

Kurz 5

AXONOMETRIA

J. Beganová, T. Rückschlossová, Ľ. Valášková, M. Vajsáblová, Z. Tereňová: **Deskriptívna geometria pre stavebné odbory**, STU v Bratislave, 2022, ISBN 978-80-227-5256-5.

Kap. 11

<https://www.math.sk/~skripta/deskriptivna-geometria-pre-stavebne-odbory/>

11 Axonometria

11.1 Princíp zobrazenia, vlastnosti, typy axonometrie

11.2 Obraz bodu, priamky a roviny v axonometrii

11.3 Polohové úlohy v axonometrii

11.4 Redukčná metóda

11.5 Šikmá axonometria

11.6 Riešené úlohy – telesá v šikmej axonometrii

11.7 Kolmá axonometria, základné tvrdenia, určenie, metódy

11.8 Riešené úlohy – telesá určené geometrickými vlastnosťami v kolmej axonometrii

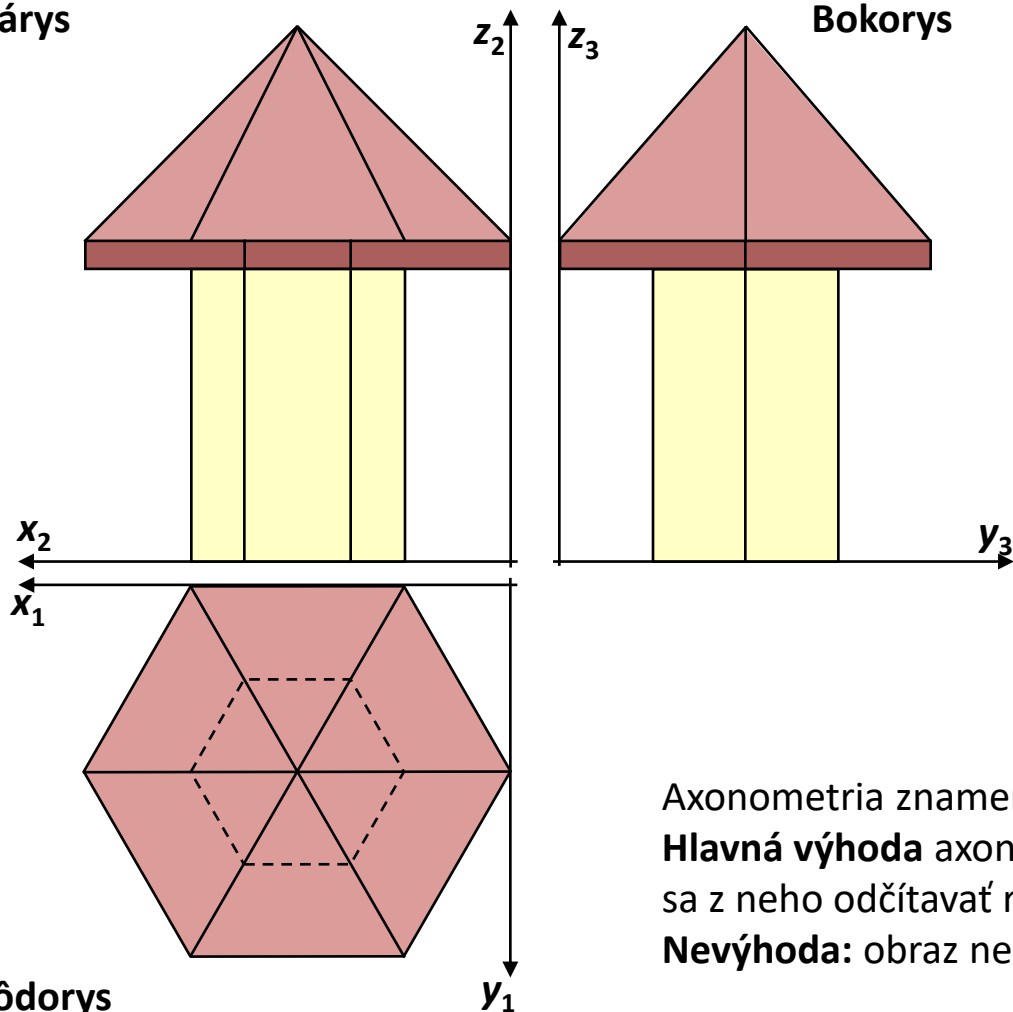
11.9 Riešené úlohy – telesá dané pôdorysom a nárysom v kolmej axonometrii

Na technickom výkrese axonometria dopĺňa Mongeovu projekciu s cieľom vytvoriť lepšiu predstavu o zobrazovanom objekte.

Mongeova projekcia

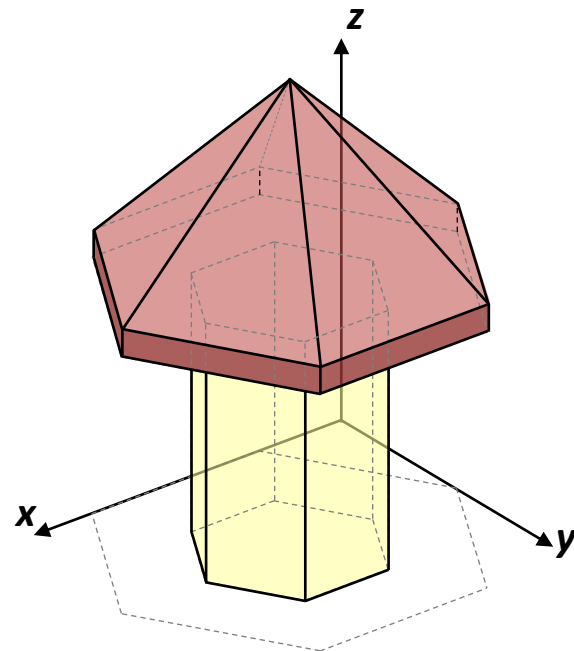
Nárys

Bokorys



Pôdorys

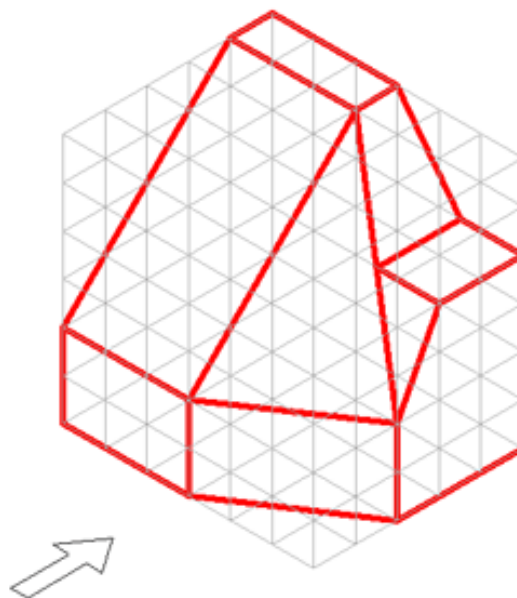
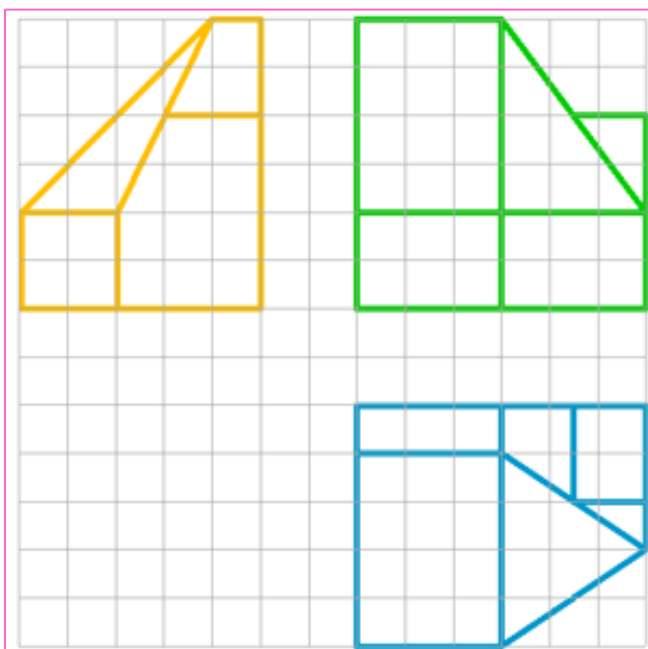
Axonometria



Axonometria znamená „meranie pozdĺž osí“ (axis-os).

Hlavná výhoda axonometrie: priemet sa ľahko zostrojí a dajú sa z neho odčítavať rozmery.

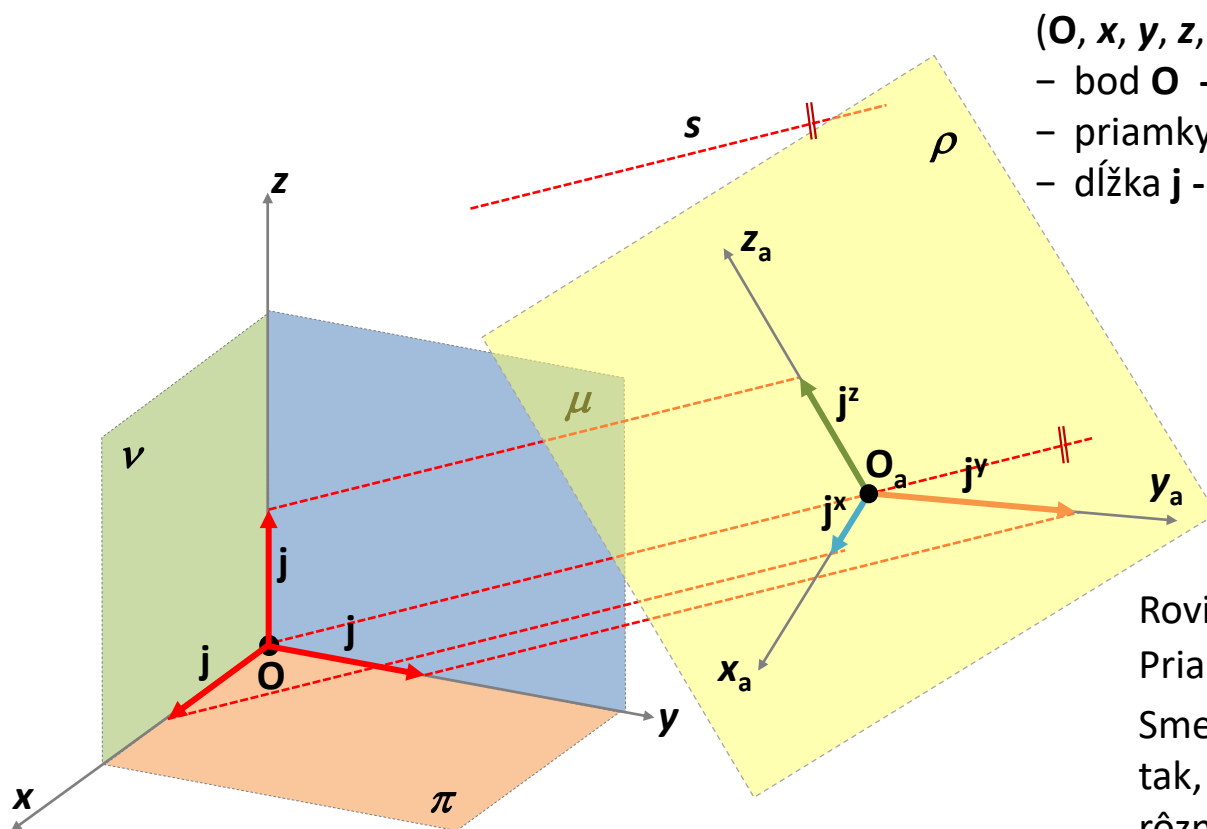
Nevýhoda: obraz neodpovedá videniu ľudským okom.



Zdroj:
<http://younghouse.sk/projekty/r-odiny-dom-xl/>

Väčšina stavebných objektov má 3 význačné navzájom kolmé smery: **šírka, hĺbka, výška**.

Karteziánska sústava súradníc má 3 význačné navzájom kolmé smery: **x, y, z** .



(O, x, y, z, j) - Karteziánska sústava súradníc v E^3 :

- bod O - začiatok súradnicovej sústavy,
- priamky x, y, z - súradnicové osi,
- dĺžka j - jednotka merania.

Súradnicové roviny:

- pôdorysňa $\pi = xy$,
- nárysňa $\nu = xz$,
- bokorysňa $\mu = yz$.

Rovina ρ - axonometrická priemetňa.

Priamka s - smer premietania.

Smer premietania s musí byť zvolený tak, aby sa osi x, y, z zobrazili do troch rôznych priamok.

Karteziánsku sústavu súradníc (O, x, y, z, j) premietneme do axonometrickej priemetne ρ .

O_a - začiatok axonometrickej sústavy súradníc (rovnobežný priemet bodu O do priemetne ρ),

x_a, y_a, z_a - axonometrické osi (rovnobežný priemet osí x, y, z do priemetne ρ),

j^x, j^y, j^z - axonometrické jednotky (rovnobežný priemet jednotky j).

$(O_a, x_a, y_a, z_a, j^x, j^y, j^z)$ - axonometrická sústava súradníc .

Pohlkeho veta

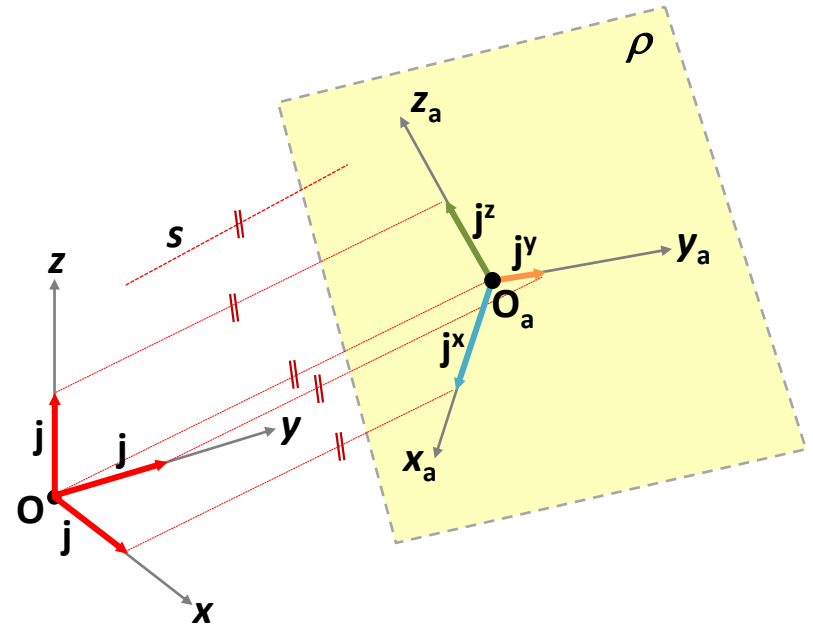
(O, x, y, z, j) - Karteziánska sústava súradníc v E^3 .

ρ – priemetňa, s – smer premietania

$(O_a, x_a, y_a, z_a, j^x, j^y, j^z)$ - axonometrická sústava súradníc v priemetni.

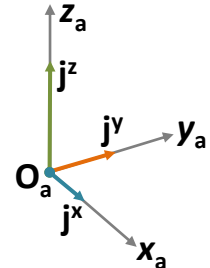
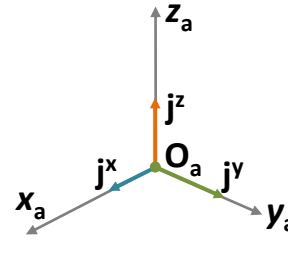
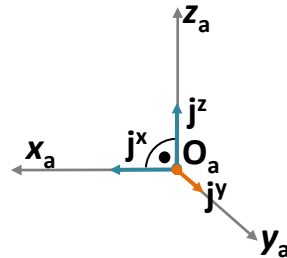
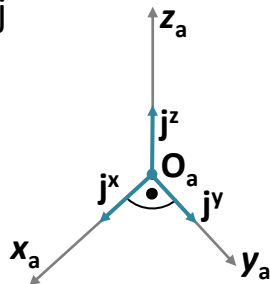
Ako môže vyzeráť axonometrická sústava súradníc?

Odpoveď dáva **Pohlkeho veta**.



Pohlkeho veta. Tri úsečky v rovine, ktoré majú spoločný krajný bod a ležia na troch rôznych priamkach, možno vždy považovať za rovnobežný priemet troch navzájom kolmých, rovnako dlhých úsečiek so spoločným krajným bodom (t.j. jednotiek j na pravouhlých súradnicových osiach).

Príklady axonometrickej sústavy súradníc :



Axonometriu rozdeľujeme na typy podľa viacerých kritérií:

A. Rozdelenie podľa smeru premietania s :

- **kolmá axonometria:** $s \perp \rho$
- **šikmá axonometria:** $s \not\perp \rho$

B. Rozdelenie podľa axonometrických jednotiek:

- **izometria:** $j^x = j^y = j^z$
- **dimetria:** $j^x = j^y \neq j^z$ alebo $j^x = j^z \neq j^y$ alebo $j^y = j^z \neq j^x$
- **trimetria:** $j^x \neq j^y \neq j^z \neq j^x$

C. Rozdelenie podľa axonometrických jednotiek a uhlov axonometrických osí:

- **vojenská axonometria:** $j^x = j^y = j^z$ a $x_a \perp y_a$,
- **kavalierna axonometria:** $j^x = j^y = j^z$ a $x_a \perp z_a$ alebo $j^x = j^y = j^z$ a $y_a \perp z_a$,
- **šikmé premietanie:** $j^x = j^z$, $j^y < j^z$, $x_a \perp z_a$ alebo $j^y = j^z$, $j^x < j^z$, $y_a \perp z_a$,
- **všeobecná šikmá axonometria:** axonometrické osi a jednotky sú ľubovoľné (spĺňajú Pohlkeho vetu).

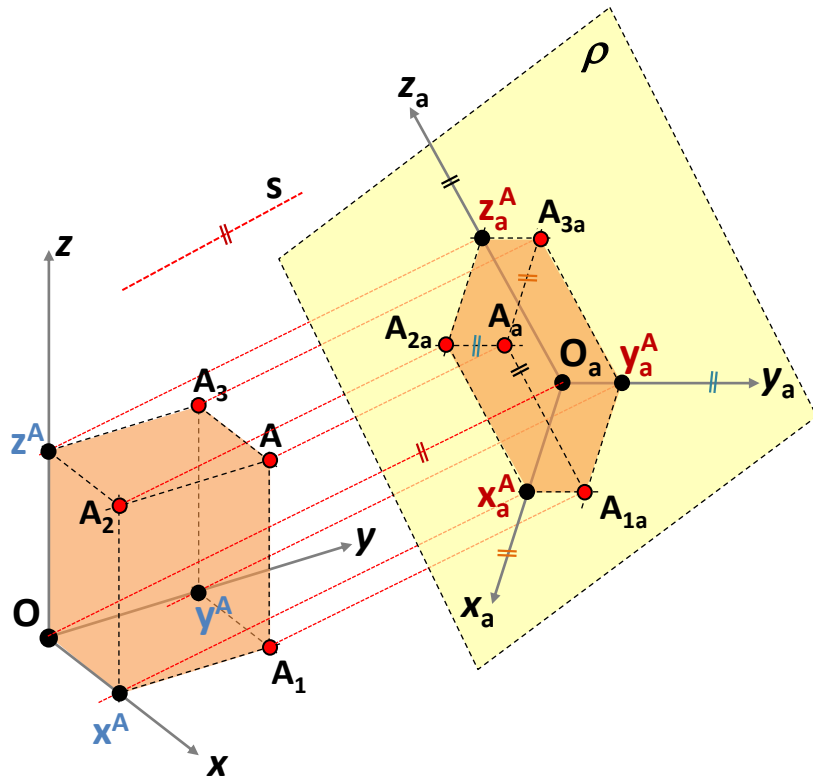
Na riešenie úloh a zobrazovanie telies v axonometrii sa používajú rôzne metódy v závislosti od typu axonometrie.

Vlastnosti axonometrie

Axonometria je **rovnobežné premietanie**, zachováva všetky vlastnosti rovnobežného premietania:

1. zachováva **incidenciu** útvarov
2. zachováva **rovnobežnosť** priamok
3. zachováva **deliaci pomer** bodov na priamke
4. zachováva **tvár a veľkosť** útvaru ležiaceho v rovine rovnobežnej s priemetňou

Obráz bodu v axonometrii



Bod **A** v priestore má súradnice $[x^A; y^A; z^A]$.

Súradnicový kváder bodu je kváder, ktorého hrany sú rovnobežné so súradnicovými osami a dĺžky hrán sú súradnice bodu (presnejšie ich absolútne hodnoty).

A_1, A_2, A_3 , - pôdorys, nárys, bokorys bodu **A**

ρ – priemetňa, s – smer premietania

Do axonometrickej priemetne premietneme

- súradnicové osi,
- súradnicový kváder bodu **A**,
- body **A**, A_1, A_2, A_3 .

A_a - axonometrický priemet bodu **A**

A_{1a} - axonometrický pôdorys bodu **A**, $A_a A_{1a} \parallel z_a$

A_{2a} - axonometrický nárys bodu **A**, $A_a A_{2a} \parallel y_a$

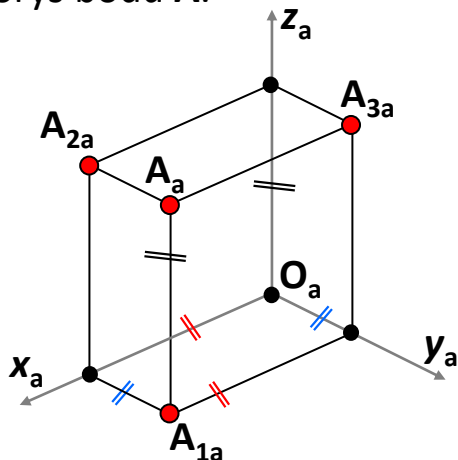
A_{3a} - axonometrický bokorys bodu **A**, $A_a A_{3a} \parallel x_a$

Bod A_a má súradnice: $[x_a^A; y_a^A; z_a^A]$.

Veta. Obráz bodu **A** v axonometrii je jednoznačne určený ktoroukoľvek dvojicou bodov:

- $(A_a, A_{1a}), A_a A_{1a} \parallel z_a$,
- $(A_a, A_{2a}), A_a A_{2a} \parallel y_a$,
- $(A_a, A_{3a}), A_a A_{3a} \parallel x_a$.

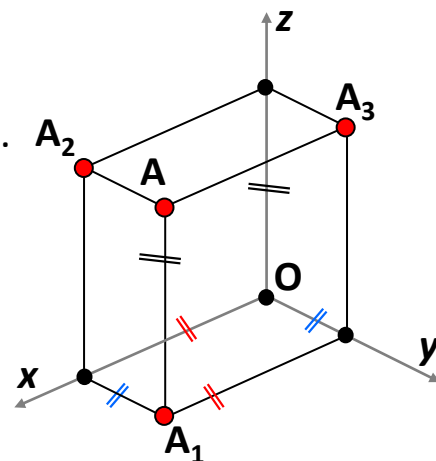
Príklad 11.1. V axonometrii je daný je obraz bodu A , (A_a, A_{1a}) , $A_a A_{1a} \parallel z_a$. Zostrojte axonometrický nárys a bokorys bodu A .



Postup:

Riešime pomocou súradnicového kvádra bodu.

1. Pôdorys súradnicového kvádra zostrojíme pomocou priamok, ktoré prechádzajú bodom A_{1a} a sú rovnobežné s osami x_a a y_a .
2. A_{2a}, A_{3a} - axonometrický nárys a bokorys bodu A sú vrcholy súradnicového kvádra.



Označovanie bez indexu „a“

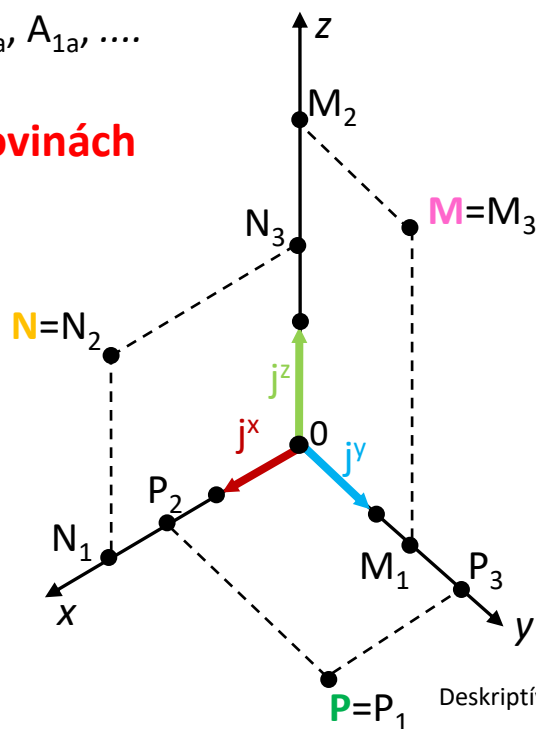
Poznámka: Ak nemôže prísť k nedorozumeniu, budeme v nasledujúcich úlohách index „a“ vynechávať, t.j. budeme písať $x, y, A, A_1, \dots$ namiesto $x_a, y_a, A_a, A_{1a}, \dots$

Priemety bodov ležiacich v súradnicových rovinách

bod P leží v pôdorysni : $P = P_1, P_2 \in x, P_3 \in y$

bod N leží v nárysní : $N = N_2, N_1 \in x, N_3 \in z$

bod M leží v bokorysni: $M = M_3, M_1 \in y, M_2 \in z$

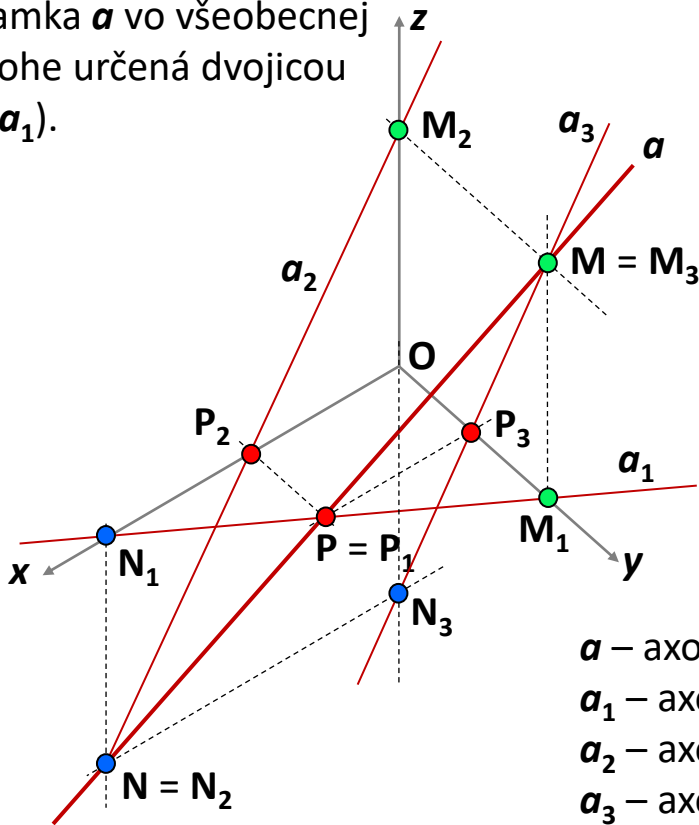


Obráz priamky v axonometrii

Veta. Obráz priamky v axonometrii je jednoznačne určený ľubovoľnou dvojicou jej priemetov, pričom je to dvojica priamok alebo priamka a bod.

Najčastejšie býva obraz priamky určený dvojicou (axon. priemet, axon. pôdorys).

Priamka a vo všeobecnej polohe určená dvojicou (a, a_1) .

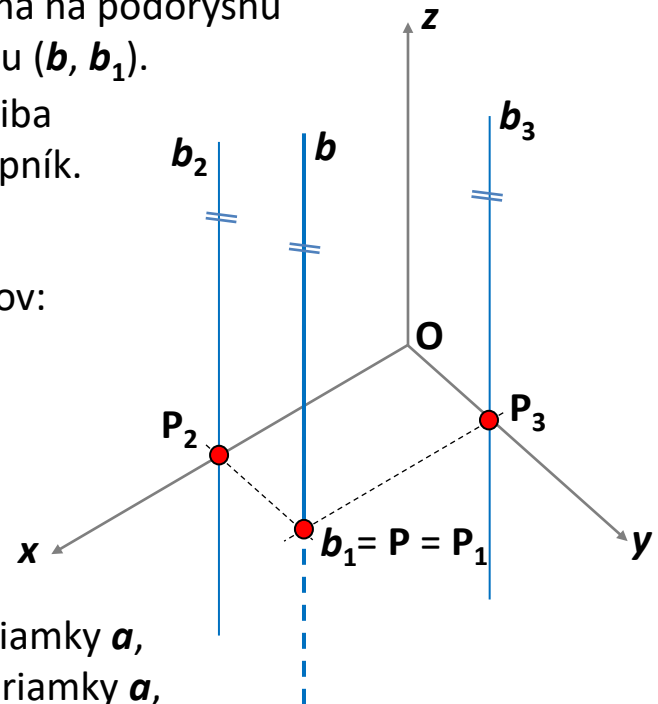


Priamka b kolmá na pôdorysňu určená dvojicou (b, b_1) .

Priamka b má iba pôdorysný stopník.

Konstrukcia stopníkov:

- $P = P_1 = a \cap a_1$,
- $N_1 = a_1 \cap x$,
- $M_1 = a_1 \cap y$.



a – axonometrický priemet priamky a ,
 a_1 – axonometrický pôdorys priamky a ,
 a_2 – axonometrický nárys priamky a ,
 a_3 – axonometrický bokorys priamky a .

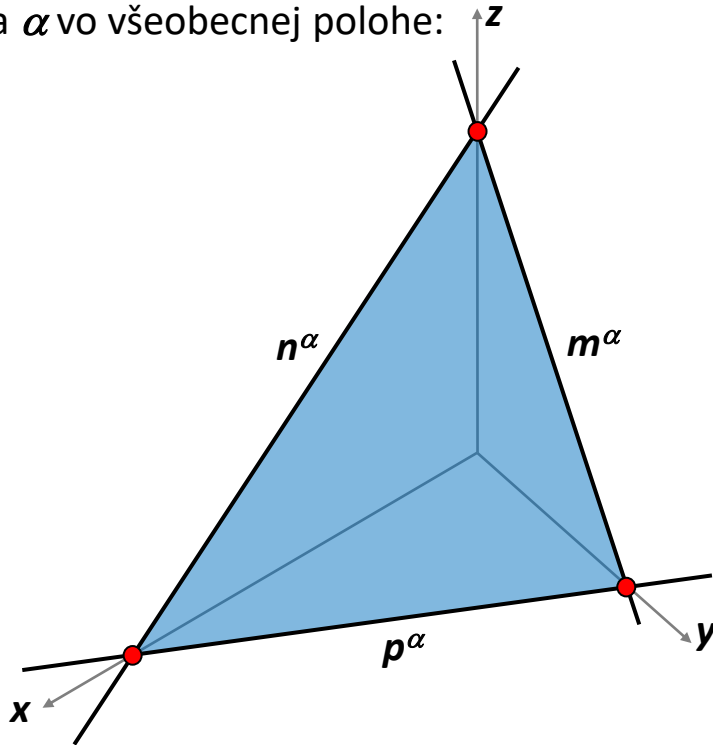
Stopníky priamky (priesečníky priamky s pomocnými priemetňami π, ν, μ):

- **pôdorysný** stopník priamky je priesečník priamky s pôdorysňou, označujeme P ,
- **nárysný** stopník priamky je priesečník priamky s nárysňou, označujeme N ,
- **bokorysný** stopník priamky je priesečník priamky s bokorysňou, označujeme M .

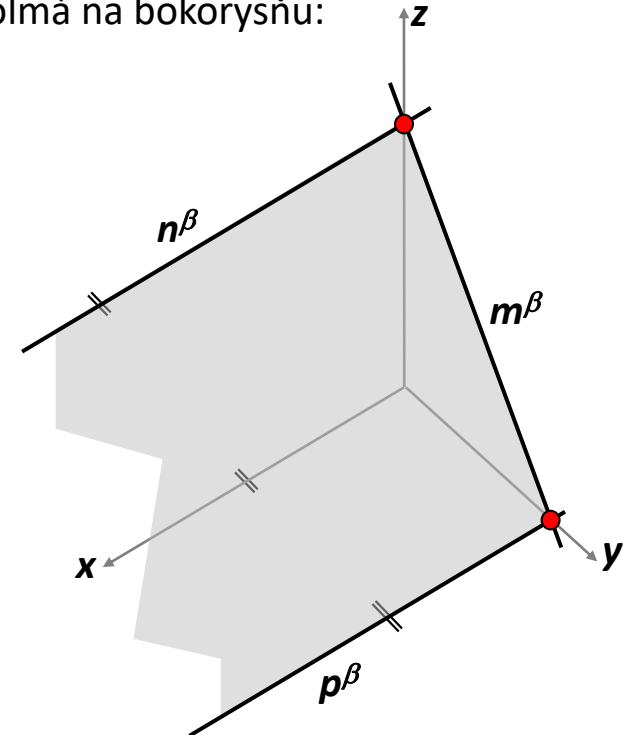
Obráz roviny v axonometrii

Veta. Obráz roviny v axonometrii je jednoznačne určený dvojicou rovnobežných alebo rôznobežných priamok, najčastejšie býva rovina určená dvojicou stôp roviny.

Rovina α vo všeobecnej polohe:



Rovina β kolmá na bokorysňu:



Stopy roviny (priesečnice roviny s pomocnými priemetňami π , ν , μ):

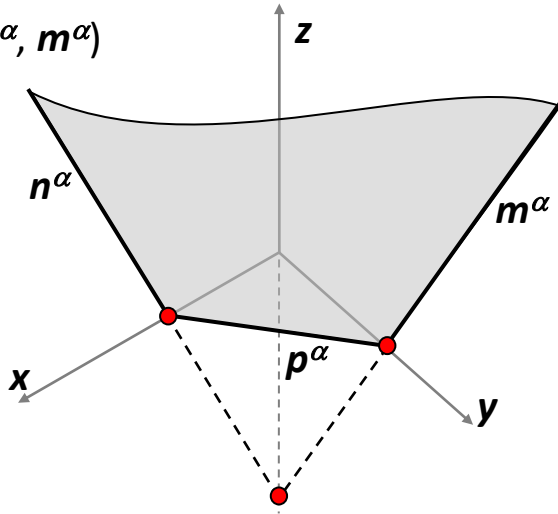
- **pôdorysná** stopa je priesečnica roviny α s pôdorysňou, označujeme p^α ,
- **nárysňá** stopa je priesečnica roviny α s nárysňou, označujeme n^α ,
- **bokorysná** stopa je priesečnica roviny α s bokorysňou, označujeme m^α .

Stopy roviny sa pretínajú na súradnicových osiach $p^\alpha \cap n^\alpha \in x$, $p^\alpha \cap m^\alpha \in y$, $n^\alpha \cap m^\alpha \in z$, alebo dve stopy môžu byť navzájom rovnobežné.

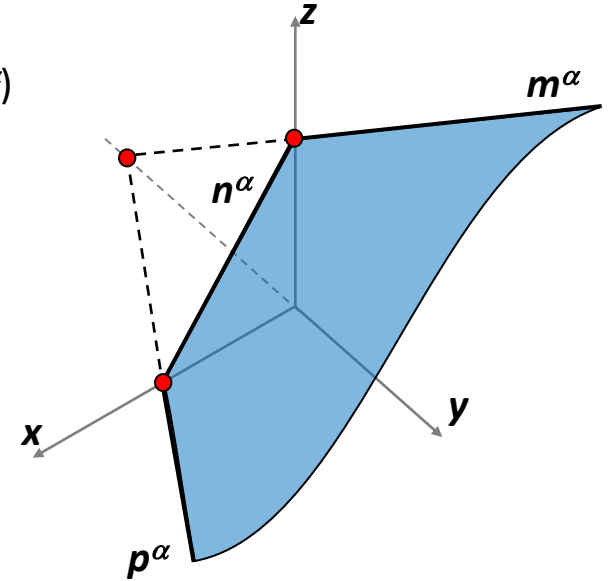
Príklad 11.5. Zostrojte chýbajúcu stopu roviny α .

Postup: Riešime pomocou priesečníkov stôp rovín so súradnicovými osami x, y, z .

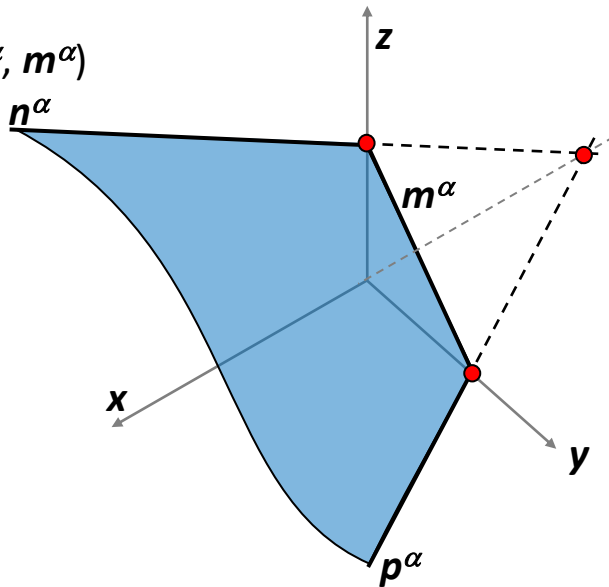
a) $\alpha(p^\alpha, m^\alpha)$



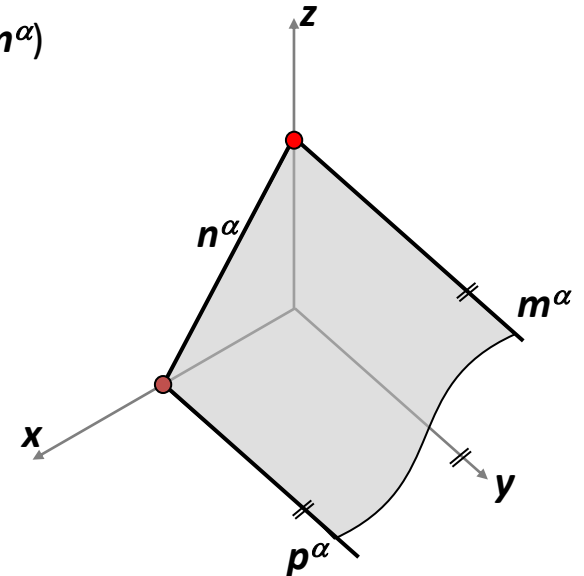
b) $\alpha(p^\alpha, n^\alpha)$

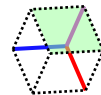


c) $\alpha(n^\alpha, m^\alpha)$



d) $\alpha(n^\alpha, m^\alpha)$



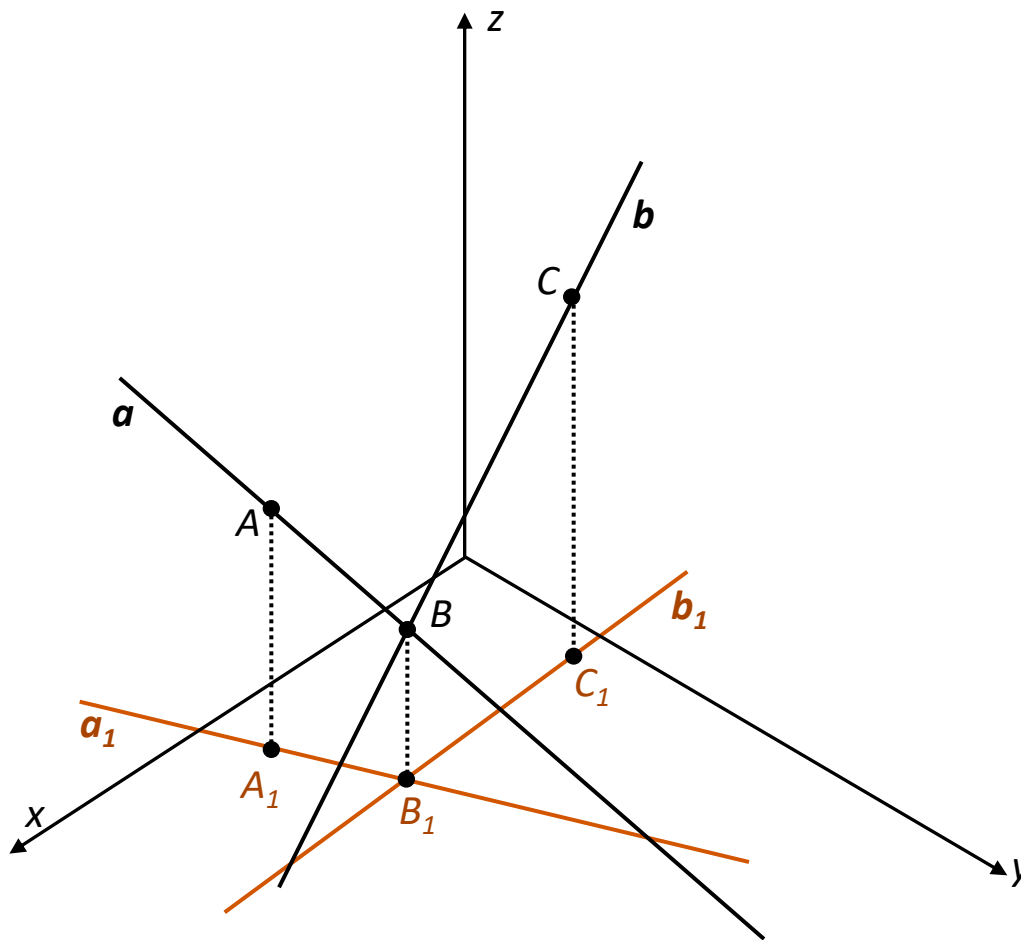


Úloha:

Zostrojte stopy roviny $\alpha = ABC$.

Postup riešenia:

1. Zostrojíme dve priamky roviny napr.
 $a = AB$, $b = BC$.





Úloha:

Zostrojte stopy roviny $\alpha = ABC$.

Pokračovanie:

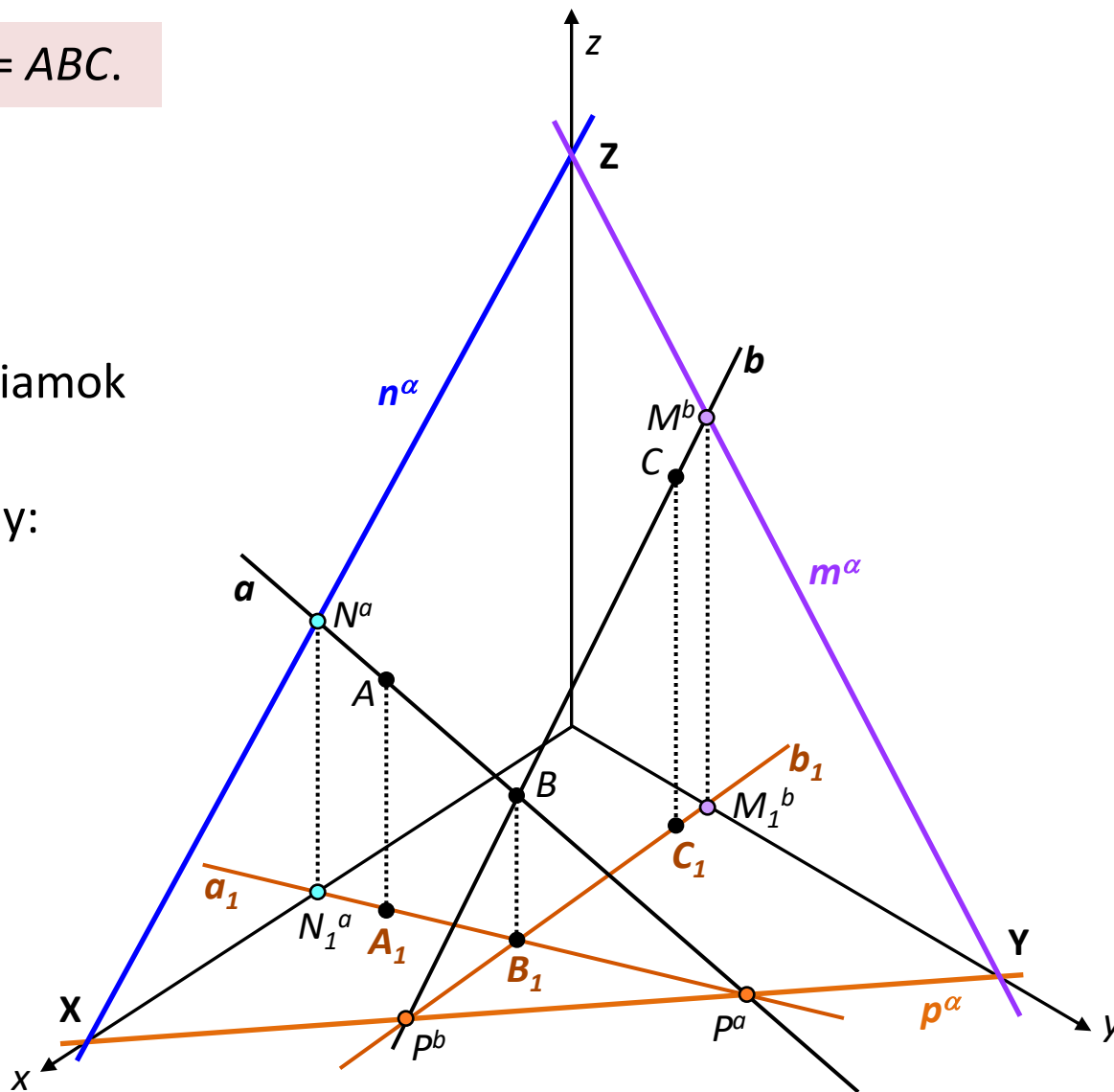
2. Zostrojíme stopníky priamok a, b .

3. Vykreslíme stopy roviny:

$$p^\alpha = p^a p^b$$

$$n^\alpha = XN^a$$

$$m^\alpha = YM^b$$



Stopy roviny sa pretínajú v bodoch X, Y, Z na osiach x, y, z.

Vzájomná poloha dvoch rovín v axonometrii

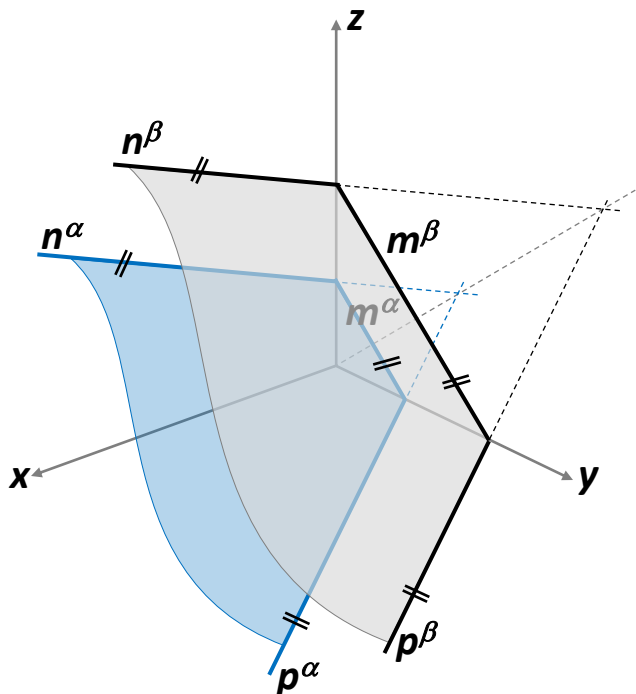
Vzájomná poloha dvoch rovín

Dve roviny v priestore môžu byť:

rovnobežné

Pre obraz rovnobežných rovín α, β platí:

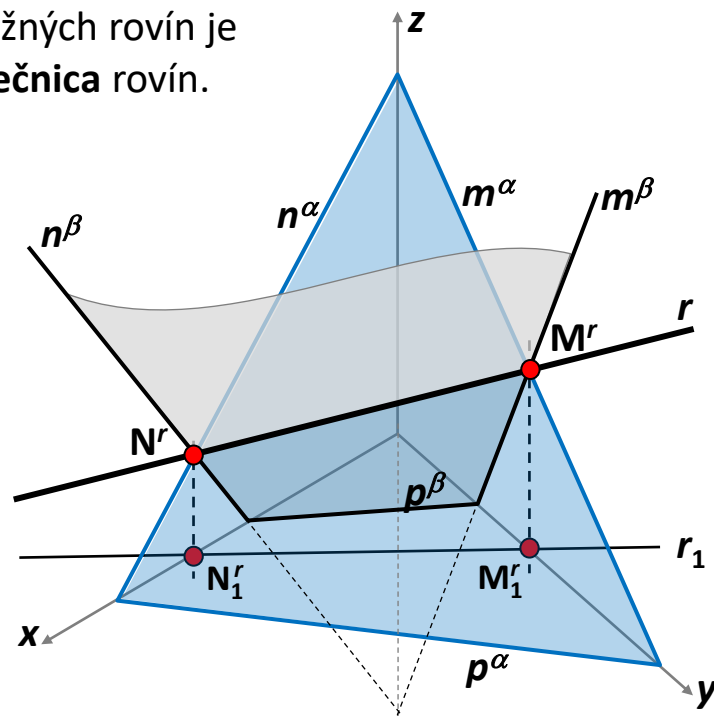
$p^\alpha \parallel p^\beta$ a $n^\alpha \parallel n^\beta$ a $m^\alpha \parallel m^\beta$.



rôznobežné

Roviny α, β sú rôznobežné, ak aspoň jedna dvojica stôp (p^α, p^β), (n^α, n^β), (m^α, m^β) je dvojica rôznobežných priamok.

Prienik rôznobežných rovín je priamka - **priesečnica** rovín.

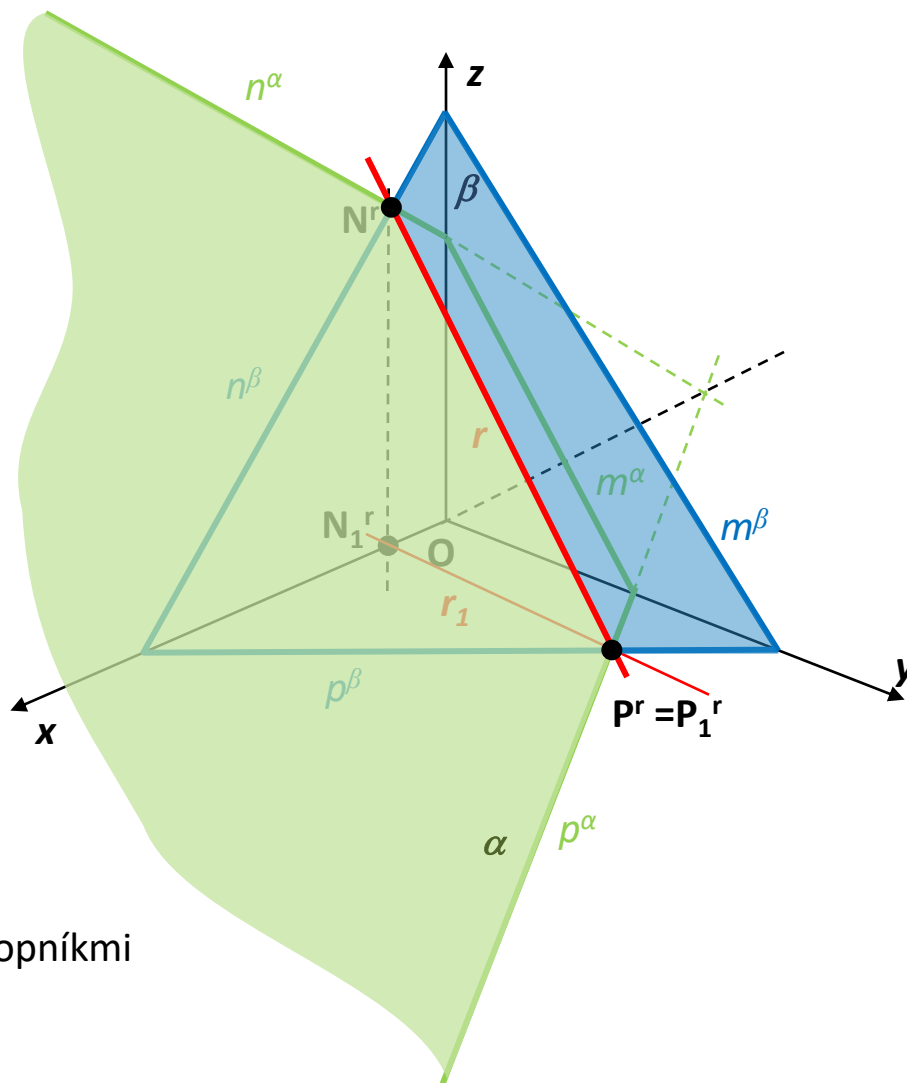


Priesečnica $r = \alpha \cap \beta$ je určená ľubovoľnou dvojicou stopníkov: $P^r = p^\alpha \cap p^\beta$, $N^r = n^\alpha \cap n^\beta$, $M^r = m^\alpha \cap m^\beta$.
Pre úplnosť riešenia dourčíme r_1 .

Priesečnica dvoch rôznobežných rovín

Úloha. Určte priesečnicu rovín $\alpha \cap \beta$. Roviny sú dané stopami.

1. Dourčíme chýbajúcu stopu roviny α .
2. Priesečnica rovín $\alpha \cap \beta = r$.
Určíme ju pomocou stopníkov.
3. $p^\alpha \cap p^\beta = P^r$
 $n^\alpha \cap n^\beta = N^r$
 $m^\alpha \cap m^\beta = M^r$



Priesečníky odpovedajúcich si stôp sú stopníkmi hľadanej priesečnice r .

Príklad. Určte priesečnicu rovín $\alpha \cap \beta$. Roviny sú dané stopami.

