

KURZ DESKRIPTÍVNEJ GEOMETRIE

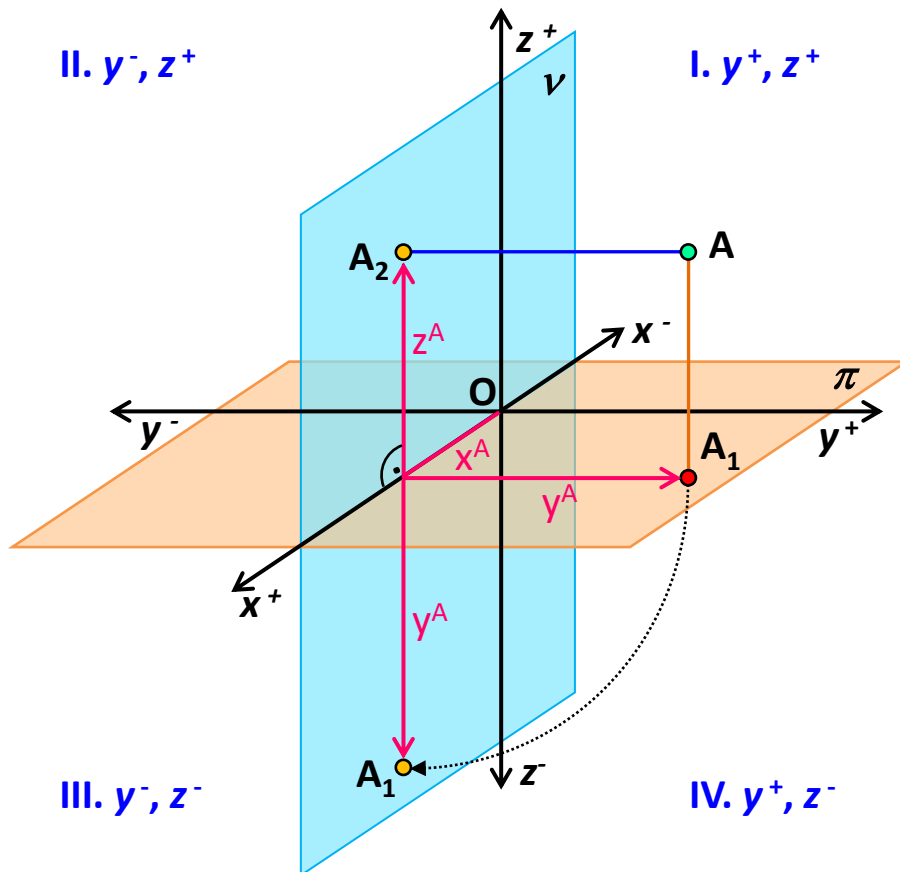
03 Mongeova projekcia

Na všetky lekcie kurzu budete potrebovať:

- *zošit alebo papiere A4 „čisté“*
- ***2 ceruzky: tvrdú** (ozn. H, 2H, ...) na konštrukcie a **mäkkú** (ozn. B, 2B, ...) na vytiahnutie výsledku,*
- *farebné ceruzky, gumu*
- *kružidlo*
- *dve pravítka - jedno s ryskou*

Obráz bodu – súradnicová sústava

Zavedieme súradnicovú sústavu $\mathbf{O}(x, y, z)$. Os x je totožná so základnicou ($\pi \cap \nu$), os y leží v pôdorysni a os z leží v nárysni. V pravotočivej súradnicovej sústave bude kladná poloos x smerovať doľava, kladná poloos y dopredu a kladná poloos z dohora.

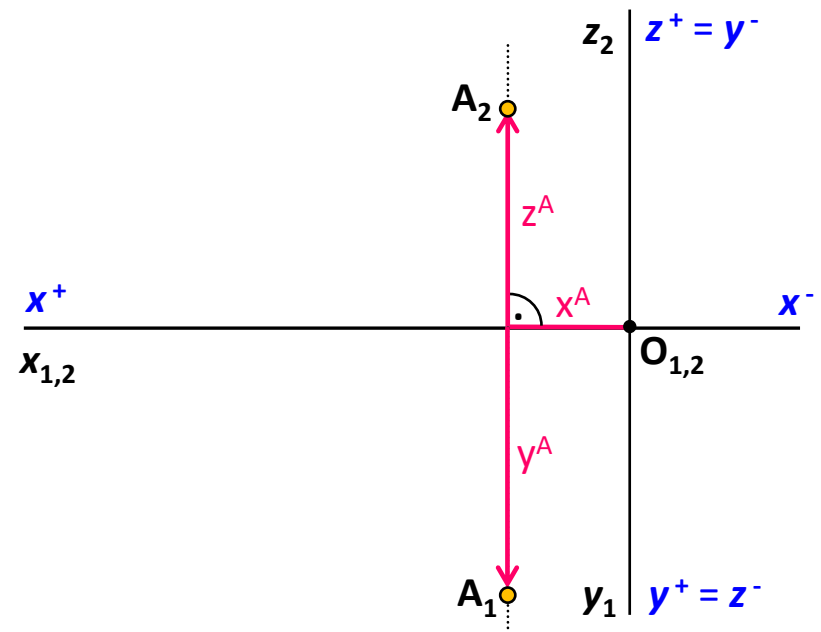


Roviny π a ν rozdeľujú priestor z hľadiska orientácie na štyri kvadranty, označené I, II, III a IV.

Zostrojíme priemety bodu $A [x^A, y^A, z^A]$, ktorý leží v kvadrante I.

Po združení priemetní preniesieme priemety bodu A do nákresne nasledovne:

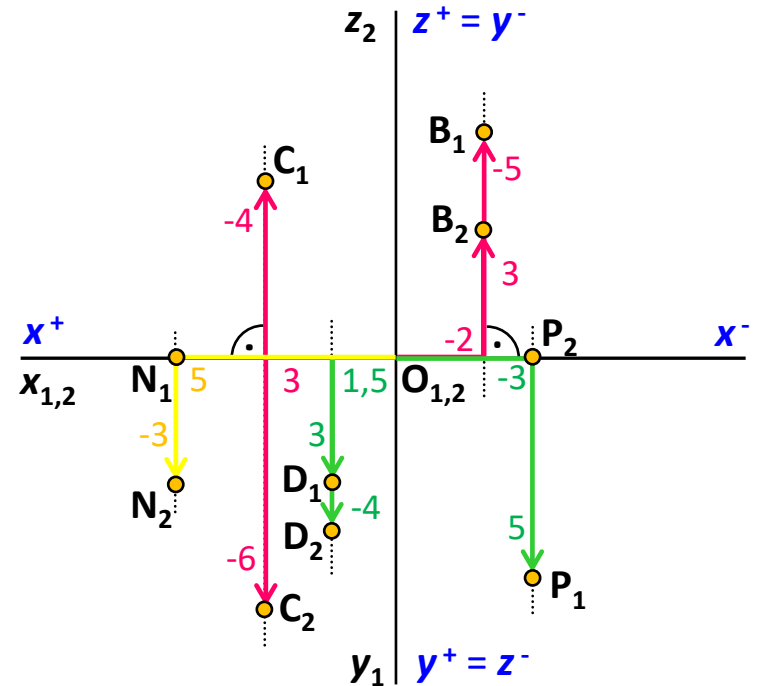
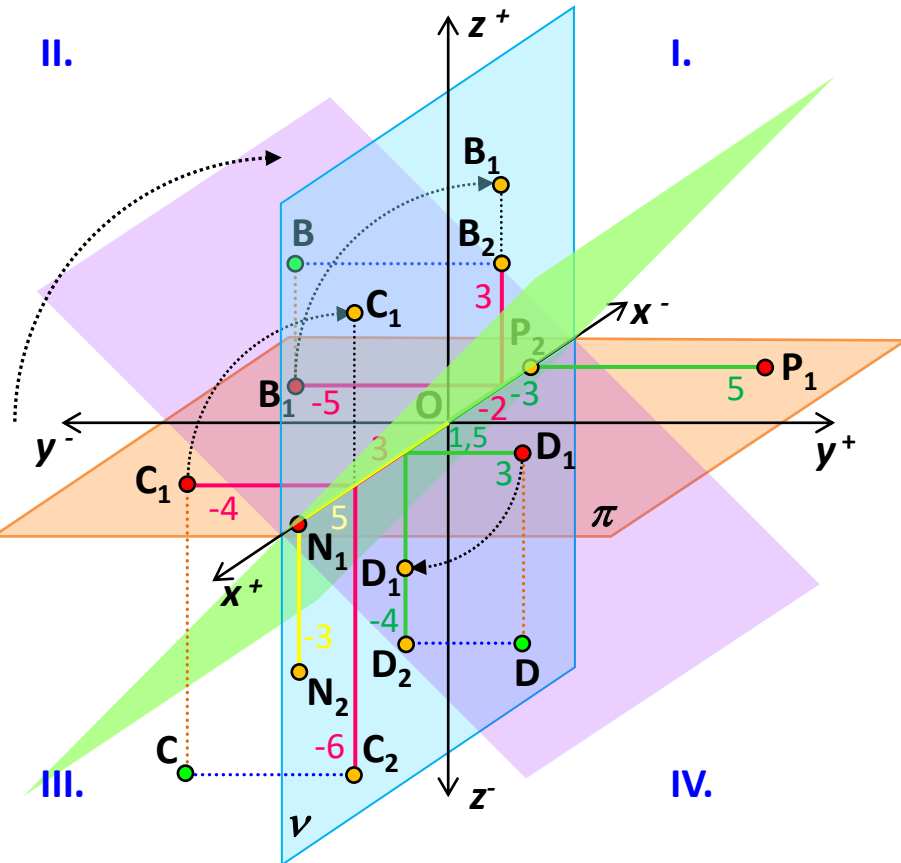
- $A[x^A, y^A, z^A] \rightarrow A_1 [x^A, y^A], A_2 [x^A, z^A]$



Poznámka: Dvojica združených priemetov A_1, A_2 , ktoré ležia na kolmici na os x , určuje práve jeden bod A priestoru E^3 .

Obráz bodu – súradnicová sústava

Zostrojíme združené priemety bodov **B**[-2;-5;3], **C**[3;-4;-6], **D**[1,5;3;-4], **P**[-3;5;0], **N**[5;0;-3] a určíme ich polohu v priestore.



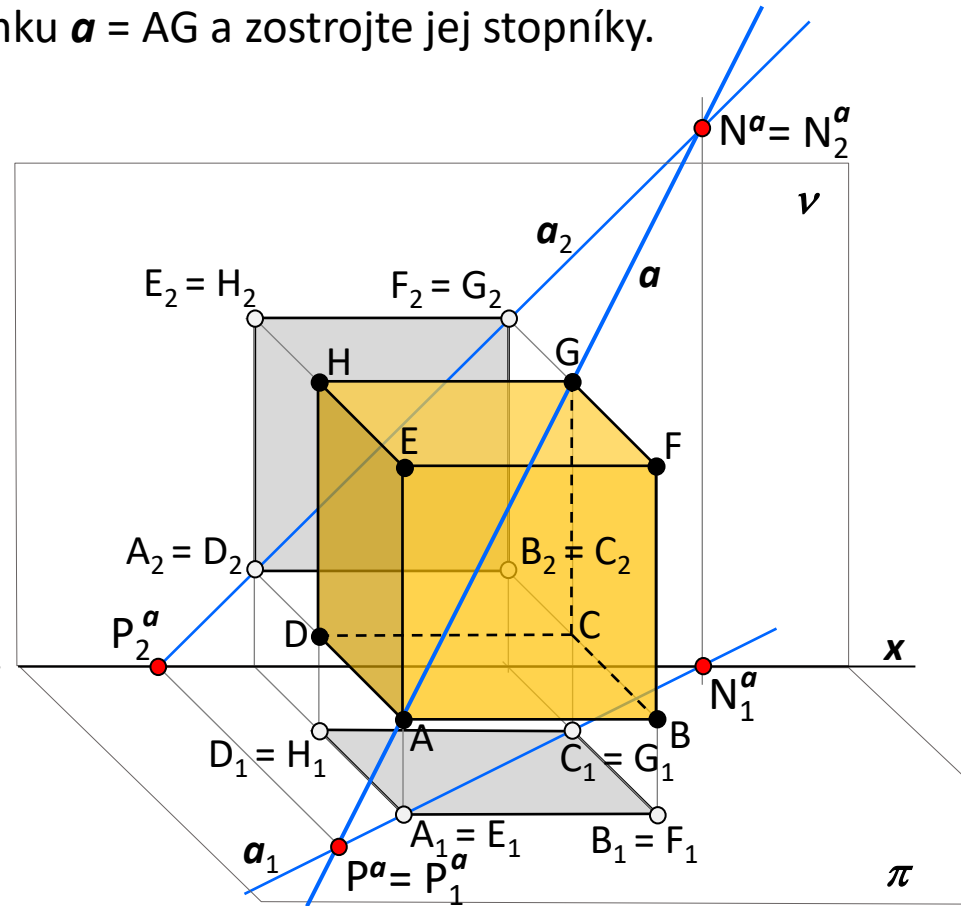
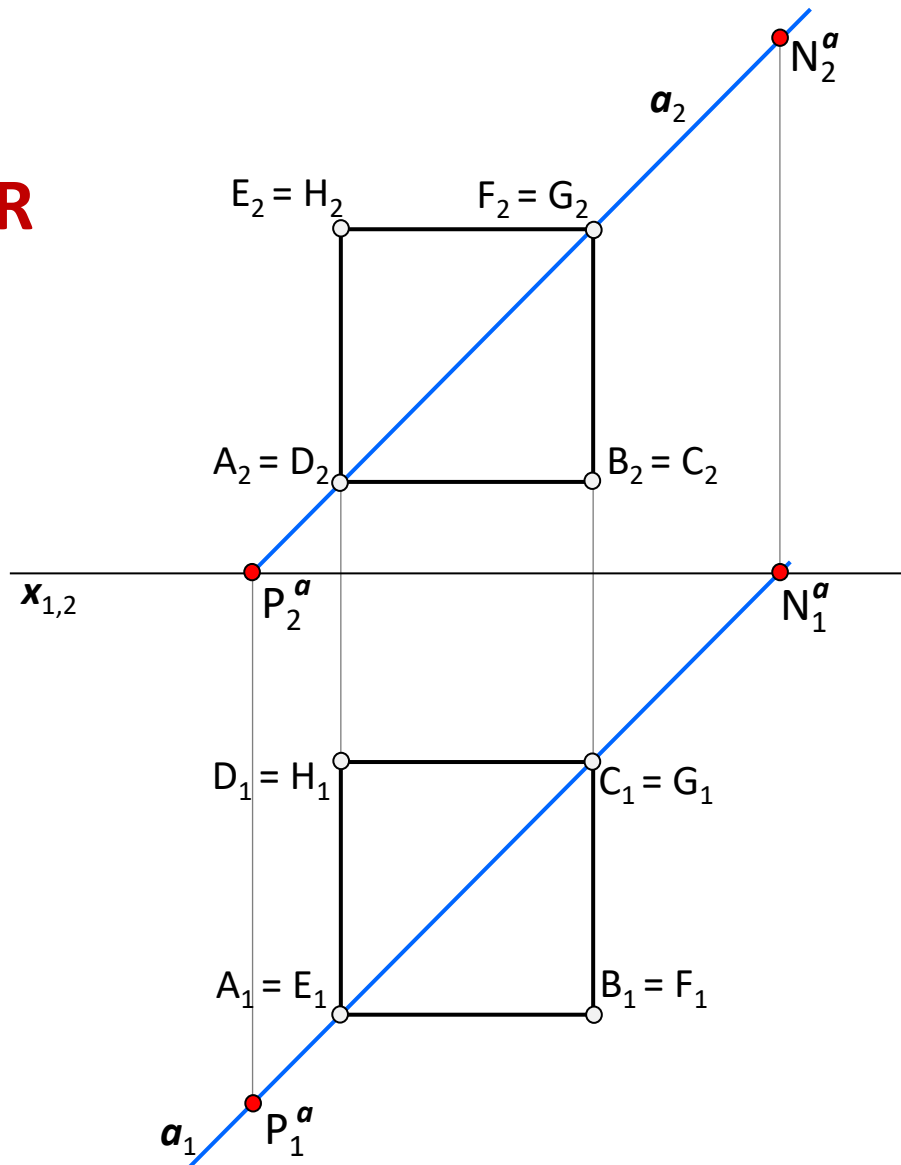
- Bod **B** sa nachádza v kvadrante II.
- Bod **C** sa nachádza v kvadrante III.
- Bod **D** sa nachádza v kvadrante IV.
- Bod **P** leží v pôdorysni.
- Bod **N** leží v náryсни.

Poznámka: Ak pôdorys a nárys bodu splývajú, bod leží v **rovine totožnosti**, ktorá leží v II. a IV. kvadrante. Ak sú pôdorys a nárys súmerné podľa osi $x_{1,2}$, bod leží v **rovine súmernosti**, ktorá leží v I. a III. kvadrante.

Obráz priamky v Mongeovej projekcii, stopníky priamky

Príklad: V Mongeovej projekcii zobrazte priamku $a = AG$ a zostrojte jej stopníky.

R



P^a – pôdorysný stopník priamky

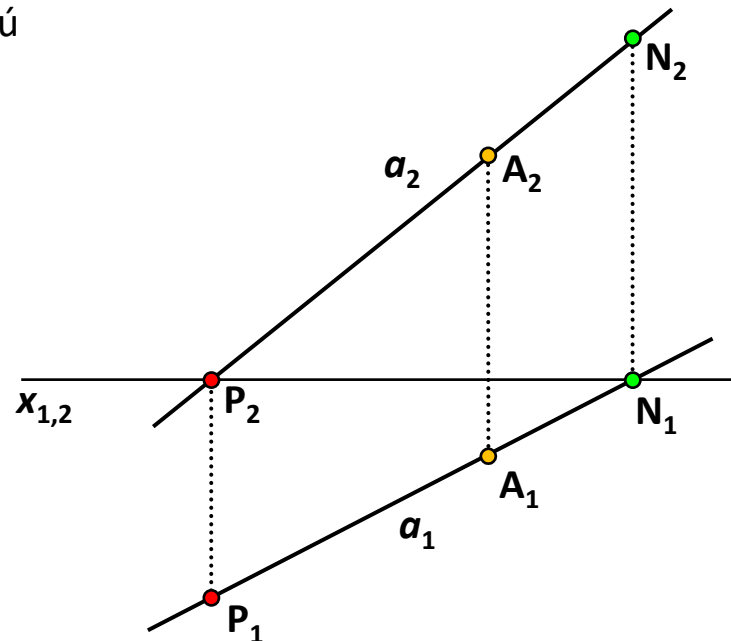
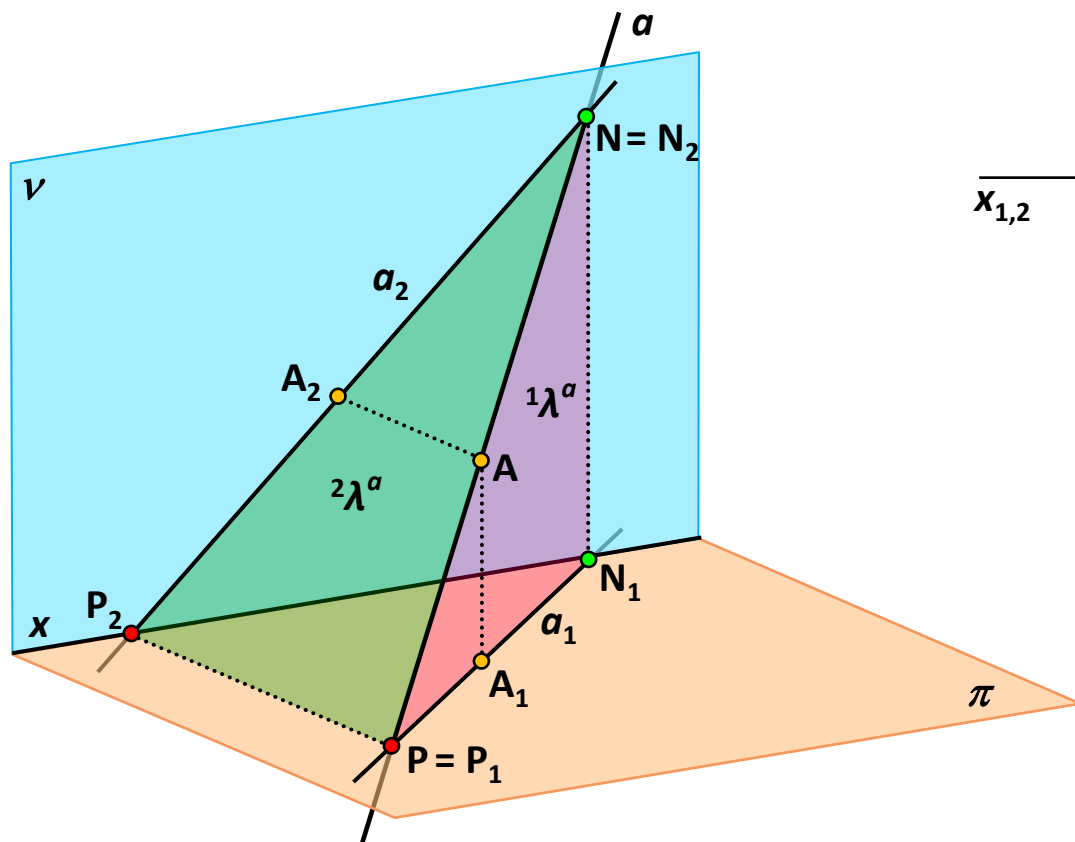
je priesečník priamky s pôdorysňou

N^a – nárysný stopník priamky

je priesečník priamky s nárysňou

Zobrazenie priamky

Príklad 10.3: Určte priemety stopníkov priamky a , ak sú dané jej združené priemety (a_1, a_2). Doplníte chýbajúci priemet bodu A , ktorý na nej leží. Daný je pôdorys A_1 .



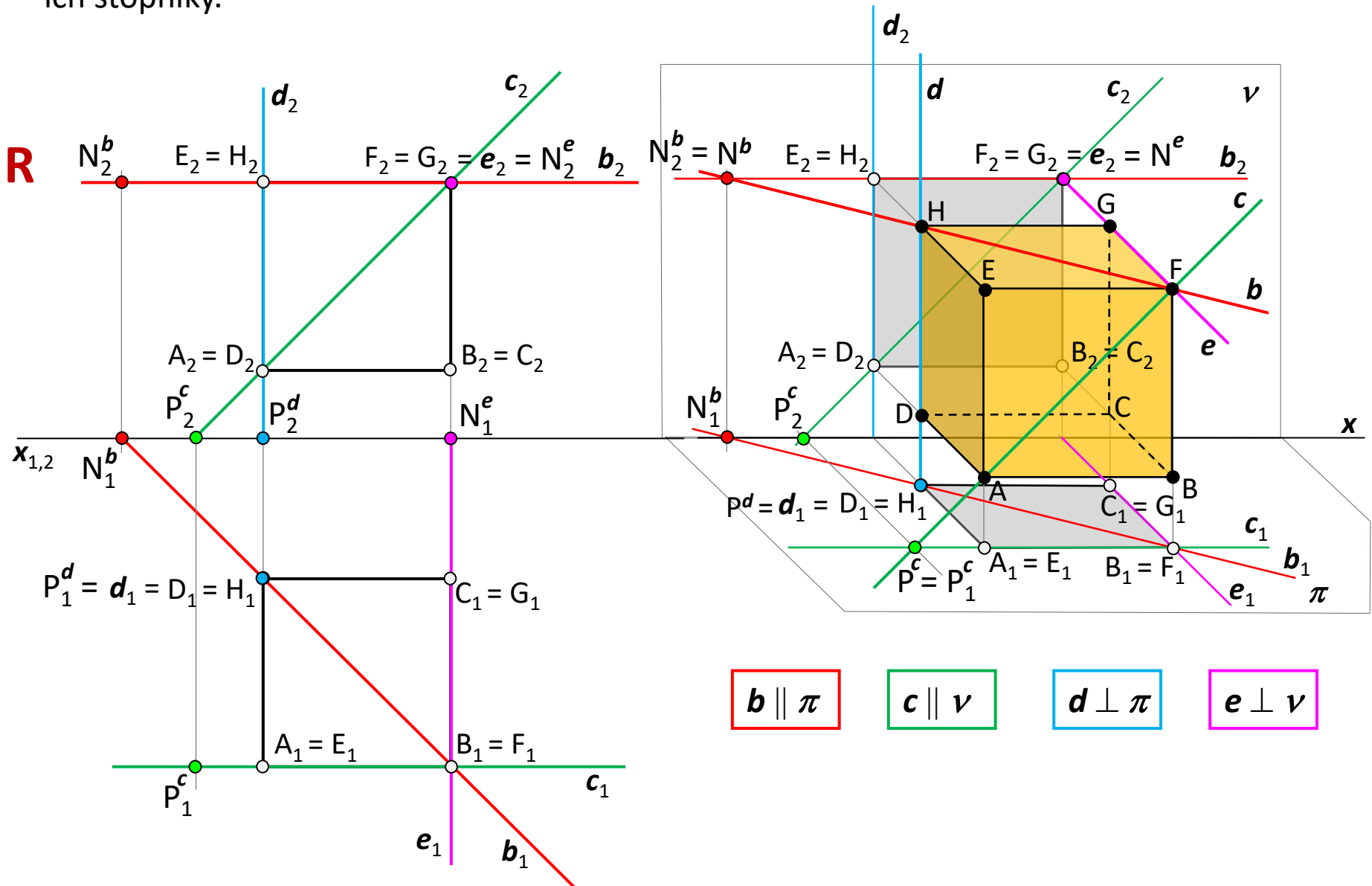
Postup:

1. $N_1; a_1 \cap x_{1,2} = N_1$.
2. $N_2; N_1 \rightarrow N_2 \in a_2$.
3. $P_2; a_2 \cap x_{1,2} = P_2$.
4. $P_1; P_2 \rightarrow P_1 \in a_1$.
5. $A_2; A_1 \rightarrow A_2 \in a_2$.

Poznámka: Ak bod A leží na priamke a , tak jeho priemet A_1 incидуje s priemetom a_1 a zároveň priemet A_2 incидуje s priemetom a_2 . Vyplýva to z vlastností rovnobežného premietania.

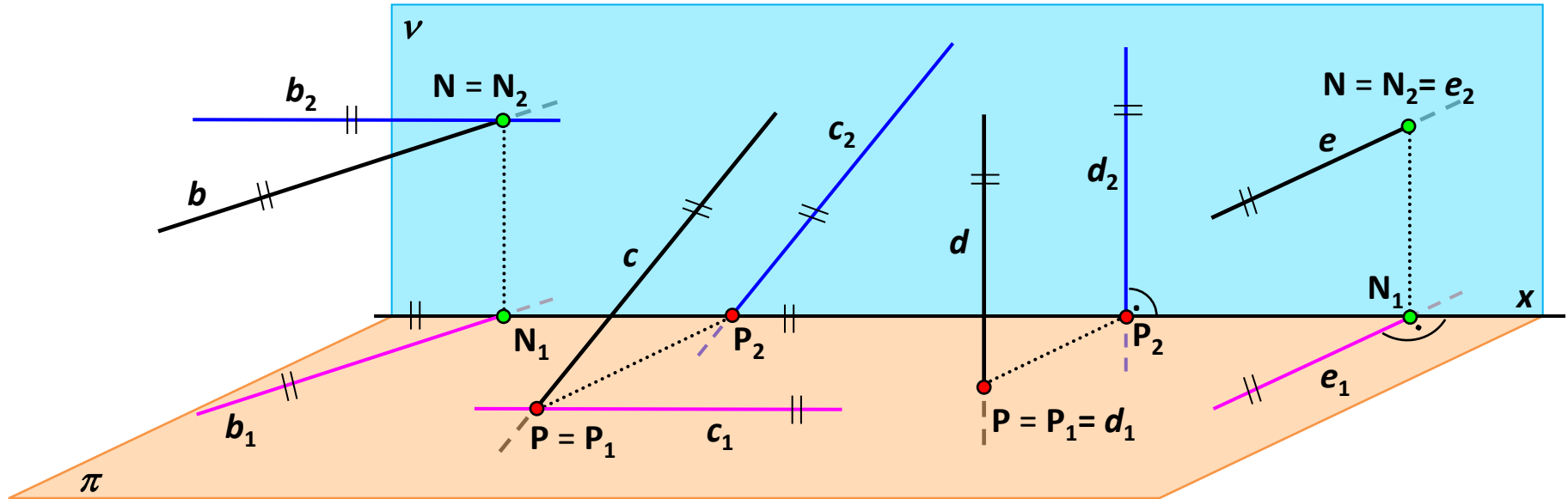
Obráz priamky v Mongeovej projekcii, stopníky priamky

Príklad: V Mongeovej projekcii zobrazte priamky $b = FH$, $c = AF$, $d = DH$, $e = FG$ a zostrojte ich stopníky.



Obráz priamky v špeciálnej polohe

Okrem všeobecnej polohy môže mať priamka v Mongeovej projekcii špeciálnu polohu vzhľadom na pôdorysňu alebo nárýsňu. V prípade, že je priamka na priemetňu kolmá, jeden z jej priemetov je bod.

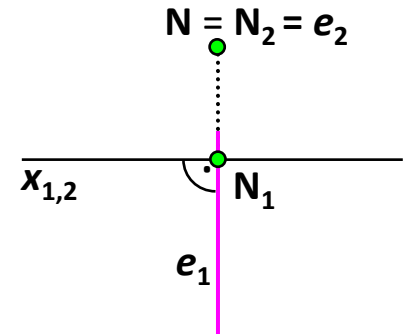
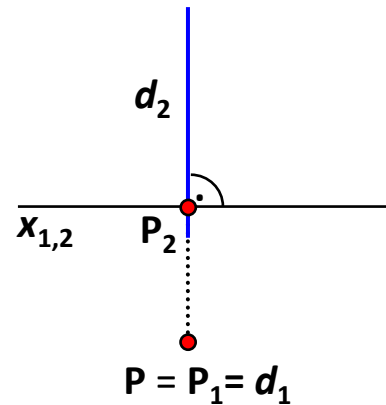
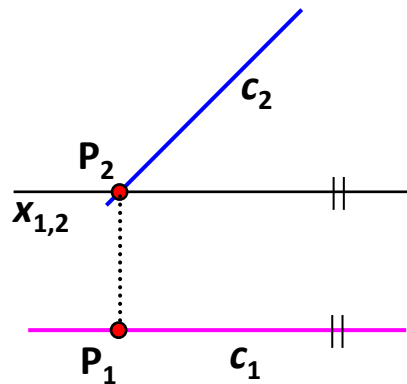
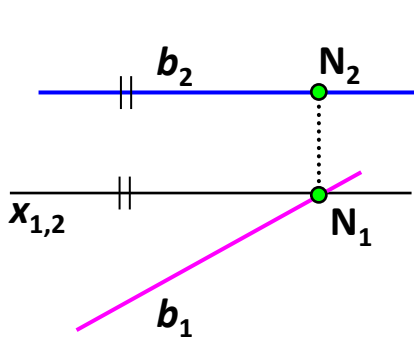


$$b \parallel \pi \rightarrow b_2 \parallel x_{1,2}$$

$$c \parallel v \rightarrow c_1 \parallel x_{1,2}$$

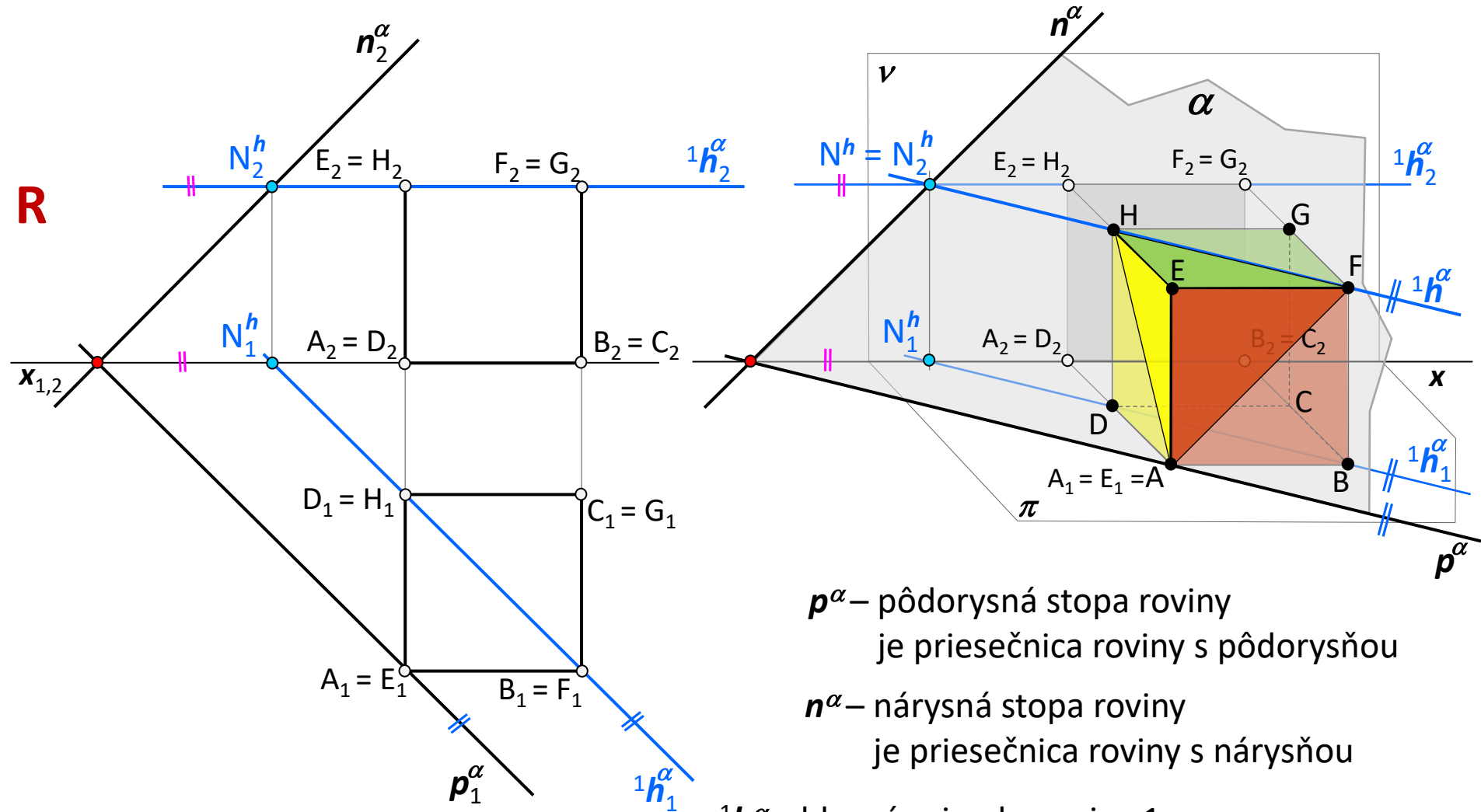
$$d \perp \pi \rightarrow d_2 \perp x_{1,2}$$

$$e \perp v \rightarrow e_1 \perp x_{1,2}$$



Obráz roviny v Mongeovej projekcii, stopy roviny

Príklad: V Mongeovej projekcii zostrojte stopy roviny $\alpha = AFH$.



p^α – pôdorysná stopa roviny
je priesečnica roviny s pôdorysňou

n^α – nárysná stopa roviny
je priesečnica roviny s nárysňou

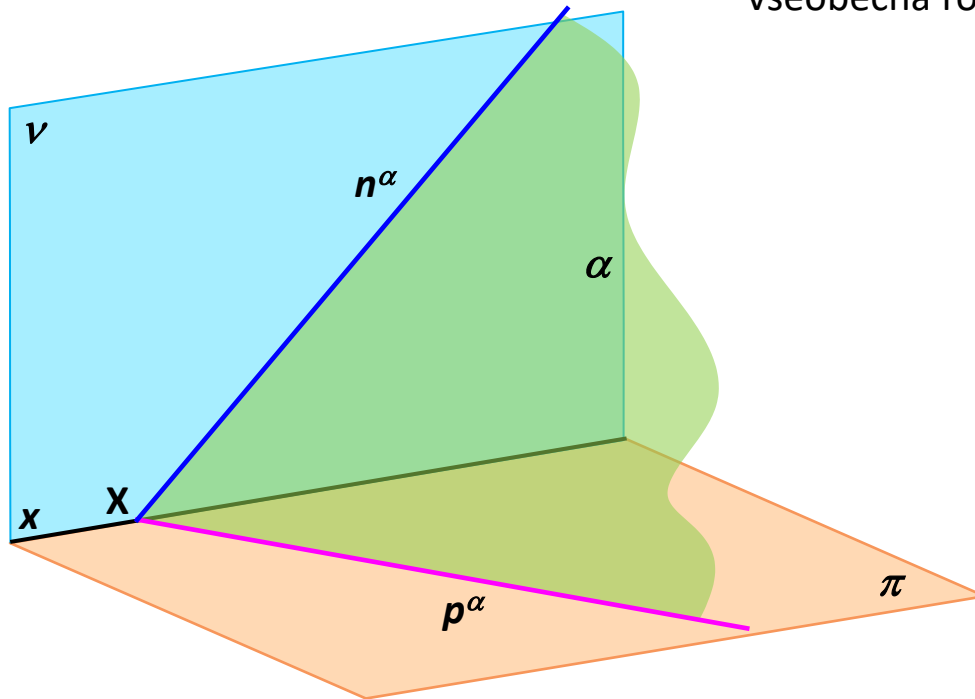
$1h^\alpha$ – hlavná priamka roviny 1. osnovy
je priamka roviny rovnobežná s pôdorysňou.

Platí: $1h^\alpha \parallel p^\alpha$

Pre priemety hlavnej priamky platí: $1h_1^\alpha \parallel p_1^\alpha$ a $1h_2^\alpha \parallel x_{1,2}$

Zobrazenie roviny

Pôdorysom roviny α , ktorá je vo všeobecnej polohe vzhľadom na priemetne (t. j. nie je so žiadnou priemetňou rovnobežná ani na ňu kolmá) je celá pôdorysňa, jej nárysom je celá nárysňa.



Všeobecná rovina α pretína obidve priemetne v tzv. **stopách**.

Priesečnica roviny α s pôdorysňou sa nazýva **pôdorysná stopa** a označuje sa p^α .

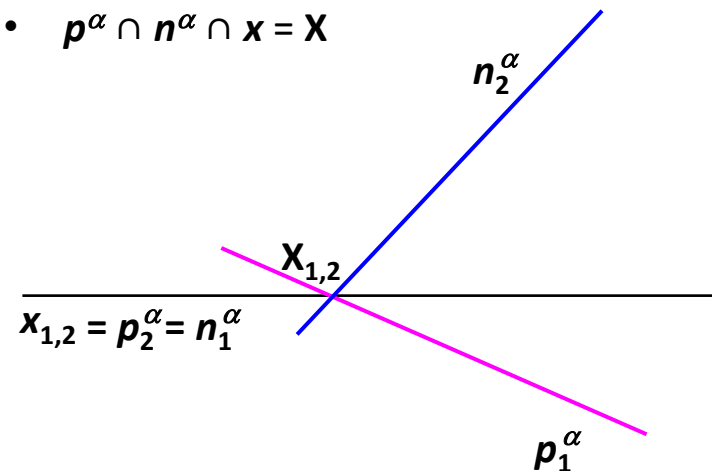
- $\alpha \cap \pi = p^\alpha, p^\alpha = p_1^\alpha, p_2^\alpha = x_{1,2}$

Priesečnica roviny α s nárysňou sa nazýva **nárysná stopa** a označuje sa n^α .

- $\alpha \cap v = n^\alpha, n^\alpha = n_2^\alpha, n_1^\alpha = x_{1,2}$

Obidve stopy sa pretínajú v bode na základnici x .

- $p^\alpha \cap n^\alpha \cap x = X$



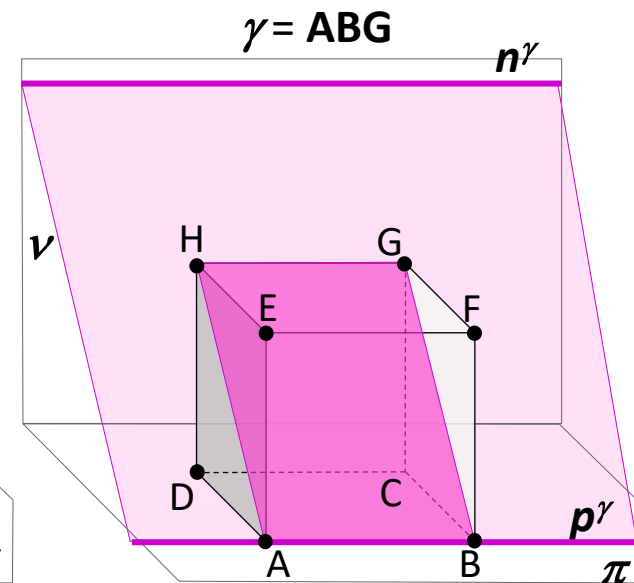
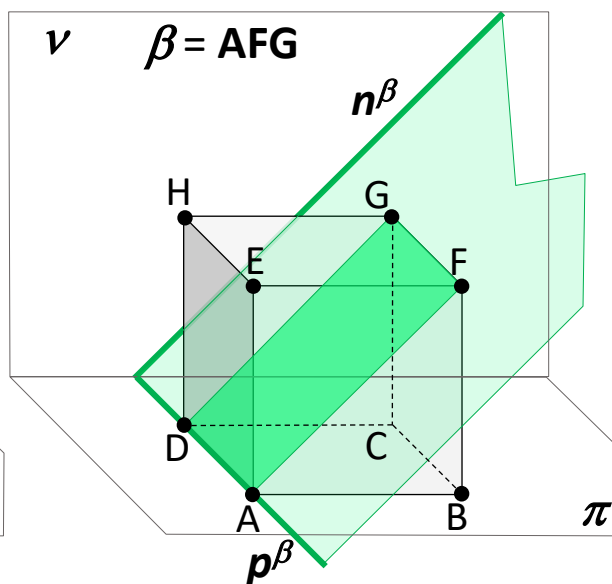
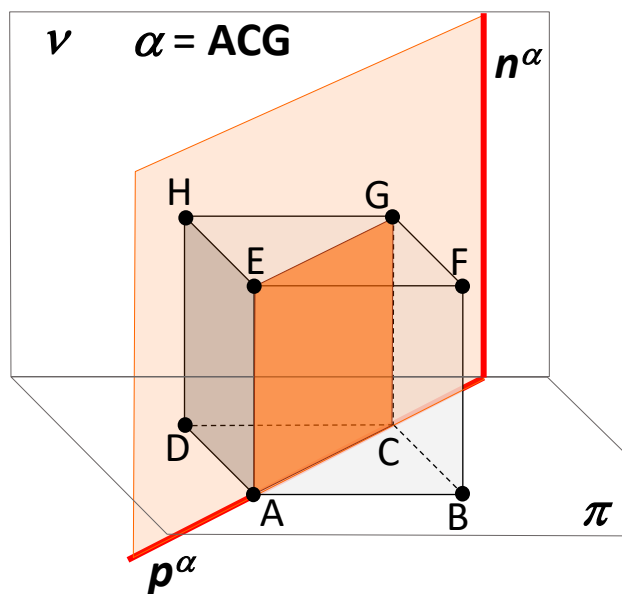
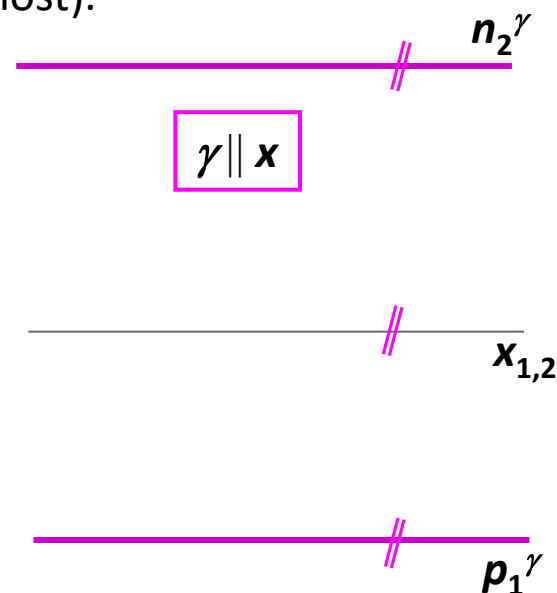
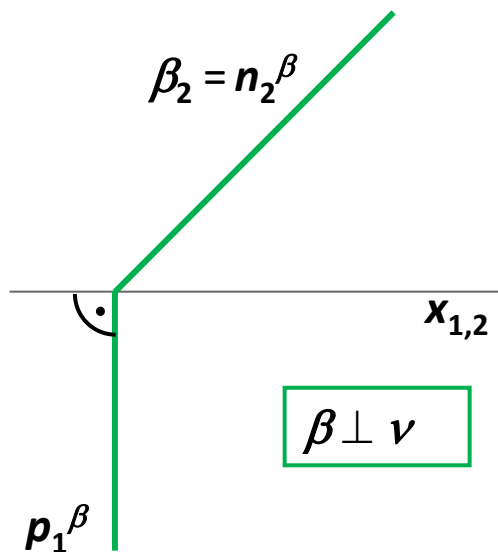
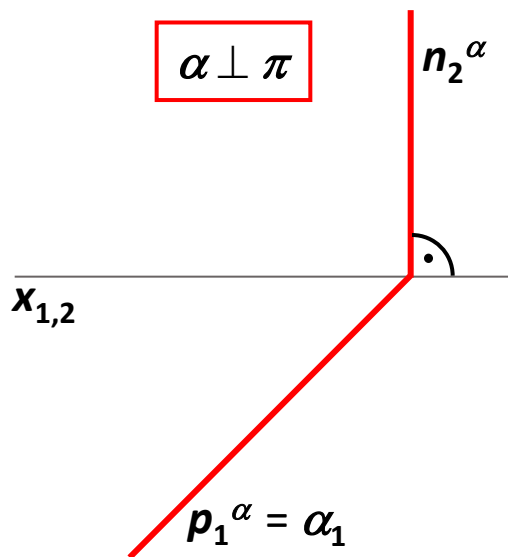
Rovina je určená:

- trojicou nekolineárnych bodov,
- priamkou a bodom, ktorý na nej neleží,
- dvojicou rôznobežných priamok,
- dvojicou rovnobežných priamok.

Poznámka: Ak to konštrukcia nevyžaduje, zobrazujeme iba „viditeľné časti“ stôp.

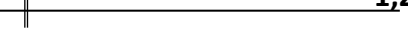
Obráz roviny v špeciálnej polohe v Mongeovej projekcii

Príklad: V Mongeovej projekcii sú dané stopy rovín α, β, γ . Zistite akú polohu majú roviny vzhľadom k priemetniam π, ν a základnici x (kolmost', rovnobežnosť).



Obráz roviny v špeciálnej polohe v Mongeovej projekcii

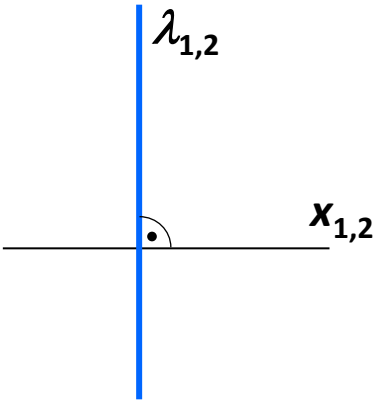
$$\delta_2 = n_2^\delta$$


$$x_{1,2}$$


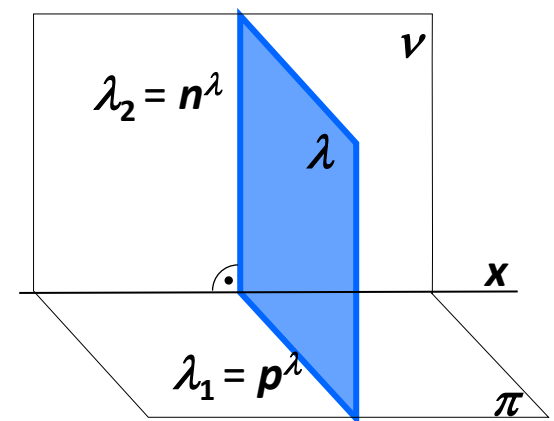
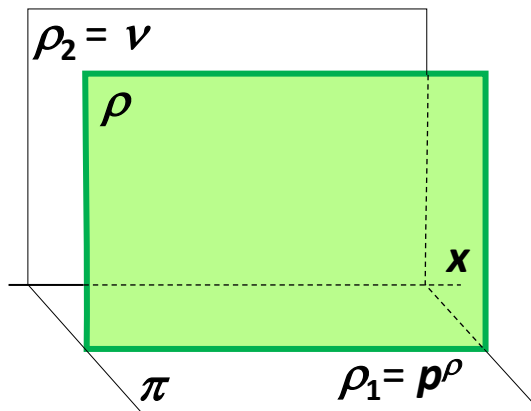
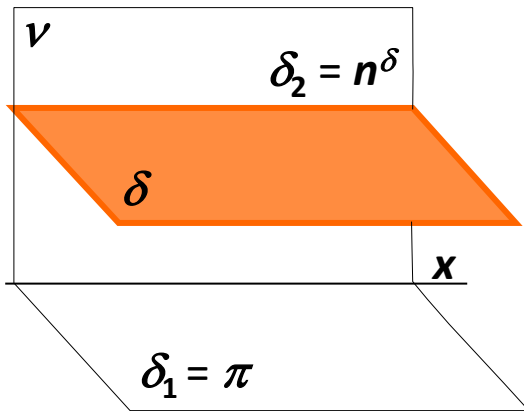
$$\delta \parallel \pi$$

$$\rho_1 = p_1^\rho$$


$$\rho \parallel \nu$$

$$\lambda_{1,2}$$


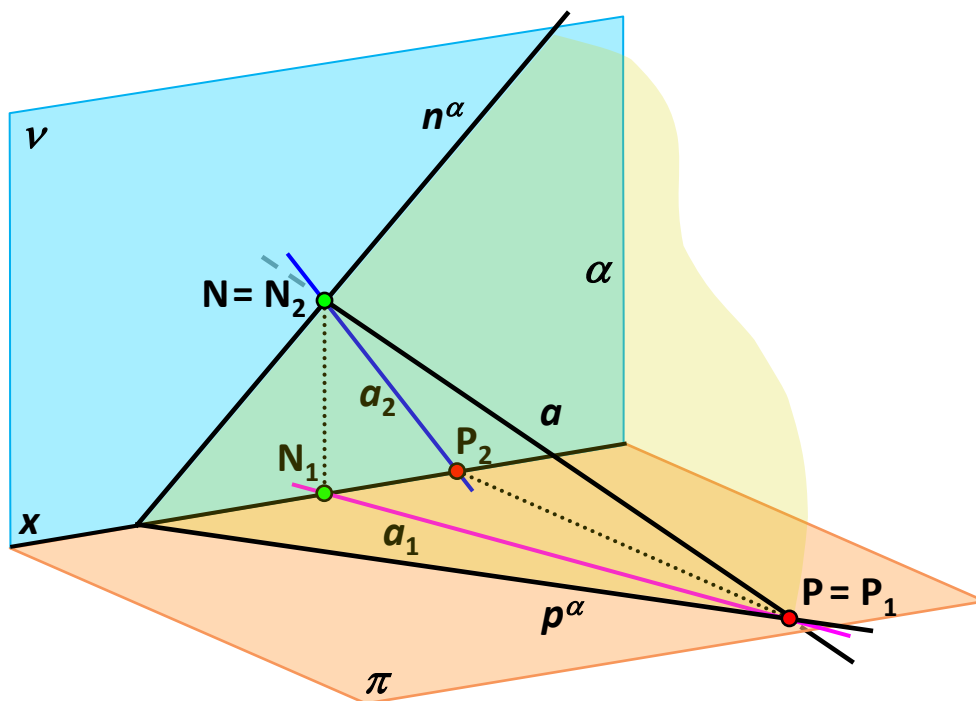
$$\lambda \parallel \mu$$



Priamka ležiaca v rovine

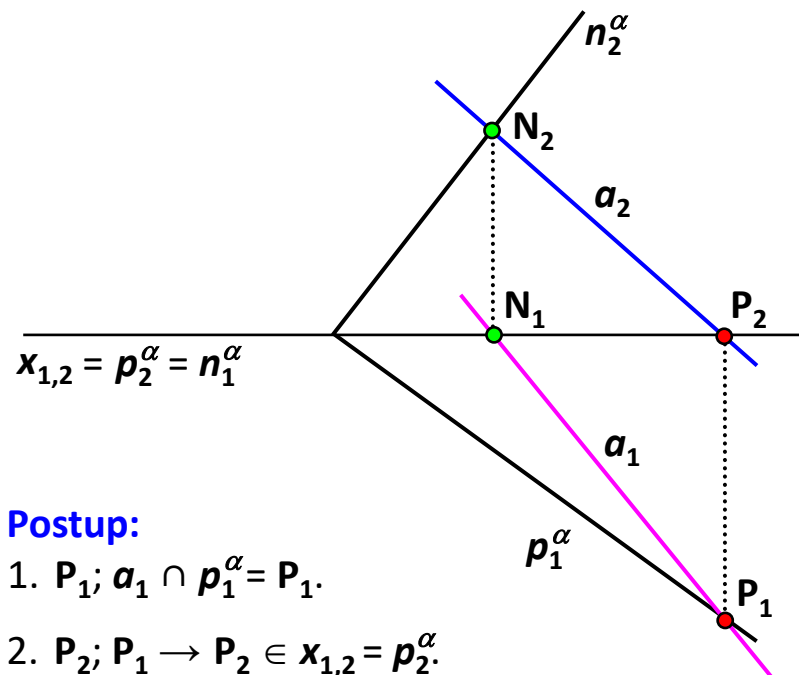
Priamka a , ktorá leží v rovine α , má svoje stopníky (ak existujú) na stopách roviny, t. j. pôdorysný stopník priamky leží na pôdorysnej stope roviny a nárýsný stopník leží na nárýsnej stope roviny.

$$\bullet \quad a \in \alpha \rightarrow P^a \in p^\alpha, N^a \in n^\alpha$$



Poznámka: V prípade, že rovina je určená ľubovoľnými priamkami alebo bodmi, ktoré v nej ležia, pri hľadaní jej stôp využijeme stopníky priamok ležiacich v rovine.

Príklad 10.5: Daný je pôdorys a_1 priamky a . Určte nárýs a_2 priamky a tak, aby priamka ležala v rovine $\alpha (p_1^\alpha, n_2^\alpha)$.

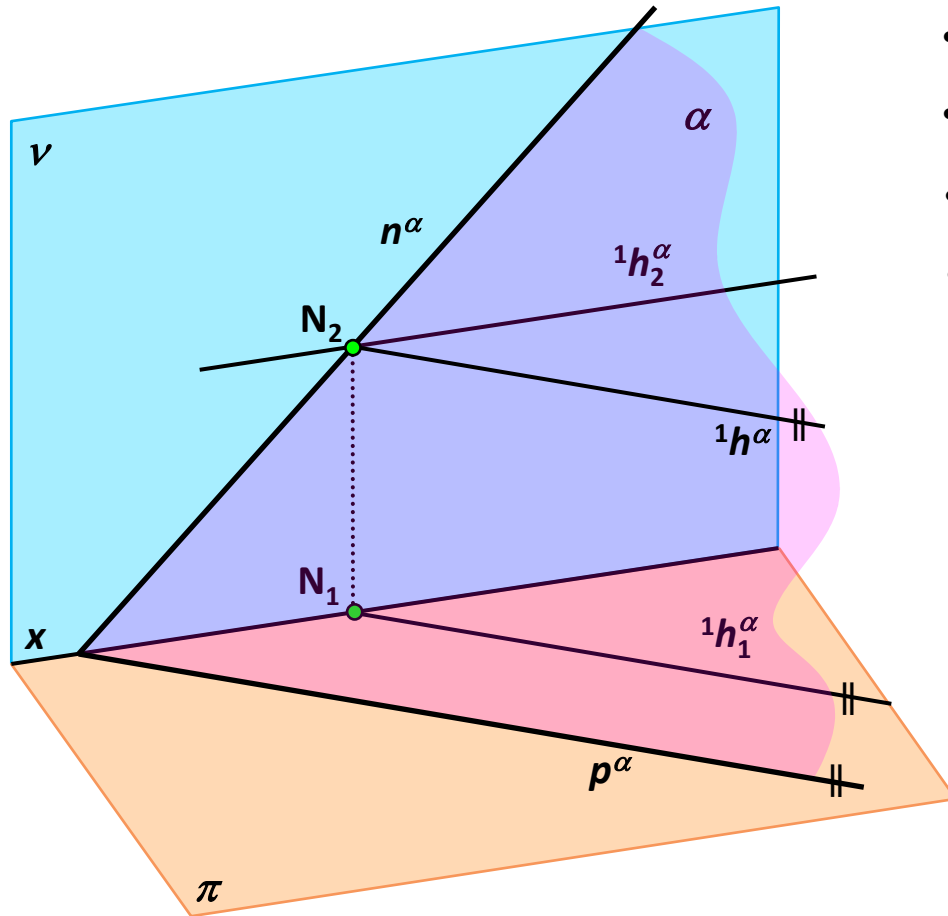


Postup:

1. P_1 ; $a_1 \cap p_1^\alpha = P_1$.
2. P_2 ; $P_1 \rightarrow P_2 \in x_{1,2} = p_2^\alpha$.
3. N_1 ; $x_{1,2} = n_1^\alpha$, $a_1 \cap x_{1,2} = N_1$.
4. N_2 ; $N_1 \rightarrow N_2 \in n_2^\alpha$.
5. a_2 ; $a_2 = N_2 P_2$.

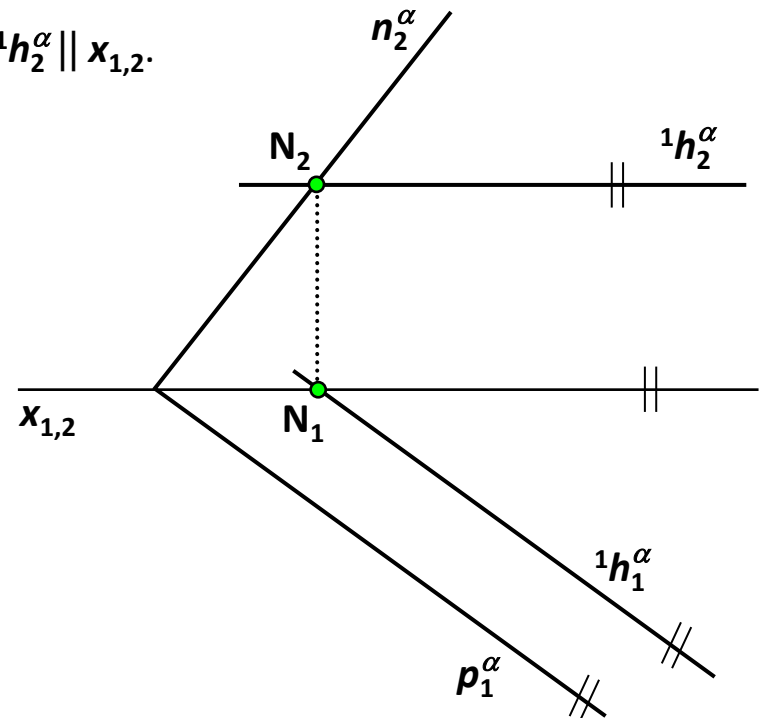
Hlavné a spádové priamky 1. osnovy

Významné priamky v rovine sú jej **hlavné** a **spádové priamky**. Hlavné priamky sú priamky, ktoré ležia v rovine a sú rovnobežné s priemetňou (a teda aj so stopou roviny). Spádové priamky sú priamky roviny, ktoré sú kolmé na hlavné priamky. V Mongeovej projekcii má rovina dve osnovy hlavných a dve osnovy spádových priamok.

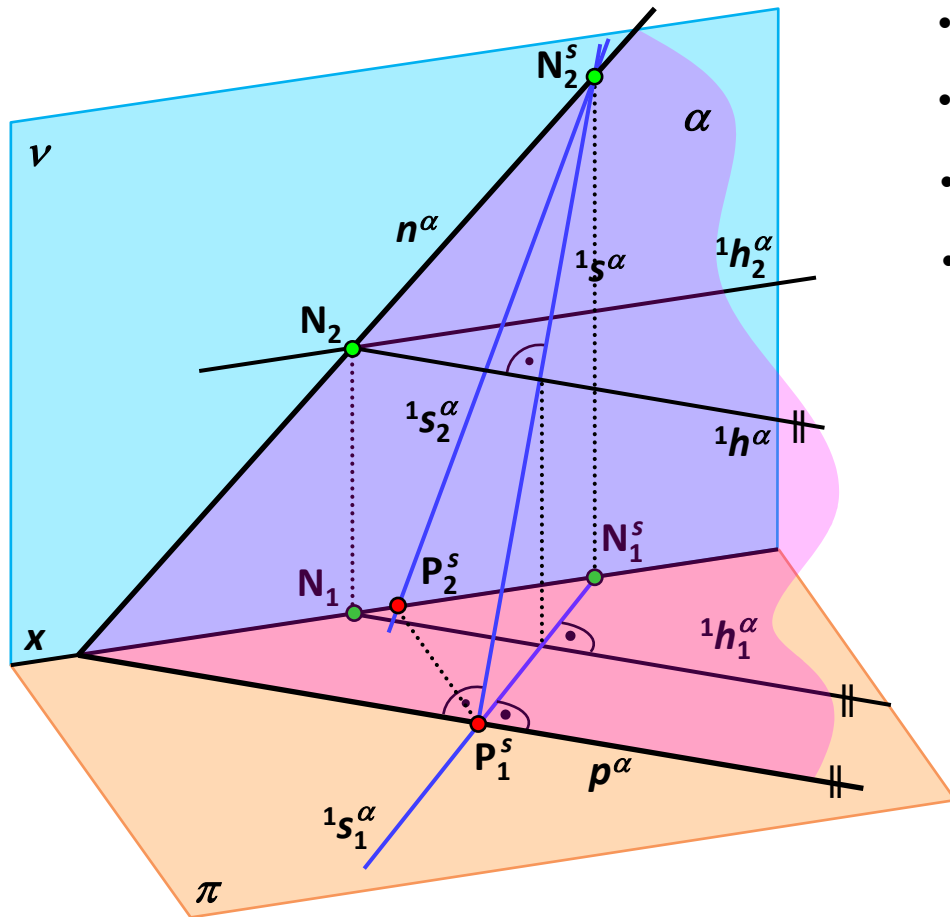


Hlavná priamka 1. osnovy

- $^1h^\alpha$ - hlavná priamka 1. osnovy roviny α ,
- $^1h^\alpha \parallel \pi, ^1h^\alpha \parallel p^\alpha$,
- $^1h_1^\alpha \parallel p_1^\alpha$,
- $^1h_2^\alpha \parallel x_{1,2}$.



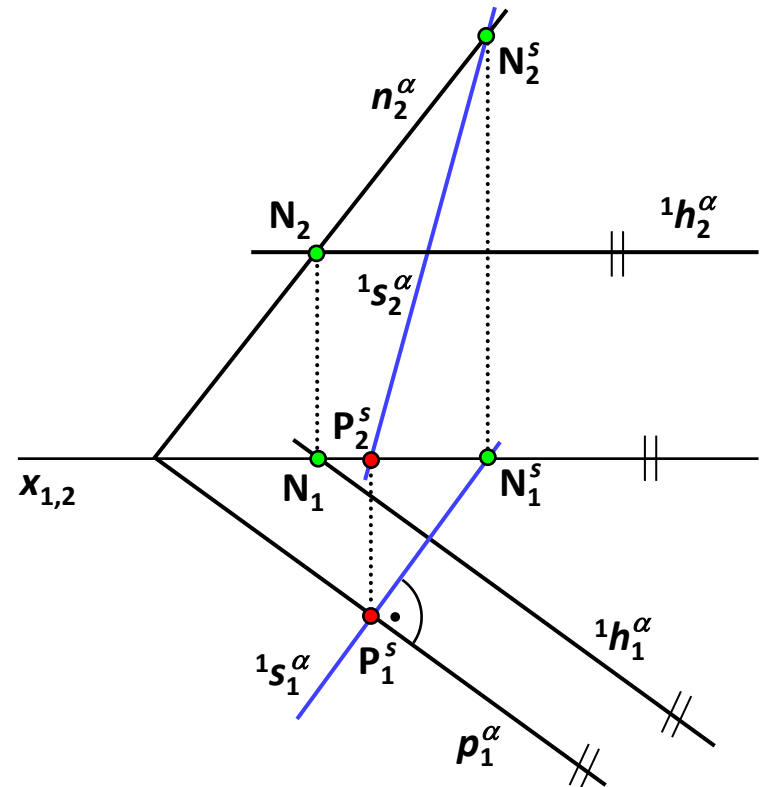
Hlavné a spádové priamky 1. osnovy



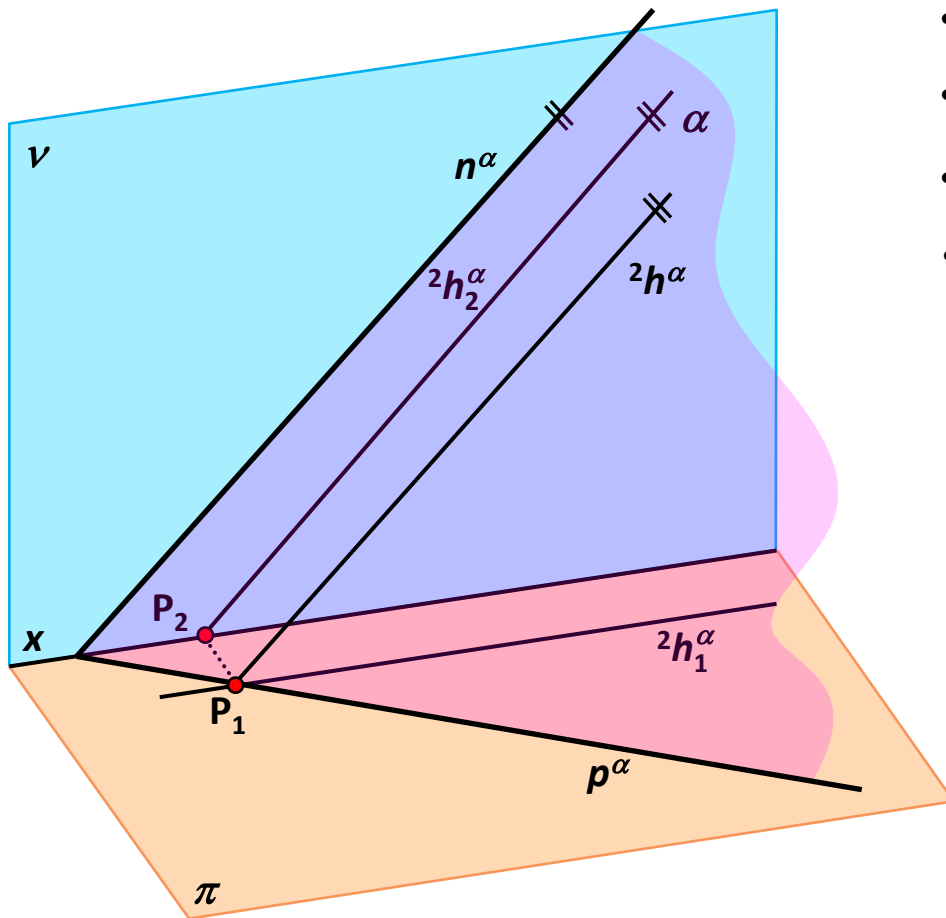
Poznámka: Každým bodom roviny prechádza práve jedna z každej osnovy hlavných a spádových priamok.

Spádová priamka 1. osnovy

- $^1\mathbf{s}^\alpha$ - spádová priamka 1. osnovy roviny α ,
- $^1\mathbf{s}^\alpha \perp ^1\mathbf{h}^\alpha \rightarrow ^1\mathbf{s}^\alpha \perp \mathbf{p}^\alpha$,
- $^1\mathbf{s}_1^\alpha \perp \mathbf{p}_1^\alpha, ^1\mathbf{s}_1^\alpha \perp ^1\mathbf{h}_1^\alpha$,
- $^2\mathbf{s}_2^\alpha$ dourčíme ako priamku v rovine α .



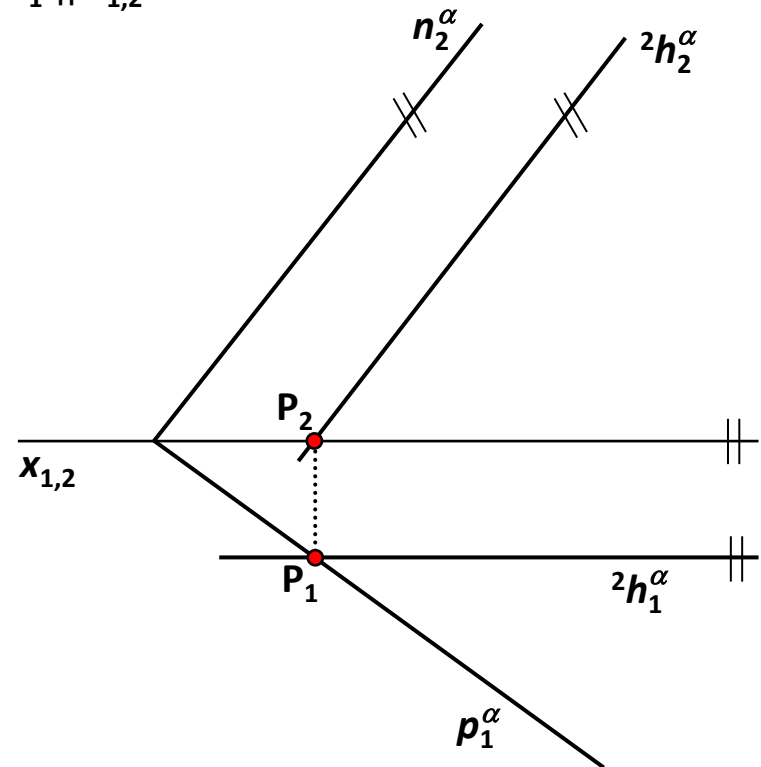
Hlavné a spádové priamky 2. osnovy



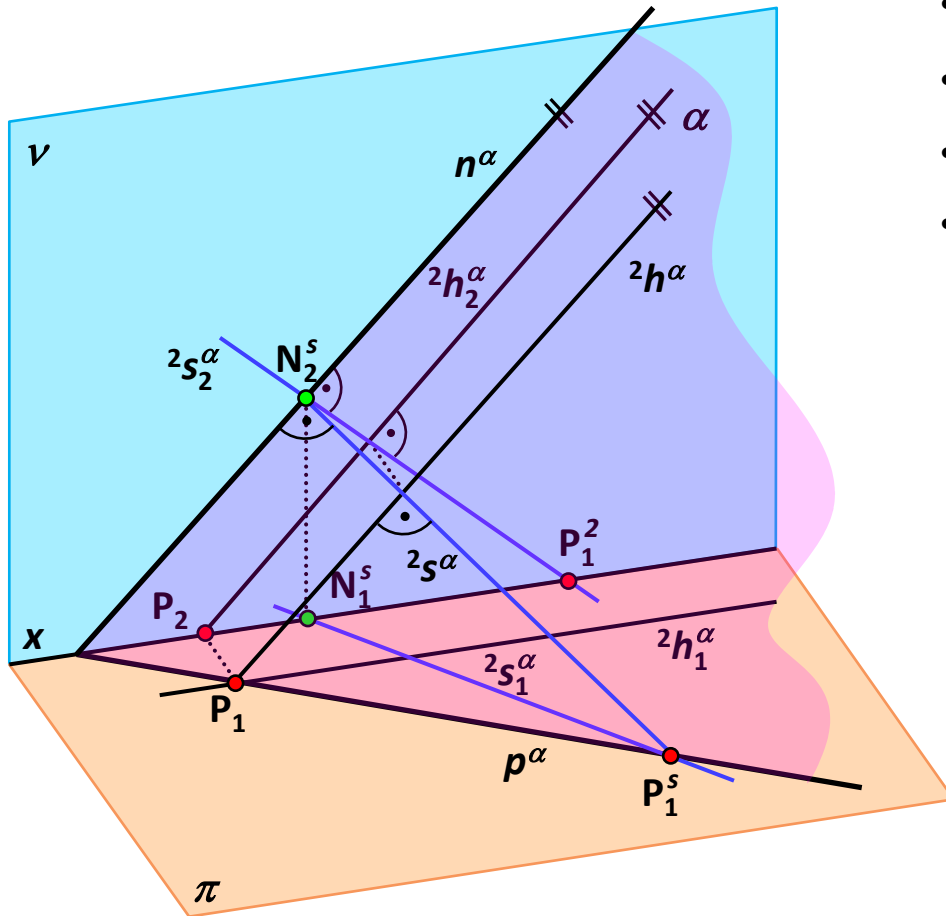
Hlavná priamka 2. osnovy

- ${}^2h^\alpha$ - hlavná priamka 2. osnovy roviny α ,
- ${}^2h^\alpha \parallel v, {}^2h^\alpha \parallel n^\alpha$,
- ${}^2h_2^\alpha \parallel n_2^\alpha$,
- ${}^2h_1^\alpha \parallel x_{1,2}$.

R



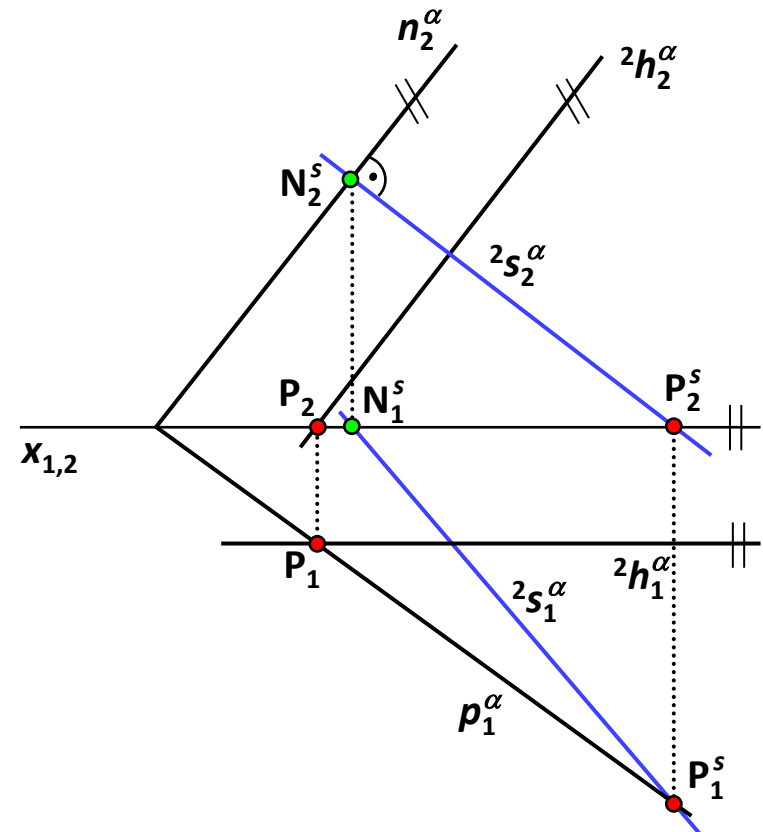
Hlavné a spádové priamky 2. osnovy



Spádová priamka 2. osnovy

- ${}^2s^\alpha$ - spádová priamka 2. osnovy roviny α ,
- ${}^2s^\alpha \perp {}^2h^\alpha \rightarrow {}^2s^\alpha \perp n^\alpha$,
- ${}^2s_2^\alpha \perp n_2^\alpha, {}^2s_2^\alpha \perp {}^2h_2^\alpha$,
- ${}^2s_1^\alpha$ dourčíme ako priamku v rovine α .

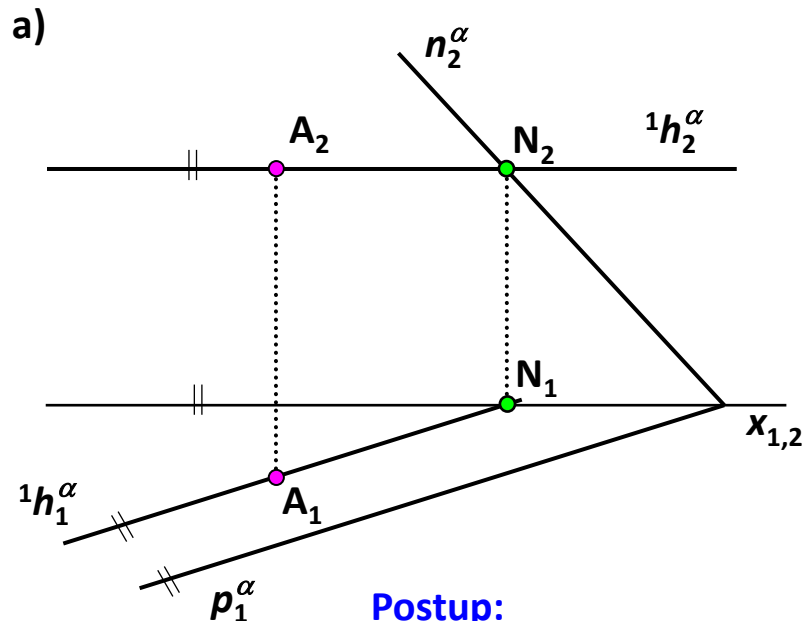
R



Bod ležiaci v rovine

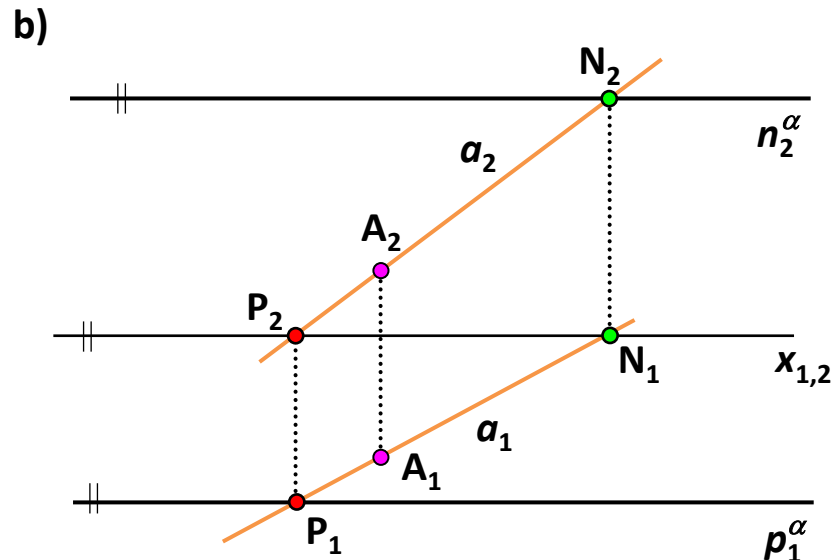
Hlavné priamky v rovine sa často používajú na určenie chýbajúcich priemetov bodov ležiacich v rovine. Okrem hlavných priamok však na tento účel môžeme použiť ľubovoľnú priamku roviny s dostupnými stopníkmi.

Príklad 10.6: Daný je pôdorys A_1 bodu A . Určte nárys A_2 bodu A tak, aby bod A ležal v rovine $\alpha (p_1^\alpha, n_2^\alpha)$.



Postup:

1. $1h_1^\alpha, A_1 \in 1h_1^\alpha, 1h_1^\alpha \parallel p_1^\alpha$.
2. $N_1; 1h_1^\alpha \cap x_{1,2} = N_1$.
3. $N_2; N_1 \rightarrow N_2 \in n_2^\alpha$.
4. $1h_2^\alpha, N_2 \in 1h_2^\alpha, 1h_2^\alpha \parallel x_{1,2}$.
5. $A_2; A_1 \rightarrow A_2 \in 1h_2^\alpha$.

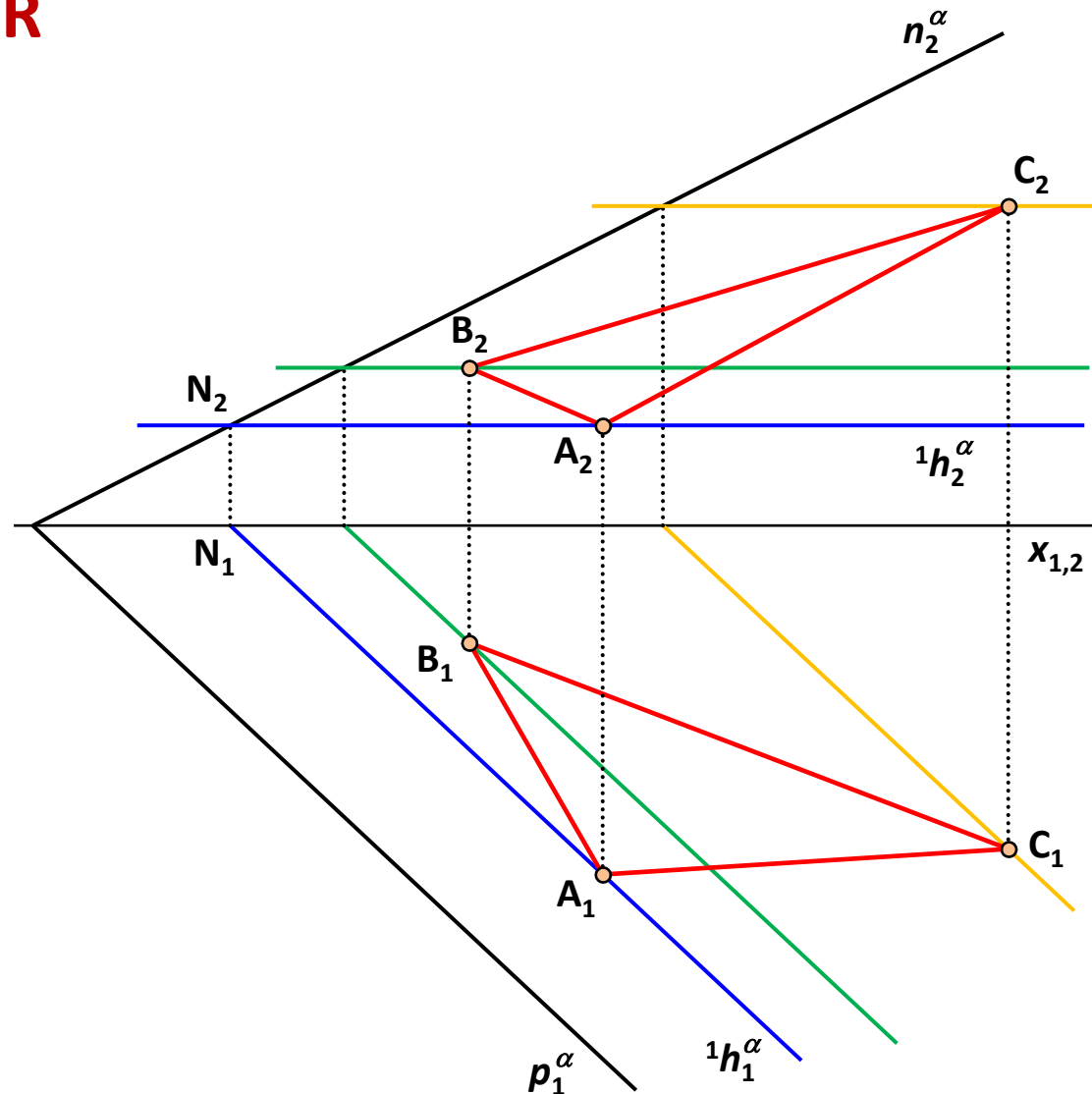


Postup:

1. $a_1; A_1 \in a_1, a_1 \nparallel x_{1,2}$.
2. $P_1, N_1; a_1 \cap p_1^\alpha = P_1, a_1 \cap x_{1,2} = N_1$.
3. $P_2, N_2; P_1 \rightarrow P_2 \in x_{1,2}, N_1 \rightarrow N_2 \in n_2^\alpha$.
4. $a_2; a_2 = N_2 P_2$.
5. $A_2; A_1 \rightarrow A_2 \in a_2$.

Príklad 10.8: Zostrojte združené priemety trojuholníka **ABC** (A_1, B_1, C_1), ktorý leží v rovine α (p_1^α, n_2^α).

R



Postup:

1. Na zostrojenie chýbajúcich priemetov bodov trojuholníka **ABC** využijeme hlavné priamky 1. osnovy roviny α (podrobný popis v príklade 10.6 a)).
2. Nakoniec zostrojíme pôdorys $A_1B_1C_1$ a nárys $A_2B_2C_2$ trojuholníka pospájaním prvých a druhých priemetov jednotlivých bodov.