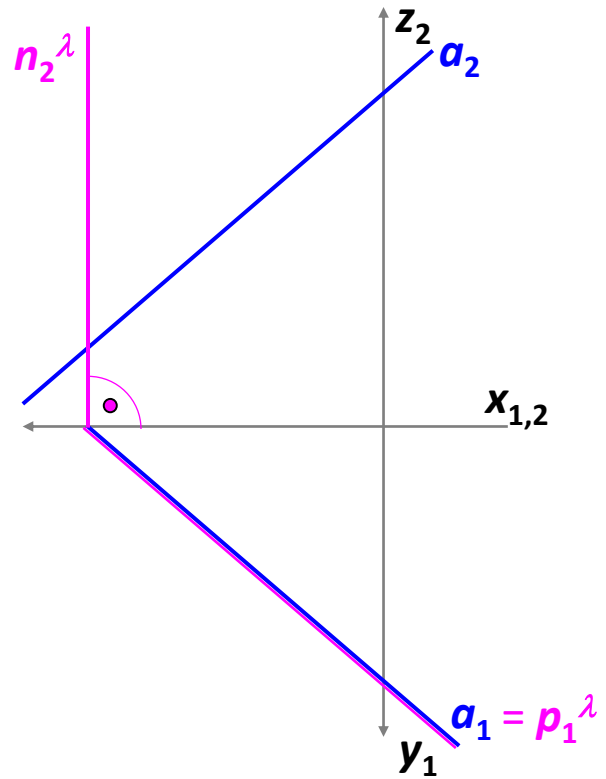
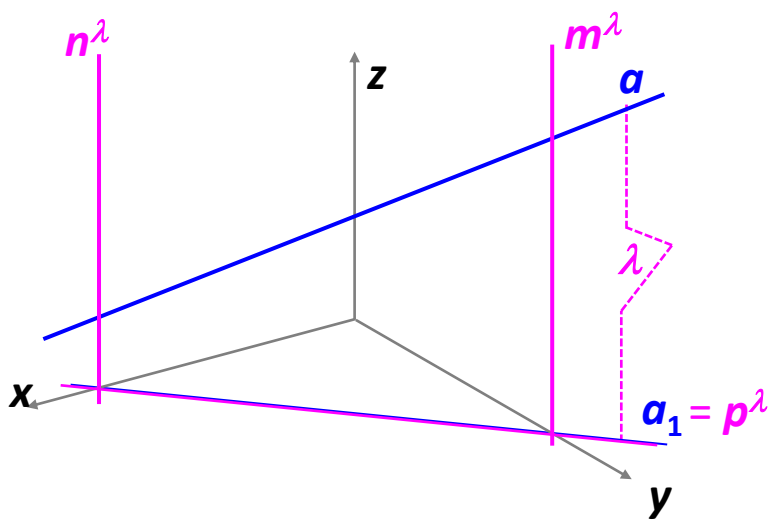
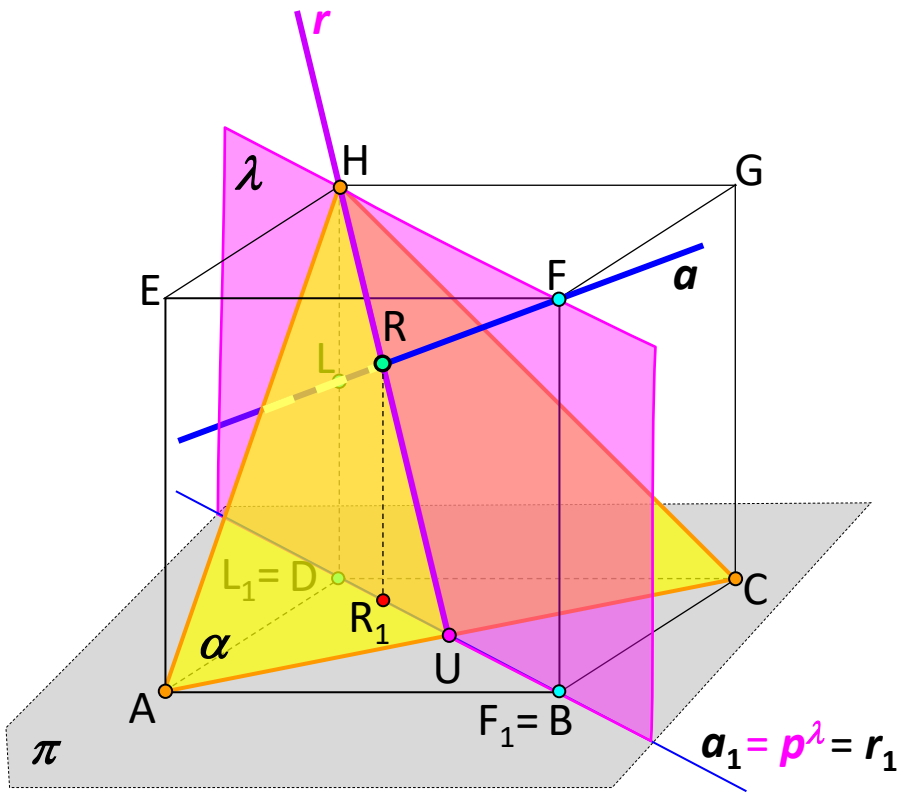
<https://www.math.sk/~skripta/deskriptivna-geometria-pre-stavebne-odbory/>

Dané: priamka $a = LF$ a rovina $\alpha = ACH$. Zostrojte priesečník priamky a s rovinou α .

Metóda krycej priamky

- 1. Priamkou a preložíme pomocnú rovinu λ ,
 $\lambda \perp \pi$, $\lambda = (a, a_1)$,
- 2. $\lambda \cap \alpha = r$, platí: $r_1 = a_1$, *priamku r nazývame krycia priamka*,
- 3. $a \cap r = R = a \cap \alpha$.

Viditeľnosť:



Príklad 2: Zobrazte priesečník priamky $a = MN$ s rovinou $\alpha = (XYZ)$.

Úlohu riešte v šikmej axonometrii a v Mongeovej projekcii, pričom platí $j^x = j^y = j^z = j^m = 1 \text{ cm}$.

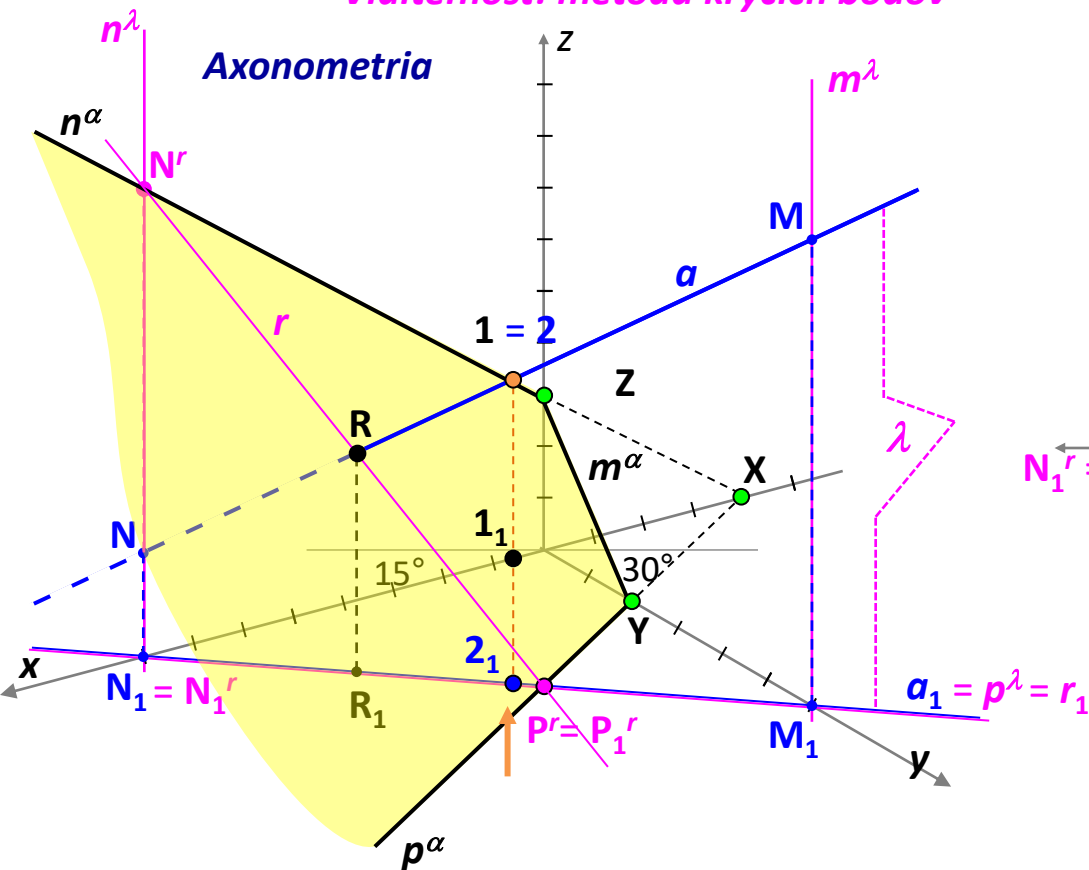
$$\mathbf{x} = [-4, 0, 0]$$
$$\mathbf{Y} = [0, 2, 0]$$
$$\mathbf{z} = [0, 0, 3]$$
$$\mathbf{N} = [8, 0, 2]$$
$$\mathbf{M} = [0, 6, 9]$$

Metóda krycej priamky

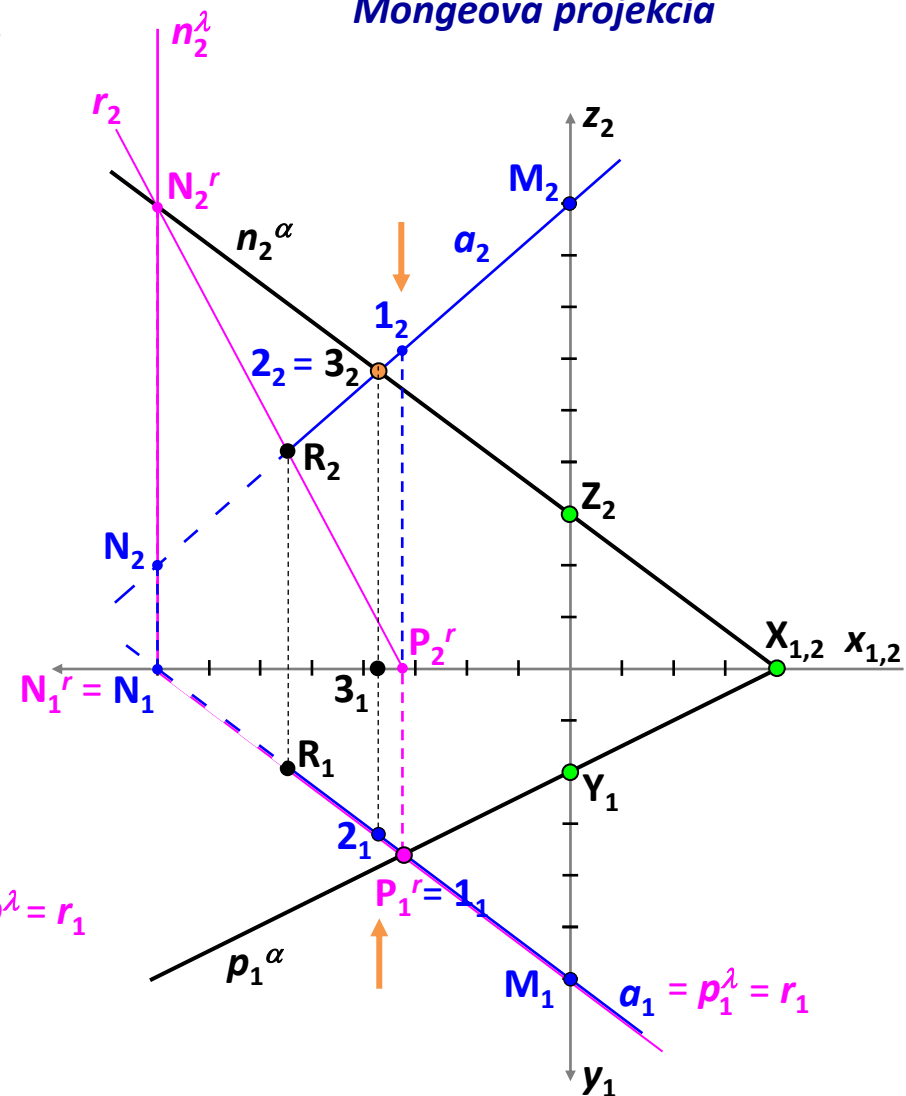
1. pomocná rovina $\lambda = (a, a_1)$; $\lambda \perp \pi$
2. $\lambda \cap \alpha = r$,
 $r \subset \lambda \Rightarrow r_1 = a_1$, r je krycia priamka
 $r \subset \alpha \Rightarrow r = P^r N^r$,
3. $r \cap a = r \cap \alpha = R$.

Viditeľnosť: metóda krycích bodov

Axonometria



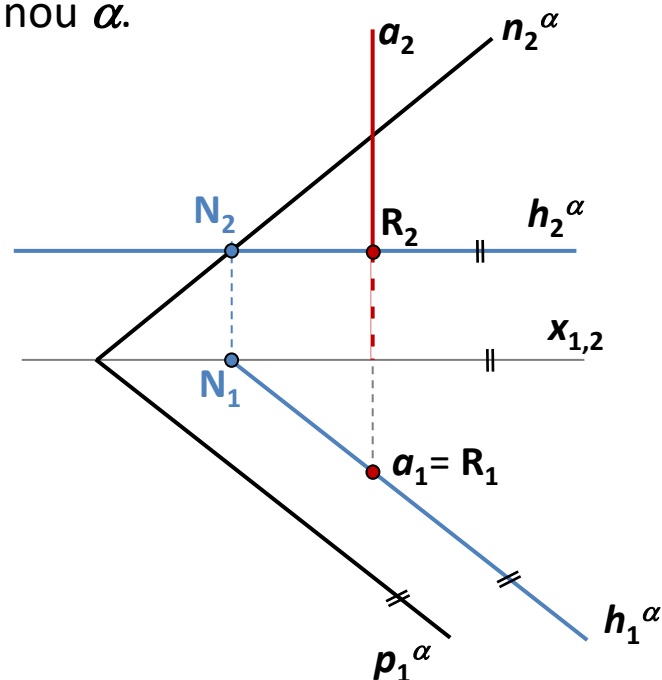
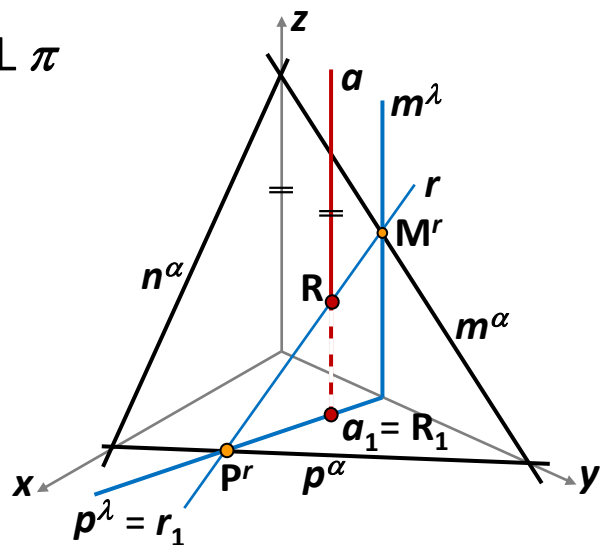
Mongeova projekcia



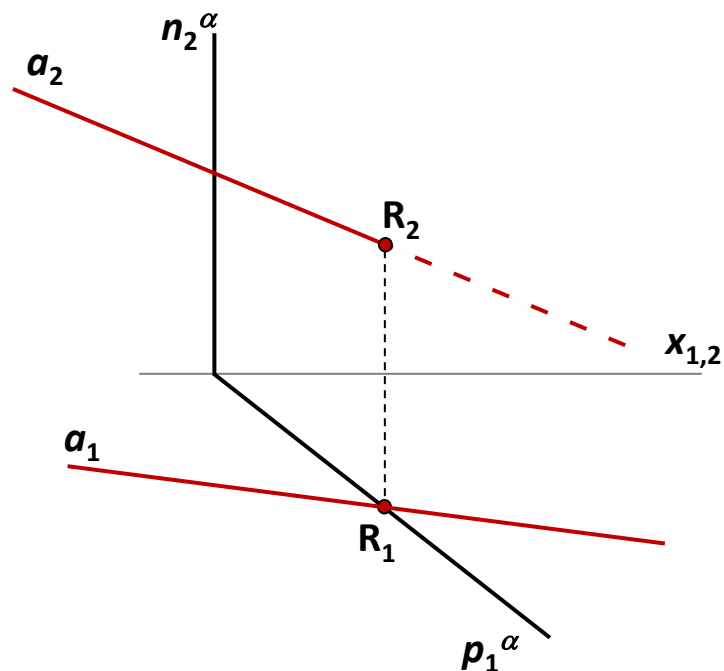
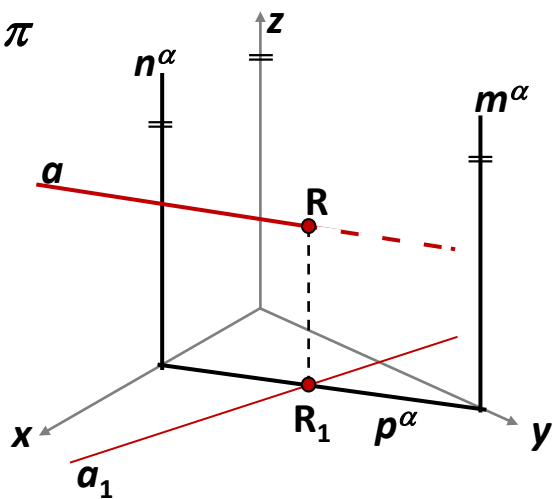
Príklad 4: Zostrojte priesečník priamky a s rovinou α .

R

a) $a \perp \pi$



b) $\alpha \perp \pi$

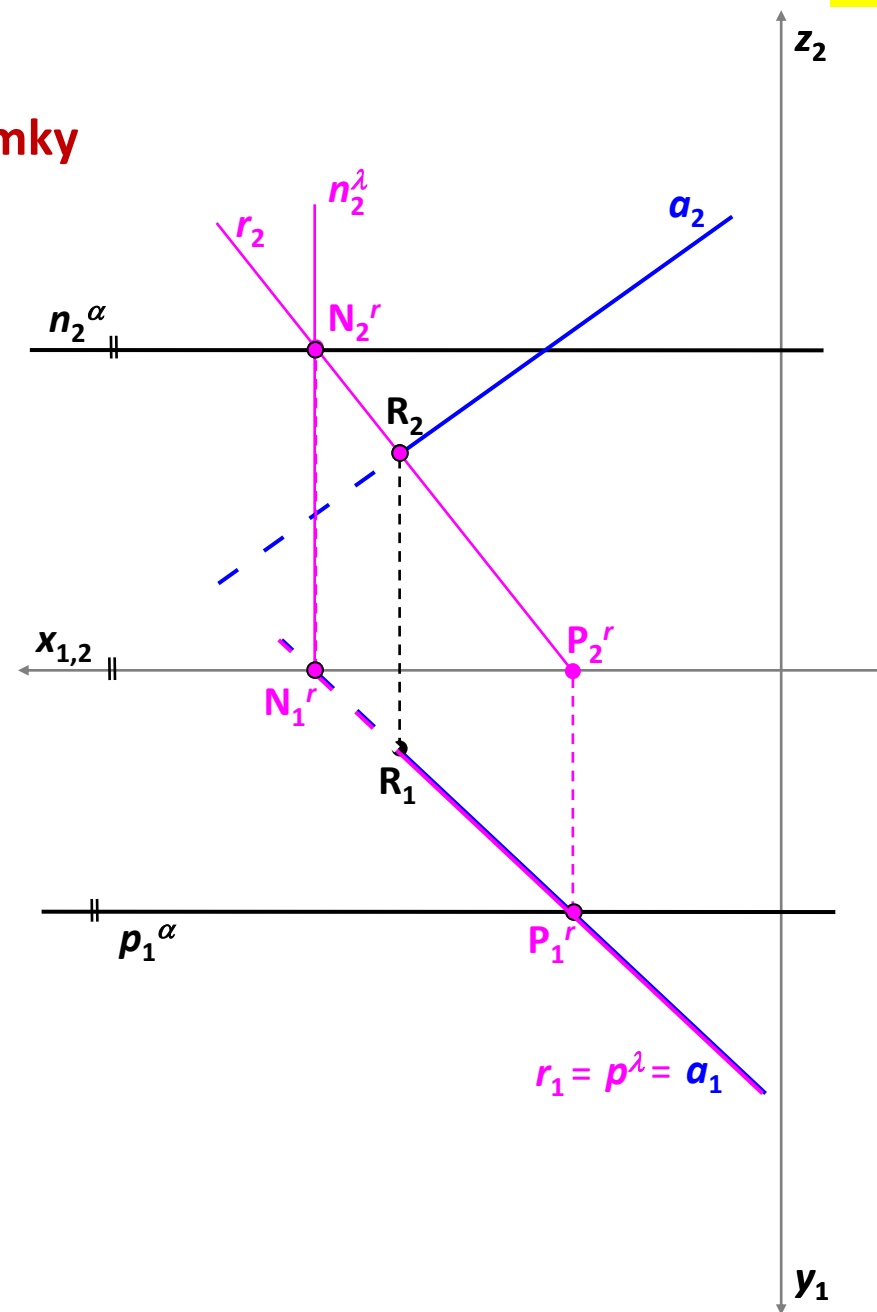
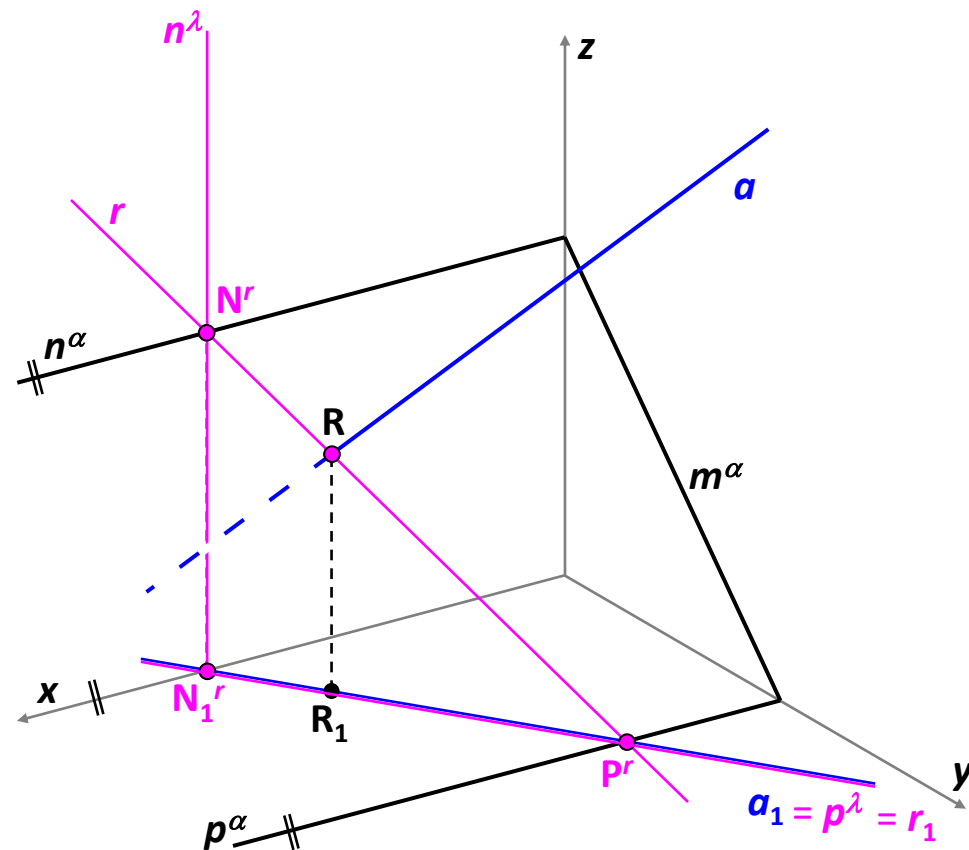


Príklad 5: Zobrazte priesečník priamky $a = (a_1, a_2)$ s rovinou $\alpha = (p^\alpha, n^\alpha)$.

Riešte v šikmej axonometrii aj v Mongeovej projekcii.

Určte viditeľnosť priamky a vzhľadom na rovinu α .

Metóda krycej priamky



Perspektívna afinita a perspektívna kolineácia

a ich aplikácie v konštrukcii rezov hranolovej a ihlanovej plochy v Mongeovej projekcii
a axonometrii

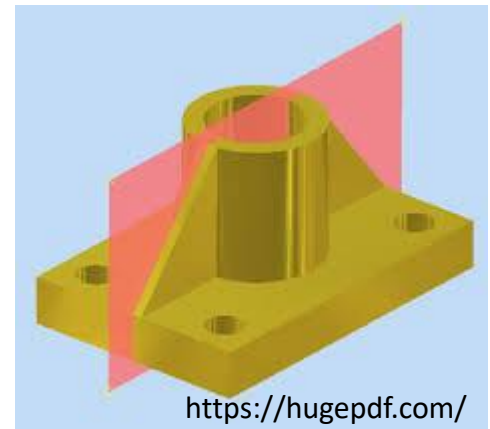
J. Beganová, T. Rückschlossová, Ľ. Valášková, M. Vajsáblova, Z. Tereňová: **Deskriptívna geometria pre stavebné odbory**, STU v Bratislave, 2022, ISBN 978-80-227-5256-5.

Kap. 4, 5

<https://www.math.sk/~skripta/deskriptivna-geometria-pre-stavebne-odbory/>

Rez telesa rovinou je prienik telesa a roviny.

**Rovinným rezom hranolovej alebo ihlanovej plochy
všeobecnou rovinou je n-uholník.**



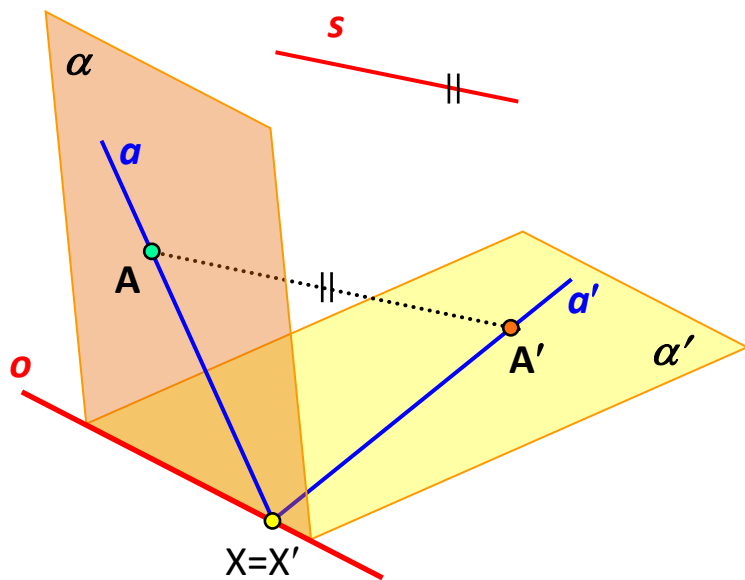
<https://hugepdf.com/>

Perspektívna afinita

Perspektívna afinita roviny α na rovinu α' – princíp zobrazenia

Definícia: Nech α a α' sú dve rôzne roviny a s je priamka, ktorá nie je rovnobežná so žiadnou z nich. Zobrazenie, ktoré každému bodu $A \in \alpha$ priradí bod $A' \in \alpha'$, kde $AA' \parallel s$, nazývame **perspektívna afinita roviny α na rovinu α'** .

Poznámka: V prípade, že rovina α je rovnobežná s rovinou α' , je perspektívna afinita posunutím roviny α do roviny α' . V ďalšom texte budeme uvažovať len prípad, keď α a α' sú dve rôznobežné roviny.

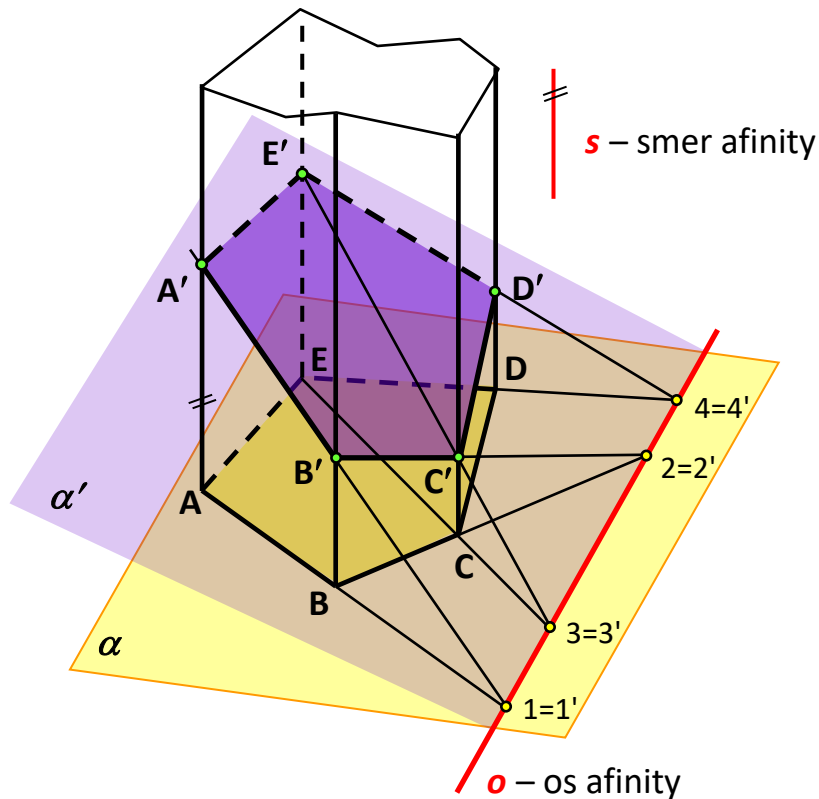


- s - smer afinity
- $o = \alpha \cap \alpha'$ - os afinity
- Bod sa zobrazuje do bodu: $A \rightarrow A'$.
- $A \in \alpha$ - vzor
- $A' \in \alpha'$ - obraz bodu
- Platí: $AA' \parallel s$
- Dvojicu bodov (A, A') nazývame afinne združené body.
- Priamka a sa zobrazuje do priamky a' .
- Priesečník $X = X'$ priamky a s osou afinity o sa nazýva **samodružný bod**.
- Všetky samodružné body ležia na osi afinity.

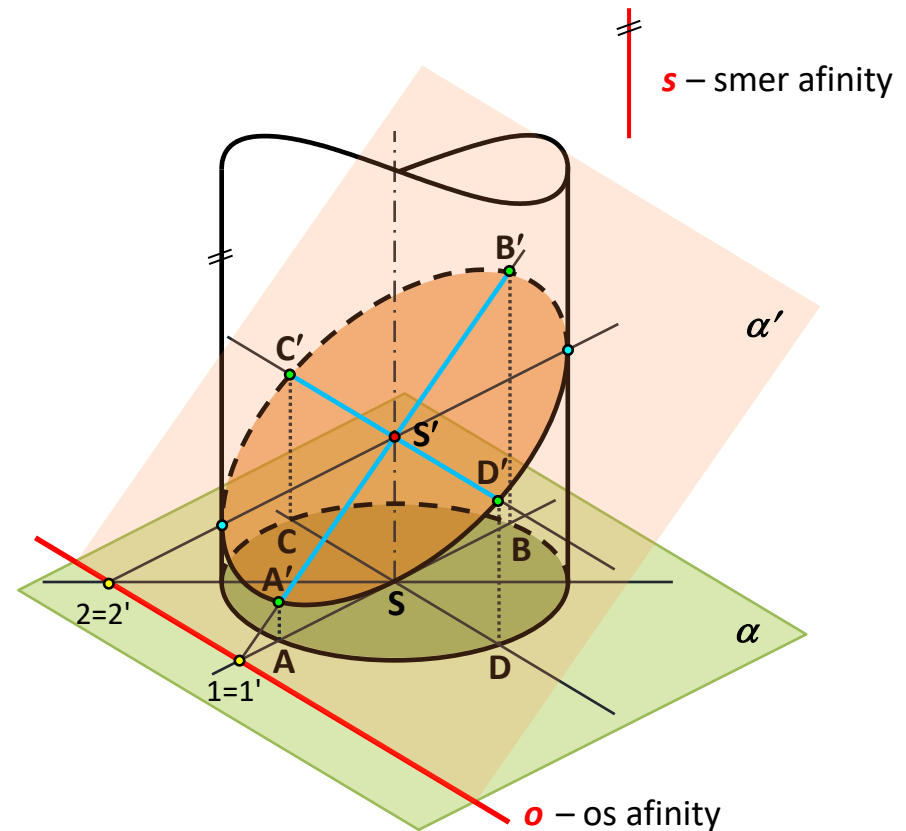
Perspektívna afinita medzi dvomi rovinami – využitie

Afinita medzi dvomi rovinami má široké uplatnenie pri konštrukcii rovinných rezov hranolových plôch a hranolov, a tiež kružnicových valcových plôch a valcov, napr. v Mongeovej projekcii, alebo axonometrii.

Afinným obrazom mnohoúhelníka v rovine α je mnohoúhelník v rovine α' . Obidva ležia na tej istej hranolovej ploche. Smer afinity je smer tvoriacich priamok hranolovej plochy.

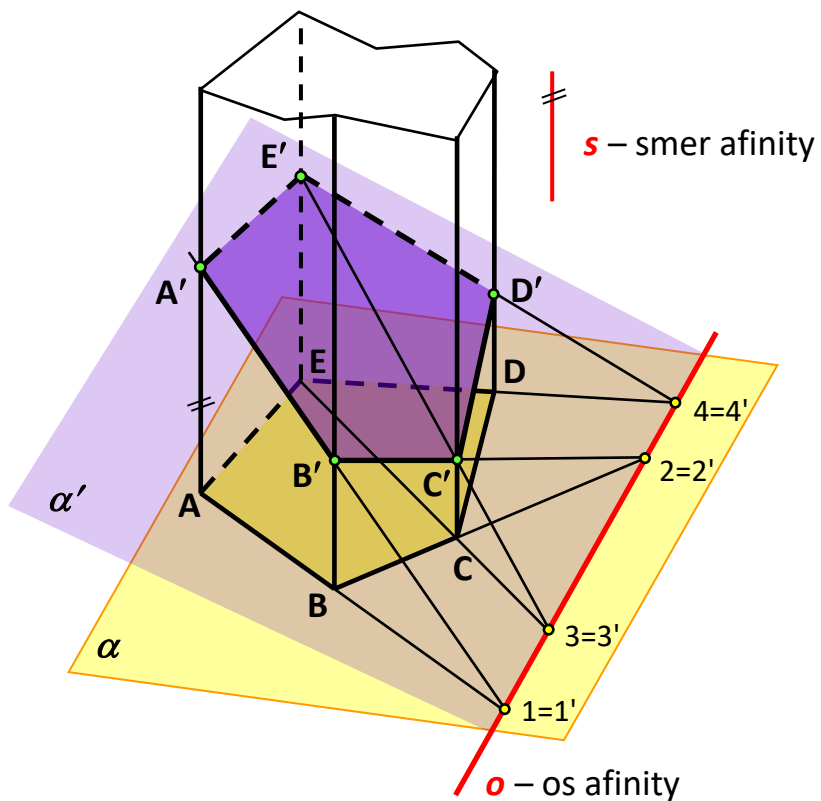


Afinným obrazom kružnice v rovine α je elipsa v rovine α' . Obidve ležia na tej istej valcovej ploche. Smer afinity je smer tvoriacich priamok valcovej plochy.



Vlastnosti perspektívnej afinity roviny α na rovinu α'

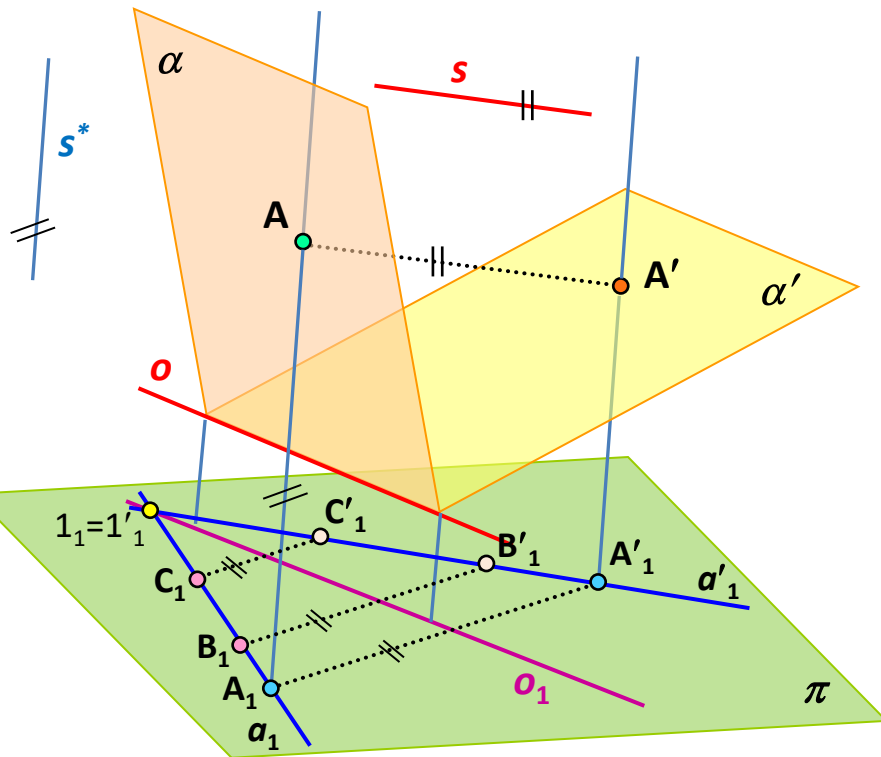
Perspektívna afinita roviny α na rovinu α' má nasledujúce vlastnosti:



1. Spojnice bodov a ich obrazov sú rovnobežné so **smerom afinity**: $AA' \parallel BB' \parallel s$.
2. Perspektívna afinita **zachováva kolinearitu**: ak tri body ležia na jednej priamke, tak aj ich obrazy ležia na jednej priamke.
3. Priamka a jej obraz sa pretínajú na **osi afinity** o .

Perspektívna afinita v rovine

Ravnobežným premietnutím perspektívnej afinity medzi rovinami α a α' (so smerom s) do roviny π v smere s^* , ktorý nie je rovnobežný s priamkou s ani so žiadnou z rovín α a α' , získame perspektívnu afinitu v rovine π .



Afinita $\alpha \rightarrow \alpha'$,
s osou o a smerom AA'

rovnobežný priemet
do roviny π

Afinita v rovine $\pi \rightarrow \pi$,
s osou o_1 a smerom $A_1A'_1$

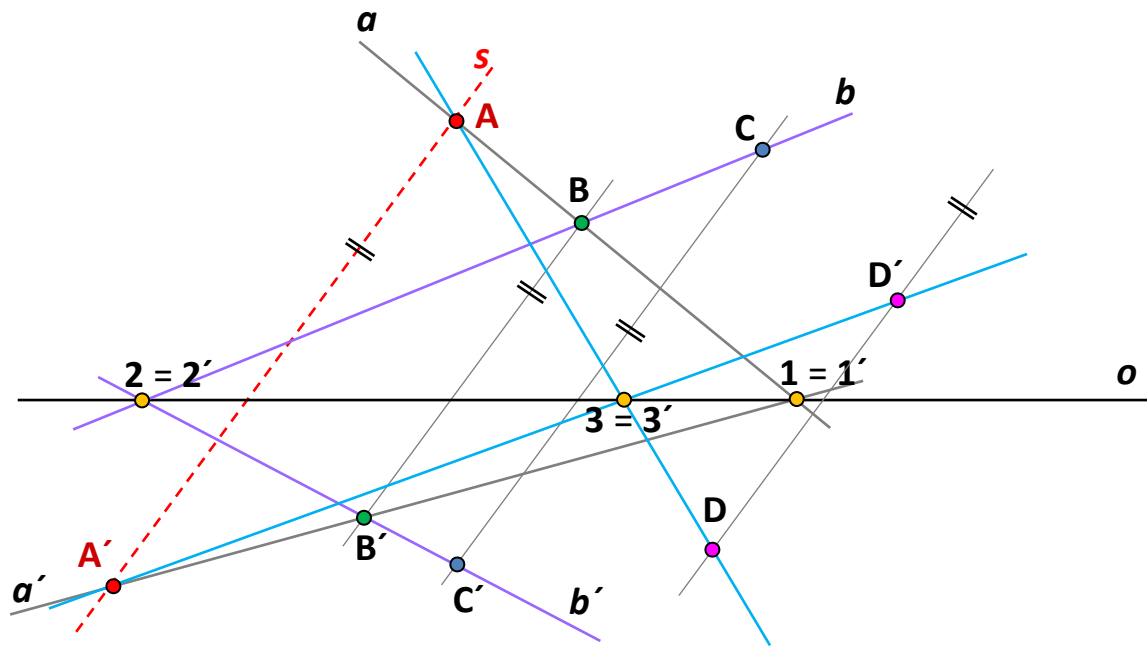
Definícia: Perspektívna afinita v rovine π je bijektívne zobrazenie $\pi \rightarrow \pi$, ktoré spĺňa nasledujúce podmienky:

1. body roviny π sa zobrazia do bodov roviny π , pričom bod a jeho obraz ležia na priamke rovnobežnej so **smerom perspektívnej afinity**,
2. ak tri body ležia na jednej priamke, tak aj ich obrazy ležia na jednej priamke (afinita zachováva **kolinearitu**),
3. existuje jedna bodovo samodružná priamka, ktorá sa nazýva **os perspektívnej afinity**.

Poznámka: Rovnobežným priemetom perspektívnej afinity roviny α na rovinu α' do roviny π je perspektívna afinita v rovine π vtedy, ak priemetom žiadnej z rovín α a α' nie je priamka.

Obraz bodu a priamky v perspektívnej afinite

PA ($o, A \rightarrow A'$)



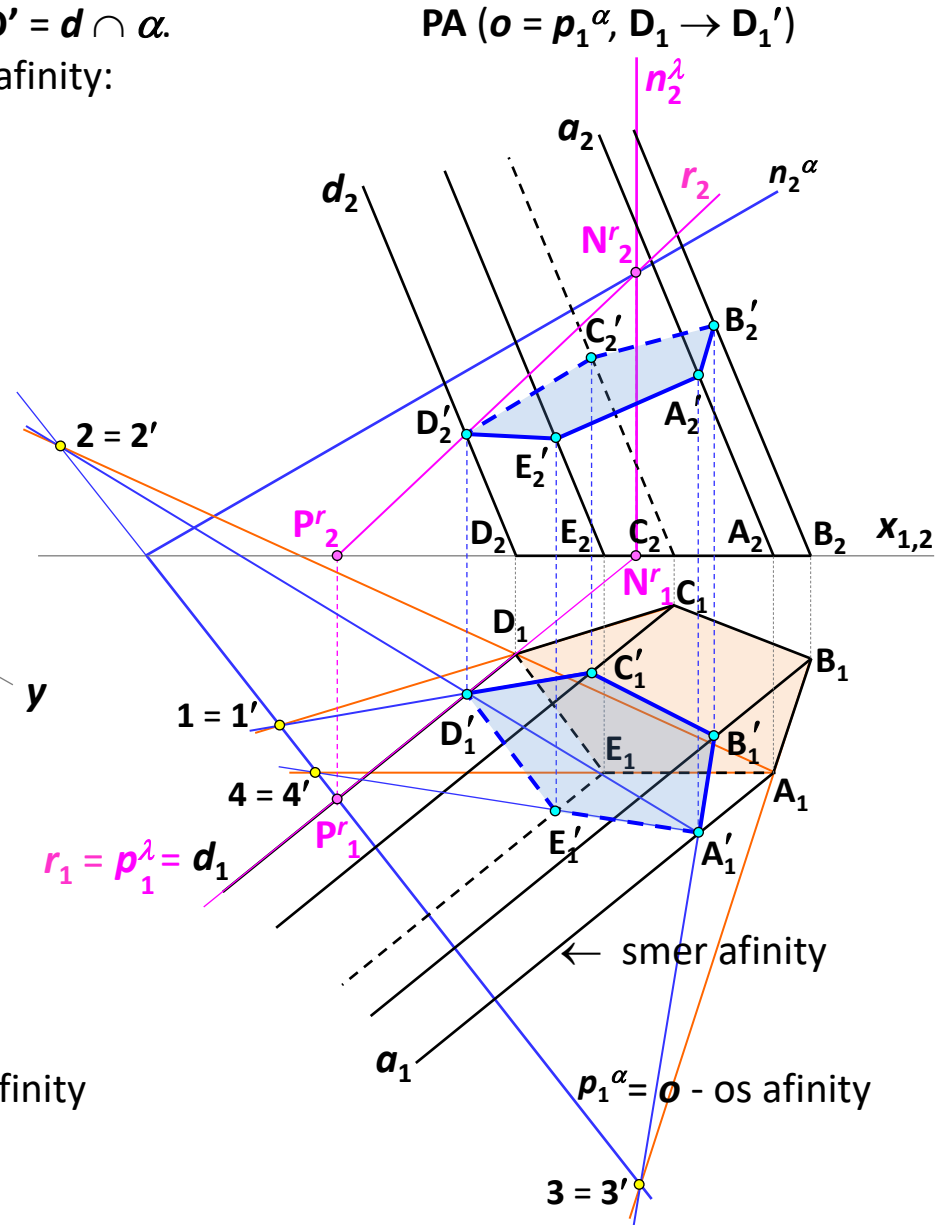
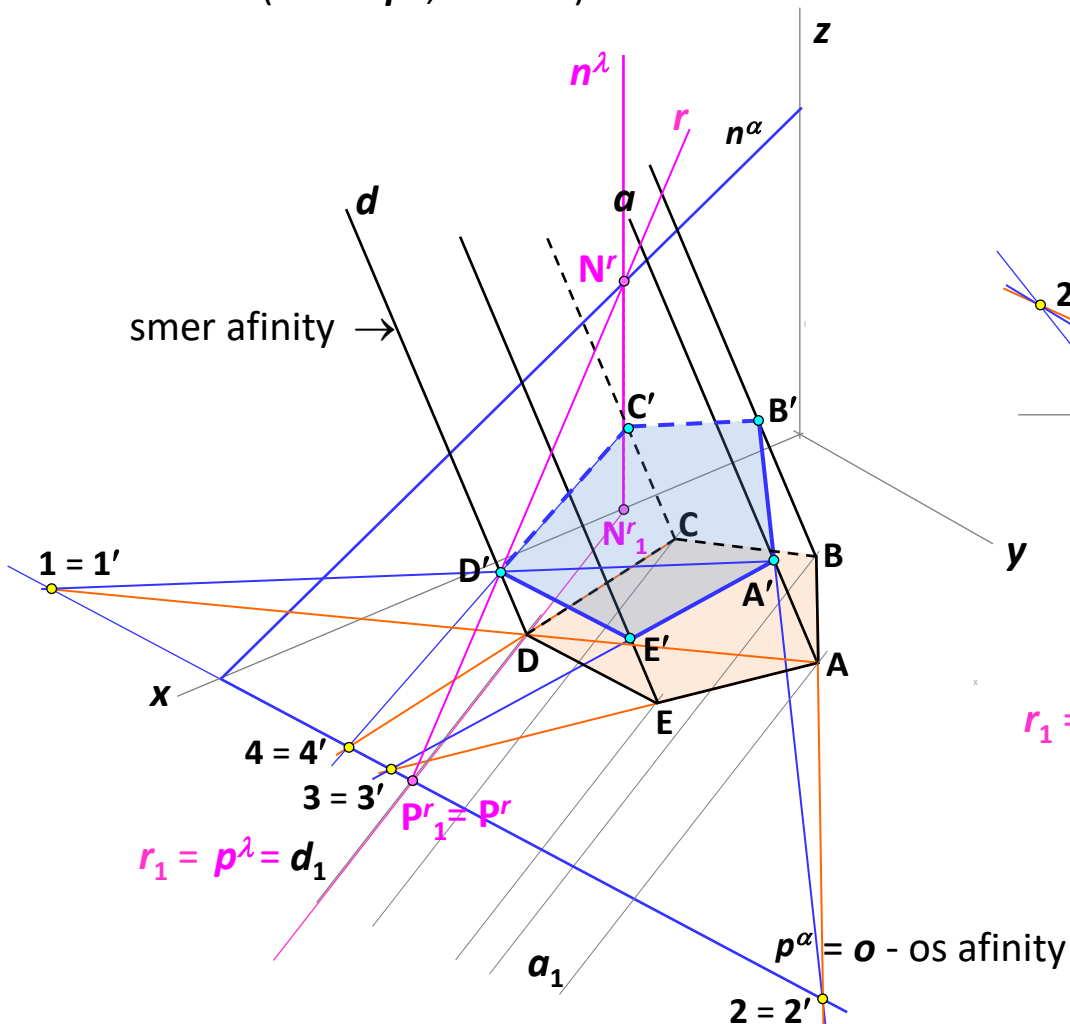
Využitie afinity: rez hranolovej plochy rovinou v axonometrii a v Mongeovej projekcii

R

Daná je šikmá hranolová plocha, ktorá je určená všeobecným 5 - uholníkom $ABCDE$ ležiacim v rovine π a tvoriacou priamkou $a(a, a_1)$. Zostrojte rez plochy rovinou $\alpha(p^\alpha, n^\alpha)$. Riešte v axonometrii a v Mongeovej projekcii.

Riešenie:

1. Prvý bod rezu zostrojíme *metódou krycej priamky*: $D' = d \cap \alpha$.
2. Ďalšie body rezu zostrojíme pomocou perspektívnej afinity:
PA (os $o = p^\alpha$, $D \rightarrow D'$).

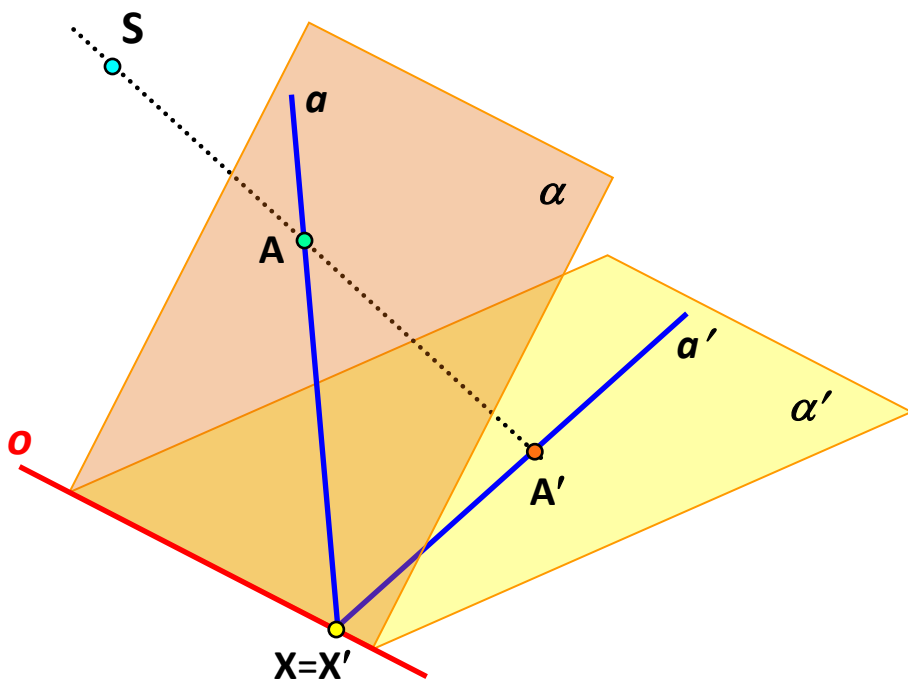


Perspektívna kolineácia

Perspektívna kolineácia roviny α na rovinu α' – princíp zobrazenia

Definícia: Nech α a α' sú dve rôzne roviny a S je bod, ktorý neleží v žiadnej z nich. Zobrazenie, ktoré každému bodu $A \in \alpha$ priradí bod $A' \in \alpha'$, kde $S \in AA'$, nazývame **perspektívna kolineácia roviny α na rovinu α'** .

Poznámka: V prípade, že rovina α je rovnobežná s rovinou α' , je toto zobrazenie rovnoláhosť. V ďalšom texte budeme uvažovať len prípad, keď α a α' sú dve rôznobežné roviny.



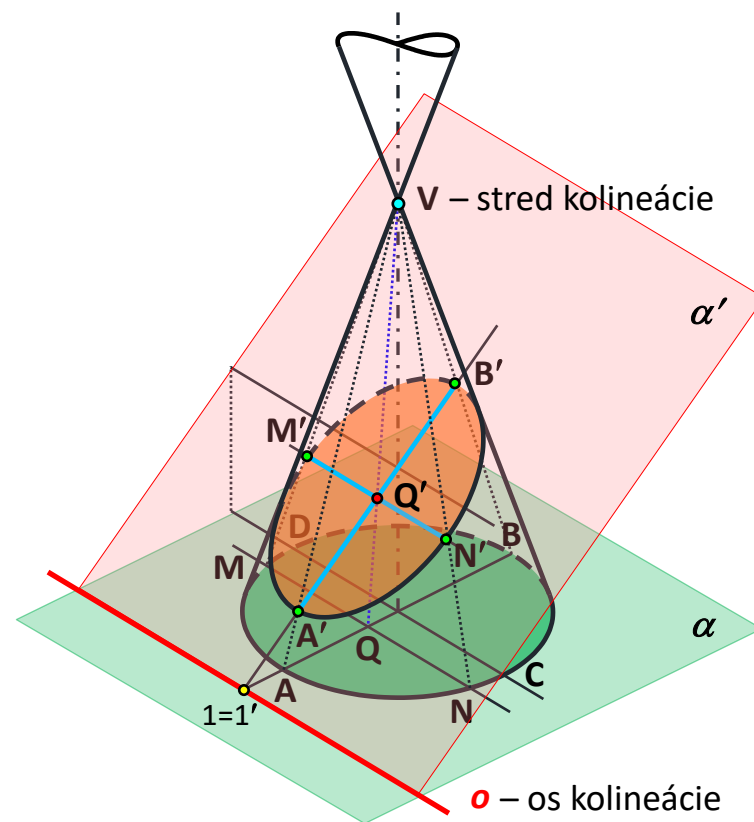
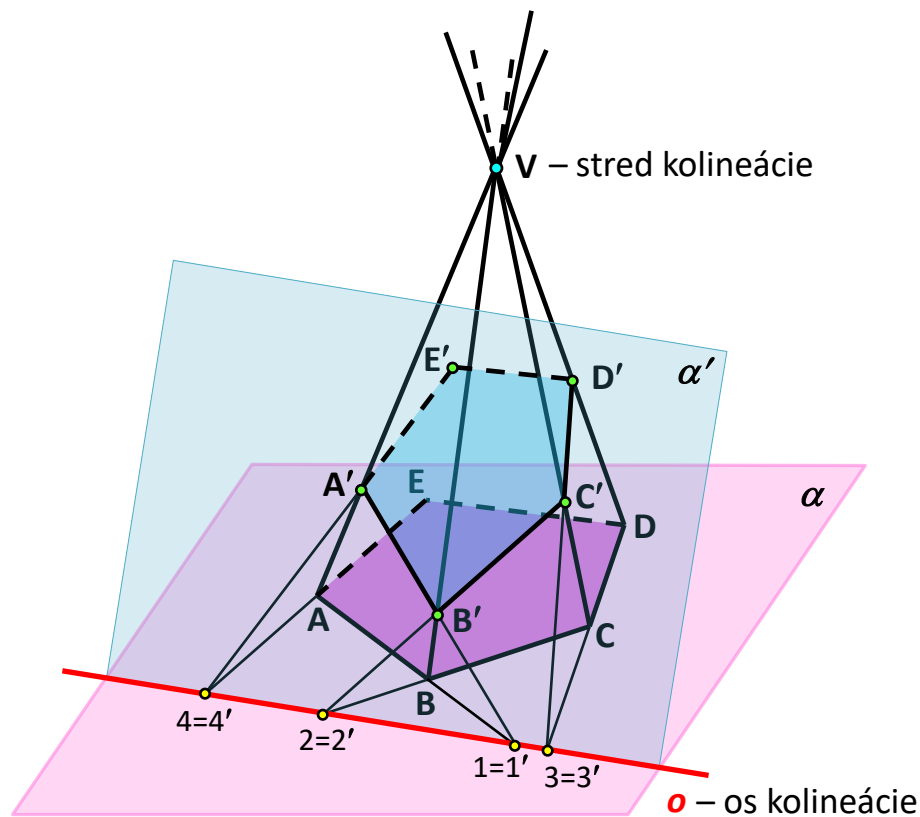
- S - stred kolineácie
- $o = \alpha \cap \alpha'$ - os kolineácie
- Bod A sa zobrazuje do bodu A' : $A \rightarrow A'$.
- $A \in \alpha$ - vzor
- $A' \in \alpha'$ - obraz bodu A
- Platí: $S \in AA'$
- Priamka a sa zobrazuje do priamky a' : $a \rightarrow a'$.
- Priamky a, a' sa pretínajú na osi kolineácie o v **samodružnom bode $X = X'$** .
- Všetky body na osi kolineácie o sú samodružné.

Využitie perspektívnej kolineácie medzi dvomi rovinami

Kolineáciu medzi dvomi rovinami môžeme využiť pri konštrukcii rovinných rezov ihlanových plôch a ihlanov, a tiež kružnicových kužeľových plôch a kužeľov, napr. v Mongeovej projekcii, či v axonometrii.

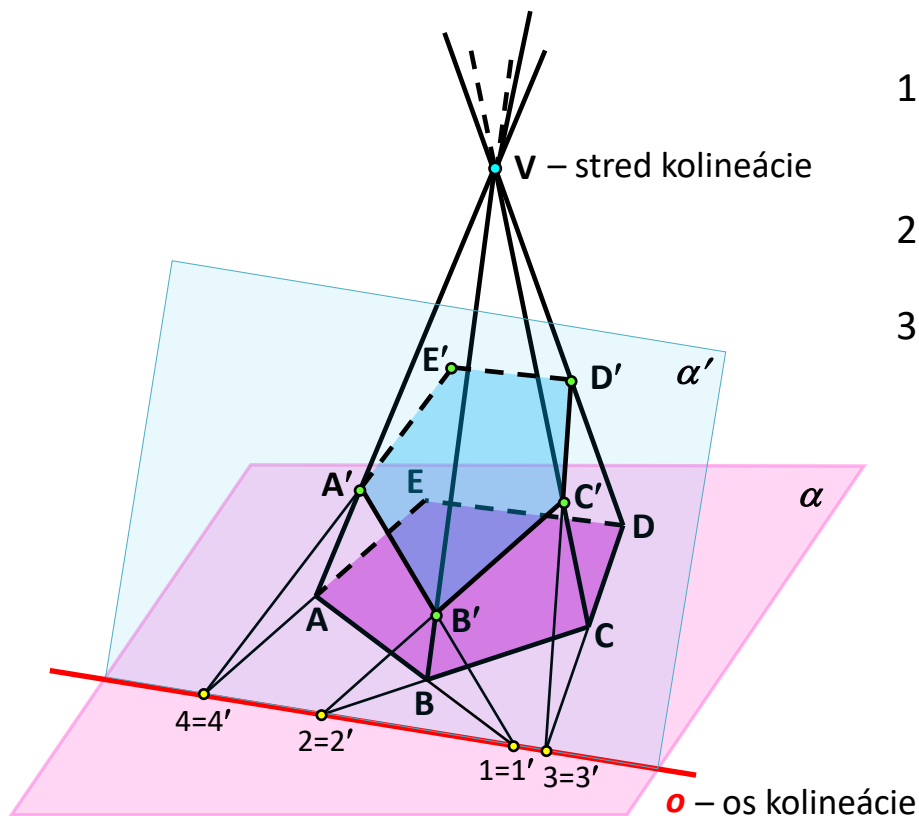
Mnohouholník v rovine α sa v kolineácii zobrazí do mnohoúhelníka v rovine α' . Obidva ležia na tej istej ihlanovej ploche. Vrchol V ihlanovej plochy je stred kolineácie.

Kružnica v rovine α sa v kolineácii zobrazí do krivky v rovine α' (elipsa, hyperbola, parabola). Obidve ležia na tej istej kužeľovej ploche. Vrchol V kužeľovej plochy je stred kolineácie.



Vlastnosti perspektívnej kolineácie roviny α na rovinu α'

Perspektívna kolineácia roviny α na rovinu α' má nasledujúce vlastnosti:



1. Spojnice bodov a ich obrazov prechádzajú stredom kolineácie: $V \in AA'$, $V \in BB'$,
2. Perspektívna kolineácia **zachováva kolinearitu**.
3. Priamka a jej obraz sa pretínajú na osi kolineácie o .

Perspektívna kolineácia v rovine

Ravnobežný priemet perspektívnej kolineácie medzi rovinami α a α' (so stredom S) do roviny π v smere s^* , ktorý nie je rovnobežný so žiadnou z rovín α , α' a π , je perspektívna kolineácia v rovine π .

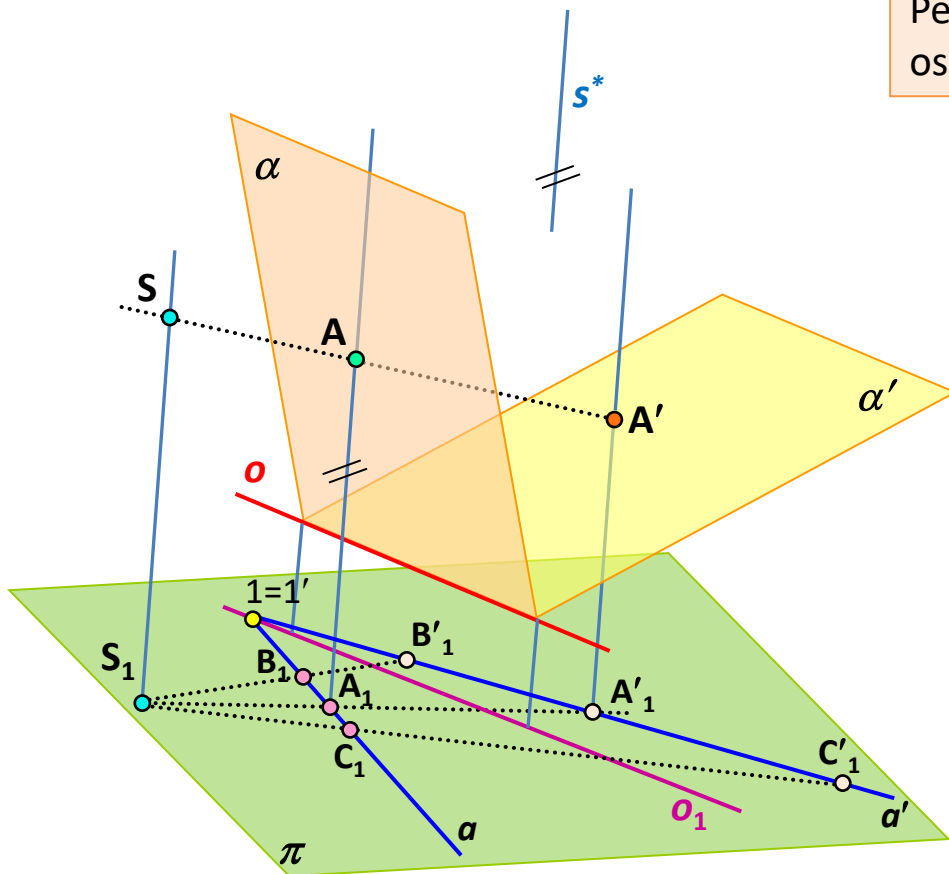
Perspektívna kolineácia $\alpha \rightarrow \alpha'$, daná osou o , stredom S a dvojicou bodov A, A'

rovnobežný priemet
do roviny π

Perspektívna kolineácia v rovine $\pi \rightarrow \pi$, daná osou o_1 , stredom S_1 a dvojicou bodov A_1, A'_1

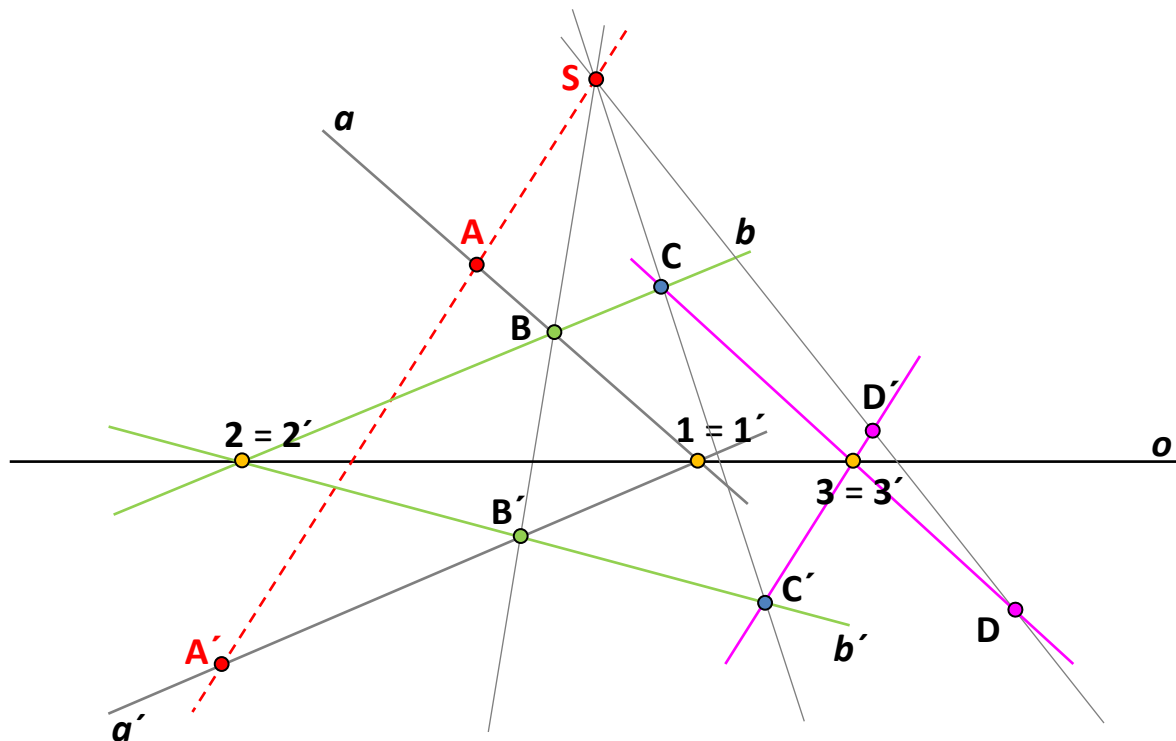
Definícia: Perspektívna kolineácia v rovine π je bijektívne zobrazenie $\pi \rightarrow \pi$, ktoré spĺňa nasledujúce podmienky:

1. body roviny π sa zobrazia do bodov roviny π , pričom bod a jeho obraz ležia na priamke, ktorá prechádza **stredom perspektívnej kolineácie**,
2. ak tri body ležia na jednej priamke, tak aj ich obrazy ležia na jednej priamke,
3. existuje jedna bodovo samodružná priamka, ktorá sa nazýva **os perspektívnej kolineácie**.



Obraz bodu a priamky v perspektívnej kolineácii

Príklad. PK $(o, S, A \rightarrow A')$. Zostrojte obrazy bodov **B**, **C**, **D** v danej perspektívnej kolineácii.



Využitie kolineácie: rez ihlanu rovinou v axonometrii a v Mongeovej projekcii

R

Daný je šikmý ihlan, ktorý je určený 4- uholníkom **ABCD** ležiacim v rovine π a vrcholom **V**. Zostrojte rez ihlanu rovinou α .

Riešenie:

1. Prvý bod rezu zostrojíme **metódou krycej priamky**: $A' = a \cap \alpha$.

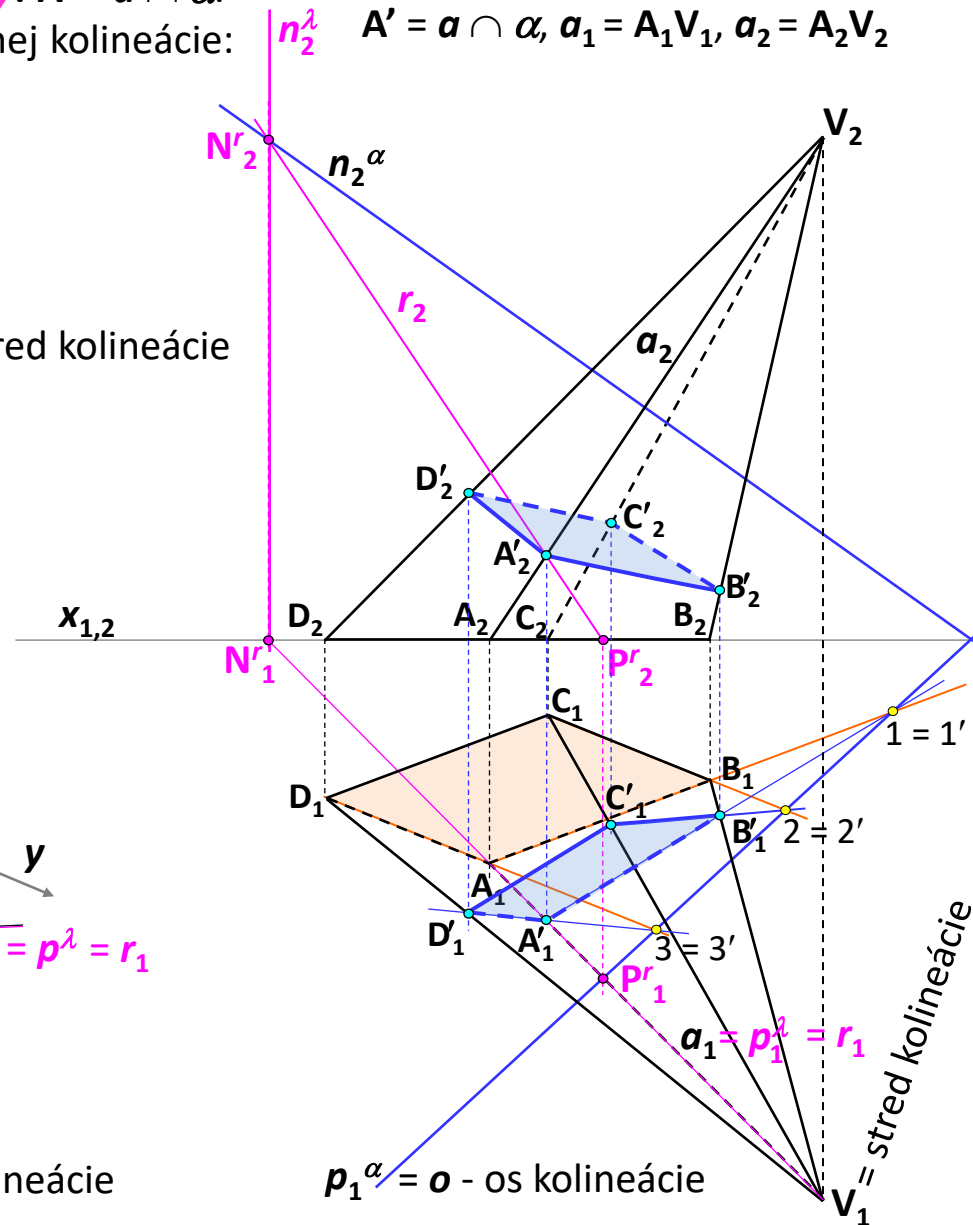
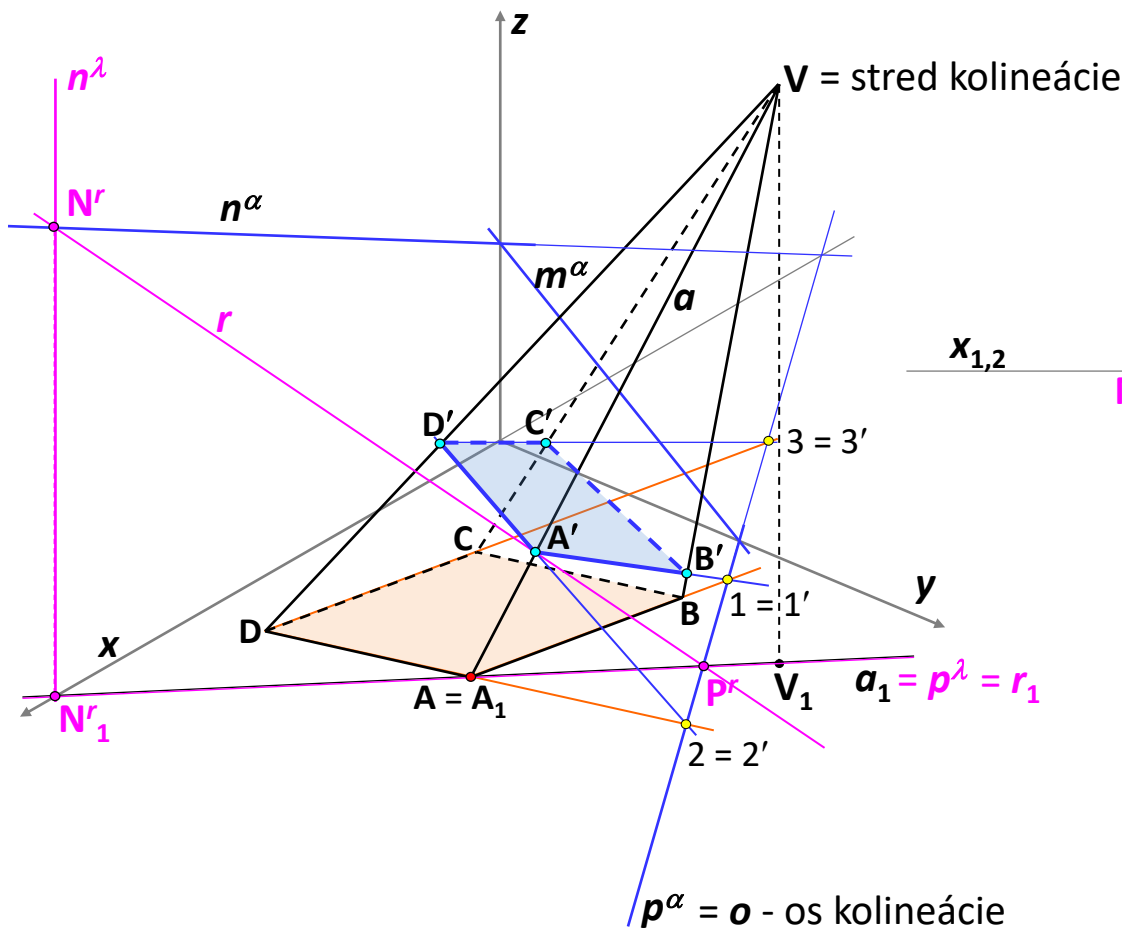
2. Ďalšie body rezu zostrojíme pomocou perspektívnej kolineácie:

PK (os $o = p^\alpha$, $V =$ stred kolineácie, $A \rightarrow A'$).

$$A' = a \cap \alpha, a = AV, a_1 = A_1V_1$$

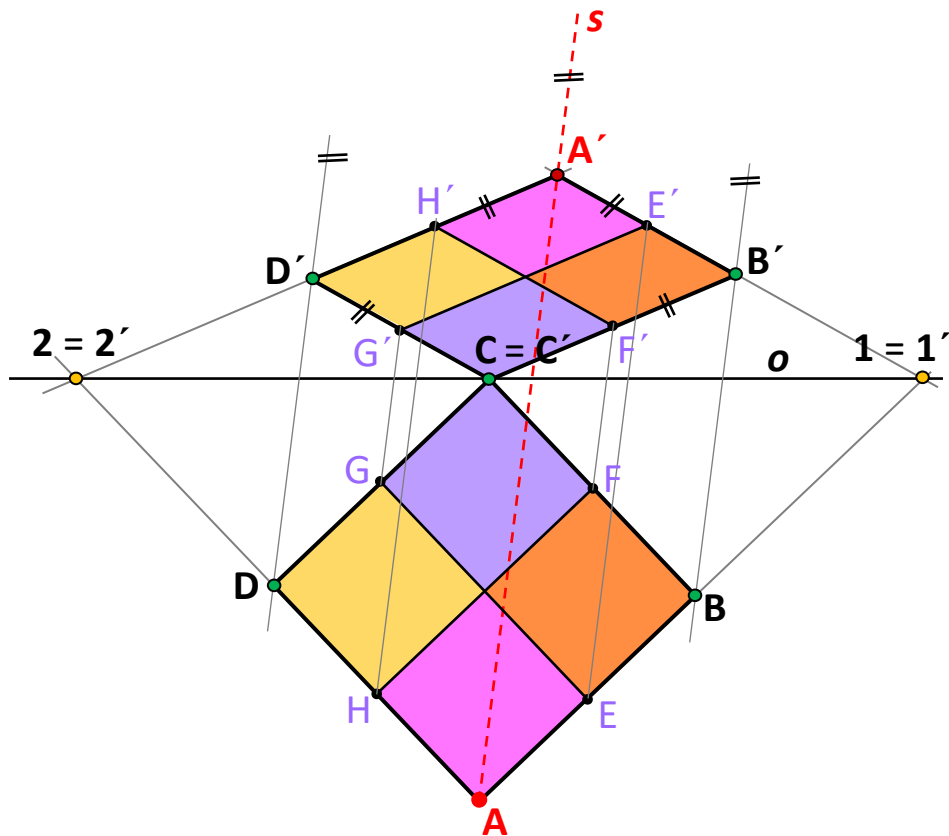
PK (os $o = p_1^\alpha$, stred $= V_1$, $A_1 \rightarrow A_1'$)

$A' = a \cap \alpha$, $a_1 = A_1V_1$, $a_2 = A_2V_2$

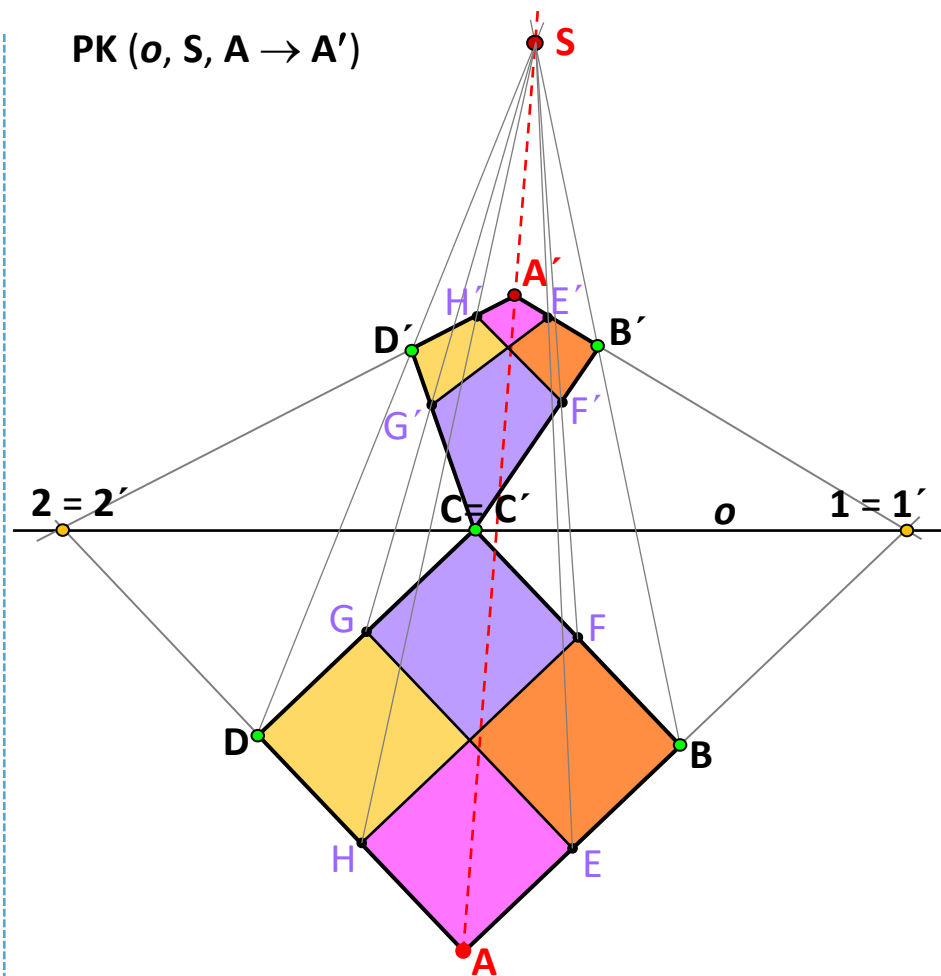


Obraz štvorca v perspektívnej afinity a perspektívnej kolineácii

PA ($o, A \rightarrow A'$)



PK ($o, S, A \rightarrow A'$)



Vlastnosti, ktoré zachováva afinita:

1. *incidencia*
2. *kolinearita*
3. *rovnobežnosť*
4. *deliaci pomer*

Vlastnosti, ktoré zachováva kolineácia:

1. *incidencia*
2. *kolinearita*