

KURZ DESKRIPTÍVNEJ GEOMETRIE

02-1. časť Elipsa

Na všetky lekcie kurzu budete potrebovať:

- *zošit alebo papiere A4 „čisté“*
- ***2 ceruzky: tvrdú** (ozn. H, 2H, ...) na konštrukcie a **mäkkú** (ozn. B, 2B, ...) na vytiahnutie výsledku,*
- *farebné ceruzky, gumu*
- *kružidlo*
- *dve pravítka - jedno s ryskou*

Úvod

- P** Predhovor
- S** Na stiahnutie
- T** Tiráž

OZNAČENIA A SYMBOLY

1 ZÁKLADNÉ POJMY

2 KUŽELOSEČKY

3 PREMIETANIE, ZÁKLADNÉ
POJMY A VLASTNOSTI

4 PERSPEKTÍVNA AFINITA

5 PERSPEKTÍVNA
KOLINEÁCIA

6 KÓTOVANÉ PREMIETANIE

7 POZNÁMKY Z TEÓRIE
KRIVIEK A PLÔCH

8 TOPOGRAFICKÉ PLOCHY I

9 TOPOGRAFICKÉ PLOCHY
II

CuterCounter.com



Juliana Beganová, Tatiana Rückschlossová, Ľubica Valášková, Margita Vajsáblová, Zuzana Tereňová

DESKRIPTÍVNA GEOMETRIA PRE STAVEBNÉ ODBORY

Časť 2.2 elipsa

Vydala Slovenská technická univerzita v Bratislave v roku 2022.

Všetky práva vyhradené. Žiadna časť textu nesmie byť použitá na ďalšie šírenie akoukoľvek formou bez predchádzajúceho súhlasu autorov alebo nakladateľstva.

© Mgr. Juliana Beganová, PhD., Mgr. Tatiana Rückschlossová, PhD., RNDr. Ľubica Valášková, PhD., doc. RNDr. Margita Vajsáblová, PhD., RNDr. Zuzana Tereňová, PhD.

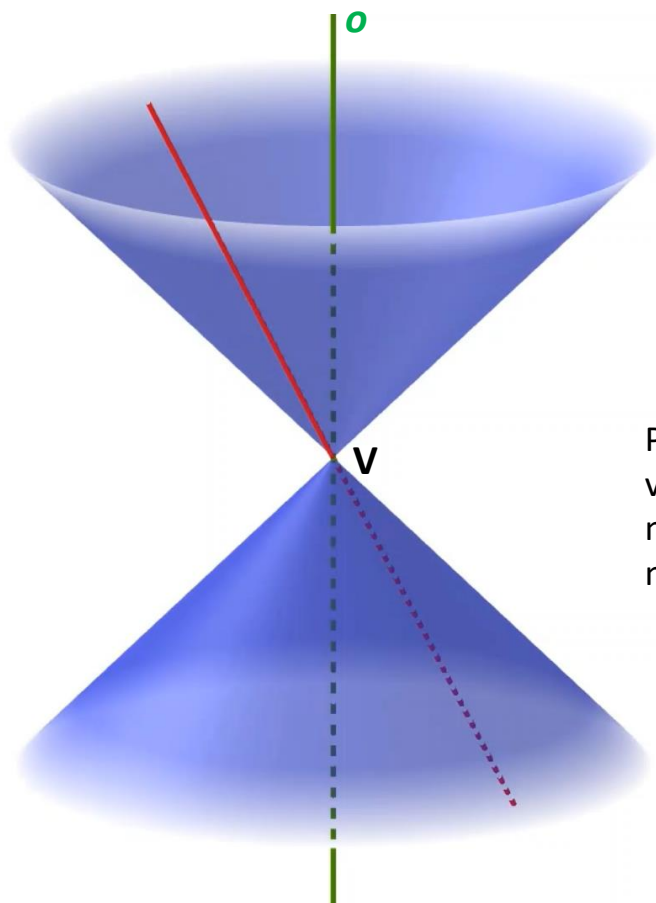
Recenzenti: doc. RNDr. Daniela Velichová, CSc.
doc. RNDr. Mária Kmeťová, PhD.
RNDr. Tatiana Hýrošová, PhD.

Návrh webovej stránky: © Mgr. Roman Rückschloss

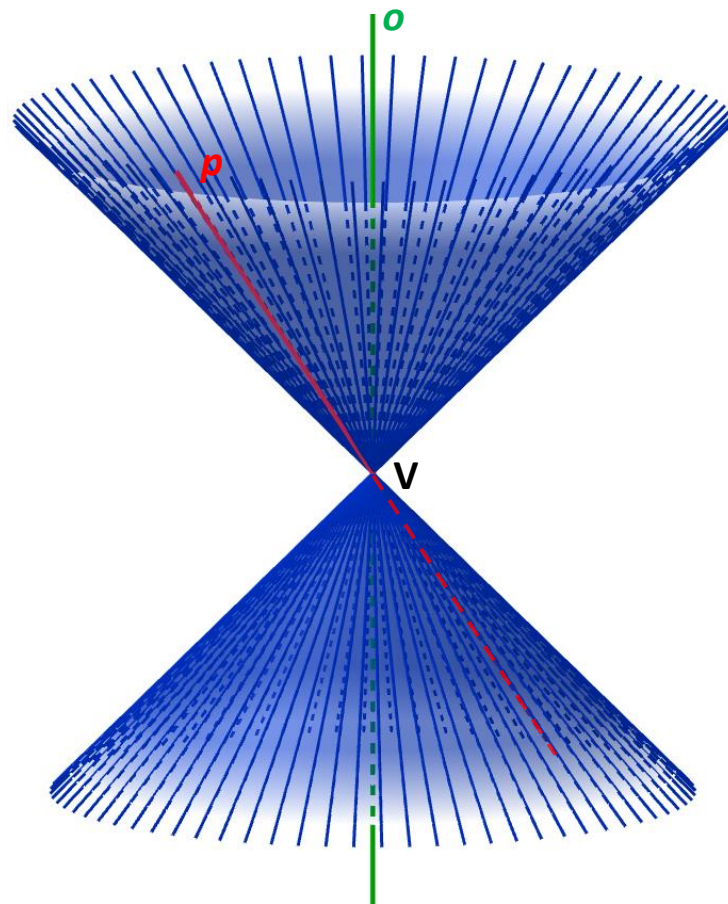
Schválila Edičná rada SvF STU. ISBN 978-80-227-5256-5

Definícia: Rotačná kužeľová plocha vznikne rotáciou priamky p okolo priamky o , pričom priamky p a o sú rôznobežné.

- Priamka o sa nazýva **os** rotačnej kužeľovej plochy.
- Priesečník priamok p a o sa nazýva **vrchol** rotačnej kužeľovej plochy a označíme ho V ($V = p \cap o$).
- Priamka rotačnej kužeľovej plochy sa nazýva **tvoriaca priamka**.
- Každá tvoriaca priamka t rotačnej kužeľovej plochy prechádza jej vrcholom V ($V \in t$).

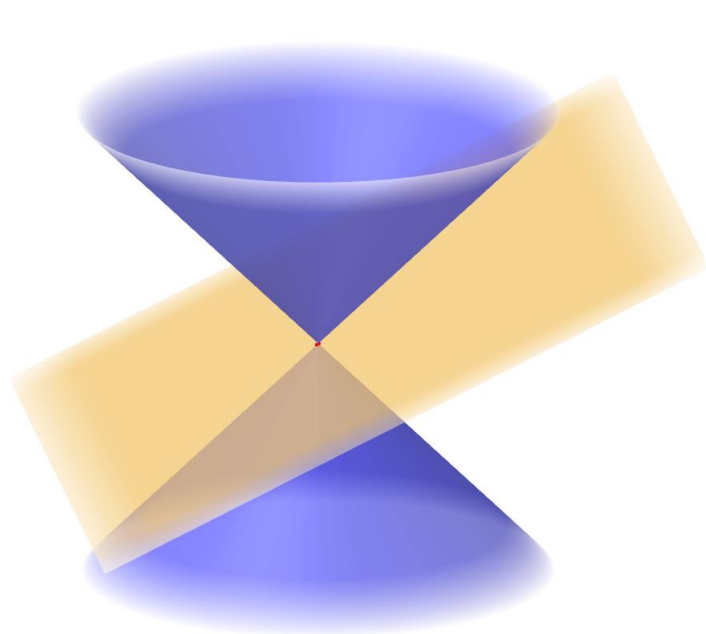


Pre ďalšie spustenie
videa prejdite myšou
na obrázok a kliknite
na prehrávanie



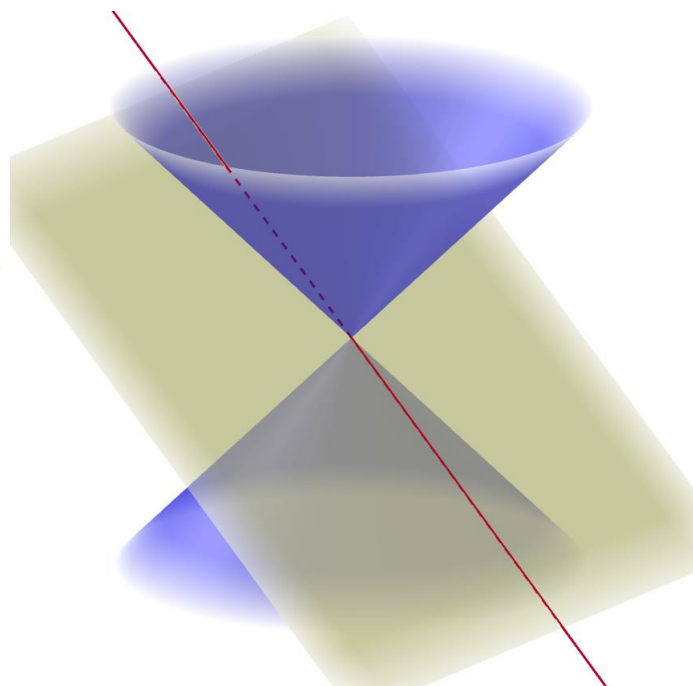
Definícia: Kužeľosečky sú rovinné rezy rotačnej kužeľovej plochy.

- Ak rovina rezu obsahuje vrchol kužeľovej plochy, tak rezom je **singulárna kužeľosečka**:
 - bod,
 - priamka,
 - dve rôznobežné priamky.



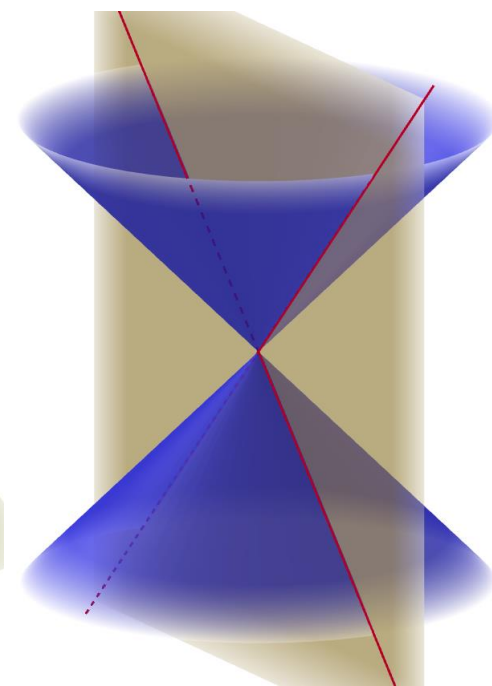
Bod

Rovina rezu pretína rotačnú kužeľovú plochu v jednom bode – vo vrchole rotačnej kužeľovej plochy.



Priamka

Rovina rezu sa dotýka rotačnej kužeľovej plochy pozdĺž jednej tvoriacej priamky.

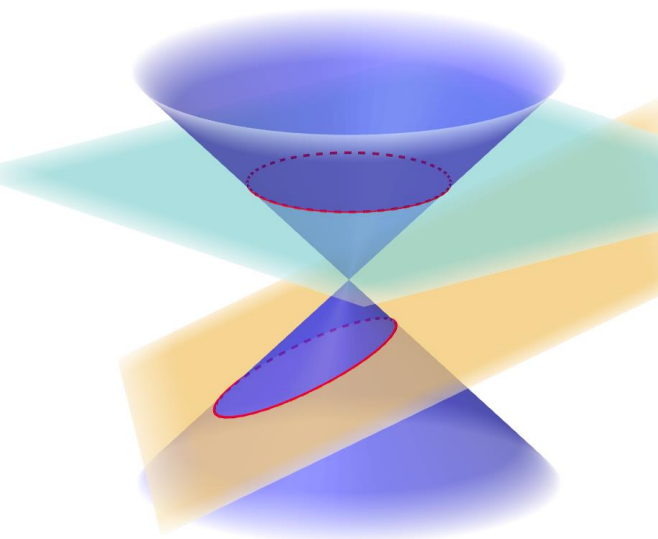


Dve rôznobežné priamky

Rovina rezu pretína rotačnú kužeľovú plochu v dvoch tvoriacich priamkach.

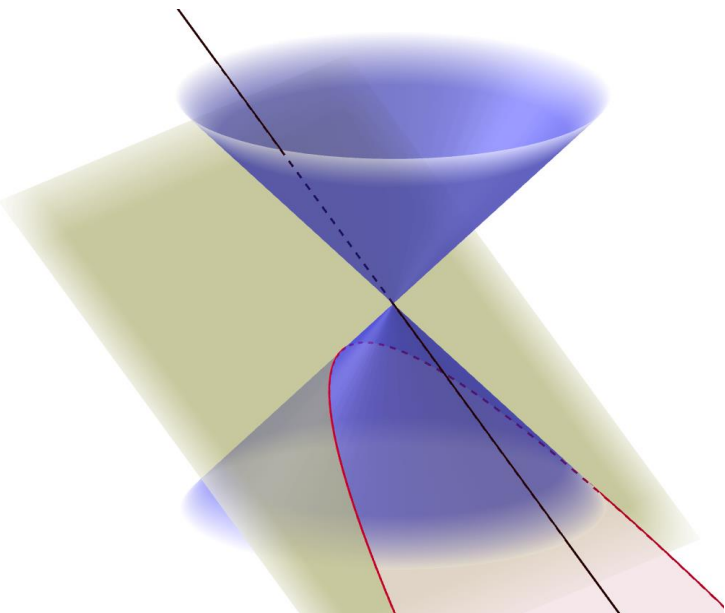
Definícia: Kužeľosečky sú rovinné rezy rotačnej kužeľovej plochy.

- Ak rovina rezu neobsahuje vrchol kužeľovej plochy, tak rezom je **regulárna kužeľosečka**:
 - kružnica,
 - elipsa,
 - parabola,
 - hyperbola.



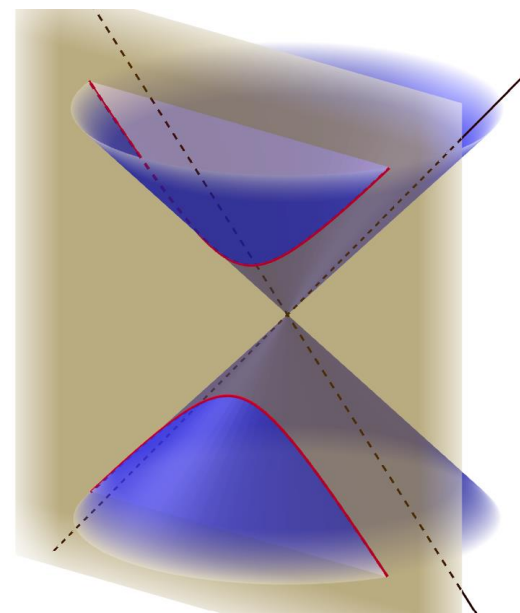
Kružnica, elipsa

Rovina rezu nie je rovnobežná so žiadnou tvoriacou priamkou rotačnej kužeľovej plochy.



Parabola

Rovina rezu je rovnobežná s jednou tvoriacou priamkou rotačnej kužeľovej plochy.



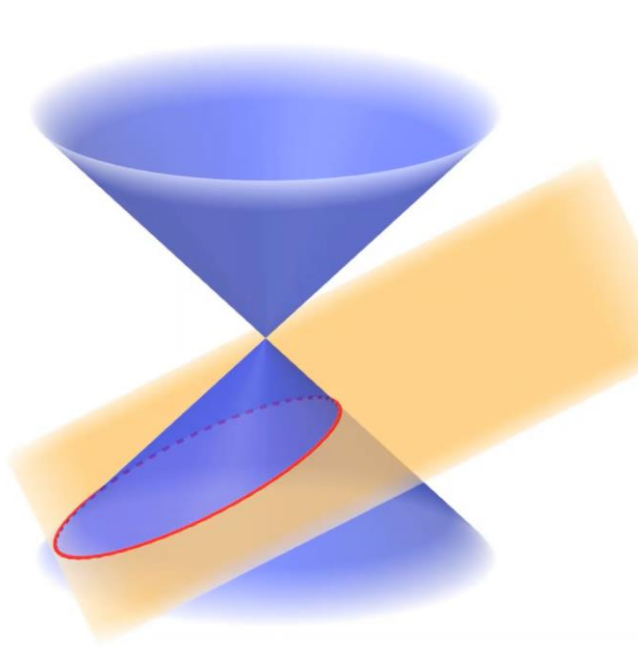
Hyperbola

Rovina rezu je rovnobežná s dvoma tvoriacimi priamkami rotačnej kužeľovej plochy.

Definícia: Kužeľosečky sú rovinné rezy rotačnej kužeľovej plochy.

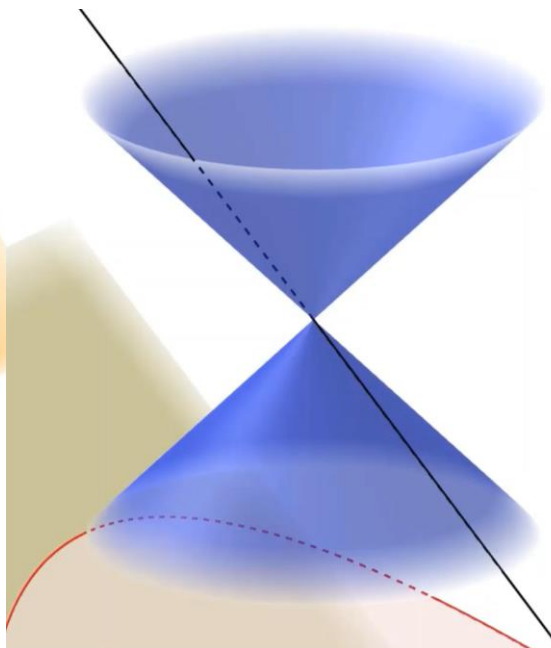
- Ak rovina rezu neobsahuje vrchol kužeľovej plochy, tak rezom je **regulárna kužeľosečka**:
 - kružnica,
 - elipsa,
 - parabola,
 - hyperbola.

Pre ďalšie spustenie
video prejdite myšou
na obrázok a kliknite
na prehrávanie



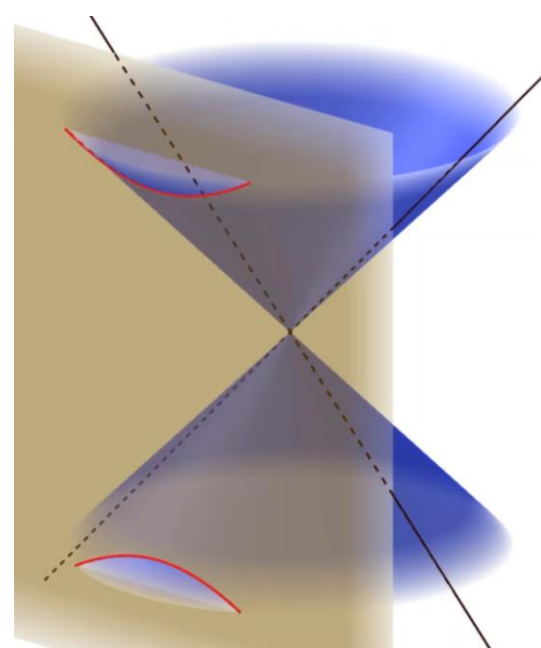
Elipsa

Rovina rezu nie je rovnobežná so žiadnou tvoriacou priamkou rotačnej kužeľovej plochy.



Parabola

Rovina rezu je rovnobežná s jednou tvoriacou priamkou rotačnej kužeľovej plochy.



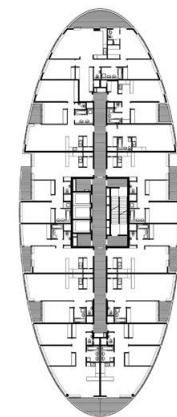
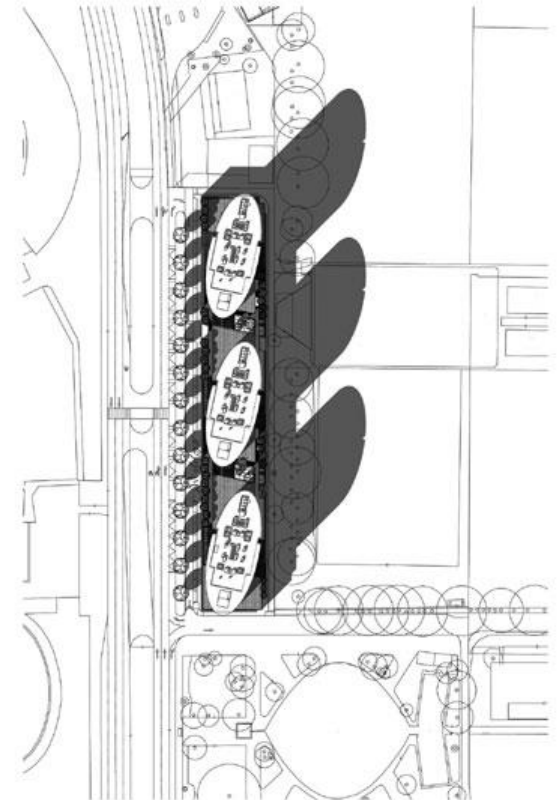
Hyperbola

Rovina rezu je rovnobežná s dvoma tvoriacimi priamkami rotačnej kužeľovej plochy.



Tri veže
Bratislava, Slovensko

<https://www.asb.sk/architektura/bytove-domy/iii-veze-naplňaju-viziu-dobreho-byvania>



Paraboly



Golden Gate Bridge
San Francisco, California, USA

<https://www.ck12.org/algebra/Graphs-of-Quadratic-Functions-in-Intercept-Form/rwa/Suspended-by-a-Cable/r7/>



Sydney Harbour Bridge
Sydney, Australia

<https://www.futurelearn.com/info/courses/maths-linear-quadratic/0/steps/12131>

Hyperboly



Elektrárň Jaslovské Bohunice

- závod Atómové elektrárne Bohunice sa nachádza neďaleko mesta Trnava

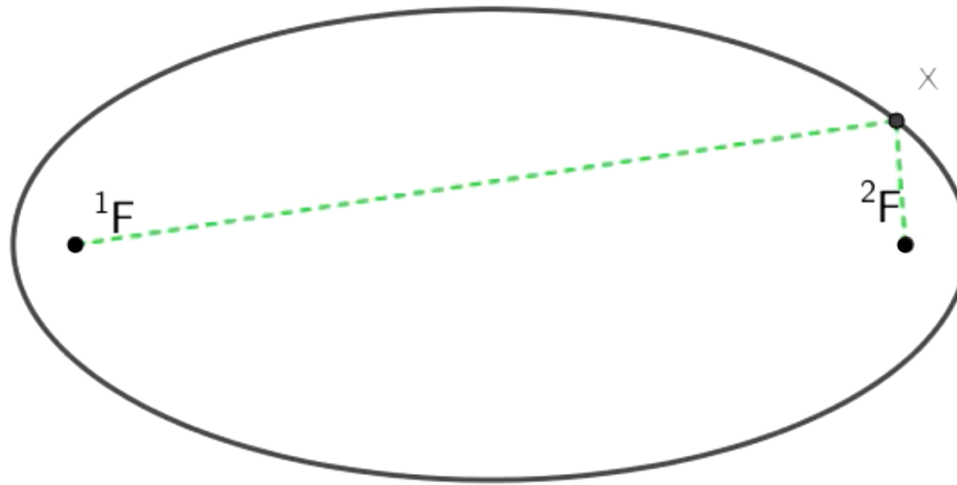
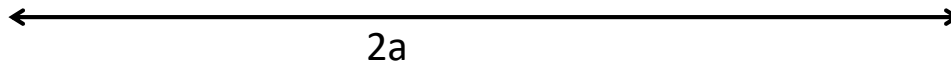


Cathedral of Brasília
(*Catedral Metropolitana Nossa Senhora Aparecida*)

2.2 Elipsa

Definícia: **Elipsa** je množina všetkých bodov v rovine E^2 , ktoré majú od dvoch daných bodov konštantný súčet vzdialeností väčší ako vzdialenosť týchto bodov.

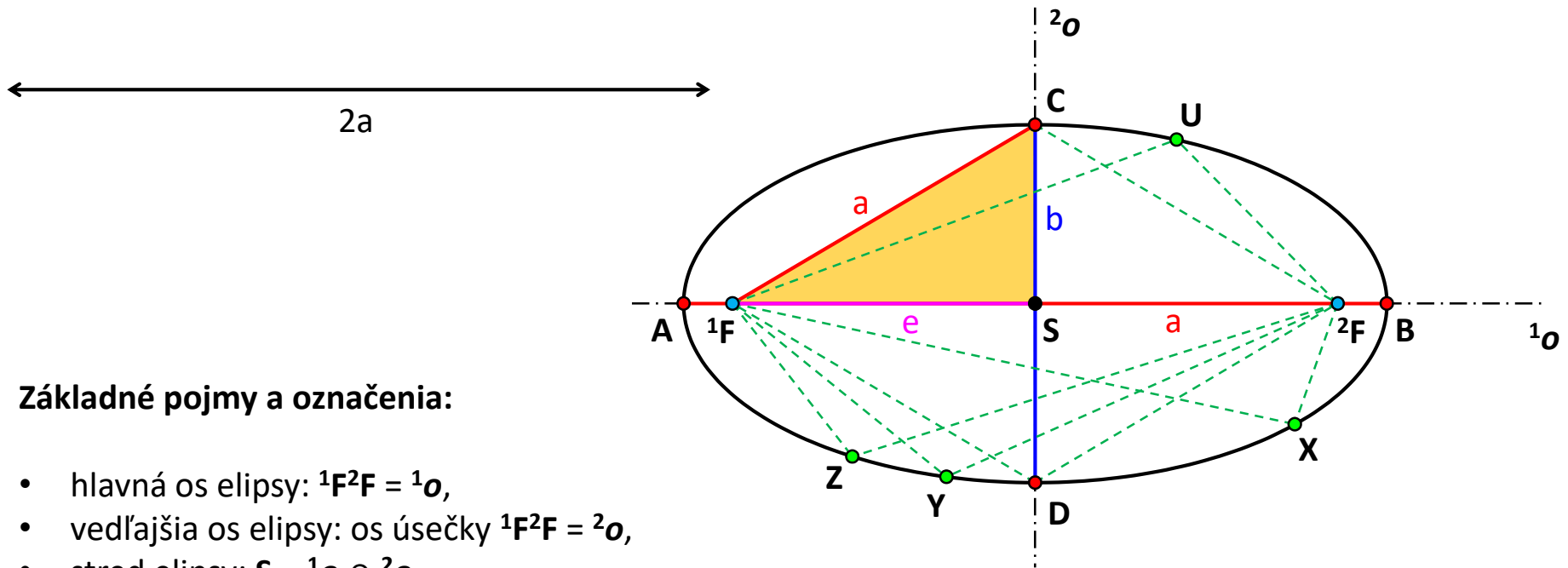
- Dva dané body sa nazývajú **ohniská elipsy** a označíme ich 1F , 2F .
- Súčet vzdialeností označíme $2a$.
- Symbolický zápis: $\text{Elipsa} = \{\forall X \in E^2; |X ^1F| + |X ^2F| = 2a, 2a > |^1F ^2F|\}$



Pre ďalšie spustenie
videa prejdite myšou
na obrázok a kliknite
na prehrávanie

Definícia: Elipsa je množina všetkých bodov v rovine E^2 , ktoré majú od dvoch daných bodov konštantný súčet vzdialeností väčší ako vzdialenosť týchto bodov.

$$\text{Elipsa} = \{\forall X \in E^2; |X {}^1F| + |X {}^2F| = 2a, 2a > |{}^1F {}^2F|\}$$



Základné pojmy a označenia:

- hlavná os elipsy: ${}^1F {}^2F = {}^1o$,
- vedľajšia os elipsy: os úsečky ${}^1F {}^2F = {}^2o$,
- stred elipsy: $S = {}^1o \cap {}^2o$,
- hlavné vrcholy **A, B** elipsy: $A, B \in {}^1o$, $|AS| = |BS| = a$,
- vedľajšie vrcholy **C, D** elipsy: $C, D \in {}^2o$, $|{}^1FC| = |{}^1FD| = a$,
- a – dĺžka hlavnej polosi elipsy, $a = |AS| = |BS|$,
- b – dĺžka vedľajšej polosi elipsy, $b = |CS| = |DS|$,
- e – excentricita elipsy, $e = |{}^1FS| = |{}^2FS|$,
- $\Delta {}^1FSC$ – charakteristický trojuholník elipsy, platí $a^2 = e^2 + b^2$.

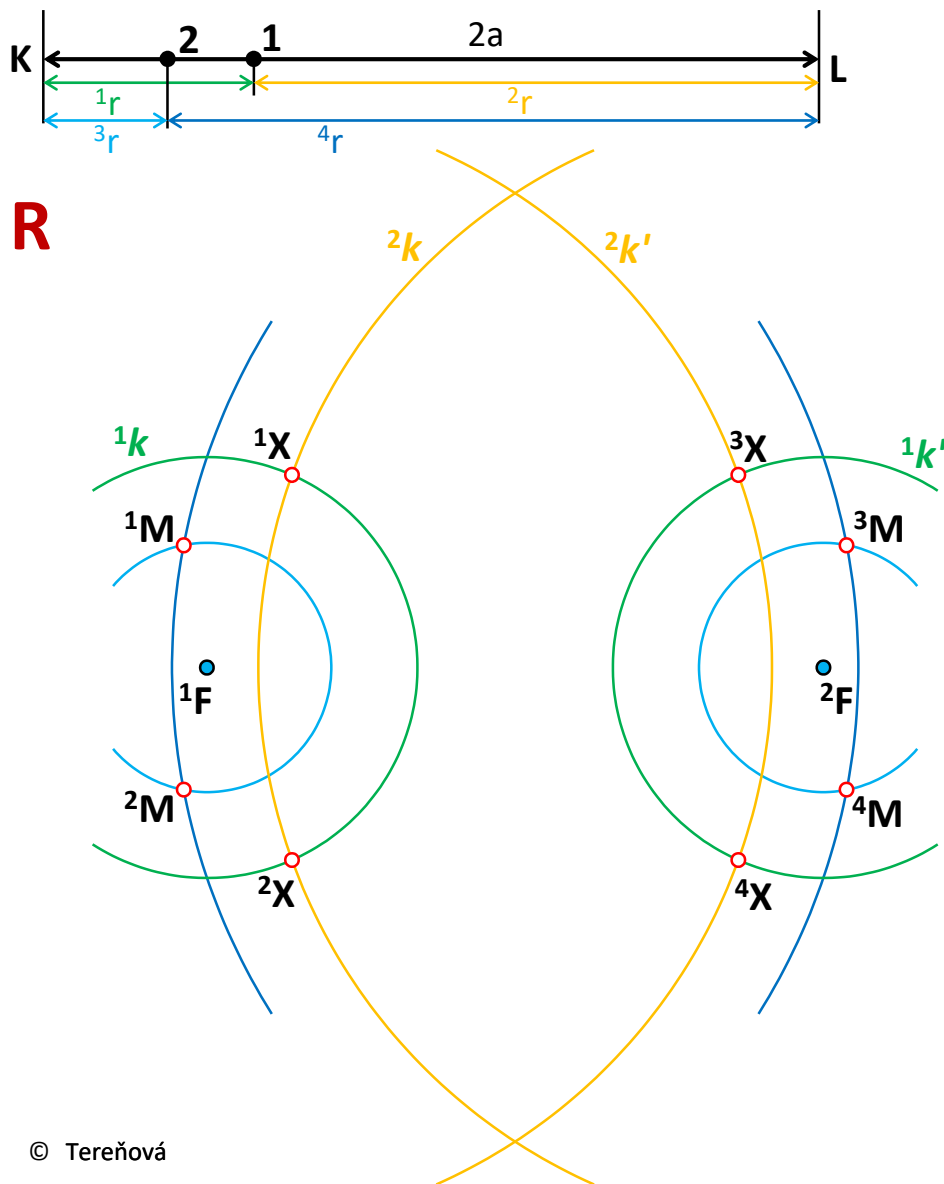
Súmernosť elipsy

Elipsa je súmerná:

- podľa svojej hlavnej osi,
- podľa svojej vedľajšej osi,
- podľa svojho stredu.

Ohnisková konštrukcia bodov elipsy (záhradnícka konštrukcia)

Príklad 2.1: Elipsa je daná ohniskami 1F , 2F a dĺžkou $2a$, $2a > |^1F ^2F|$. Zostrojte body elipsy.



$$|KL| = 2a$$

Postup:

1. Bod 1 ; $1 \in KL$, ľubovoľný bod úsečky KL , pre ktorý platí:
 $|K1| > \frac{1}{2} (2a - |^1F ^2F|)$,
 $|L1| > \frac{1}{2} (2a - |^1F ^2F|)$.
2. Dĺžky $^1r, ^2r$; $|K1| = ^1r$, $|L1| = ^2r$,
 platí: $^1r + ^2r = 2a$.
3. Kružnica 1k ; $^1k(^1F, ^1r)$.
4. Kružnica 2k ; $^2k(^2F, ^2r)$.
5. Body elipsy: $^1k \cap ^2k = \{^1X, ^2X\}$.

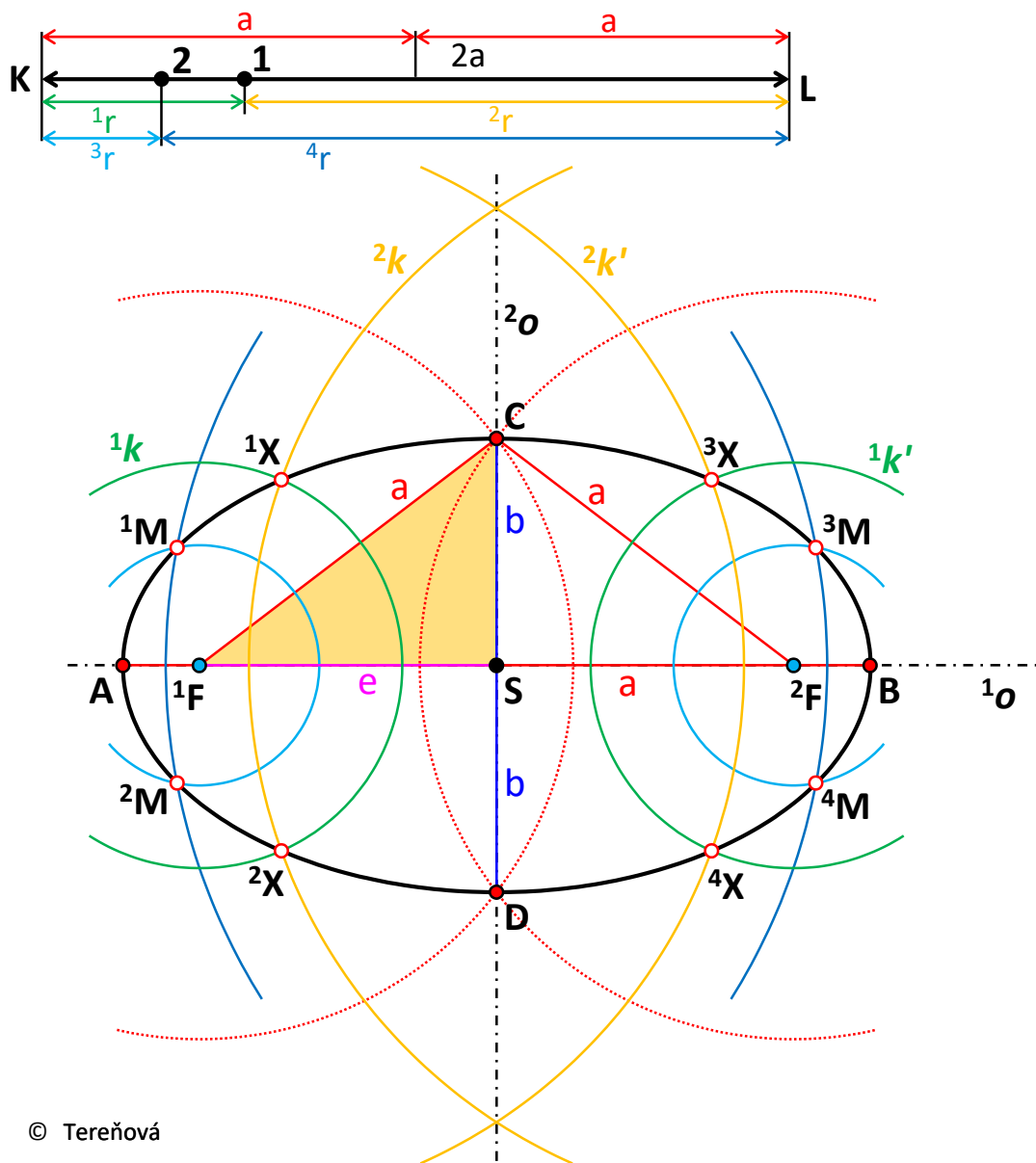
Pomocou dĺžok $^1r, ^2r$ môžeme zostrojiť ďalšie dva body elipsy:

5. Kružnica $^1k'$; $^1k'(^2F, ^1r)$.
6. Kružnica $^2k'$; $^2k'(^1F, ^2r)$.
7. Body elipsy: $^1k' \cap ^2k' = \{^3X, ^4X\}$.

Poznámka: Ďalšie body elipsy zostrojíme pomocou ľubovoľného bodu $2 \in KL$. Na obrázku sú zostrojené body $^1M, ^2M, ^3M, ^4M$ elipsy.

Ohnisková konštrukcia bodov elipsy (záhradnícka konštrukcia)

Príklad 2.1: Elipsa je daná ohniskami 1F , 2F a dĺžkou $2a$, $2a > |^1F ^2F|$. Zostrojte body elipsy.



$$|KL| = 2a$$

Zostrojíme osi elipsy a stred elipsy:

1. $^1F^2F = ^1o$ – hlavná os elipsy.
2. Os úsečky $^1F^2F = ^2o$ – vedľajšia os elipsy.
3. $S = ^1o \cap ^2o$ – stred elipsy.

Zostrojíme vrcholy elipsy:

1. Body A, B – hlavné vrcholy elipsy;
 $A, B \in ^1o$, $|AS| = |BS| = a$.
2. Body C, D – vedľajšie vrcholy elipsy;
 $C, D \in ^2o$, $|^1FC| = |^1FD| = a$.

Poznámka: Body A, B, C a D sú body elipsy, lebo spĺňajú definíciu elipsy.

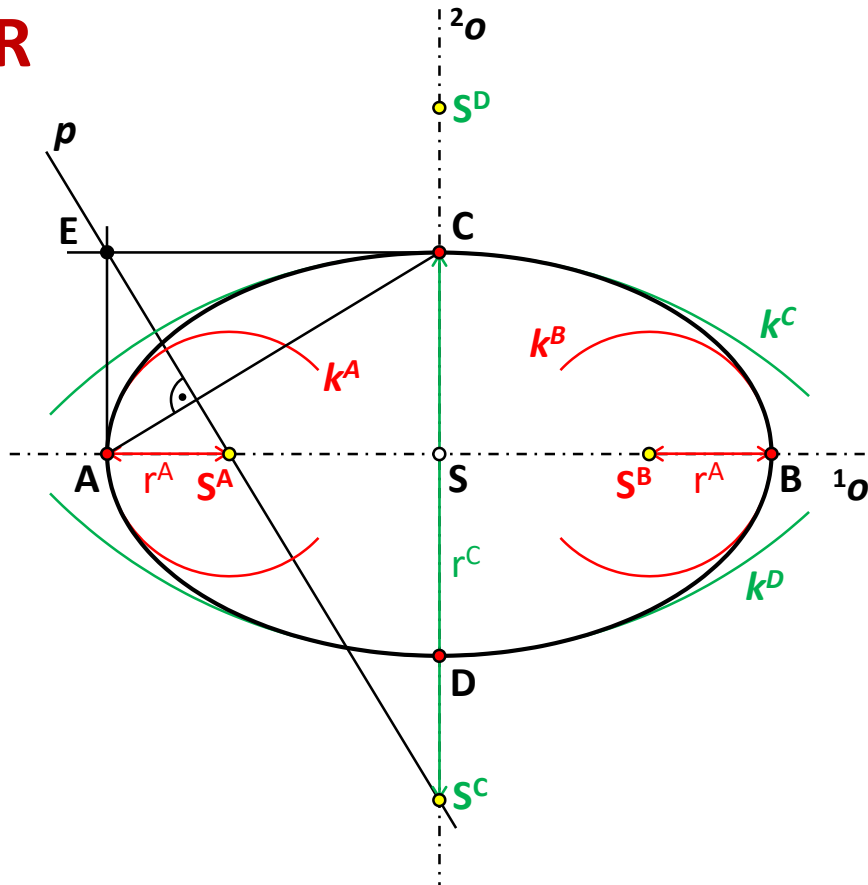
Poznámka: Na iné zobrazenie elipsy môžeme použiť oskulačné kružnice (pozri nasledujúci príklad).

Oskulačná kružnica

Oskulačná kružnica v bode **X** krivky sa dotýka krivky v tomto bode. Oskulačná kružnica a krivka majú v bode **X** spoločnú dotyčnicu a rovnakú prvú krivosť.

Príklad 2.2: Dané sú vrcholy **A**, **B**, **C** a **D** elipsy. Zostrojte oskulačné kružnice vo vrcholoch elipsy.

R



Postup:

1. Bod **E**; **ASCE** je obdĺžnik.
2. Priamka p ; $E \in p$, $p \perp AC$.
3. Stredy oskulačných kružníc:
 $p \cap 1_o = S^A$ – stred oskulačnej kružnice vo vrchole **A**,
 $p \cap 2_o = S^C$ – stred oskulačnej kružnice vo vrchole **C**.
4. Oskulačné kružnice:
 $k^A(S^A, r^A = |S^A A|)$ – oskulačná kružnica vo vrchole **A**,
 $k^C(S^C, r^C = |S^C C|)$ – oskulačná kružnica vo vrchole **C**.
5. Oskulačné kružnice vo vrcholoch **B** a **D** zostrojíme využitím súmernosti elipsy podľa jej stredu **S**.

Poznámka: Elipsa sa dotýka oskulačných kružníc k^A , k^B zvonku a oskulačných kružníc k^C , k^D zvnútra.

Poznámka: Priamku p , ktorá je potrebná na konštrukciu stredov oskulačných kružníc, môžeme zostrojiť aj inak, pozri nasledujúcu stranu.