

KURZ DESKRIPTÍVNEJ GEOMETRIE

04 Mongeova projekcia

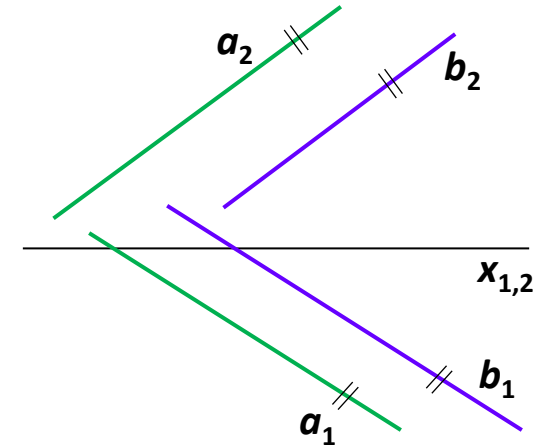
Na všetky lekcie kurzu budete potrebovať:

- *zošit alebo papiere A4 „čisté“*
- ***2 ceruzky: tvrdú** (ozn. H, 2H, ...) na konštrukcie a **mäkkú** (ozn. B, 2B, ...) na vytiahnutie výsledku,*
- *farebné ceruzky, gumu*
- *kružidlo*
- *dve pravítka - jedno s ryskou*

Zobrazenie dvojice rovnobežných priamok

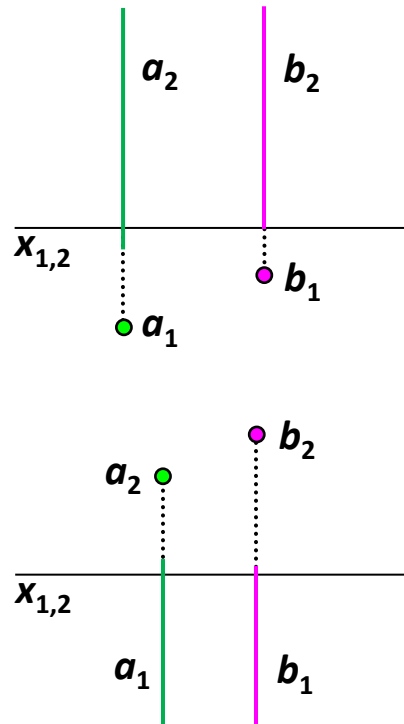
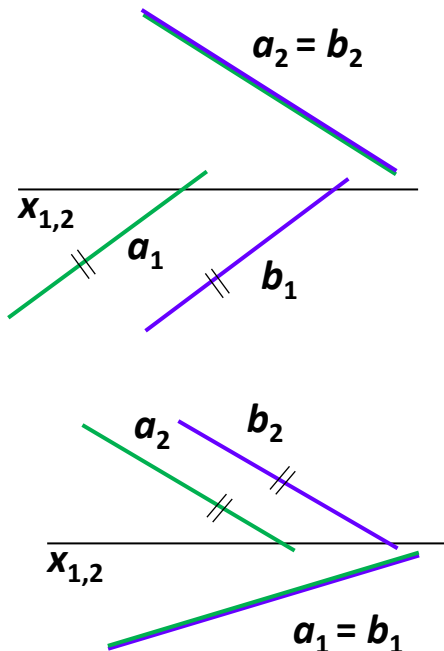
Dve **rovnobežné priamky**, ktoré majú **všeobecnú polohu** vzhľadom na priemetne a nemajú spoločnú premietacu rovinu, sa zobrazia do rovnobežných priamok v pôdoryse aj v náryse. Je to dôsledok toho, že ich príslušné premietacie roviny sú rovnobežné.

$$\begin{aligned} a \parallel b &\rightarrow a_1 \parallel b_1 \\ &\rightarrow a_2 \parallel b_2 \end{aligned}$$

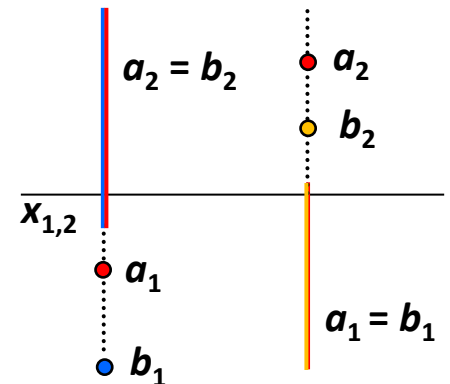


Ak rovnobežky **určujú spoločnú premietacu rovinu** (kolmú na pôdorysňu alebo nárysňu), tak sú aj ich príslušné priemety (pôdorysy alebo nárysy) totožné.

Ak sú rovnobežky **kolmé na pôdorysňu (nárysňu)**, tak ich pôdorysom (nárysom) sú dva body a ich nárysy (pôdorysy) sú kolmé na základnicu x .



Ak sú rovnobežky **kolmé na pôdorysňu (nárysňu)**, a majú **spoločnú premietacu rovinu**, tak sú totožné aj ich príslušné priemety (priamky).



Zobrazenie dvojice rôznobežných priamok

Dve **rôznobežné priamky**, vo **všeobecnej polohe** vzhľadom na priemetne, ktoré nemajú spoločnú premietacu rovinu, sa zobrazia do dvoch rôznobežných priamok v pôdoryse aj v náryse. Priesečníky ich prvých a druhých priemetov ležia na spoločnej ordinále.

Ak sú **prvé (druhé) premietacie roviny** rôznobežiek **totožné**, tak ich pôdorysom (nárysom) sú totožné priamky.

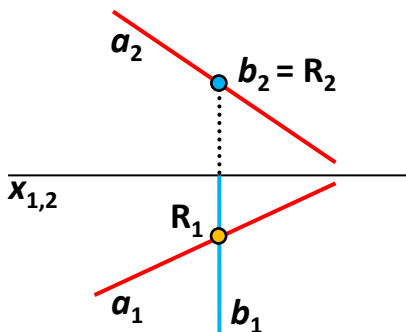
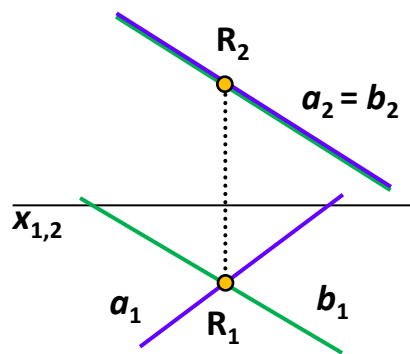
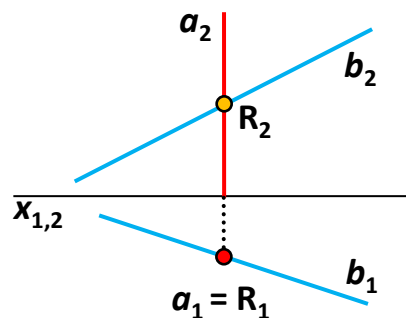
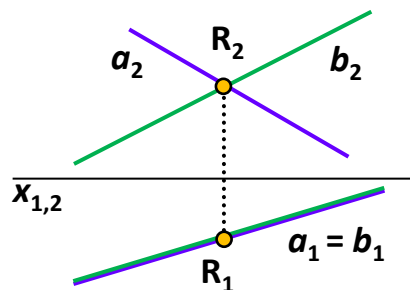
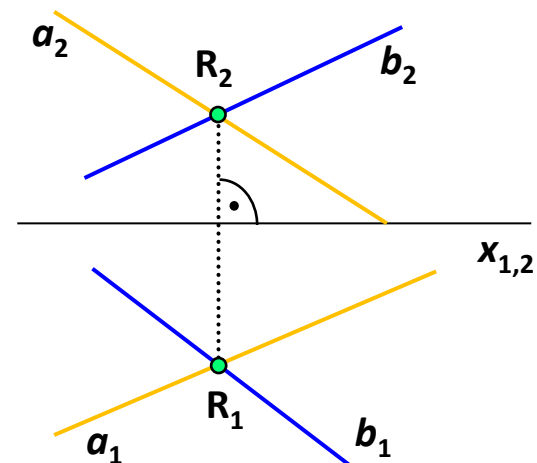
Ak je jedna z rôznobežiek **kolmá na pôdorysňu (nárysňu)**, tak jej pôdorysom (nárysom) je bod ležiaci na pôdoryse (náryse) druhej priamky.

$$a \cap b = R$$

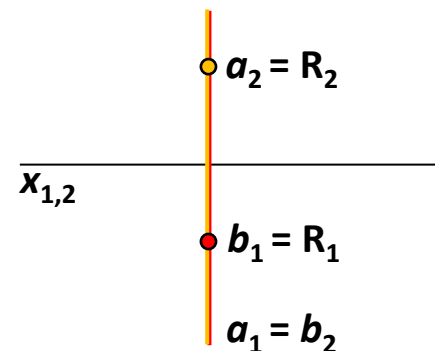
$$\rightarrow a_1 \cap b_1 = R_1$$

$$\rightarrow a_2 \cap b_2 = R_2$$

$$\rightarrow R_1 R_2 \perp x_{1,2}$$



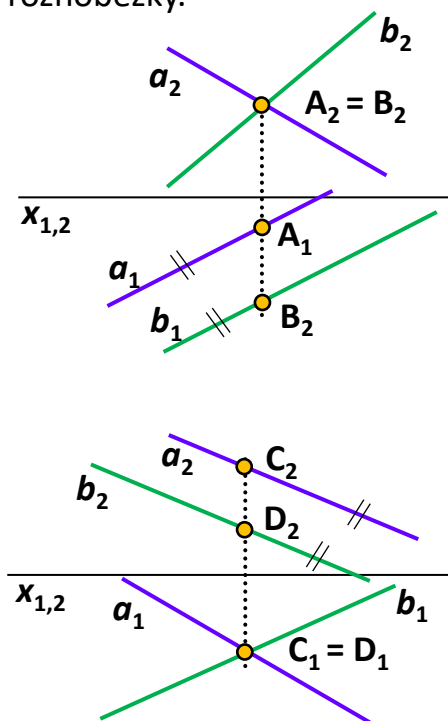
Rôznobežky, z ktorých **jedna je kolmá na pôdorysňu a druhá na nárysňu**, sa premietnu do jednej priamky kolmej na základnicu x .



Zobrazenie dvojice mimobežných priamok

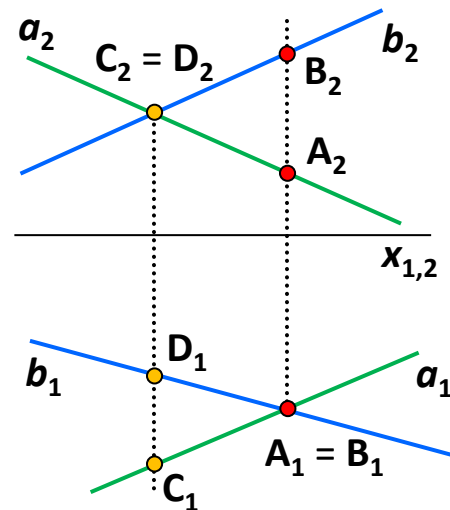
Dve **mimobežné priamky**, vo **všeobecnej polohe** vzhľadom na priemetne, sa zobrazia do dvoch rôznobežných priamok v pôdoryse aj v náryse. Priesečníky ich prvých a druhých priemetov neležia na spoločnej ordinále.

Ak sú **prvé (druhé) premietacie roviny** mimobežiek **rovnobežné**, tak ich pôdorysom (nárysom) sú dve rovnobežky a nárysom (pôdorysom) dve rôznobežky.

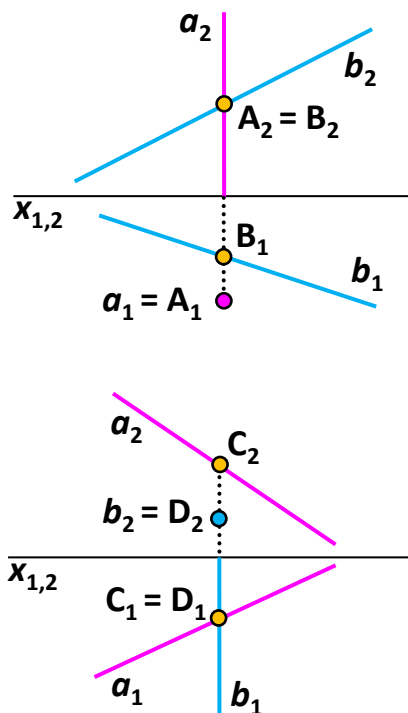


Spoločný bod pôdorysov a_1, b_1 priamok a, b je pôdorysom dvoch rôznych bodov $A \in a, B \in b$.

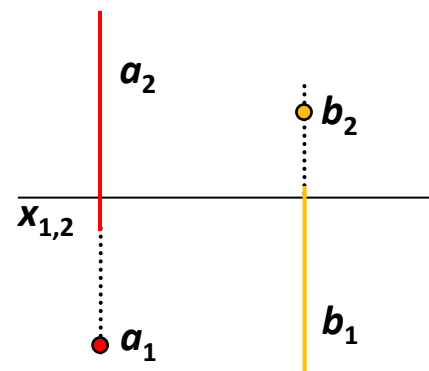
Spoločný bod nárysov a_2, b_2 je nárysom dvoch rôznych bodov $C \in a, D \in b$.



Ak je jedna z mimobežiek **kolmá na pôdorysňu (nárysňu)**, tak jej pôdorysom (nárysom) je bod, ktorý neleží na pôdoryse (náryse) druhej mimobežky.

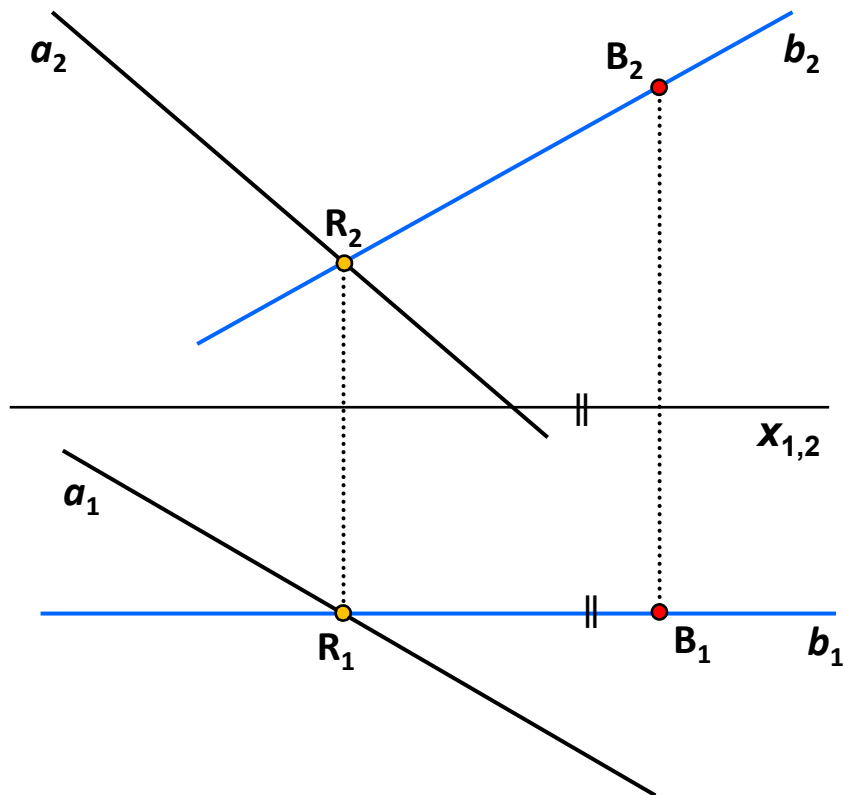


Mimobežky, z ktorých **jedna je kolmá na pôdorysňu a druhá na nárysňu**, sa premietnu nasledovne:



Príklad 10.9: Daná je priamka $a = (a_1, a_2)$ a bod $B = (B_1, B_2)$. Zobrazte priamku b , ktorá prechádza bodom B , je rôznobežná s priamkou a a rovnobežná s nárýsňou.

R



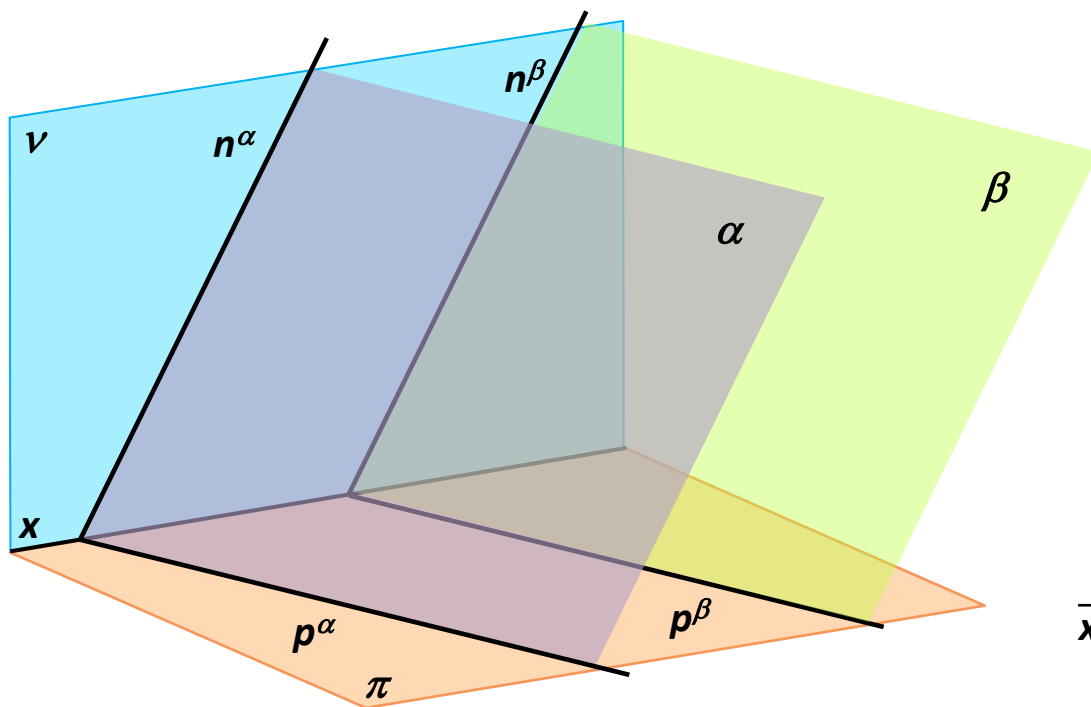
Postup:

1. V prípade, že priamka je rovnobežná s nárýsňou, jej pôdorys je rovnobežný so základnicou $x_{1,2}$:
 $b_1; B_1 \in b_1, b_1 \parallel x_{1,2}$.
2. Je zrejmé, že ak sú priamky a a b rôznobežné, majú spoločný bod:
 $R_1, R_2; b_1 \cap a_1 = R_1,$
 $R_1 \rightarrow R_2 \in a_2$.
3. $b_2; b_2 = R_2 B_2$.

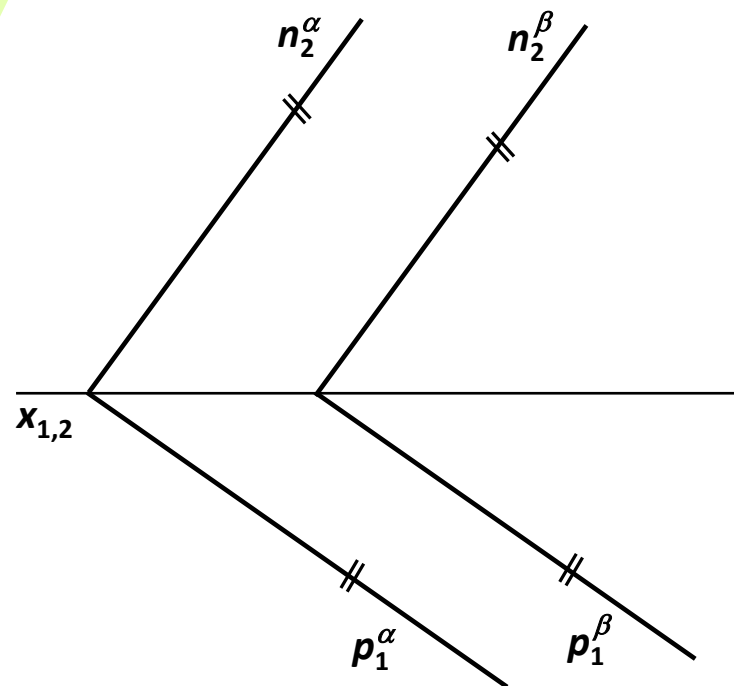
Zobrazenie dvoch rovnobežných rovín

Pri zobrazení rovnobežných rovín vychádzame z poznatku, že ak dve navzájom rovnobežné roviny pretínajú tretiu rovinu (pôdorysňu, nárysňu), tak ich priesečnice s ňou sú navzájom rovnobežné priamky.

Pre rovnobežné roviny α a β z toho vyplýva, že pôdorysná stopa p^α bude rovnobežná s pôdorysnou stopou p^β a nárysná stopa n^α bude rovnobežná s nárysnou stopou n^β .



$$\alpha \parallel \beta \rightarrow p_1^\alpha \parallel p_1^\beta, n_2^\alpha \parallel n_2^\beta$$

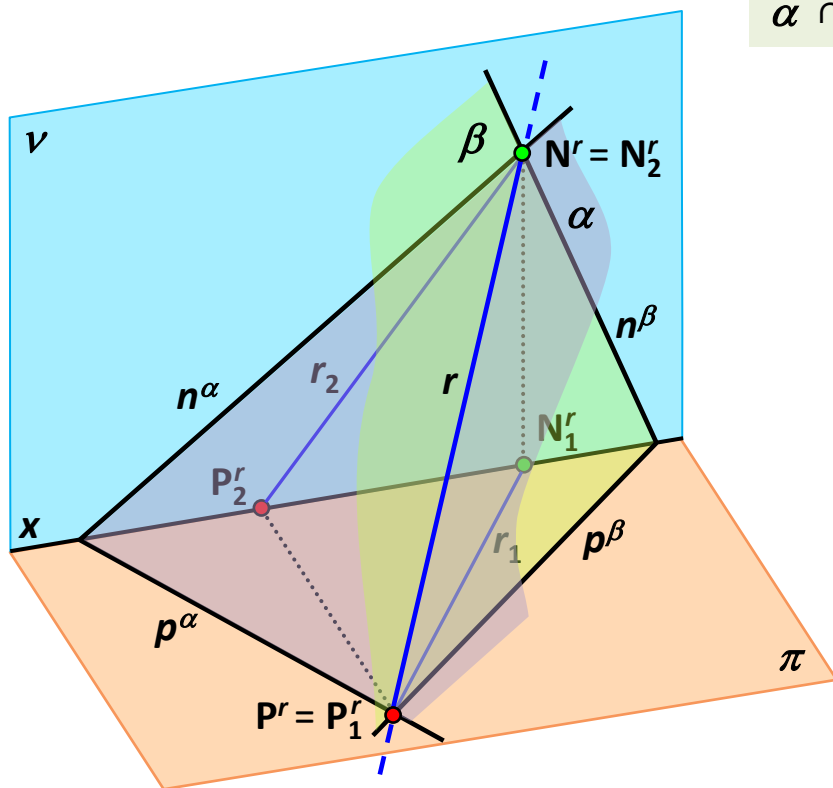


Poznámka: Z rovnobežnosti pôdorysných (nárysných) stôp vyplýva, že priemety hlavných priamok 1.osnovy (2.osnovy) sú tiež navzájom rovnobežné.

Zobrazenie dvoch rôznobežných rovín

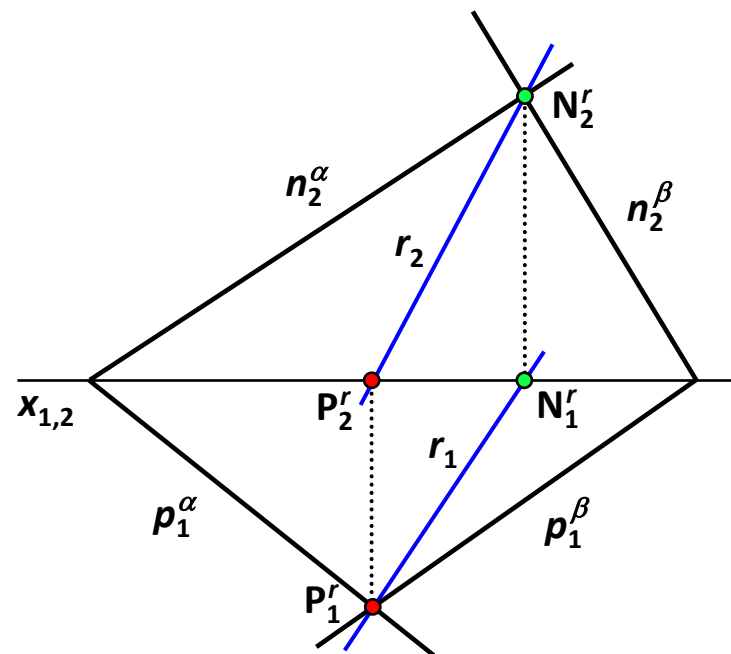
Dve rôznobežné roviny majú spoločnú priamku. Na zostrojenie tejto priesečnice stačí určiť jej dva rôzne body. V prípade rovín daných stopami, môžeme za tieto dva body považovať priesečníky pôdorysných a nárysnych stôp oboch rovín.

Pre rôznobežné roviny α a β je priesečník ich pôdorysných stôp p^α a p^β bod P^r , ktorý je pôdorysným stopníkom ich priesečnice r . Priesečník nárysnych stôp n^α a n^β je bod N^r , ktorý je nárysným stopníkom priesečnice r .



$$\begin{aligned} \alpha \cap \beta &= r && \rightarrow p^\alpha \cap p^\beta = P^r \\ &&& \rightarrow n^\alpha \cap n^\beta = N^r \\ &&& \rightarrow r = P^r N^r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_1 &= P_1^r N_1^r \\ r_2 &= P_2^r N_2^r \end{aligned}$$

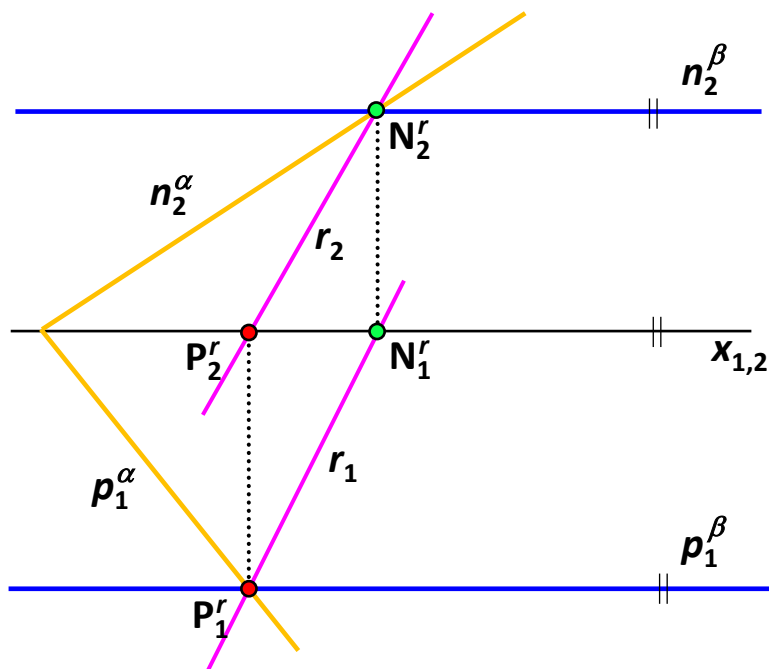


R

Príklad 10.12: Zostrojte priesečnicu rovín $\alpha(p_1^\alpha, n_2^\alpha)$ a $\beta(p_1^\beta, n_2^\beta)$.

a) Rovina β je rovnobežná so základnicou.

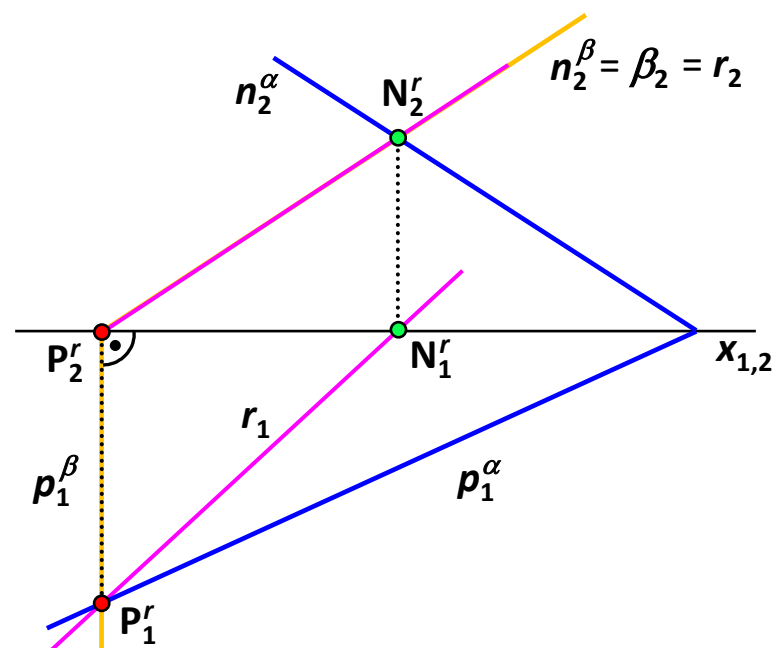
R



Postup:

1. $P_1^r; p_1^\alpha \cap p_1^\beta = P_1^r$.
2. $N_2^r; n_2^\alpha \cap n_2^\beta = N_2^r$.
3. $P_2^r, N_1^r; P_1^r \rightarrow P_2^r \in x_{1,2},$
 $N_2^r \rightarrow N_1^r \in x_{1,2}.$
4. $r_1, r_2; r_1 = N_1^r P_1^r,$
 $r_2 = N_2^r P_2^r.$

b) Rovina β je kolmá na nárysňu.



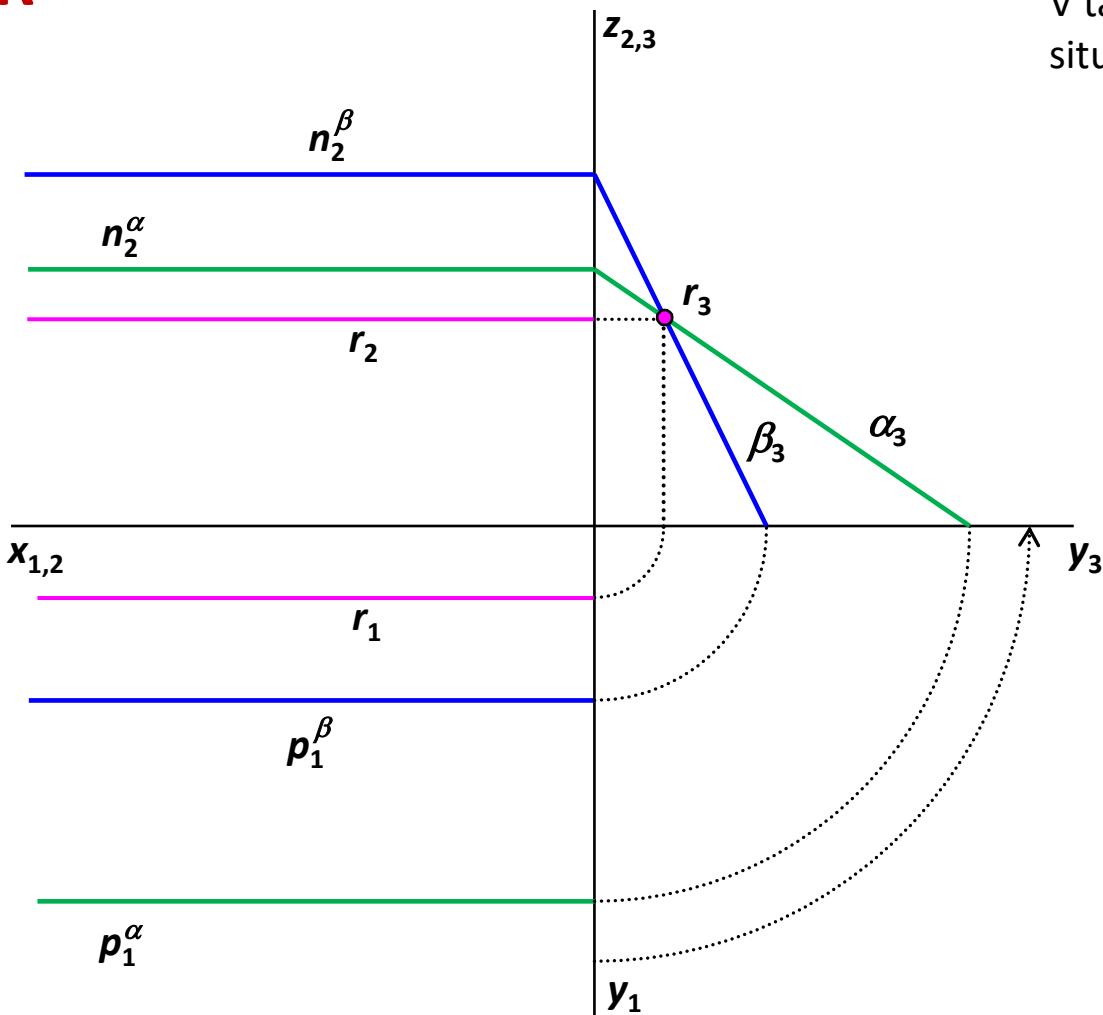
Postup:

Úlohu riešime analogicky ako v prípade a).
 Keďže rovina β je kolmá na nárysňu, jej druhý priemet je priamka $n_2^\beta = \beta_2$. Potom aj nárys r_2 priesečnice r bude totožný s nárysnou stopou n_2^β .

Príklad 10.12: Zostrojte priesečnicu rovín $\alpha(p_1^\alpha, n_2^\alpha)$ a $\beta(p_1^\beta, n_2^\beta)$.

c) Obe roviny sú rovnobežné so základnicou.

R



V takomto prípade je výhodné premietnuť situáciu do tretej priemetne.

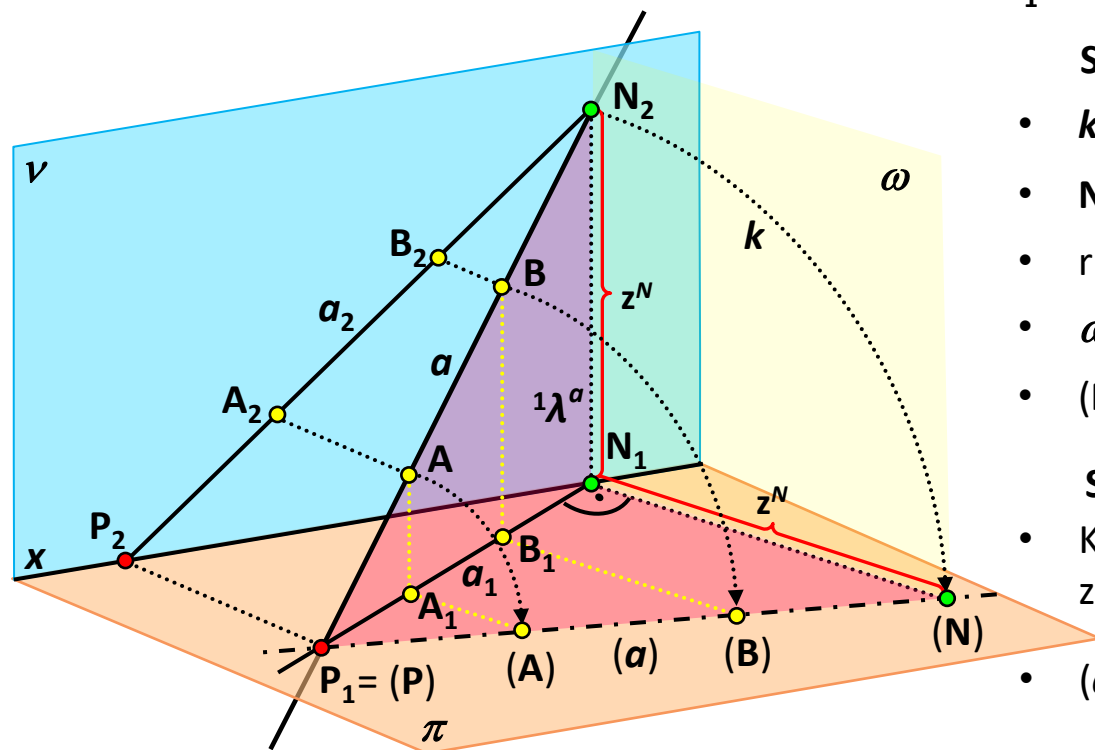
Postup:

1. Keďže obe roviny sú na bokorysňu kolmé, ich tretie priemety α_3 a β_3 budú priamky.
2. Bokorys ich priesečnice r je teda bod r_3 . Následne pomocou ordinál odvodíme jej pôdorys r_1 a nárys r_2 . Sú to priamky rovnobežné so základnicou $x_{1,2}$.

Sklápanie premietacej roviny priamky

V Mongeovej projekcii (podobne ako v kótovanom premietaní) riešime niektoré typy úloh pre priamku vo všeobecnej polohe pomocou **sklápania premietacej roviny priamky do priemetne**. Je možné takto určiť dĺžku úsečky na priamke, či uhol, ktorý zvierajú priamka s priemetňou.

Sklápanie 1. premietacej roviny ${}^1\lambda^a$ priamky a do priemetne π



Sklopenie je špeciálny prípad otočenia, kedy je **uhol otočenia 90°** . Sklopenú polohu priamky získame sklopením dvoch jej rôznych bodov. Sklopené polohy bodov označujeme zátvorkami napr. **(F)**. Útvary v sklopenej polohe budeme vyznačovať bodkočiarkovanou čiarou.

- ${}^1\lambda^a$ – 1. premietacia rovina priamky a , ${}^1\lambda^a \perp \pi$,
- a_1 – os otáčania roviny ${}^1\lambda^a$,

Sklápanie bodu N

- k – kružnica otáčania bodu N , $k(N_1, r = |z^N|)$,
- N_1 – stred otáčania bodu N ,
- $r = |z^N|$ – polomer otáčania bodu N ,
- ω – rovina otáčania bodu N , $k \subset \omega$, $\omega \perp a_1$,
- (N) – sklopená poloha bodu N .

Sklápanie bodu P

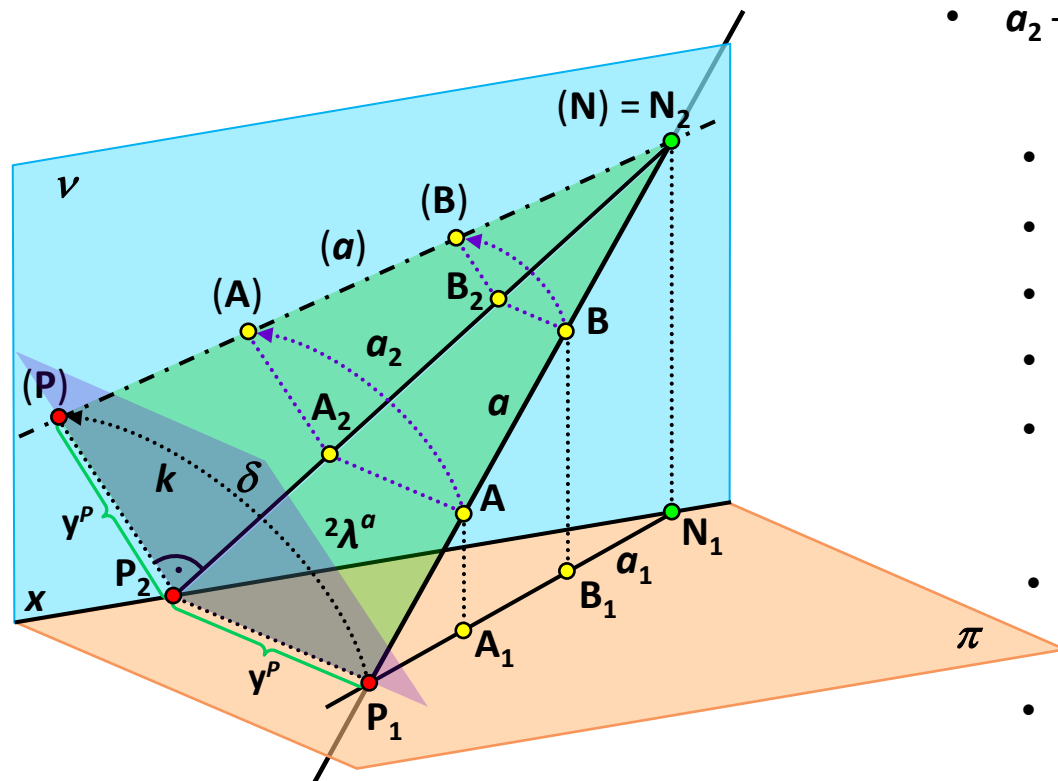
- Keďže bod P leží v priemetni π ($z^P = 0$), zostáva pri sklápaní na mieste: $P_1 = (P)$.
- $(a) = (P)(N)$ – sklopená poloha priamky a .

Poznámka: Bod A priamky a sa pri sklápaní otáča po kružnici, ktorej polomer je z -ová súradnica bodu A a stred leží v pôdoryse A_1 , analogicky pre bod B .

Sklápanie premietacej roviny priamky

Analogickým spôsobom určíme sklápanie 2. premietacej roviny priamky do nárysne, pričom osou otáčania je nárys danej priamky a polomery otáčania jednotlivých bodov priamky sú ich y -ové súradnice.

Sklápanie 2. premietacej roviny ${}^2\lambda^a$ priamky a do priemetne ν



- ${}^2\lambda^a$ – 2. premietacia rovina priamky a , ${}^2\lambda^a \perp \nu$,
- a_2 – os otáčania roviny ${}^2\lambda^a$,

Sklápanie bodu P

- k – kružnica otáčania bodu P , $k(P_2, r = |y^P|)$,
- P_2 – stred otáčania bodu P ,
- $r = |y^P|$ – polomer otáčania bodu P ,
- δ – rovina otáčania bodu P , $k \subset \delta$, $\delta \perp a_2$,
- (P) – sklopená poloha bodu P .

Sklápanie bodu N

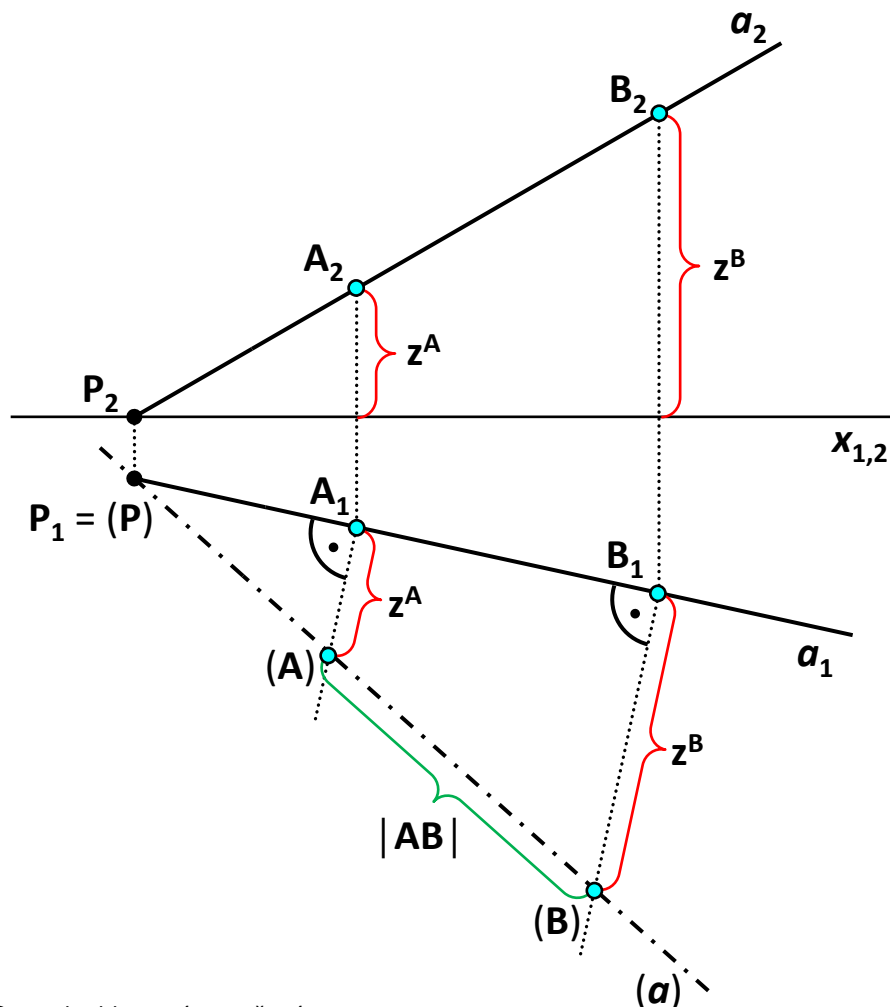
- Keďže bod N leží v priemetni ν ($y^N = 0$), zostáva pri sklápaní na mieste: $N_2 = (N)$.
- $(a) = (P)(N)$ – sklopená poloha priamky a .

Poznámka: Bod A priamky a sa pri sklápaní do nárysne otáča po kružnici, ktorej polomer je y -ová súradnica bodu A a stred leží v náryse A_2 , analogicky pre bod B .

Určenie dĺžky úsečky

V nasledujúcom príklade využijeme sklápanie premietacej roviny na **určenie dĺžky úsečky**, ktorá je vzhľadom na priemetne **vo všeobecnej polohe**. Ukážeme niekoľko možností riešenia.

Príklad 10.18: V Mongeovej projekcii určte dĺžku úsečky **AB** na priamke ***a***.



1. možnosť:

Úlohu vyriešime **sklopením 1. premietacej roviny** priamky **a** do pôdorysne.

Postup:

1. Bodom $\mathbf{A}_1$ vedieme kolmicu na pôdorys $\mathbf{a}_1$ priamky $\mathbf{a}$. Na túto kolmicu nanesieme **z-ovú** súradnicu $\mathbf{z}^A$ bodu $\mathbf{A}$. Získame sklopenú polohu ($\mathbf{A}$) bodu $\mathbf{A}$.
2. Analogicky zostrojíme sklopenú polohu ($\mathbf{B}$) bodu $\mathbf{B}$.
3. Spojením bodov ($\mathbf{A}$) a ($\mathbf{B}$) získame sklopenú polohu ($\mathbf{a}$) priamky $\mathbf{a}$. Úsečka ($\mathbf{A}$)($\mathbf{B}$) určuje veľkosť úsečky $\mathbf{AB}$.

Poznámka: Body (**A**) a (**B**) ležia v tej istej polrovine vzhľadom na α_1 , lebo $\mathbf{z}^A$ a $\mathbf{z}^B$ majú rovnaké znamienko.

Poznámka: V bode, kde priamka $\mathbf{a}_1$ pretína priamku $(\mathbf{a})$, leží pôdorysný stopník priamky $\mathbf{a}$. Jeho pôdorys $\mathbf{P}_1$ a sklopená poloha $(\mathbf{P})$ sú totožné.

Určenie dĺžky úsečky

Príklad 10.18: V Mongeovej projekcii určte dĺžku úsečky **AB** na priamke **a**.

2. možnosť:

Úlohu vyriešime **sklopením 2. premietacej roviny** priamky **a** do nárysne.

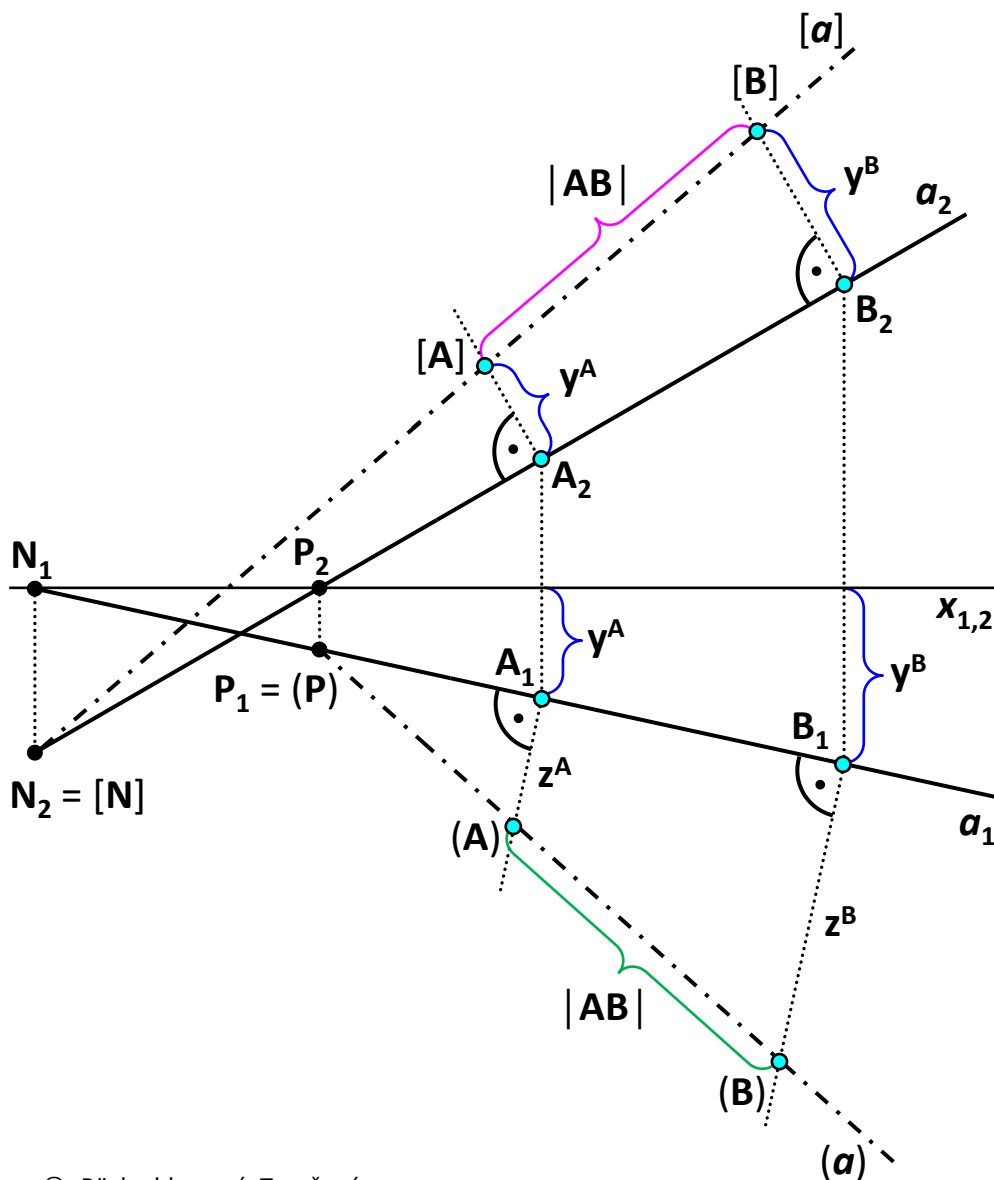
Poznámka: Keďže v obrázku budú znázornené dve sklápania do rôznych priemetní, rozlíšime ich použitím iného typu zátvoriek.

Postup:

1. Analogicky ako v predchádzajúcom postupe zostrojíme sklopené polohy **[A]**, **[B]** bodov **A**, **B** do nárysne s využitím ich **y**-ových súradníc.
2. Spojením bodov **[A]** a **[B]** získame sklopenú polohu **[a]** priamky **a** do nárysne. Úsečka **[A][B]** určuje veľkosť úsečky **AB**.

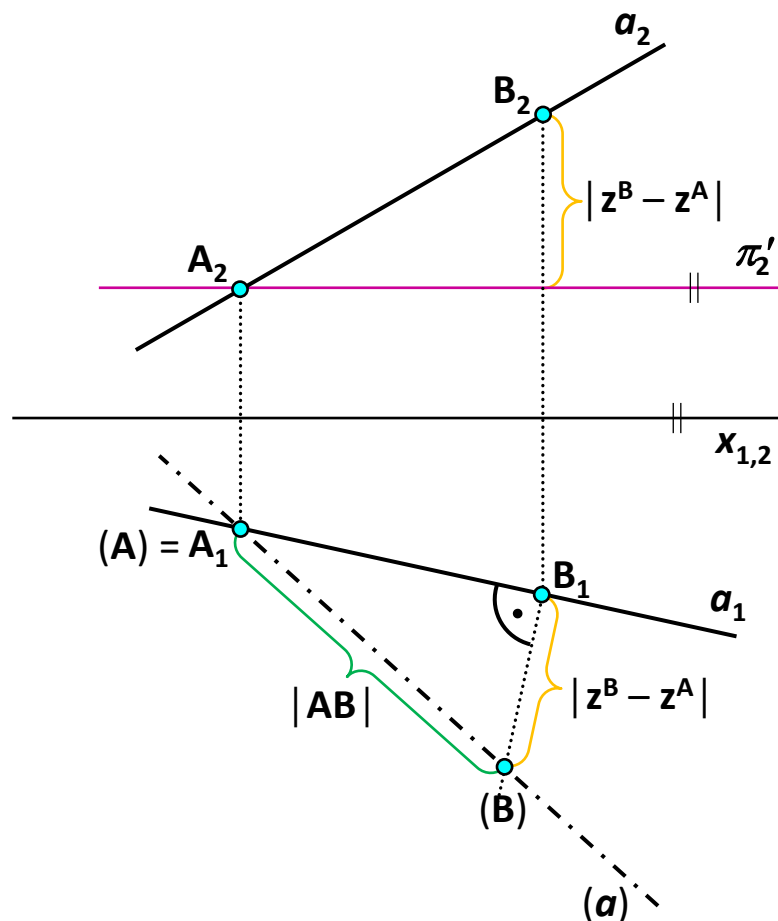
Poznámka: Body **[A]** a **[B]** opäť ležia v tej istej polrovine vzhľadom na **a₂**, lebo **y^A** a **y^B** majú rovnaké znamienko.

Poznámka: V bode, kde priamka **a₂** pretína priamku **[a]**, leží nárysný stopník priamky **a**. Jeho nárys **N₂** a sklopená poloha **[N]** sú totožné.



Určenie dĺžky úsečky

Príklad 10.18: V Mongeovej projekcii určte dĺžku úsečky **AB** na priamke **a**.



3. možnosť:

Úlohu vyriešime **sklopením 1. premietacej roviny** priamky **a** do **úrovne bodu A**.

Postup:

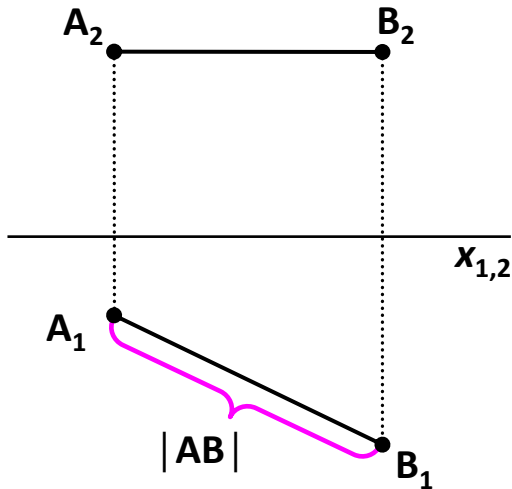
1. Bodom **A** vedieme rovinu π' (úroveň), rovnobežnú s pôdorysňou π , ktorej nárysom je priamka π'_2 .
2. Sklápanie do úrovne bodu **A** znamená, že sklápame do roviny π' . Sklopená poloha **(A)** bodu **A** je teda totožná s priemetom A_1 . Bod **B** sklopíme o rozdiel **z**-ových súradníc bodov **B** a **A**.
3. Spojením bodov **(A)** a **(B)** získame sklopenú polohu **(a)** priamky **a**. Úsečka **(A)(B)** určuje veľkosť úsečky **AB**.

Určenie dĺžky úsečky – špeciálne prípady

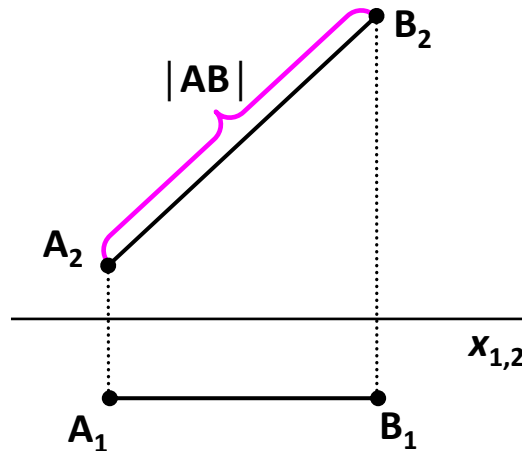
V špeciálnych prípadoch, keď je úsečka kolmá na niektorú priemetňu alebo je s ňou rovnobežná či rovnobežná s osou x , vieme určiť dĺžku úsečky priamo z jej príslušného priemetu bez využitia sklápania premietacej roviny.

Príklad 10.19: V Mongeovej projekcii určte dĺžku úsečky AB .

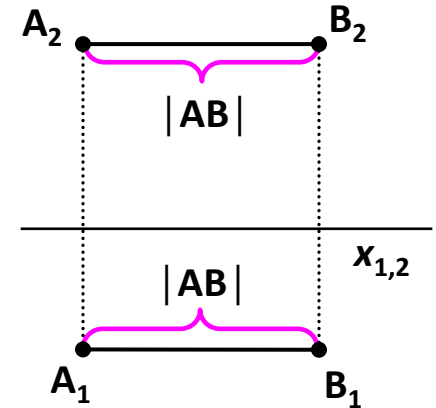
a) $AB \parallel \pi \rightarrow |AB| = |A_1B_1|$



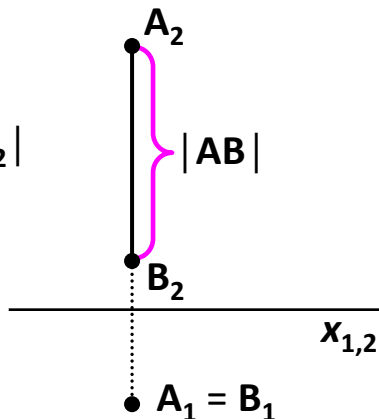
b) $AB \parallel \nu \rightarrow |AB| = |A_2B_2|$



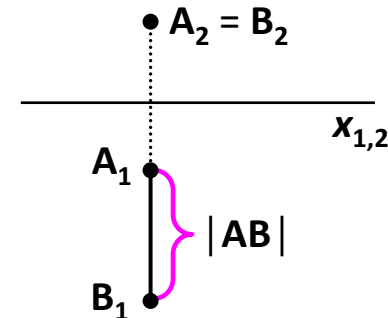
c) $AB \parallel x \rightarrow |AB| = |A_1B_1|$
 $\rightarrow |AB| = |A_2B_2|$



d) $AB \perp \pi \rightarrow |AB| = |A_2B_2|$



e) $AB \perp \nu \rightarrow |AB| = |A_1B_1|$



Odchýlka priamky od priemetne

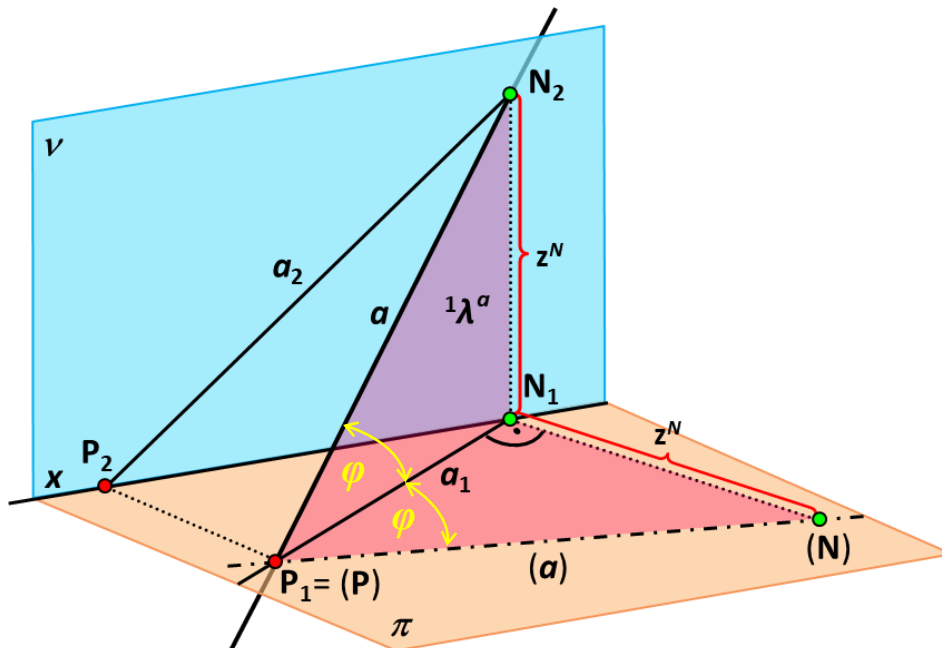
Pomocou sklopenia premietacej roviny priamky zisťujeme tiež **odchýlku priamky od priemetne**.

- je to **uhol priamky a priemetne**,
- t. j. je to **uhol, ktorý zvierá priamka a jej kolmý priemet** do tejto priemetne.

Vzhľadom na dve priemetne rozlišujeme **odchýlku priamky od pôdorysne** a **odchýlku priamky od nárysne**.

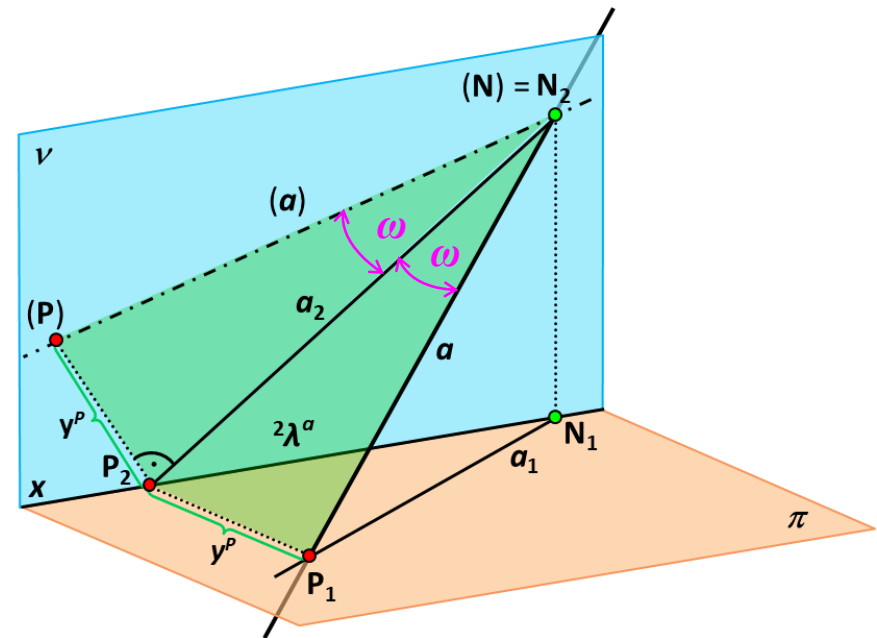
Odchýlka priamky a od pôdorysne π

$$\varphi = \angle(a, \pi) = \angle(a, a_1) = \angle((a), a_1)$$



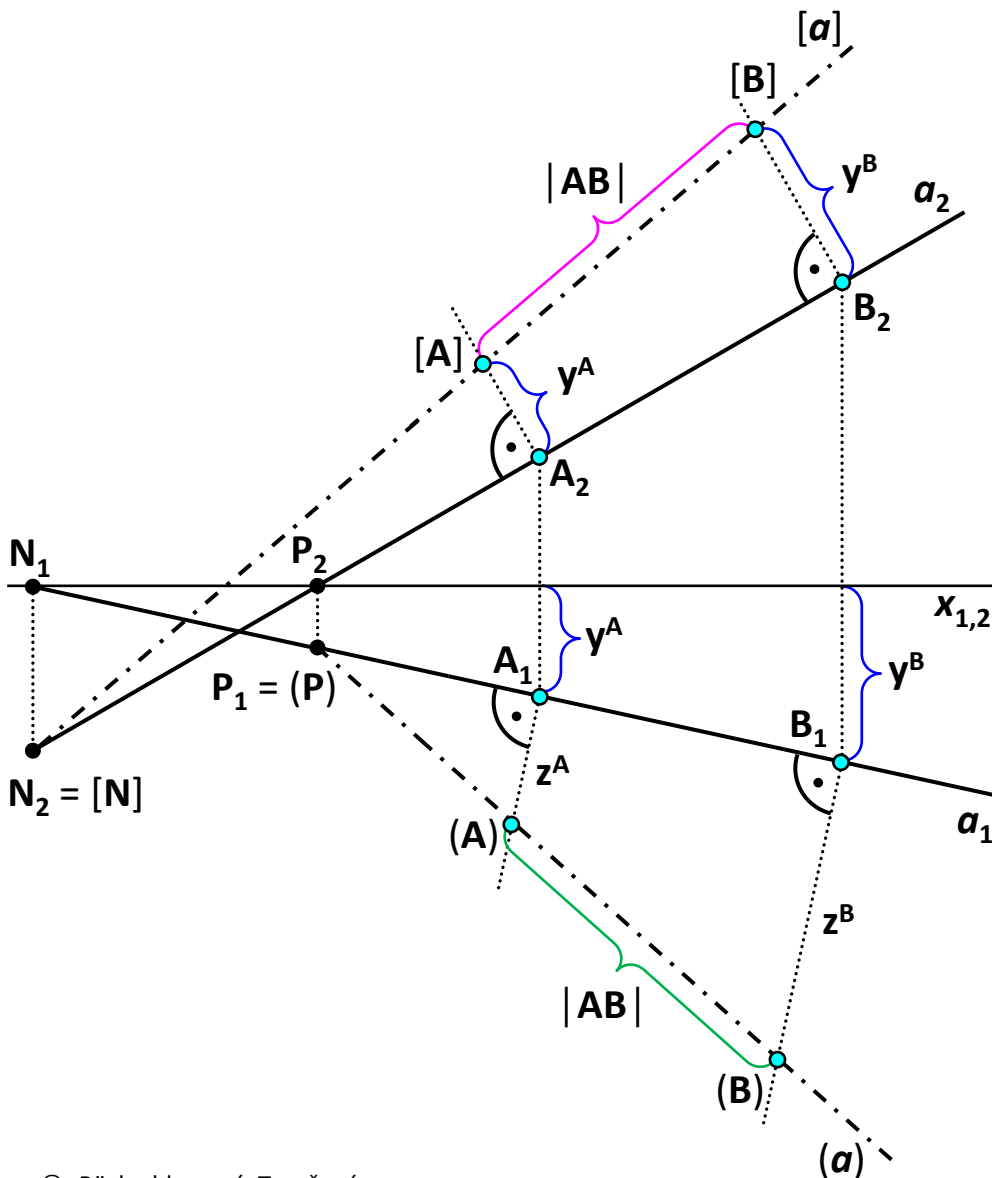
Odchýlka priamky a od nárysne ν

$$\omega = \angle(a, \nu) = \angle(a, a_2) = \angle((a), a_2)$$



Určenie dĺžky úsečky

Príklad 10.18: V Mongeovej projekcii určte dĺžku úsečky **AB** na priamke **a**.



V Mongeovej projekcii určte odchýlku priamky **a = AB** od pôdorysne a nárýsne.

Odchýlka priamky **a** od pôdorysne π

$$\varphi = \sphericalangle(a, \pi) = \sphericalangle(a, a_1) = \sphericalangle([a], a_1)$$

Odchýlka priamky **a** od nárýsne ν

$$\omega = \sphericalangle(a, \nu) = \sphericalangle(a, a_2) = \sphericalangle([a], a_2)$$

Príklad 10.20: V Mongeovej projekcii určte odchýlku priamky $a = AB$ od pôdorysne a nárysne.

Odchýlka φ priamky a od pôdorysne π : $\varphi = \angle(a, \pi)$

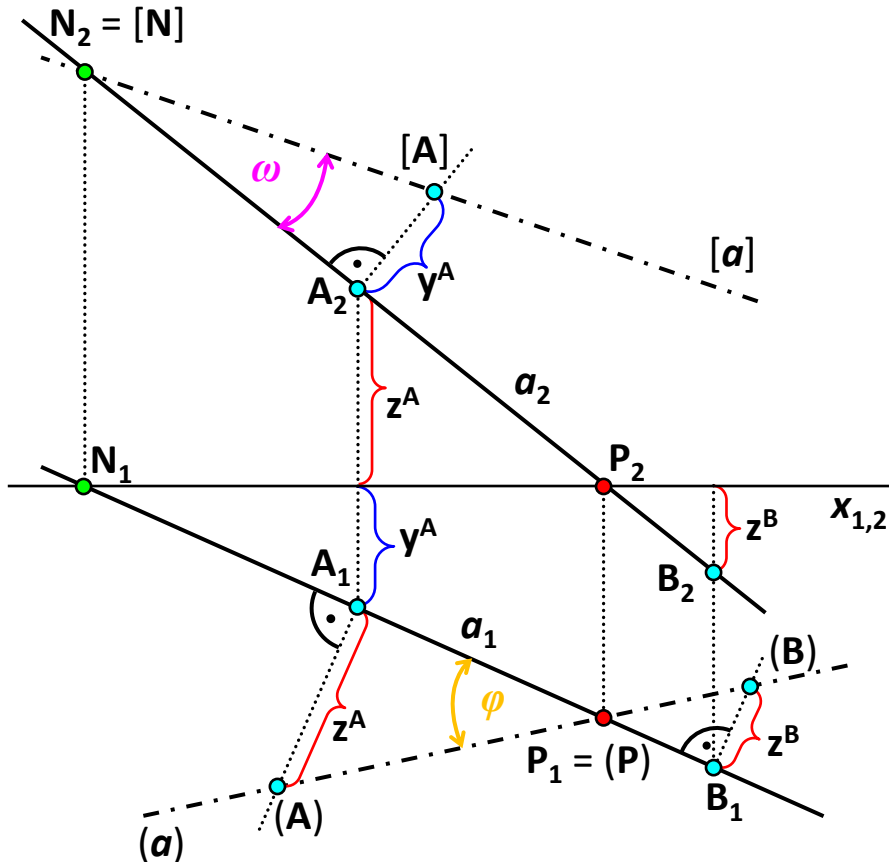
Postup:

1. Úlohu riešime v sklopení 1. premietacej roviny priamky a do priemetne π .

Poznámka: Keďže v tomto prípade je hodnota z^A kladná a hodnota z^B záporná, ležia body (A) a (B) v opačných polrovinách vzhľadom na priamku a_1 .

2. Hľadaný uhol φ je uhol priamok a_1 a (a) pri vrchole $P_1 = (P)$, pre ktorý platí:

- $\varphi = \angle(a, \pi) = \angle(a, a_1) = \angle((a), a_1)$.



Odchýlka ω priamky a od nárysne ν : $\omega = \angle(a, \nu)$

Postup:

1. Úlohu riešime v sklopení 2. premietacej roviny priamky a do priemetne ν .

2. Hľadaný uhol ω je uhol priamok a_2 a $[a]$ pri vrchole $N_2 = [N]$, pre ktorý platí:

- $\omega = \angle(a, \nu) = \angle(a, a_2) = \angle([a], a_2)$.

Odchýlka roviny od priemetne

Každá priamka roviny zvierá s priemetňou nejaký uhol. Najväčší uhol s priemetňou zvierá spádová priamka. Určuje preto **odchýlku roviny od priemetne**.

- je to **uhol roviny a priemetne**,
- t. j. je to **uhol, ktorý zvierá spádová priamka roviny a priemetňa**.

Vzhľadom na dve priemetne rozlišujeme **odchýlku roviny od pôdorysne** a **odchýlku roviny od nárysne**.

Odchýlka roviny α od pôdorysne π

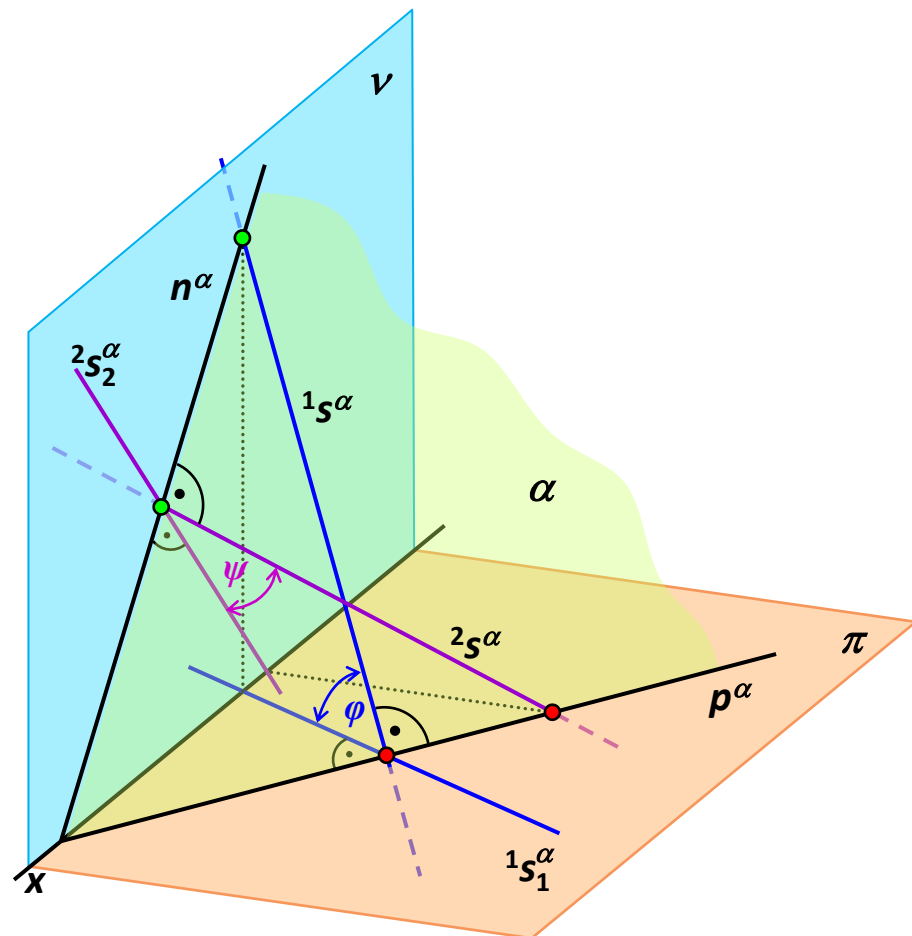
– je to uhol spádovej priamky 1. osnovy roviny α s pôdorysňou

$$\varphi = \sphericalangle(\alpha, \pi) = \sphericalangle(1s^\alpha, \pi)$$

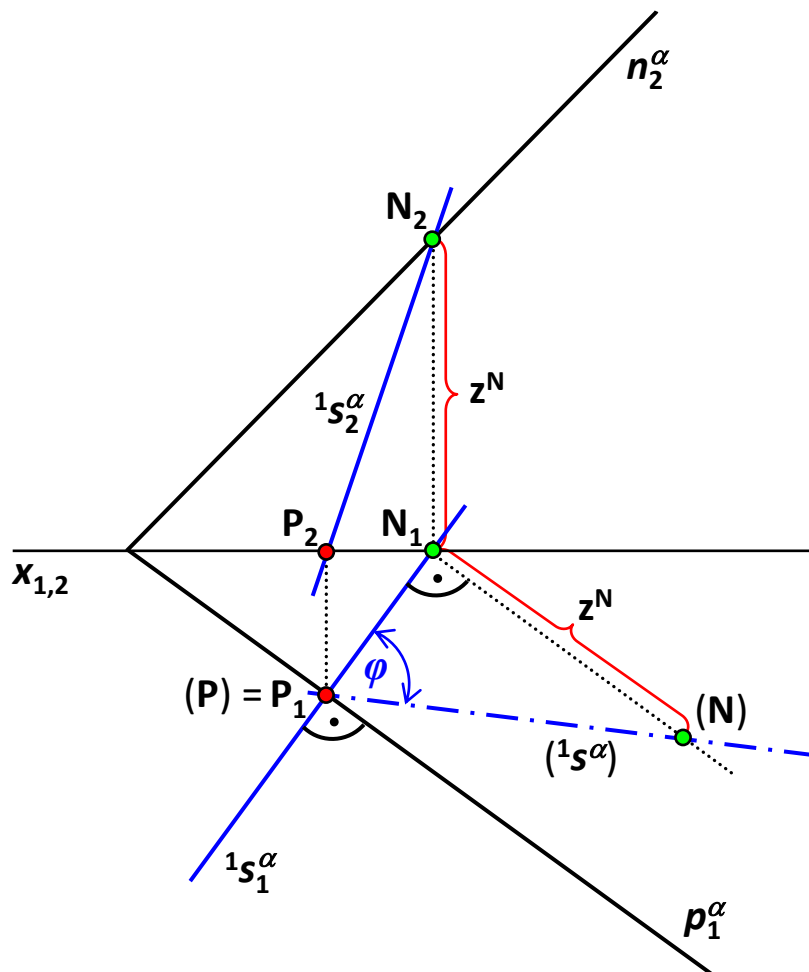
Odchýlka roviny α od nárysne ν

– je to uhol spádovej priamky 2. osnovy roviny α s nárysňou

$$\psi = \sphericalangle(\alpha, \nu) = \sphericalangle(2s^\alpha, \nu)$$



Príklad 10.21: V Mongeovej projekcii určte odchýlku roviny $\alpha(p_1^\alpha, n_2^\alpha)$ od pôdorysne.



Odchýlka φ roviny α od pôdorysne π je odchýlka spádovej priamky 1. osnvy roviny α od pôdorysne π :

$$\varphi = \angle(\alpha, \pi) = \angle(1s^\alpha, \pi).$$

Určíme ju pomocou sklopenia 1. premietacej roviny priamky $1s^\alpha$ do priemetne π .

Postup:

1. Zostrojíme priemety ľubovoľnej spádovej priamky 1. osnvy roviny α .
2. Sklopíme 1. premietáciu roviny priamky $1s^\alpha$ do pôdorysne.
3. Hľadaný uhol φ je uhol priamok $1s_1$ a $(1s^\alpha)$ pri vrchole $P_1 = (P)$, pre ktorý platí:

$$\varphi = \angle(\alpha, \pi) = \angle(1s^\alpha, \pi) = \angle(1s^\alpha, 1s_1^\alpha) = \angle(1s_1^\alpha, (1s^\alpha)).$$

Obráz telesa v Mongeovej projekcii

