STU
SvF

SLOVENSKÁ TECHNICKÁ
UNIVERZITA V BRATISLAVE
STAVEBNÁ FAKULTA

# Matematika 2

## NÁVODY K CVIČENIAM Z MATEMATIKY 2

ANDREA STUPŇANOVÁ, ALEXANDRA ŠIPOŠOVÁ

# Úvod

*Čo počujem, to zabudnem.*
*Čo vidím, to si zapamätám.*
*Čo si vyskúšam, tomu rozumiem.*
*Konfucius*

Pre matematiku, ako jedeného so základných nástrojov riešenia technických problémov, platí Konfuciov výrok doslovne. Prepisovanie poznámok a príkladov z tabule, či prezeranie si riešených príkladov v skriptách je nedostatočnou prípravou na tento predmet. Ak chceme matematike rozumieť, musíme obetovať voľný čas a sami nájsť riešenia príkladov. Mnohí študenti však často narazia na fakt, že neovládajú základný kalkul (základné matematické pravidlá a úpravy) nutný k nájdeniu hľadaného riešenia. To býva aj častým dôvodom, že „nestíhajú" sledovať učivo na cvičeniach, či prednáškach.

Cieľom danej publikácie je ponúknuť študentom technických smerov učebnú pomôcku, ktorá by im pomohla zvládnuť učivo z matematickej analýzy, ktoré je náplňou predmetu Matematika 2. Okrem základov vysokoškolského učiva, skriptá ponúkajú aj detailnejší návod, obsahujúci postupy, ktoré by mal študent ovládať už zo strednej školy. Prepočítavaním príkladov, by tak čitateľ mal postupne osvojiť nielen základy vysokoškolskej matematiky, ale aj vyrovnať hendikep zo strednej školy. Preto s postupujúcim učivom ubúda základných nápovedí. Skriptá sú určené hlavne študentom prvých ročníkov stavebných odborov na SvF STU a zhruba kopírujú prednášky z predmetu Matematika 2. Nie sú náhradou prednášok a cvičení. Sú koncipované ako ich doplnok pre domácu prípravu, respektíve pri cvičeniach.

# Obsah


Úvod ..... 3

Pamätáme si zo strednej školy ..... 5

1. Neurčitý integrál ..... 7
   1.1. Základné pojmy a pravidlá ..... 7
   1.2. Substitučná metóda a metóda per partes ..... 13
   1.3. Integrovanie racionálnych funkcií $\boldsymbol{Pn}(\boldsymbol{x})\ /\ \boldsymbol{Qm}(\boldsymbol{x})$ ..... 23
2. Určitý integrál ..... 33
   2.1. Základné pojmy a pravidlá ..... 33
   2.2. Aplikácie určitého integrálu ..... 37
3. Obyčajné diferenciálne rovnice ..... 48
   3.1. Diferenciálne rovnice (DR) 1. rádu ..... 49
      3.1.1. Separovateľné diferenciálne rovnice ..... 49
      3.1.2. Lineárne diferenciálne rovnice (LDR) 1. rádu ..... 56
   3.2. Lineárne diferenciálne rovnice 2. a vyššieho rádu s konštantnými koeficientami ..... 62
      3.2.1. Homogénne LDR ..... 62
      3.2.2. LDR 2. rádu so špeciálnou pravou stranou ..... 67
4. Funkcia dvoch a viacerých premenných ..... 86
   4.1. Základné pojmy, parciálne derivácie ..... 86
   4.2. Dotyková rovina, normála, totálny diferenciál a gradient funkcie ..... 96
   4.3. Parciálne derivácie vyšších rádov, lokálne extrémy ..... 106
   4.4. Viazané lokálne extrémy a globálne extrémy ..... 114

Literatúra ..... 130

# Pamätáme si zo strednej školy

### Mocniny a odmocniny

$$x^a . x^b = x^{a+b} \qquad \frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$$

$$x^a . y^a = (xy)^a \qquad \frac{x^a}{y^a} = \left(\frac{x}{y}\right)^a$$

$$(x^a)^b = x^{ab} \qquad \frac{1}{x^a} = x^{-a}$$

$$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$$

$x. y \neq 0.$ $\quad a. b \in \mathbb{R}.$ $\quad n \in \mathbb{N}$

### Logaritmické pravidlá a exponenciálne funkcie

$$\log a + \log b = \log(ab)$$

$$\log a - \log b = \log\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$c \log a = \log a^c$$

$$a^x = y \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_a y$$

$$a^{\log_a x} = x, \qquad \log_a(a^x) = x$$

$$\log_a a = 1, \qquad \log_a 1 = 0$$

$$a^x b^x = (ab)^x, \qquad \frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$$

$$a^x a^y = a^{x+y}, \qquad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$a^{bx} = (a^b)^x = (a^x)^b$$

$a, b > 0, \quad b, c \neq 0$

### Pravidlá pri úpravách

$$\frac{a \pm b}{c} = \frac{a}{c} \pm \frac{b}{c}, \qquad !! \quad \frac{a}{b \pm c} \neq \frac{a}{b} \pm \frac{a}{c} \quad !!$$

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{b}\frac{b\,x}{y}, \qquad \frac{x}{y} = \frac{x + a - a}{y}$$

$$\sqrt[n]{ae} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{e}, \qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$!! \quad \sqrt[n]{a \pm e} \neq \sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{e} \quad !!$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a\,d}{b\,c}, \qquad \frac{1}{\frac{b}{c}} = \frac{c}{b}, \qquad \frac{a}{b} = a\frac{1}{b},$$

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm cb}{bd}, \qquad b, c, d \neq 0$$

### Trigonometria

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\cos^2(x) = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$\sin^2(x) = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \ \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

### Mocniny a rozklady dvojčlenov

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

## Polynóm

$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ ... + \ a_{n-1}x + \ a_n$

*n je **stupeň** polynómu, $a_i$ sú konštanty.*

*$x_1$ voláme **koreňom** polynómu, ak $P_n(x_1) = 0$.*

$$P_n(x) = (x - x_1)\, P_{n-1}(x)$$

## Korene kvadratickej funkcie

$$P_2(x) = ax^2 + bx + c$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

## Rozklad na koreňové činitele

$$P_2(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

## Racionálna funkcia

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}, \quad Q_m(x) \text{ je polynóm}$$

## Goemetria

### V rovine $\mathbb{R}^2$:

- **Priamka** *daná bodom $(x_0, y_0)$ a normálovým vektorom $\vec{n} = (a, b)$:*
$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0;$$
- **Kružnica** *daná stredom $S(0,0)$ a polomerom $r$:*
$$x^2 + y^2 = r^2;$$
- **Elipsa** so *stredom $S(0,0)$, $a, b$ - výseky na osi $x$ a osi $y$:*
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

### V priestore $\mathbb{R}^3$:

- **Rovina** *daná bodom $(x_0, y_0, z_0)$ a normálovým vektorom (t. j. vektorom kolmým na rovinu) $\vec{n} = (a, b, c)$:*
$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0;$$
- **Priamka** *daná bodom $(x_0, y_0, z_0)$ a smerovým vektorom $\vec{s} = (s_1, s_2, s_3)$:*
$$\begin{aligned} x &= x_0 + s_1 t \\ y &= y_0 + s_2 t \,, \qquad t \in \mathbb{R}. \\ z &= z_0 + s_3 t \end{aligned}$$

# 1.Neurčitý integrál

## 1.1. Základné pojmy a pravidlá

*Čo si treba pamätať z prednášky:*

Ak $F'(x) = f(x)$ pre $x \in [a, b]$, potom pre *neurčitý integrál* (antideriváciu) platí

$\int f(x)\,dx = F(x) + c$ pre ľubovoľnú konštantu $c \in \mathbb{R}$ a $x \in [a, b]$.

Funkciu $F(x)$ voláme *primitívnou funkciou* k podintegrálnej funkcii (integrandu) $f(x)$.

Pravidlá pre rátanie neurčitého integrálu:

- $\int \big(af(x) \pm bg(x)\big)\,dx = a\int f(x)\,dx \pm b\int g(x)\,dx$

  *pre ľubovoľné konštanty $a, b \in \mathbb{R}$. (linearita)*

- $\int f(ax+b)\,dx = |t = ax + b| = \frac{1}{a}\int f(t)dt = \frac{1}{a}F(ax+b) + c$

  *pre ľubovoľné konštanty $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. (lineárna substitúcia)*

### Základné vzorce na integrovanie:

$$\int a\,dx = ax + c, \quad a \in \mathbb{R};$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \text{ pre } x > 0, n \neq -1;$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c \quad \text{pre } x \neq 0;$$

$$\int e^x\,dx = e^x + c;$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, \quad a > 0, a \neq 1;$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + c \\ -\operatorname{arccotg} x + c \end{cases};$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + c;$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + c;$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + c \quad \text{pre } x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, \; k \in \mathbb{Z};$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{cotg} x + c \text{ pre } x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z};$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \begin{cases} \arcsin x + c \\ -\arccos x + c \end{cases} \text{pre } x \in (-1,1);$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c.$$

*Precvičme si základné postupy a vzorce pri riešení príkladov.*

## *PRÍKLAD 1.*

Vypočítajte nasledujúce integrály: a) $\int (4x^3+5-3\cos x)\,dx$, b) $\int \frac{\sqrt[3]{x^2}-2x^3+\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}}\,dx$, c) $\int 3^{2-6x}\,dx$,

d) $\int \frac{3^{x+2}}{6^{2x+1}}\,dx$, e) $\int \frac{2^{x+1}}{4^{3-x}}\,dx$, f) $\int \frac{2x^2}{x^3-6}\,dx$, g) $\int \frac{9-x}{3-\sqrt{x}}\,dx$.

*Riešenie:*

$\int af(x)\pm bg(x)\,dx = a\int f(x)\,dx \pm b\int g(x)\,dx$

***a)*** *Použijeme linearitu neurčitého integrálu.*

$$\int (4x^3+5-3\cos x)\,dx = 4\int x^3\,dx + \int 5\,dx - 3\int \cos x\;dx = 4\frac{x^4}{4}+5x-3\sin x + c$$

$$= x^4+5x-3\sin x + c.$$

$\frac{a\pm b}{c}=\frac{a}{c}\pm\frac{b}{c}$, $\sqrt[n]{x^m}=x^{\frac{m}{n}}$, $\frac{x^a}{x^b}=x^{a-b}$

**b)** *Najprv musíme podintegrálnu funkciu upraviť.*

$$\int \frac{\sqrt[3]{x^2}-2x^3+\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}}\,dx = \int\left(\frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{3}{2}}}-2\frac{x^3}{x^{\frac{3}{2}}}+\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{2}}}\right)\,dx = \int\left(x^{-\frac{5}{6}}-2x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{x}\right)\,dx$$

$$= \frac{x^{\frac{1}{6}}}{\frac{1}{6}} - 2\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \ln|x| + c \;=\; 6\sqrt[6]{x} - \frac{4}{5}\sqrt{x^5} + \ln|x| + c.$$

$a^{x+y}=a^x a^y$, $\frac{a^x}{b^x}=\left(\frac{a}{b}\right)^x$, $c\ln a = \ln a^c$

$a^{bx}=(a^b)^x=(a^x)^b$,

$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a}+c$, v **c)** $a=3^{-6}$, v **d)** $a=\frac{1}{12}=12^{-1}$

**c)** *1.spôsob*: podintegrálnu funkciu upravíme .

$$\int 3^{2-6x}\,dx = \int 3^2(3^{-6})^x\,dx = 3^2\frac{(3^{-6})^x}{\ln 3^{-6}} + c = \frac{3^{2-6x}}{-6\ln 3} + c.$$

$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\int f(t)\,dt = \frac{1}{a}F(ax+b)+c$

*2. spôsob*: použijeme lineárnu substitúciu

$$\int 3^{2-6x}\,dx = |t=-6x+2| = \frac{1}{-6}\int 3^t\,dt = -\frac{1}{6}\frac{3^t}{\ln 3}+c = -\frac{3^{2-6x}}{6\ln 3}+c.$$

**d)** Integrand musíme najskôr upraviť na tvar $\frac{a^x}{b^x}$ použitím pravidiel pre exp. funkcie

$$\int \frac{3^{x+2}}{6^{2x+1}}\,dx = \int \frac{3^2 3^x}{6\,(6^2)^x}\,dx = \frac{9}{6}\int\frac{3^x}{36^x}\,dx = \frac{3}{2}\int\left(\frac{3}{36}\right)^x\,dx = \frac{3}{2}\,\frac{\left(\frac{1}{12}\right)^x}{\ln\left(\frac{1}{12}\right)} + c$$

$$= \frac{3}{-2\ln 12}12^{-x} + c\,.$$

**e)** V tomto prípade máme dve alternatívy, buď postupujeme ako v **d)** , alebo upravíme na tvar $\frac{a^x}{a^y}$.

$$\int \frac{2^{x+1}}{4^{3-x}}\,dx = \int \frac{2^{x+1}}{(2^2)^{3-x}}\,dx = \int \frac{2^{x+1}}{2^{6-2x}}\,dx = \int 2^{(x+1)-(6-2x)}\,dx = \int 2^{3x-5}\,dx = |t=3x-5|$$

$$= \frac{1}{3}\int 2^t\,dt = \frac{1}{3}\frac{2^t}{\ln 2} + c = \frac{1}{3\ln 2}2^{x+1} + c.$$

$a^{bx}=(a^b)^x=(a^x)^b$, $\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$

**f)** Najskôr upravíme podintegrálnu funkciu na zlomok typu $\frac{f'(x)}{f(x)}$.

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + c, \quad \frac{x}{y} = \frac{1}{b}\frac{b\,x}{y}$$

$$\int \frac{2x^2}{x^3-6}\,dx = 2\int \frac{x^2}{x^3-6}\,dx = |(x^3-6)' = 3x^2| = 2.\frac{1}{3}\int \frac{3x^2}{x^3-6}dx = \frac{2}{3}\ln|x^3-6| + c.$$

**g)** Pri úprave integrandu použijeme rozklad dvojčlena $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

$$\int \frac{9-x}{3-\sqrt{x}}dx = \int \frac{\cancel{(3-\sqrt{x})}(3+\sqrt{x})}{\cancel{3-\sqrt{x}}}dx = \int (3+\sqrt{x})\,dx = 3x + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = 3x + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c.$$

$$\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}, \ \int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

## ***PRÍKLAD 2.***

Vypočítajte nasledujúce integrály: a) $\int \operatorname{tg} 3x\,dx$, b) $\int \operatorname{cotg}^2(2x)\,dx$, c) $\int \frac{1}{x^2+4}dx$, d) $\int \frac{5x^2}{x^2+4}dx$, e) $\int \frac{2x-1}{3x+2}dx$.

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + c, \quad \frac{x}{y} = \frac{1}{b}\frac{b\,x}{y}$$

*Riešenie:*

**a)** Podintegrálnu funkciu upravíme na zlomok typu $\frac{f'(x)}{f(x)}$.

$$\int \operatorname{tg} 3x\,dx = \int \frac{\sin 3x}{\cos 3x}\,dx = |(\cos 3x)' = -3\sin 3x\,| = -\frac{1}{3}\int \frac{-3\sin 3x}{\cos 3x}dx$$

$$= -\frac{1}{3}\ln|\cos 3x\,| + c.$$

**b)** Použijeme trigonometrické vzťahy, základné úpravy a lin. substitúciu.

$$\int \operatorname{cotg}^2 2x\,dx = \int \frac{\cos^2 2x}{\sin^2 2x}\,dx = \int \frac{1-\sin^2 2x}{\sin^2 2x}dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 2x} - 1\right)\,dx = |\,t = 2x\,|$$

$$= -\frac{1}{2}\operatorname{cotg} 2x - x + c.$$

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\frac{a \pm b}{c} = \frac{a}{c} \pm \frac{b}{c}, \quad \int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + c$$

**c)** Podintegrálnu funkciu upravíme na zlomok typu $\frac{1}{1+t^2}$ použitím lin. substitúcie.

$$\int \frac{1}{x^2+4}dx = \int \frac{1}{4\left(1+\frac{x^2}{4}\right)}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}dx = |\,t = \tfrac{1}{2}\,x\,| = \frac{1}{4}\,\frac{1}{\frac{1}{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + c$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + c.$$

**d)** Podintegrálnu funkciu rozdelíme na dva zlomky a použijeme výsledok z predchádzajúceho príkladu.

$$\int \frac{5x^2}{x^2+4}dx = 5\int \frac{x^2+4-4}{x^2+4}dx = 5\int \left(1 - \frac{4}{x^2+4}\right)dx = 5x - \frac{20}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + c$$

$$= 5x - 10\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + c.$$

$$\frac{a \pm b}{c} = \frac{a}{c} \pm \frac{b}{c}, \quad \frac{x}{y} = \frac{x+a-a}{y}$$

**e)** Naskôr integrand rozpíšeme ako súčet konštanty a zlomku s konštantou v čitateli.

$$\frac{2x-1}{3x+2}=\frac{b(3x+2)+d}{3x+2}=b+\frac{d}{3x+2},$$

čiže potrebujeme určiť konštanty $b, d$ tak, aby platilo $2x-1=b(3x+2)+d$.

- Porovnaním koeficientov pri $x$ dostaneme konštantu $b$: $2=3b \Rightarrow b=\frac{2}{3}$.
- Dopočítame konštantu $d$: $2x-1=\underbrace{\frac{2}{3}(3x+2)}_{2x+\frac{4}{3}}\underbrace{-1-\frac{4}{3}}_{d}=\frac{2}{3}(3x+2)-\frac{7}{3}$.

Teraz môžeme integrovať člen po člene:

$$\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|+c, \qquad \frac{x}{y}=\frac{1}{b}\frac{b\,x}{y}$$

$$\int\frac{2x-1}{3x+2}dx=\int\left(\frac{2}{3}+\frac{-\frac{7}{3}}{3x+2}\right)dx=\frac{2}{3}\int 1\,dx-\frac{7}{3}\frac{1}{3}\int\frac{3\,.\,1}{3x+2}\,dx$$

$$=\frac{2}{3}\,x-\frac{7}{9}\,\ln|3x+2|+c.$$

(rozklad môžeme urobiť aj pomocou delenia polynómov, viď str. 29).

Príklad môžeme riešiť aj cez lineárnu substitúciu $t=3x+2$.

$$\int\frac{2x-1}{3x+2}dx=\left|\begin{matrix}t=3x+2\\ x=\dfrac{t-2}{3}\end{matrix}\right|=\frac{1}{3}\int\frac{2\left(\frac{t-2}{3}\right)-1}{t}\,dt=\frac{1}{3}\int\frac{\frac{2}{3}t-\frac{7}{3}}{t}\,dt=\frac{1}{9}\int\frac{2t-7}{t}\,dt$$

$$=\frac{1}{9}\int\left(2-\frac{7}{t}\right)\,dt=\frac{1}{9}(2t-7\ln|t|)+c=\frac{2}{9}(3x+2)-\frac{7}{9}\ln|3x+2|+c.$$

(Označenie *c* je symbolom pre ľubovoľné číslo, čiže aj $c+\frac{4}{9}$ môžeme nahradiť symbolom *c*, takže výsledky pri oboch postupoch sú ekvivalentné.)

Použitím rovnakého postupu ako v príklade Pr.2 c) dostaneme nasledujúce všeobecnejšie integrálne vzorce pre $a>0$: *Skúste ako cvičenie!*

$$\int\frac{1}{a^2+x^2}dx=\begin{cases}\frac{1}{a}\,\text{arctg}\left(\frac{x}{a}\right)+c\\ -\frac{1}{a}\,\text{arccotg}\left(\frac{x}{a}\right)+c\end{cases},$$

$$\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\begin{cases}\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)+c\\ -\arccos\left(\frac{x}{a}\right)+c\end{cases}\text{pre } x\in(-a,a).$$

## ***Príklad 3.***

Vypočítajte nasledujúce integrály: a) $\int\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}dx$, b) $\int\frac{\cos(2x)}{\cos x+\sin x}dx$, c) $\int\frac{1}{1+\cos(2x)}dx$,

d) $\int\cos^2(4x)\,dx$.

*Riešenie:* Použijeme trigonometrické vzťahy a základné úpravy

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1,\ \frac{a \pm b}{c} = \frac{a}{c} \pm \frac{b}{c},$

**a)**

$$\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}\,dx = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}\,dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx + \int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x + c$$

$$= \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x} + c = \frac{2(\sin^2 x - \cos^2 x)}{2\cos x \sin x} + c = -2\operatorname{cotg}(2x) + c.$$

$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x,\quad \sin 2x = 2\sin x \cos x,$
$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x},\ \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$

**b)**

$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x,\ \ a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

$$\int \frac{\cos(2x)}{\cos x + \sin x}\,dx = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x + \sin x}\,dx = \int \frac{\cancel{(\cos x + \sin x)}(\cos x - \sin x)}{\cancel{\cos x + \sin x}}\,dx$$

$$= \sin x + \cos x + c.$$

**c)**

$$\int \frac{1}{1+\cos(2x)}\,dx = \int \frac{1}{1+(\cos^2 x - \sin^2 x)}\,dx = \int \frac{1}{2\cos^2 x}\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{tg} x + c.$$

**d)** Použijeme trigonometrický vzorec pre $\cos^2 x$.

$\cos^2(x) = \frac{1+\cos 2x}{2}$

$$\int \cos^2(4x)\,dx = \int \frac{1+\cos 8x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int (1+\cos 8x)\,dx = |\ t = 8x\ | = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 8x}{8}\right) + c.$$

## *Príklady na prepočítanie*

1. $\int (2x^5 - 6x + 3)\, dx.$

2. $\int \frac{3x - 2\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}}\, dx.$

3. $\int \frac{26x\sqrt{x^3} + 4x^3\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}\, dx.$

4. $\int \frac{3x^2 - 2}{2(x^2 + 1)}\, dx.$

5. $\int \frac{4x + 1}{x - 2} dx.$

6. $\int \frac{3^x + 5^x}{15^x} dx.$

7. $\int 3^{2-3x}\, dx.$

8. $\int \frac{6^{x-2} + 4^{x+1}}{2^x}\, dx.$

9. $\int \frac{3^{2x-1}}{9^{4-x}} dx.$

10. $\int (1 - 3x)^5\, dx.$

11. $\int \frac{3}{3 - 4x} dx.$

12. $\int \frac{4 - x}{2 + \sqrt{x}} dx.$

13. $\int \frac{e^{3x}}{e^{3x} + 2} dx.$

14. $\int \mathrm{tg}^2(3x + 1)\, dx.$

15. $\int \sin^2(2x)\, dx.$

16. $\int \mathrm{cotg}\,(3x)\, dx.$

17. $\int \frac{\cos\,(2x)}{\sin^2 x \cos^2 x} dx.$

18. $\int \frac{1 + \cos(4x)}{4x + \sin(4\,x)} dx.$

19. $\int \frac{\sin(3x)}{13 + \cos(3x)} dx.$

20. $\int \frac{1}{1 - \cos(2x)} dx.$

VÝSLEDKY

1. $\frac{x^6}{3} - 3x^2 + 3x + c$, 2. $6\sqrt{x} - 12\sqrt[6]{x} + 2\ln|x| + c$, 3. $8\sqrt[4]{x^{13}} + \frac{16}{17}\sqrt[4]{x^{17}} + c$,

4. $\frac{3}{2}x - \frac{5}{2}\mathrm{arctg}\, x + c$, 5. $4x + 9\ln|x - 2| + c$, 6. $-\frac{1}{\ln(5)\, 5^x} - \frac{1}{\ln(3)\, 3^x} + c$, 7. $-\frac{1}{3\ln 3}3^{2-3x} + c$,

8. $\frac{3^{x-2}}{4\ln 3} + \frac{2^{x+2}}{\ln 2} + c$, 9. $\frac{3^{4x-9}}{4\ln 3} + c$, 10. $-\frac{(1-3x)^6}{18} + c$, 11. $-\frac{3}{4}\ln|3 - 4x| + c$, 12. $2x - \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c$,

13. $\frac{1}{3}\ln(e^{3x} + 2) + c$, 14. $\frac{1}{3}\mathrm{tg}(3x + 1) - x + c$, 15. $\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\sin(4x) + c$, 16. $\frac{1}{3}\ln|\sin(3x)| + c$,

17. $-\frac{2}{\sin(2x)} + c$, 18. $\frac{1}{4}\ln|4x + \sin(4x)| + c$, 19. $-\frac{1}{3}\ln|13 + \cos(3x)| + c$, 20. $-\frac{1}{2}\,\mathrm{cotg}\, x + c$ .

## *1.2. Substitučná metóda a metóda per partes*

*Čo si treba pamätať z prednášky:*

Nech $F(x)$ je primitívnou funkciou k funkcii $f(x)$, t. j. $\int f(x)\,dx = F(x) + c$.

Substitučná metóda (A):

$$\int f(\underbrace{\varphi(x)}_{t})\,\underbrace{\varphi'(x)dx}_{dt} = \int f(t)\,dt = F(t) + c = F\big(\varphi(x)\big) + c,$$

$$t = \varphi(x)$$
$$dt = \varphi'(x)dx$$

Substitučná metóda (B):

$$\int f\big(\varphi(x)\big)\,dx = \int f(t)\,\big(\varphi^{-1}(t)\big)'\,dt.$$

$$t = \varphi(x) \;\Rightarrow\; x = \varphi^{-1}(t)$$
$$dx = \big(\varphi^{-1}(t)\big)'dt$$

*Substitúciu (A) používame v prípade, keď:*

- *podintegrálna funkcia je (alebo sa dá upraviť na) súčin zloženej funkcie a derivácie jej vnútornej funkcie*

$$f(\varphi(x)).\varphi'(x)\,.$$

## PRÍKLAD 4.

Vypočítajte nasledujúce integrály: a) $\int\, xe^{5-x^2}\,dx$, b) $\int \frac{3^x}{\sqrt{1-9^x}}dx$, c) $\int \cos^3 x\;dx$ .

*Riešenie:*

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{b}\,\frac{b\,x}{y}$$

**a)**

$$\int xe^{5-x^2}\,dx = \int\, e^{5-x^2}\,x\,dx = -\frac{1}{2}\int\, e^{5-x^2}.(-2)x\,dx = \begin{vmatrix} t = 5 - x^2 \\ dt = -2x\,dx \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2}\int e^t\,dt = -\frac{1}{2}e^t + c = -\frac{1}{2}e^{5-x^2} + c.$$

**b)**

$$\int \frac{3^x}{\sqrt{1-9^x}}\,dx = \frac{1}{\ln 3}\int \frac{1}{\sqrt{1-(3^x)^2}}.3^x.\ln 3\,dx = \left|\begin{array}{l} t = 3^x \\ dt = 3^x \ln 3\,dx \end{array}\right| = \frac{1}{\ln 3}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$= \frac{1}{\ln 3}\arcsin t + c = \frac{1}{\ln 3}\arcsin 3^x + c.$$

**c)**

$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

$$\int \cos^3 x\,dx = \int \cos^2 x\,\cos x\,dx =$$

$$= \int (1-\sin^2 x)\cos x\,dx = \left|\begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x\,dx \end{array}\right| = \int (1-t^2)dt = t - \frac{t^3}{3} + c$$

$$= \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + c.$$

---

*Substitúciu (B) používame v prípade, keď*

- *nová podintegrálna funkcia, t. j. súčin funkcií $f(t)\,(\varphi^{-1}(t))'$, sa dá následne zjednodušiť použitím úprav alebo vzorcov. Budeme ju používať hlavne pri integráloch typu* $\int f(\sqrt[k]{ax+b})\,dx.$

---

## PRÍKLAD 5.

Vypočítajte nasledujúce integrály: a) $\int \frac{9x^2+2}{(4-3x)^3}dx$, b) $\int \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}dx$, c) $\int \frac{x^2+4}{x\sqrt{2x-1}}\,dx$ .

*Riešenie:*

**a)**

$\frac{a\pm b}{c} = \frac{a}{c} \pm \frac{b}{c}$, $(a\pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

$$\int \frac{9x^2+2}{(4-3x)^3}dx = \left|\begin{array}{l} t = 4-3x \\ x = \dfrac{4-t}{3} \\ dx = -\dfrac{1}{3}\,dt \end{array}\right| = \int \frac{9\left(\frac{4-t}{3}\right)^2 + 2}{t^3}\left(-\frac{1}{3}\right)dt = -\frac{1}{3}\int \frac{(16-8t+t^2)+2}{t^3}\,dt$$

$$= -\frac{1}{3}\int\left(\frac{18}{t^3} - \frac{8}{t^2} + \frac{1}{t}\right)dt = -\frac{1}{3}\left(-\frac{9}{t^2} + \frac{8}{t} + \ln|t|\right) + c$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{9}{(4-3x)^2} - \frac{8}{4-3x} - \ln|4-3x|\right) + c.$$

**b)**

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx = \left| \begin{array}{c} t=\sqrt{x} \\ x=t^2 \\ dx=\ 2t\,dt \end{array} \right| = \int \frac{t}{1+\cancel{t}}\,2\cancel{t}\,dt = 2\int \frac{t^2-1+1}{1+t}\,dt$$

$$= 2\int \left(t-1+\tfrac{1}{1+t}\right)\,dt = 2\left(\tfrac{t^2}{2}-t+\ln|1+t|\right)+c = x-2\sqrt{x}+2\ln\left|1+\sqrt{x}\right|+c.$$

$$\frac{x}{y}=\frac{x+a-a}{y},\ \frac{a\pm b}{c}=\frac{a}{c}\pm\frac{b}{c}$$

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

$$\frac{a\pm b}{c}=\frac{a}{c}\pm\frac{b}{c},\qquad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\,d}{b\,c}$$

**c)**

$$\int \frac{x^2+4}{x\sqrt{2x-1}}\,dx = \left| \begin{array}{c} t=\sqrt{2x-1} \\ x=\dfrac{t^2+1}{2} \\ dx=\ t\,dt \end{array} \right| = \int \frac{\left(\frac{t^2+1}{2}\right)^2+4}{\frac{t^2+1}{2}\cancel{t}}\,\cancel{t}\,dt = \int \left(\frac{t^2+1}{2}+\frac{4}{\frac{t^2+1}{2}}\right)dt$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{t^3}{3}+t\right)+8\,\mathrm{arctg}\,t+c=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{(2x-1)^3}}{3}+\sqrt{2x-1}\right)+8\,\mathrm{arctg}\sqrt{2x-1}+c.$$

*Pozor na správne použitie substitúcie v príkladoch, v podintegrálnej funkcii musíme nahradiť <u>všetky</u> pôvodné premenné novými premennými, napríklad*

$$\int \frac{x^2+4}{x\sqrt{2x-1}}\,dx \neq \int \frac{x^2+4}{xt}\,t\,dt \quad !!!$$

## Príklady na prepočítanie

**1.** $\displaystyle\int (x+2)e^{x^2+4x-5}\,dx.$

**2.** $\displaystyle\int \frac{\ln^3(2\,x)}{x}\,dx.$

**3.** $\displaystyle\int \frac{2x^2}{4+x^6}\,dx.$

**4.** $\displaystyle\int \frac{x}{2(x^2-3)^4}\,dx.$

**5.** $\displaystyle\int \frac{2}{\sqrt{(3-4x)^3}}\,dx.$

**6.** $\displaystyle\int \frac{\mathrm{tg}^2 x}{\cos^2 x}\,dx.$

**7.** $\displaystyle\int \sin^3(2x)\,dx.$

**8.** $\displaystyle\int \frac{5^x}{\sqrt{1-25^x}}\,dx.$

**9.** $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}\,dx.$

**10.** $\displaystyle\int \frac{3x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

**11.** $\displaystyle\int \frac{1-4x^2}{(2x+3)^4}\,dx.$

**12.** $\displaystyle\int \frac{2}{4+\sqrt[3]{x}}\,dx.$

VÝSLEDKY

1. $\frac{1}{2}e^{x^2+4x-5}+c$, 2. $\frac{1}{4}\ln^4(2x)+c$, 3. $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x^3}{2}+c$, 4. $-\frac{1}{12}\,\frac{1}{(x^2-3)^3}+c$, 5. $\frac{1}{\sqrt{3-4x}}+c$,
6. $\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x+c$, 7. $-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{6}\cos^3(2x)+c$, 8. $\frac{1}{\ln 5}\arcsin(5^x)+c$, 9. $x-4\sqrt{x}+8\ln|\sqrt{x}+2|+c$,
10. $-3\sqrt{1-x^2}+c$, 11. $\frac{4}{3(2x+3)^3}-\frac{3}{2(2x+3)^2}+\frac{1}{2(2x+3)}+c$,
12. $3\sqrt[3]{x^2}-24\sqrt[3]{x}+96\ln|4+\sqrt[3]{x}|+c$

*Čo si treba pamätať z prednášky:*

Metóda per partes:

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx$$

Integrovanie per partes (t. j. po častiach) spočíva v tom, že miesto integrovania pôvodného integrálu $\int u(x)v'(x)\,dx$ počítame integrál $\int u'(x)v(x)\,dx$, ktorý pri vhodnej voľbe funkcií $u(x)$ a $v(x)$ môže byť jednoduchší. Niekedy je nutné metódu viackrát zopakovať. Najčastejšie použitie metódy per partes môžeme zhrnúť do troch základných prípadov:

---

- *podintegrálna funkcia je súčin dvoch funkcií* $P(x).f(x)$, *kde* $P(x)$ *je* ***polynóm*** *a* $f(x)$ *je* ***trigonometrická****, resp.* ***exponencionálna*** *funkcia. Potom položíme*

$$u(x) = P(x)$$
$$v'(x) = f(x).$$

---

## PRÍKLAD 6.

Vypočítajte nasledujúce integrály: a) $\int xe^{5x}\,dx$, b) $\int 3x\cos 5x\,dx$, c) $\int (x^2+2x)\sin 3x\,dx$.

*Riešenie:*

**a)** Polynóm $x$ označíme ako funkciu $u(x)$, ktorú budeme derivovať a exponencionálnu funkciu označíme ako funkciu $v'(x)$, ktorú budeme následne integrovať.

$$\int xe^{5x}\,dx = \left| \begin{matrix} u = x, & u' = 1 \\ v' = e^{5x}, & v = \dfrac{e^{5x}}{5} \end{matrix} \right| = x\,\frac{e^{5x}}{5} - \int 1\cdot\frac{e^{5x}}{5}\,dx = \frac{1}{5}xe^{5x} - \frac{1}{5}\,\frac{e^{5x}}{5} + c$$

$$= \frac{1}{5}xe^{5x} - \frac{1}{25}e^{5x} + c.$$

**b)**

$$\int 3x\cos 5x\,dx = \left| \begin{matrix} u = 3x, & u' = 3 \\ v' = \cos 5x\,, & v = \dfrac{\sin 5x}{5} \end{matrix} \right| = 3x\cdot\frac{\sin 5x}{5} - \int 3\cdot\frac{\sin 5x}{5}\,dx$$

$$= \frac{3}{5}x\sin 5x - \frac{3}{5}\left(-\frac{\cos 5x}{5}\right) + c = \frac{3}{5}x\cos 5x + \frac{3}{25}\cos 5x + c.$$

**c)** V tomto prípade musíme použiť metódu per partes dvakrát.

$$\int (x^2+2x)\sin 3x\,dx = \left| \begin{matrix} u = x^2+2x, & u' = 2x+2 \\ v' = \sin 3x\,, & v = -\dfrac{\cos 3x}{3} \end{matrix} \right| =$$

$$= (x^2+2x)\left(-\frac{\cos 3x}{3}\right) - \int (2x+2)\cdot\left(-\frac{\cos 3x}{3}\right)dx$$

$$= -\frac{1}{3}(x^2+2x)\cos 3x + \frac{2}{3}\int (x+1)\cos 3x\;dx = \left| \begin{matrix} u = x+1, & u' = 1 \\ v' = \cos 3x\,, & v = \dfrac{\sin 3x}{3} \end{matrix} \right|$$

$$= -\frac{1}{3}(x^2+2x)\cos 3x + \frac{2}{3}\left((x+1)\,\frac{\sin 3x}{3} - \int \frac{\sin 3x}{3}\,dx\right)$$

$$= -\frac{1}{3}(x^2+2x)\cos 3x + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}(x+1)\sin 3x + \frac{1}{3}\,\frac{\cos 3x}{3}\right) + c$$

$$= -\frac{1}{3}\left(x^2+2x-\frac{2}{9}\right)\cos 3x + \frac{2}{9}\,(x+1)\sin 3x + c.$$

---

- *podintegrálna funkcia je súčin dvoch funkcií* $P(x).f(x)$, *kde* $P(x)$ *je* **polynóm** *(vrátane konštanty), resp.* **racionálna** *funkcia a* $f(x)$ *je* **logaritmická,** *resp.* **cyklometrická** *funkcia (t.j. inverzná k trigonometrickej, napr .* $\arcsin x$ *, ... ). Potom položíme*

$$u(x) = f(x)$$
$$v'(x) = P(x)$$

---

## PRÍKLAD 7.

Vypočítajte nasledujúce integrály: a) $\int\ 2x^3 \ln x\, dx$, b) $\int 3x \operatorname{arctg}\ x\, dx$, c) $\int \ln^2(3x)\ dx$,

d) $\int \arcsin x\, dx$.

*Riešenie:*

**a)** Logaritmickú funkciu nevieme priamo integrovať, zato jej derivácia je racionálna funkcia, preto za funkciu $u(x)$ položíme práve logaritmickú funkciu.

$$\int\ 2x^3 \ln x\, dx = \begin{vmatrix} u = \ln x\,, & u' = \dfrac{1}{x} \\ v' = 2x^3, & v = \dfrac{2x^4}{4} \end{vmatrix} = \frac{x^4}{2} \ln x - \int \frac{1}{\cancel{x}} \frac{x^{\cancel{4}3}}{2}\, dx$$

$$= \frac{x^4}{2} \ln x - \frac{1}{2}\frac{x^4}{4} + c = \frac{x^4}{2} \ln x - \frac{1}{8} x^4 + c.$$

**b)**

$$\int 3x \operatorname{arctg}\ x\, dx = \begin{vmatrix} u = \operatorname{arctg} x\,, & u' = \dfrac{1}{1+x^2} \\ v' = 3x, & v = \dfrac{3x^2}{2} \end{vmatrix} = \frac{3x^2}{2} \operatorname{arctg}\ x - \int \frac{1}{1+x^2} \frac{3x^2}{2}\, dx$$

$$= \frac{3x^2}{2} \operatorname{arctg}\ x - \frac{3}{2} \int \frac{x^2 + 1 - 1}{1+x^2}\, dx = \frac{3x^2}{2} \operatorname{arctg}\ x - \frac{3}{2}\,(x - \operatorname{arctg}\ x) + c.$$

**c)** Ak je pod integrálom len jedna funkcia f(x), za druhú funkciu v súčine môžeme položiť konštantú funkciu P(x) = 1.

$$\int \ln^2(3x)\ dx = \begin{vmatrix} u = \ln^2(3x)\,, & u' = 2\ln(3x)\,\dfrac{1}{x} \\ v' = 1, & v = x \end{vmatrix} = x \ln^2(3x) - \int \cancel{x}\, 2\ln(3x)\, \frac{1}{\cancel{x}}\, dx$$

$$= x\ln^2(3x) - 2\int \ln(3x)\, dx = \begin{vmatrix} u = \ln(3x)\,, & u' = \dfrac{1}{x} \\ v' = 1, & v = x \end{vmatrix}$$

$$= x\ln^2(3x) - 2\left(x\ln(3x) - \int 1\, dx\right) = x\ln^2(3x) - 2\,x\ln(3x) + 2x + c.$$

**d)**

$$\int \arcsin x\, dx = \begin{vmatrix} u = \arcsin x\,, & u' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ v' = 1, & v = x \end{vmatrix} = x \arcsin x - \frac{1}{-2} \int \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

$$= \begin{vmatrix} t = 1 - x^2 \\ dt = -2x\, dx \end{vmatrix} = x\arcsin x + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c.$$

podintegrálna funkcia je súčin dvoch funkcií typu $f(ax+b).\ \sin\ (cx+d)$, resp. $f(ax+b).\ \cos\ (cx+d)$, kde $f(x)$ je exponenciálna funkcia, resp. $\sin x, \cos x$.

*V tomto prípade dvojnásobná aplikácia per partes vedie k pôvodnému integrálu a ten vyjadríme z rovnice ako neznámu.*

## PRÍKLAD 8.

Vypočítajte nasledujúce integrály: a) $\int e^{-x} \sin x\, dx$, b) $\int \cos 2x \sin 3x\, dx$, c) $\int \cos\,(\ln x)\, dx$.

*Riešenie:*

**a)** V tomto prípade je jedno, či položím za $u(x)$ exponencionálnu, či trigonometrickú funkciu, podstatné je, že ak pri prvej aplikácii per partes derivujem exponencionálnu funkciu, musím tak urobiť i pri druhej aplikácii.

$$\int e^{-x} \sin x\, dx = \begin{vmatrix} u = e^{-x}, & u' = -e^{-x} \\ v' = \sin x, & v = -\cos x \end{vmatrix}$$

$$= -e^{-x} \cos x - \int e^{-x} \cos x\, dx = \begin{vmatrix} u = e^{-x}, & u' = -e^{-x} \\ v' = \cos x, & v = \sin x \end{vmatrix}$$

$$= -e^{-x} \cos x - \left( e^{-x} \sin x + \int e^{-x} \sin x\, dx \right).$$

Z rovnice teraz môžeme vyjadriť náš integrál

$$2\int e^{-x} \sin x\, dx = -e^{-x}(\cos x + \sin x) \quad \Rightarrow \quad \int e^{-x} \sin x\, dx = -\frac{1}{2} e^{-x}(\cos x + \sin x) + c.$$

***b)***

$$\int \cos 2x \sin 3x\, dx = \begin{vmatrix} u = \cos 2x, & u' = -2\sin 2x \\ v' = \sin 3x, & v = -\dfrac{\cos 3x}{3} \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{1}{3}\cos 2x\ \cos 3x - \frac{2}{3}\int \sin 2x \cos 3x\, dx = \begin{vmatrix} u = \sin 2x, & u' = 2\cos 2x \\ v' = \cos 3x, & v = \dfrac{\sin 3x}{3} \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{1}{3}\cos 2x\ \cos 3x - \frac{2}{3}\left( \frac{1}{3}\sin 2x\ \sin 3x - \frac{2}{3}\int \cos 2x \sin 3x\, dx \right).$$

$$\frac{5}{9}\int \cos 2x \sin 3x\, dx = -\frac{1}{3}\cos 2x\ \cos 3x - \frac{2}{9}\sin 2x\ \sin 3x \quad \Rightarrow$$

$$\int \cos 2x \sin 3x \, dx = -\frac{3}{5}\cos 2x \ \cos 3x - \frac{2}{5}\sin 2x \ \sin 3x + \ c.$$

**c)** Rovnaký postup uplatňujeme aj na niektoré zložené funkcie

$$\int \cos\,(\ln x)\,dx = \begin{vmatrix} u = \cos(\ln x)\,, & u' = -\sin(\ln x)\ \frac{1}{x} \\ v' = 1, & v = x \end{vmatrix} = x\cos(\ln x) + \int \sin(\ln x)\ \ dx$$

$$= \begin{vmatrix} u = \sin(\ln x)\,, & u' = \cos(\ln x)\ \frac{1}{x} \\ v' = 1, & v = x \end{vmatrix} = x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)\,dx.$$

$$2\int \cos\,(\ln x)\,dx = x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x) \qquad \Rightarrow$$

$$\int \cos\,(\ln x)\,dx = \frac{1}{2}(x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x)) + c.$$

---

## *Príklady na prepočítanie*

Počítajte metódou per partes

**1.** $\int (3x+2)e^{x-2}\,dx.$

**2.** $\int (4x+1)\sin 2x\ \,dx.$

**3.** $\int x\ln\left(\frac{x}{2}\right)\ dx.$

**4.** $\int \operatorname{arctg}\ x\ \,dx.$

**5.** $\int \arccos\ 2x\,dx.$

**6.** $\int x^2\cos 3x\,dx.$

**7.** $\int \ln^2 2x\ \,dx.$

**8.** $\int e^{2x}\cos\left(\frac{x}{2}\right)dx.$

**9.** $\int 2^x\cos 2x\,dx.$

**10.** $\int \sin(3x)\cos\left(\frac{x}{3}\right)dx.$

Počítajte vhodnou metódou

**11.** $\int \frac{x^2}{2} e^{x^3}\, dx.$

**12.** $\int (2x-1)e^{3x}\, dx.$

**13.** $\int \frac{\ln 3x}{x}\, dx.$

**14.** $\int x^2 \ln 2x\, dx.$

**15.** $\int \frac{\operatorname{arctg} 2x}{1+4x^2}\, dx.$

**16.** $\int x \operatorname{arctg} 2x\, dx.$

**17.** $\int \operatorname{tg}(3x-\pi)\, dx.$

**18.** $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\, dx.$

**19.** $\int 4x^3 \ln(x^3)\, dx.$

**20.** $\int 2x \ln^2 x\, dx.$

**21.** $\int \sin^2(2x)\, dx.$

**22.** $\int \cos^3\left(\frac{x}{2}\right) dx.$

**23.** $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\, dx.$

**24.** $\int \sin x \cos 2x\, dx.$

**25.** $\int 4x \cos(x+\pi)\, dx.$

**26.** $\int x \cos(3x^2)\, dx.$

**27.** $\int \frac{5x}{\sqrt{4-2x^2}}\, dx.$

**28.** $\int \frac{4x}{2+x^2}\, dx.$

**29.** $\int \frac{2x+1}{6+x^2}\, dx.$

**30.** $\int \frac{3x^2}{1+4x^6}\, dx.$

**31.** $\int \frac{3x}{1+x^4}\, dx.$

**32.** $\int \frac{5x^3}{1+x^4}\, dx.$

**33.** $\int \frac{x^2-1}{(1-2x)^2}\, dx.$

**34.** $\int e^{\sqrt{x}}\, dx.$

**35.** $\int \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}\, dx.$

**36.** $\int \sin(\ln x)\, dx.$

## VÝSLEDKY

1. $(3x-1)e^{x-2}+c$, 2. $-\frac{4x+1}{2}\cos 2x+\sin 2x+c$, 3. $\frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{x^2}{4}+c$,

4. $x \operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+c$, 5. $x \arccos 2x-\frac{1}{2}\sqrt{1-4x^2}+c$, 6. $\frac{9x^2-2}{27}\sin 3x+\frac{2}{9}x\cos 3x+c$,

7. $x\ln^2(2x)-2x\ln(2x)+2x+c$, 8. $\frac{e^{2x}}{17}\left(2\sin\left(\frac{x}{2}\right)+8\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)+c$,

9. $\frac{2^x}{4+\ln^2 2}(2\sin 2x+\ln 2\cos 2x)+c$, 10. $-\frac{3}{80}\left(\sin(3x)\sin\left(\frac{x}{3}\right)+9\cos(3x)\cos\left(\frac{x}{3}\right)\right)+c$,

11. $\frac{1}{6}e^{x^3}+c$ (SM), 12. $\frac{2x-1}{3}e^{3x}-\frac{2}{9}e^{3x}+c$ (PP), 13. $\frac{\ln^2(3x)}{2}+c$ (SM), 14. $\frac{x^3}{9}(3\ln 2x-1)+c$ (PP),

15. $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}^2 2x+c$ (SM), 16. $\frac{1+4x^2}{8}\operatorname{arctg} 2x-\frac{1}{4}x+c$ (PP), 17. $-\frac{1}{3}\ln|\cos(3x-\pi)|+c$ (SM),

18. $2\sqrt{x}(\ln x-2)+c$ (PP), 19. $3x^4\left(\ln x-\frac{1}{4}\right)+c$ (PP), 20. $x^2\left(\ln^2 x-\ln x+\frac{1}{2}\right)+c$ (PP),

21. $\frac{1}{8}(4x-\sin(4x))+c$ (VZ), 22. $\frac{2}{3}\left(3\sin\left(\frac{x}{2}\right)-\sin^3\left(\frac{x}{2}\right)\right)+c$ (SM), 23. $\frac{1}{3\cos^3 x}-\frac{1}{\cos x}+c$ (SM),

24. $\frac{1}{3}(\cos x\cos 2x+2\sin x\sin 2x)+c$ (PP), 25. $4(x\sin(x+\pi)+\cos(x+\pi))+c$ (PP),

26. $\frac{1}{6}\sin(3x^2)+c$ (SM), 27. $-\frac{5}{2}\sqrt{4-2x^2}+c$ (SM), 28. $2\ln(2+x^2)+c$ (DER),

29. $\ln(6+x^2)+\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{6}}+c$ (DER), 30. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(2x^3)+c$ (SM), 31. $\frac{3}{2}\operatorname{arctg}(x^2)+c$ (SM),

32. $\frac{5}{4}\ln(1+x^4)+c$ (DER), 33. $\frac{1}{8}\left(2\ln|1-2x|-\frac{3}{1-2x}+2x-1\right)+c$ (SM), 34. $2e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}-1\right)+c$ (SM),

35. $2\operatorname{arctg}\sqrt{e^x-1}+c$ (SM), 36. $\frac{x}{2}(\sin(\ln x)-\cos(\ln x))+c$ (PP).

SM použite substitučnú metódu;

PP použite metódu per partés;

VZ použite trigonometrický vzorec;

DER použite úpravu na zlomok $\frac{f'(x)}{f(x)}$;

## 1.3. Integrovanie racionálnych funkcií $\dfrac{P_n(x)}{Q_{m(x)}}$

*Čo si treba pamätať z prednášky*

- Typy elementárnych zlomkov[1]:

1. $\dfrac{1}{ax+b}$, $\qquad \displaystyle\int \frac{1}{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + c,$

2. $\dfrac{1}{(ax+b)^n}$, $n>1$, $\qquad \displaystyle\int \frac{1}{(ax+b)^n}\,dx = \frac{1}{a(1-n)}\frac{1}{(ax+b)^{n-1}} + c,$

3. $\dfrac{1}{x^2+px+q}$,

4. $\dfrac{cx+d}{x^2+px+q}$, kde $p^2-4q<0$.

**PRÍKLAD 9.**

Vypočítajte integrály z elementárnych zlomkov: a) $\int \frac{1}{3-4x}dx$, b) $\int \frac{1}{(2x-4)^3}\,dx$ c) $\int \frac{1}{x^2+x+5}\,dx$, d) $\int \frac{3x+4}{x^2+x+5}\,dx$.

*Riešenie:*

**a)** Použijeme lineárnu substitúciu, alebo rozšírime na typ $\frac{f'(x)}{f(x)}$.

$$\int \frac{1}{3-4x}dx = -\frac{1}{4}\ln|3-4x| + c.$$

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + c$$

**b)** Použijeme lineárnu substitúciu.

$$\int \frac{1}{(2x-4)^3}dx = |t = 2x-4| = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{-2}\right)\frac{1}{(2x-4)^2} + c.$$

[1] Existuje aj piaty typ elem. zlomku $\left(\frac{cx+d}{x^2+px+q}\right)^n$, pozri napr. [2].

**c)** Najprv skontrolujeme, či sa skutočne jedná o elementárny zlomok, t.j. **polynóm v menovateli nemá korene**, $D = 1 - 4 \cdot 5 < 0$. Potom menovateľ upravíme na súčet štvorcov a lineárnou substitúciou prevedieme na integrál typu $\int \frac{1}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x$.

$$\int \frac{1}{x^2+x+5}\,dx = \int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{19}{4}}\,dx = \left|t = x+\frac{1}{2}\right| = \frac{2}{\sqrt{19}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{19}}{2}}\right)+c$$

$$= \frac{2}{\sqrt{19}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{19}}\right)+c. \qquad x^2+x+5 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+5-\frac{1}{4}$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right)+c$$

Tento postup možno zovšeobecniť:

$$x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\left(\frac{p}{2}\right)^2\right),$$

$$\int \frac{1}{x^2+px+q}\,dx = \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}\right)+c.$$

**d)** Zlomok prepíšeme na súčet dvoch zlomkov. Prvý typu $\frac{f'(x)}{f(x)}$ a druhý $\frac{1}{x^2+px+q}$, kde použijeme výsledok z príkladu 8 c).

$$3x+4 = \frac{3}{2}(2x+1)+4-\frac{3}{2}$$

$$\int \frac{3x+4}{x^2+x+5}\,dx = \int \frac{3}{2}\frac{(2x+1)}{x^2+x+5}+\frac{5}{2}\frac{1}{x^2+x+5}\,dx$$

$$= \frac{3}{2}\ln|\,x^2+x+5| + \frac{5}{\sqrt{19}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{19}}\right)+c.$$

Alebo najskôr použijeme úpravu na súčet štvorcov a následne lineárnu substitúciu, ktorá prevedie pôvodný zlomok na zlomok typu $\frac{ct+d}{t^2+a^2}$. Následný rozklad tohto typu zlomku na dva spomínané zlomky je jednoduchší.

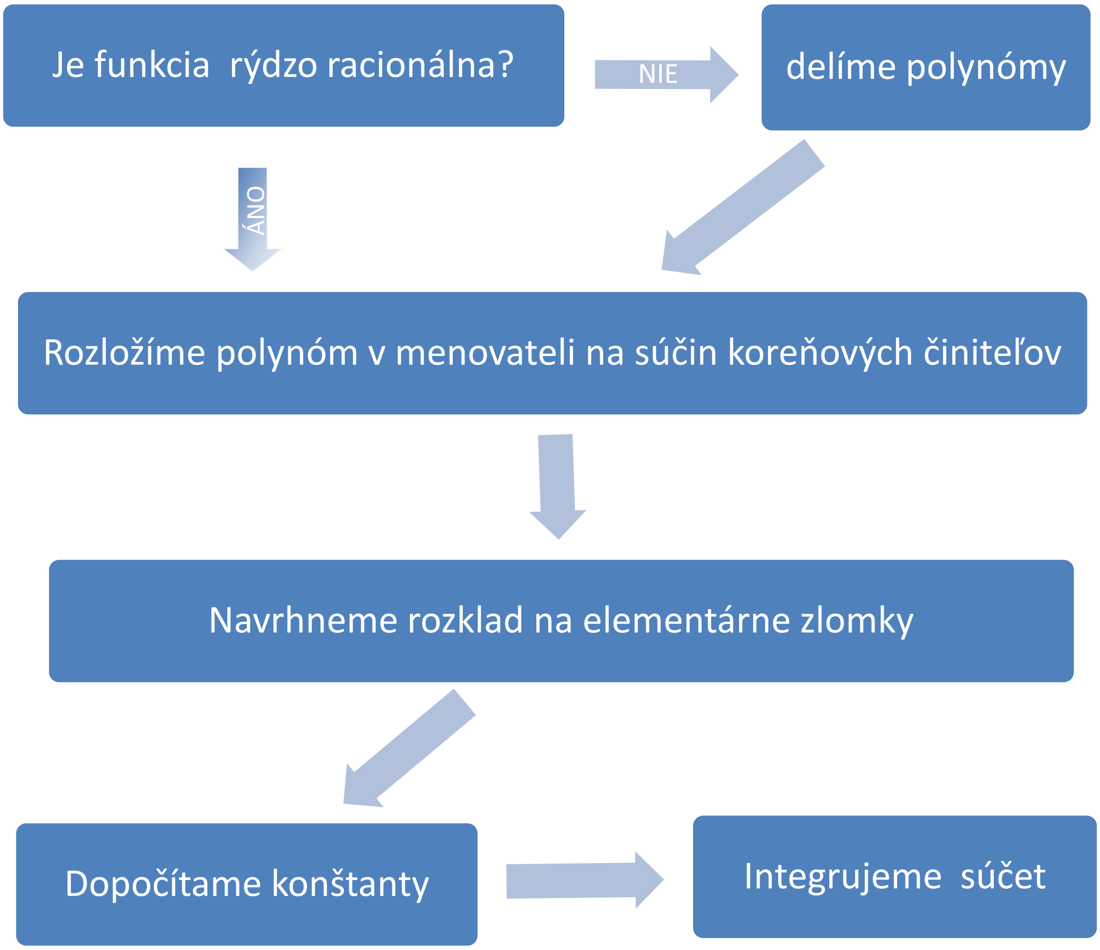
$$\int \frac{3x+4}{x^2+x+5}\,dx = \int \frac{3x+4}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{19}{4}}\,dx = \left|\begin{array}{l} t = x+\frac{1}{2} \\ x = t-\frac{1}{2}\end{array}\right| = \int \frac{3t+\frac{5}{2}}{t^2+\frac{19}{4}}\,dt$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{2t}{t^2+\frac{19}{4}}\,dt + \frac{5}{2}\int \frac{1}{t^2+\frac{19}{4}}\,dt = \frac{3}{2}\ln\left|t^2+\frac{19}{4}\right| + \frac{5}{2}\frac{2}{\sqrt{19}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2t}{\sqrt{19}}\right)+c$$

$$= \frac{3}{2}\ln|\,x^2+x+5| + \frac{5}{\sqrt{19}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{19}}\right)+c.$$

## *Postup pri integrovaní racionálnej funkcie:*

*Pripomeňme, že funkcia* $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ *je rýdzo racionálna, ak* $n < m$.





AKO MÁM ROZLOŽIŤ POLYNÓM NA SÚČIN KOREŇOVÝCH ČINITEĽOV A AKO NAVRHNÚŤ ROZKLAD NA ELEMENTÁRNE ZLOMKY?

*Najskôr nájdeme korene polynómu. Napríklad nech* $Q(x) = a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$ *má korene* $x_1,\ x_2$ *a* $x_3$. *Nech* $x_2$ *je 2 – násobným koreňom. Potom*

$$Q(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2)^2(x - x_3).$$

*Každý polynóm možno takýmto spôsobom rozložiť, ale súčin môže obsahovať aj nerozložiteľné kvadratické polynómy (čiže také, čo nemajú koreň), resp. ich mocniny. My sa obmedzíme na polynómy s maximálne jedným takýmto nerozložiteľným polynómom, t. j.*

$$\boldsymbol{Q(x)} = \boldsymbol{a_0(x-x_1)(x-x_2)^k(x-x_3)^l \dots (x^2+px+q)}, \quad \boldsymbol{p^2-4q} < 0.$$

*Potom rýdzo racionálnu funkciu* $\frac{P(x)}{Q(x)}$ *možno rozložiť na súčet elementárnych zlomkov*

$$\boldsymbol{\frac{P(x)}{Q(x)}} = \boldsymbol{\frac{1}{a_0}\left(\frac{A}{x-x_1} + \frac{B_1}{x-x_2} + \frac{B_2}{(x-x_2)^2} + \dots + \frac{B_k}{(x-x_2)^k} + \dots + \frac{Cx+D}{x^2+px+q}\right)}, \qquad (*)$$

*kde* $A, B_1, \dots, C, D$ *sú konštanty.*

---

## ***Príklad 10.***

Vypočítajte integrály : a) $\int \frac{8x-31}{x^2-9x+14}dx$, b) $\int \frac{1}{1-x^2}dx$, c) $\int \frac{2x^2+x+1}{x^3+2x^2+x}\,dx$, d) $\int \frac{x+1}{(x^2+1)(x-1)^2}\,dx$.

*Riešenie:*

**a)** Podintegrálna funkcia je rýdzo racionálna, teda prejdeme rovno na rozklad menovateľa. Nájdeme korene polynómu. *(Ak by polynóm nemal korene, potom by funkcia bola elementárnym zlomkom 4. typu, pozri príklad 9 d).)*

$x_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{25}}{2} = \begin{cases} 7 \\ 2 \end{cases}$, potom $x^2 - 9x + 14 = (x-2)(x-7)$.

Funkciu možno prepísať na súčet dvoch zlomkov podľa $(*)$:

$$\frac{8x-31}{x^2-9x+14} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-7} = \frac{A(x-7)+B(x-2)}{(x-2)(x-7)}.$$

$P_2(x) = ax^2 + bx + c$
$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$,
$P_2(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$,
$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm cb}{bd}$

*Z rovnosti zlomkov dostaneme rovnicu*

$8x - 31 = A(x-7) + B(x-2)$, pre ľubovoľné $x$ a zatiaľ dve neznáme konštanty $A, B$.

Dosaďme do rovnice dve ľubovoľné hodnoty pre $x$ *(dosadzovacia metóda)*, aby sme dostali dve rovnice o dvoch neznámych. (Najjednoduchšie rovnice dostaneme, ak dosadíme korene polynómu.)

- $x \coloneqq 7 \;\Rightarrow\; 8 \cdot 7 - 31 = B(7-2) \;\Rightarrow\; B = 5;$
- $x \coloneqq 2 \;\Rightarrow\; 8 \cdot 2 - 31 = A(2-7) \;\Rightarrow\; A = 3;$

Vypočítané konštanty dosadíme a môžeme integrovať.

$$\int \frac{8x-31}{x^2-9x+14}dx = \int \left(\frac{3}{x-2}+\frac{5}{x-7}\right) dx = 3\ln|x-2| + 5\ln|x-7| + c.$$

---

**b)** Začneme rozkladom menovateľa:

$1-\mathrm{x}^2 = (1-\mathrm{x})(1+\mathrm{x})$, (korene sú 1 a -1). Podľa $(*)$

$$\frac{1}{1-\mathrm{x}^2} = \frac{\mathrm{A}}{1+\mathrm{x}} + \frac{\mathrm{B}}{1-\mathrm{x}} = \frac{\mathrm{A}(1-\mathrm{x})+\mathrm{B}(1+\mathrm{x})}{(1+\mathrm{x})(1-\mathrm{x})} \quad \Rightarrow \quad 1 = \mathrm{A}(1-\mathrm{x}) + \mathrm{B}(1+\mathrm{x}).$$

Dosadíme korene:

$$\log a - \log b = \log\left(\frac{a}{b}\right)$$

- $x := 1 \quad \Rightarrow \quad 1 = B(1+1) \quad \Rightarrow \quad B = \frac{1}{2};$
- $x := -1 \quad \Rightarrow \quad 1 = A(1-(-1)) \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{2};$

$$\int \frac{1}{1-x^2}dx = \int \left(\frac{1}{2}\frac{1}{1+x} + \frac{1}{2}\frac{1}{1-x}\right) dx = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{1+x} - \frac{-1}{1-x}\right) dx$$
$$= \frac{1}{2}(\ln|1+x| - \ln|1-x|) + c = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\mathrm{x}}{1-\mathrm{x}}\right| + \mathrm{c}.$$

Priraďme vypočítaný integrál k vzorcom.

$$\int \frac{1}{1-x^2}dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + \mathrm{c}.$$

---

**c)** Keďže sa jedná o rýdzo racionálnu funkciu, začneme rozkladom menovateľa:

$x^3+2x^2+x = x(x^2+2x+1) = x(x+1)^2 \quad \Rightarrow$ korene sú 0 a -1 (dvojnásobný koreň).

Podľa $(*)$

$$\frac{2x^2+x+1}{x^3+2x^2+x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} = \frac{A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx}{x(x+1)^2} \quad \Rightarrow$$

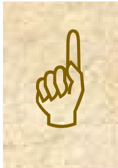
$2x^2+x+1 = A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx$ :

Máme tri neznáme konštanty, musíme dosadiť tri hodnoty za x:

- $x := 0 \quad \Rightarrow \quad 1 = A;$
- $x := -1 \quad \Rightarrow \quad 2 = C(-1) \quad \Rightarrow \quad C = -2;$
- $x := 1 \quad \Rightarrow \quad 4 = A\cdot 4 + B\cdot 2 + C \quad \Rightarrow \quad B = 1;$

$$\int \frac{x^2+1}{x^3+2x^2+x}dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{-2}{(x+1)^2}\right) dx = \ln|x| + \ln|x+1| + \frac{2}{x+1} + c.$$

---



*V niektorých prípadoch, hlavne ak polynóm v menovateli má menej koreňov ako je jeho stupeň, čiže obsahuje nerozložiteľný kvadratický polynóm, alebo má násobné korene, je vhodnejšie použiť na hľadanie neznámych konštánt* $A, B, C, \ldots$ *miesto dosadzovacej metódy metódu porovnávaciu.*

*Tá využíva fakt, že dva polynómy sa rovnajú, ak majú rovnaké koeficienty pri mocninových členoch.*

---

**d)** Podintegrálna funkcia $\frac{x+1}{(x^2+1)(x-1)^2}$ je rýdzo racionálna so súčinom koreňových činiteľov v menovateli, prejdeme teda rovno na rozklad na elementárne zlomky. Podľa $(*)$

$$\frac{x+1}{(x^2+1)(x-1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{(Ax+B)(x-1)^2 + C(x-1)(x^2+1) + D(x^2+1)}{(x^2+1)(x-1)^2} =$$

Čitateľ zlomku s neznámymi keoficientami roznásobíme a porovnáme čitatele oboch zlomkov.

$$x + 1 = A(x^3 - 2x^2 + x) + B(x^2 - 2x + 1) + C(x^3 - x^2 + x - 1) + D(x^2 + 1)$$

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = \tilde{a}x^3 + \tilde{b}x^2 + \tilde{c}x + \tilde{d} \quad \Leftrightarrow \quad a = \tilde{a}, \quad b = \tilde{b}, \quad c = \tilde{c}, \quad d = \tilde{d}$$

Porovnáme koeficienty pri mocninových členoch:

- $x^3$: $0 = A + C \quad \Rightarrow \quad C = -A$;
- $x^2$: $0 = -2A + B - C + D, \qquad \Rightarrow \quad C + D = \frac{1}{2}$;
- $x$: $1 = A - 2B + C, \qquad \Rightarrow \quad 1 = -2B \quad \Rightarrow \quad B = -\frac{1}{2}$;
- $x^0$: $1 = B - C + D, \qquad \Rightarrow \quad -C + D = \frac{3}{2}$;

$$D = 1, C = -\frac{1}{2} \Longrightarrow \quad A = \frac{1}{2};$$

$$\int \frac{x+1}{(x^2+1)(x-1)^2}\,dx = \int \left(\frac{1}{2}\frac{x-1}{x^2+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1}\right)dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}\,dx + \int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\ln(x^2+1) - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + c.$$

## *Ako vydeliť polynóm polynómom?*

Ilustrujme postup na konkrétnych príkladoch.

$$\frac{2x^3-4x+1}{x^2+1}=(2x^3-4x+1)\ :\ (x^2+1)=?$$

Čím musíme vynásobiť $x^2$, aby sme dostali výraz $2x^3$ ? Výrazom $2x$. Vynásobíme a násobok odpočítame.

$$(2x^3-4x+1)\ :\ (x^2+1)=\ 2x$$
$$\underline{-(2x^3+2x)\ }$$
$$-6x+1$$

Polynóm $-6x+1$ je zvyšok po delení, preto

$$\frac{2x^3-4x+1}{x^2+1}=2x+\frac{-6x+1}{x^2+1}.$$

---

$$\frac{x^3-1}{x-1}=?$$

$$(x^3-1)\ :(x-1)=x^2+x+1$$
$$\underline{-(x^3-x^2)}$$
$$x^2-1$$
$$\underline{-(x^2-x)}$$
$$x-1$$
$$\underline{-(x-1)}$$
$$0$$

*Polynóm*

$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ \dots+\ a_{n-1}x+\ a_n$

*$n$ je **stupeň** polynómu, $a_i$ sú konštanty.*

*$x_1$ voláme **koreňom** polynómu, ak $P_n(x_1)=0$.*

*Rozklad na koreňové činitele*

$$P_n(x)=(x-x_1)\,P_{n-1}(x)$$

Zvyšok nám vyšiel 0, čiže polynóm $x^3-1$ *je* deliteľný polynómom $x-1$ bezo zvyšku. ($x=1$ je koreňom )

$$\frac{x^3-1}{x-1}=x^2+x+1\quad\Rightarrow\quad x^3-1=(x^2+x+1)(x-1)\,.$$

---

## **Príklad 11.**

Vypočítajte integrály : a) $\int\frac{6x}{x^3+1}dx$, b) $\int\frac{4x^3-15x+14}{2x^2+5x-3}dx$, c) $\int\frac{x^4+x^3-3x+5}{x^3+2x^2+2x+1}\,dx$.

*Riešenie:*

**a)** Začneme rozkladom menovateľa. Keďže $x = -1$ je koreňom, polynóm je deliteľný bezo zvyšku polynómom $x + 1$. Použijúc delenie polynómov dostaneme rozklad

$x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$. (Kvadratický polynóm už ďalšie korene nemá.)

Podľa $(*)$

$$\frac{6x}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1} = \frac{A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)} \Rightarrow$$

$6x = A(x^2 - x + 1) + (Bx + C)(x + 1)$:

- $x := -1 \Rightarrow -6 = 3A \Rightarrow A = -2;$
- $x := 0 \Rightarrow 0 = A + C \Rightarrow C = 2;$ $\qquad x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 1 - \frac{1}{4}$
- $x := 1 \Rightarrow 6 = A + 2\,(B + C) \Rightarrow B = 2;$

$$\int \frac{6x}{x^3+1}dx = \int \left(\frac{-2}{x+1} + \frac{2x+2-1+1}{x^2-x+1}\right) dx = \int \left(\frac{-2}{x+1} + \frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{3}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right) dx$$

$$= -2\ln|x+1| + \ln|x^2-x+1| + 2\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + c.$$

---

**b)** Keďže funkcia nie je rýdza, rozložíme ju najskôr na polynóm a rýdzo racionálnu funkciu použijúc delenie polynómov.

$\frac{4x^3-15x+14}{2x^2+5x-3} = 2x - 5 + \frac{16x-1}{2x^2+5x-3}$.

Korene polynómu v menovateli sú $\frac{1}{2}$ a $-3$. Teda

$$2x^2 + 5x - 3 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 3) = (2x - 1)(x + 3).$$

> $P_2(x) = ax^2 + bx + c$
> $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$,
> $P_2(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

Podľa $(*)$

$$\frac{16x-1}{2x^2+5x-3} = \frac{A}{2x-1} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3)+B(2x-1)}{(2x-1)(x+3)} \Rightarrow$$

$16x - 1 = A(x + 3) + B(2x - 1)$:

- $x := \frac{1}{2} \Rightarrow 7 = \frac{7}{2}A \Rightarrow A = 2;$
- $x := -3 \Rightarrow -49 = -7B \Rightarrow B = 7;$

$$\int \frac{4x^3-15x+14}{2x^2+5x-3}dx = \int \left(2x - 5 + \frac{2}{2x-1} + \frac{7}{x+3}\right) dx$$

$$= x^2 - 5x + \ln|2x-1| + 7\ln|x+3| + c.$$

---

**c)** Začneme rozkladom na polynóm a rýdzo racionálnu funkciu, t. j. delíme polynómy:

$$\frac{x^4+x^3-3x+5}{x^3+2x^2+2x+1} = x-1+\frac{-2x+6}{x^3+2x^2+2x+1}.$$

Keďže $x=-1$ je koreňom polynómu v menovateli (overíme dosadením do polynómu), menovateľ je deliteľný bezo zvyšku polynómom $x+1$. Použijúc znova delenie polynómov dostaneme rozklad:

$x^3+2x^2+2x+1=(x+1)(x^2+x+1)$. (Kvadratický polynóm už ďalšie korene nemá.)

Podľa $(*)$

$$\frac{-2x+6}{x^3+2x^2+2x+1} = \frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1} = \frac{A(x^2+x+1)+(Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2+x+1)} \Rightarrow$$

$-2x+6 = A(x^2+x+1)+(Bx+C)(x+1)$:

- $x:=-1 \Rightarrow 8=A$;
- $x:=0 \Rightarrow 6=A+C \Rightarrow C=-2$;
- $x:=1 \Rightarrow 4=3A+2\,(B+C) \Rightarrow B=-8.$

$8x+2=4(2x+1)-2$

$$\int \frac{x^4+x^3-3x+5}{x^3+2x^2+2x+1}dx = \int\left(x-1+\frac{8}{x+1}-\frac{8x+2}{x^2+x+1}\right)dx$$

$x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1-\frac{1}{4}$

$$= \int\left(x-1+\frac{8}{x+1}-4\frac{2x+1}{x^2+x+1}+\frac{2}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right)dx$$

$$= \frac{x^2}{2}-x+8\ln|x+1|-4\ \ln|x^2+x+1|+\frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+c.$$

## *Príklady na prepočítanie*

**1.** $\displaystyle\int \frac{1}{2x-4}\,dx.$

**2.** $\displaystyle\int \frac{6}{9-7x}\,dx.$

**3.** $\displaystyle\int \frac{2}{(4x-3)^5}\,dx.$

**4.** $\displaystyle\int \frac{7}{(3-2x)^3}\,dx.$

**5.** $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+6x+16}\,dx.$

**6.** $\displaystyle\int \frac{2}{2x^2-12x+27}\,dx.$

**7.** $\displaystyle\int \frac{3x+4}{x^2+x+7}\,dx.$

**8.** $\displaystyle\int \frac{4x+3}{x^2-3x+5}\,dx.$

**9.** $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+3x}\,dx.$

**10.** $\displaystyle\int \frac{3}{x^2-4}\,dx.$

**11.** $\displaystyle\int \frac{4}{x^3+4x}\,dx.$

**12.** $\displaystyle\int \frac{10-2x}{3x^2+5x-2}\,dx.$

**13.** $\displaystyle\int \frac{1}{5x^2-4}\,dx.$

**14.** $\displaystyle\int \frac{12}{x^3+8}\,dx.$

**15.** $\displaystyle\int \frac{2x^2+11x+8}{x^3+4x^2+4x}\,dx.$

**16.** $\displaystyle\int \frac{4x^2-4x^4-4x+2}{x^2-2x^3}\,dx.$

**17.** $\displaystyle\int \frac{-2x^3+x^2+13x-9}{2x^2+3x-2}\,dx.$

**18.** $\displaystyle\int \frac{-6x+4}{(x-2)^2(x+2)}\,dx.$

**19.** $\displaystyle\int \frac{3x^2-4x-11}{x^3-x+2x^2-2}\,dx.$

**20.** $\displaystyle\int \frac{6x^2+2x}{-2x^2+x+6}\,dx.$

### VÝSLEDKY

1. $\frac{1}{2}\ln|2x-4|+c$, 2. $-\frac{6}{7}\ln|9-7x|+c$, 3. $-\frac{1}{8(4x-3)^4}+c$, 4. $\frac{7}{4(3-2x)^2}+c$, 5. $\frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{x+3}{\sqrt{7}}+c$,

6. $\frac{\sqrt{2}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}(x-3)}{3}\right)+c$, 7. $\frac{3}{2}\ln|x^2+x+7|+\frac{5}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{3\sqrt{3}}\right)+c$, 8. $2\ln|x^2-3x+5|+$ $+\frac{18}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x-3}{\sqrt{11}}\right)+c$, 9. $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x}{x+3}\right|+c$, 10. $\frac{3}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+c$, 11. $\ln|x|-\frac{1}{2}\ln|x^2+4|+c$, 12. $\frac{4}{3}\ln|3x-1|--2\ln|x+2|+c$, 13. $\frac{1}{4\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}\,x-2}{\sqrt{5}\,x+2}\right|+c$, 14. $\ln|x+2|-\frac{1}{2}\ln|x^2-2x+4|+$ $\sqrt{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right)+c$, 15. $2\ln|x|-\frac{3}{x+2}+c$, 16. $x^2+x-\frac{2}{x}-\frac{3}{2}\ln|1-2x|+c$, 17. $2x-\frac{x^2}{2}+$ $3\ln|x+2|-\frac{1}{2}\ln|2x-1|+c$, 18. $\ln\left|\frac{x+2}{x-2}\right|+\frac{2}{x-2}+c$, 19. $2\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|+3\ln|x+2|+c$, 20. $-3x+$ $\frac{3}{2}\ln|2x+3|-4\ln|2-x|+c.$

# 2. Určitý integrál

## 2.1. Základné pojmy a pravidlá

*Čo si treba pamätať z prednášky:*

Nech $F(x)$ je *primitívnou funkciou* k spojitej funkcii $f(x)$ na intervale $[a, b]$.

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$ Newton -Leibnitzov vzorec

Pravidlá pre rátanie určitého integrálu:

$$\int_a^b \big(cf(x) \pm dg(x)\big)\, dx = c\int_a^b f(x)\, dx \pm d\int_a^b g(x)\, dx, \qquad c, d \in \mathbb{R}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \qquad a < c < b$$

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

**PRÍKLAD 12.**

Vypočítajte integrály :

a) $\int_1^2 \left(2x^2 + \frac{4}{2-3x} - e^{-x}\right) dx$, b) $\int_0^{\pi} |\cos\ x|\ dx$, c) $\int_2^3 \frac{dx}{x^2-4x+5}$.

*Riešenie:*

**a)**

$$\int_1^2 \left(2x^2 + \frac{1}{-3}\frac{4\cdot(-3)}{2-3x} - e^{-x}\right) dx = 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 - \frac{4}{3}[\ln|2-3x|]_1^2 + [e^{-x}]_1^2$$

$$= \frac{2}{3}(2^3 - 1^3) - \frac{4}{3}(\ln 4 - \ln 1) + (e^{-2} - e^{-1}) = \frac{14}{3} - \frac{4}{3}\ln 4 + \frac{1}{e^2} - \frac{1}{e}.$$

**b)** Absolútnu hodnotu musíme rozpísať a interval integrovania rozdeliť.

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{ak } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{inak} \end{cases}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

$$|\cos\ x| = \begin{cases} \cos\ x, & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ -\cos\ x & x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases}$$

$$\int_0^{\pi} |\cos\ x|\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\ dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-\cos x)\, dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - [\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = (1-0) - (0-1) = 2.$$

**c)**

$$\int_2^3 \frac{dx}{x^2 - 4x + 5} = \int_2^3 \frac{dx}{(x-2)^2 + 1} = [\text{arctg}\,(x-2)]_2^3 = \frac{\pi}{4}.$$

Substitučná metóda:

$$\int_a^b f(\varphi(x))\, \varphi'(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\, dt = [F(t)]_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} = F\big(\varphi(b)\big) - F(\varphi(a))$$

$$\begin{array}{lll} t = \varphi(x) & x = a \implies t = \varphi(a) \\ dt = \varphi'(x)dx & x = b \implies t = \varphi(b) \end{array}$$

Metóda per partes:

$$\int_a^b u(x)v'(x)\, dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\, dx$$

## ***PRÍKLAD 13.***

Vypočítajte integrály : a) $\int_0^1 x\sqrt{1-x}\, dx$, b) $\int_1^e \frac{1+\ln x}{x}\, dx$, c) $\int_0^3 \ln(x+3)\, dx$, d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \sin x\ dx$, e) $\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\, dx$ .

*Riešenie* :

**a)** Pri použití substitúcie nezabúdajme substituovať aj hranice integrálu!

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x}\,dx = \left|\begin{array}{c} t=\sqrt{1-x} \\ x = 1-t^2 \\ dx = -2t\,dt \\ x=0 \quad \Rightarrow \quad t=1 \\ x=1 \quad \Rightarrow \quad t=0 \end{array}\right| = \int_1^0 (1-t^2)\,t\,(-2)t\,dt = 2\int_0^1 (t^2-t^4)\,dt = 2\left[\frac{t^3}{3}-\frac{t^5}{5}\right]_0^1$$

$$= \frac{4}{15}.$$

**b)**

$$\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1+\ln x}{x}\,dx = \left|\begin{array}{c} t=\ln x \\ dt = \frac{1}{x}\,dx \\ x=1 \quad \Rightarrow \quad t=0 \\ x=\mathrm{e} \quad \Rightarrow \quad t=1 \end{array}\right| = \int_0^1 (1+t)\,dt = \left[t+\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{3}{2}.$$

**c)**

$$\int_0^3 \ln(x+3)\,dx = \left|\begin{array}{cc} u=\ln(x+3), & u'=\frac{1}{x+3} \\ v'=1, & v=x \end{array}\right| = [x\ \ln(x+3)]_0^3 - \int_0^3 \frac{x+3-3}{x+3}\,dx =$$

$$= 3\ln 6 - [x - 3\ln|x+3|]_0^3 = 3\ln 6 - (3 - \underbrace{3\ln 6 + 3\ln 3}_{-3\ln 2}) = 3\ln 12 - 3.$$

$\log a + \log b = \log(ab)$

$\log a - \log b = \log(\frac{a}{b})$

**d)**

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{2x}\sin x\ dx = \left|\begin{array}{cc} u=e^{2x}, & u'=2e^{2x} \\ v'=\sin x, & v=-\cos x \end{array}\right| = [-\mathrm{e}^{2x}\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{2x}\cos x\ dx$$

$$= \left|\begin{array}{cc} u=e^{2x}, & u'=2e^{2x} \\ v'=\cos x, & v=\sin x \end{array}\right| = (0-(-1)) + 2\left([\mathrm{e}^{2x}\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{2x}\sin x\ dx\right)$$

$$= 1 + 2e^{\pi} - 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{2x}\sin x\ dx.$$

$$5\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{2x}\sin x\ dx = 1+2e^{\pi} \qquad \Rightarrow \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{2x}\sin x\ dx = \frac{1+2e^{\pi}}{5}.$$

**e)** V tomto prípade musíme použiť kombináciu substitúcie a per partes.

$$\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\,dx = \left|\begin{array}{c} t=\sqrt{x} \\ x=t^2 \\ dx = 2t\,dt \\ x=0 \quad\Rightarrow\quad t=0 \\ x=1 \quad\Rightarrow\quad t=1 \end{array}\right| = \int_0^1 e^t\, 2t\,dt = \left|\begin{array}{ll} u=t, & u'=1 \\ v'=e^t, & v=e^t \end{array}\right| = 2\left([te^t]_0^1 - \int_0^1 e^t\,dt\right)$$

$$= 2(e - [e^t]_0^1) = 2\big(e-(e-1)\big) = 2.$$

## Príklady na prepočítanie

**1.** $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi} |\sin 2x|\,dx.$

**2.** $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos\left(\frac{x}{2}\right)}\,dx.$

**3.** $\displaystyle\int_0^{\pi/8} \operatorname{tg}^2 2x\;dx.$

**4.** $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2} \operatorname{cotg}^3 x\;dx.$

**5.** $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx.$

**6.** $\displaystyle\int_{-2}^2 \arccos\frac{x}{2}\,dx.$

**7.** $\displaystyle\int_0^4 \frac{2\sqrt{x}}{4+x}\,dx.$

**8.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{6^{x-1}}{2^{2x+1}}\,dx.$

**9.** $\displaystyle\int_1^4 \frac{2^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\,dx.$

**10.** $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 3x\,dx.$

**11.** $\displaystyle\int_1^{e^{\frac{\pi}{2}}} \frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx.$

**12.** $\displaystyle\int_{1/2}^{e/2} x\ln(2x)\;dx.$

**13.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x}{x^2+3x+2}\,dx.$

**14.** $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \sin^3 2x\,dx.$

**15.** $\displaystyle\int_0^{2\sqrt{2}} \frac{x^3}{x^2+1}\,dx.$

**16.** $\displaystyle\int_0^{\pi/2} e^x \sin 2x\,dx.$

**17.** $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} x\operatorname{arctg} x\;dx.$

**18.** $\displaystyle\int_0^{\ln 4} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+2}\,dx.$

VÝSLEDKY

1. $\frac{3}{2}$, 2. $4-4\ln 2$, 3. $\frac{1}{2}-\frac{\pi}{8}$, 4. $\frac{1}{6}+\ln(\sqrt{3}/2)$, 5. $e-\sqrt{e}$, 6. $2\pi$, 7. $8-2\pi$, 8. $\frac{1}{24\ln(3/2)}$, 9. $\frac{2}{\ln 2}$, 10. $\pi$, 11. $1$, 12. $\frac{1}{16}(e^2+1)$, 13. $2\ln\left(\frac{9}{8}\right)$, 14. $\frac{1}{3}$, 15. $4-\ln 3$, 16. $\frac{2}{5}\left(e^{\frac{\pi}{2}}+1\right)$, 17. $\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}$, 18. $\frac{\sqrt{3}}{2}(4-\pi)$.

## *2.2. Aplikácie určitého integrálu*

*Čo si treba pamätať z prednášky:*

Nech rovinná oblasť je popísaná nerovnosťami, kde $f, g$ sú spojité funkcie:

$$a \leq x \leq b$$

$$g(x) \leq y \leq f(x)$$

Obsah rovinnej oblasti:

$$S = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx.$$

Objem rotačného telesa, ktorá vznikne rotáciou rovinnej oblasti okolo osi *x*:
(kde $0 \leq g(x)$)

$$V = \pi \int_a^b (f(x)^2 - g(x)^2)\, dx.$$

### ***Príklad 13.***

Vypočítajte obsah rovinnej plochy ohraničenej krivkami :

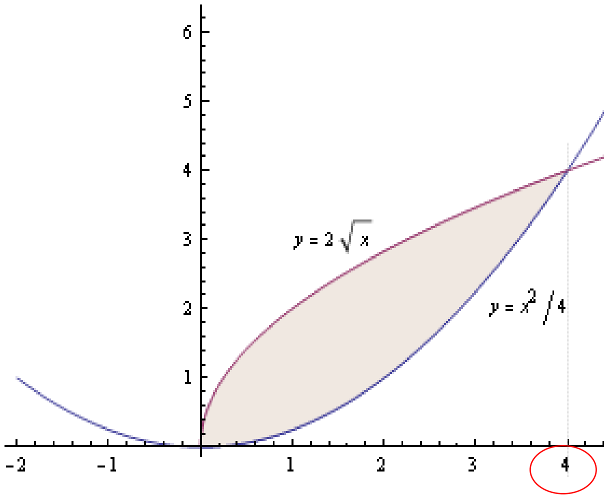
a) $y = \frac{x^2}{4}, y = 2\sqrt{x}$ .

b) $y^2 = 9 - x, y^2 = x + 9.$

c) $xy = 1, x = 2, y = x, y = 0.$

*Riešenie*

**a)** $y = \frac{x^2}{4}, y = 2\sqrt{x}$ Vždy začíname obrázkom plochy:




Obrázok 1

Na to, aby sme zistili hranice pre premennú *x*, musíme vypočítať prienik kriviek:

$$\frac{x^2}{4} = 2\sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad x^4 = 8^2 x \quad \Rightarrow$$

$$x^4 - 64\,x = 0 \quad \Rightarrow \quad x(x^3 - 64) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 4$$

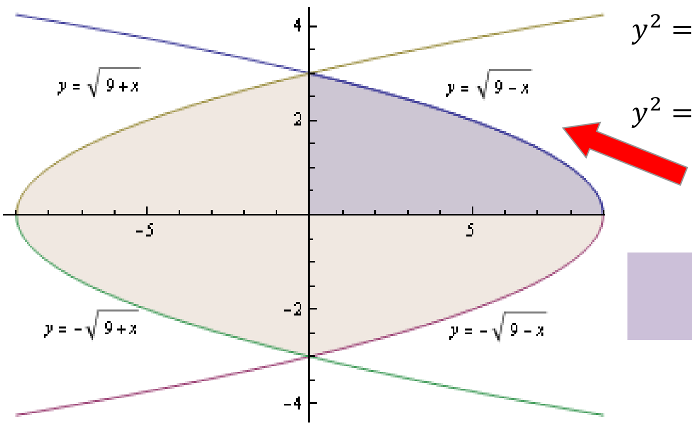
Plochu popíšeme:

$$0 \le x \le 4$$
$$\frac{x^2}{4} \le y \le 2\sqrt{x}$$

Teraz môžeme aplikovať vzorec pre výpočet obsahu:

$$S = \int_0^4 \left(2\sqrt{x} - \frac{x^2}{4}\right) dx = 2\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^4 - \frac{1}{4}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^4 = \frac{4}{3}\cdot 8 - \underset{3}{\frac{1}{\cancel{12}}}\cdot 16 \cdot \cancel{4} = \frac{16}{3}.$$

**b)** $y^2 = 9 - x, y^2 = x + 9$ Začíname obrázkom plochy:




Obrázok 2

$$y^2 = 9 - x \quad \Rightarrow \quad y = \pm\sqrt{9 - x}$$

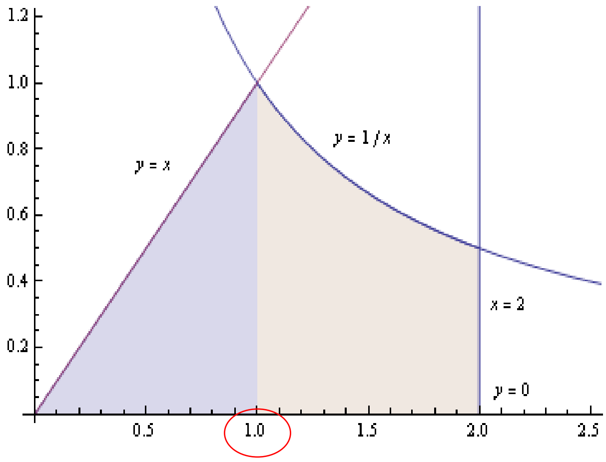
$$y^2 = x + 9 \quad \Rightarrow \quad y = \pm\sqrt{9 + x}$$

$$0 \le x \le 9$$
$$0 \le y \le \sqrt{9 - x}$$

V tomto prípade horná i dolná hranica pozostáva z dvoch kriviek, čiže oblasť nemožno popísať jedným predpisom, museli by sme ju rozdeliť na dve časti. Ale ak si uvedomíme, že oblasť je symetrická podľa osí, a teda pozostáva zo štyroch obsahovo zhodných častí,  stačí rátať obsah časti oblasti v 1. kvadrante.

$$S = 4\int_0^9 \sqrt{9-x}\,dx = \left|\begin{matrix} t = 9-x \\ dt = -dx \\ x = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 9 \\ x = 9 \quad \Rightarrow \quad t = 0 \end{matrix}\right| = -4\int_9^0 \sqrt{t}\,dt = -\,4\left[\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_9^0 = -\frac{8}{3}\cdot(0-27) = 72.$$

**c)** $xy = 1,\ x = 2, y = x, y = 0.$   Začíname obrázkom plochy:




Obrázok 3

$$xy = 1 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{x}$$

Vypočítame prienik kriviek $y = x$ a $y = \frac{1}{x}$.

$$x = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad x^2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad x = \pm 1.$$

Horná hranica oblasti pozostáva z dvoch kriviek, preto oblasť musíme rozdeliť na dve podoblasti:

| | |
|---|---|
| $\begin{matrix} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le x \end{matrix}$, | $\begin{matrix} 1 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le \dfrac{1}{x} \end{matrix}$. |

Obsah celej oblasti rátame ako súčet dvoch podoblastí:

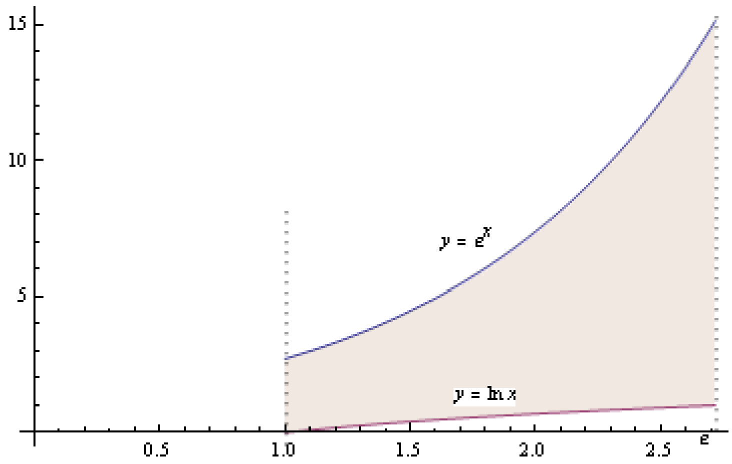
$$S = \int_0^1 x\,dx + \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + [\ln|x|]_1^2 = \frac{1}{2} + \ln 2\,.$$

## ***PRÍKLAD 14.***

Vypočítajte objem rotačného telesa, ktoré vznikne  rotáciou plochy ohraničenej krivkami :

$y = e^x, y = \ln x\,, 1 \le x \le e$  okolo osi *x*.

*Riešenie* :



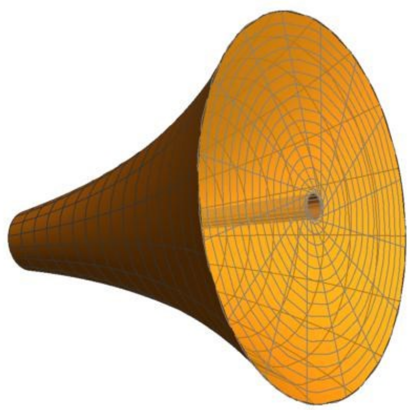

$$1 \le x \le e$$
$$\ln x \le y \le e^x$$

**Obrázok 4**

Aplikujeme vzorec na výpočet objemu:

$$\int_1^e \ln^2 x \; dx = \begin{vmatrix} u = \ln^2 x & u' = 2\ln x \cdot \dfrac{1}{x} \\ v' = 1 & v = x \end{vmatrix} = [x \ln^2 x]_1^e - 2\int_1^e \ln x \; dx = \begin{vmatrix} u = \ln x & u' = \dfrac{1}{x} \\ v' = 1 & v = x \end{vmatrix} =$$
$$= e - 2\left( [x \ln x]_1^e - \int_1^e dx \right) = e - 2\big(e - (e-1)\big) = e - 2.$$

$$V = \pi \int_1^e ((e^x)^2 - (\ln x)^2)\, dx = \pi \left( \int_1^e e^{2x}\, dx - \int_1^e \ln^2 x \; dx \right) = \pi \left( \left[ \frac{e^{2x}}{2} \right]_1^e - (e-2) \right) =$$
$$= \pi \left( \frac{1}{2}(e^{2e} - e^2) - e + 2 \right).$$

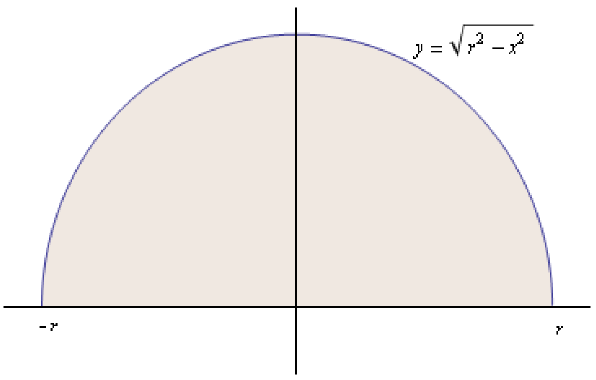


**Obrázok 5** *Zobrazenie rotačného telesa z Príkladu 14.*

## *Príklad 15.*

Odvoďte vzorec pre výpočet objemu gule.

*Riešenie* : Guľu dostaneme rotáciou polkruhu. Popíšme si ho:




Obrázok 6

Kružnica so stredom v $S = [0,0]$ a polomerom r:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$-r \leq x \leq r$$
$$0 \leq y \leq \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$V = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\, dx = 2\pi \int_{0}^{r} (r^2 - x^2)\, dx = 2\,\pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_0^r = 2\pi\left(\frac{2}{3}\, r^3\right) = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

## *Príklady na prepočítanie*

Nájdite obsah plochy ohraničenej krivkami:

**1.** $y = -x^2 + x + 2, \qquad y = 0.$

**2.** $y = x^2 + 2x - 1, \qquad y = -x^2 + 10x - 7.$

**3.** $y = x^2 + 3x + 10, \qquad y = 5 - 3x.$

**4.** $y = 3x^2, \qquad y^2 = 9x.$

**5**. $y = \frac{x^3}{4}$, $\quad y = 16x$.

**6**. $y = x^2$, $\quad y = \frac{x^2}{9}$, $\quad y = 4$.

**7**. $xy = 4$, $\quad y = 2x$, $\quad x = 3$.

**8**. $xy = 4$, $\quad y = 2x$, $\quad x = 3$, $\quad y = 0$.

**9**. $y = e^{-2x}$, $\ y = e^{2x}$, $\quad x = \frac{1}{2}$.

**10**. $y = \ln x$, $\quad y = \ln^2 x$.

Nájdite objem rotačného telesa, ktoré vznikne rotáciou oblasti S okolo osi *x*, kde S je ohraničená krivkami:

**11**. $y = \sqrt{3x}$, $\quad y = 4\sqrt{x}$, $\quad x = 3$.

**12**. $y = x^2$, $\quad y^2 = 8x$.

**13**. $y = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$, $\quad y = 0$, $\ 0 \leq x \leq 2\pi$.

**14**. $y = 8 - x^2$, $\quad y = x^2$.

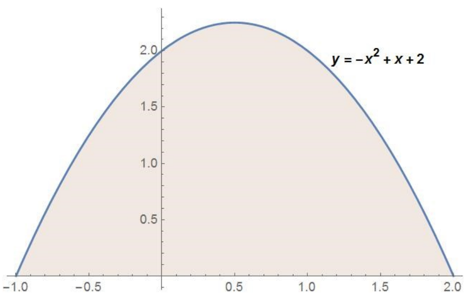
**15**. $y = \operatorname{tg} x$, $\quad x = 0$, $\quad y = \sqrt{3}$.

**16**. $x^2 + y^2 = 4$ (kružnica), $\ y^2 = 3x$, ak $x \geq 0, y \geq 0$.

**17**. Odvoďte pomocou integrálu vzorec na výpočet objemu kužeľa s polomerom podstavy *r* a výškou *v*.

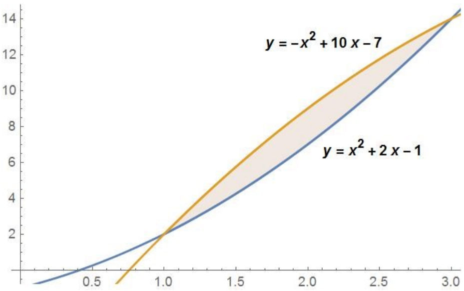
## VÝSLEDKY

1. $S = \frac{9}{2}$



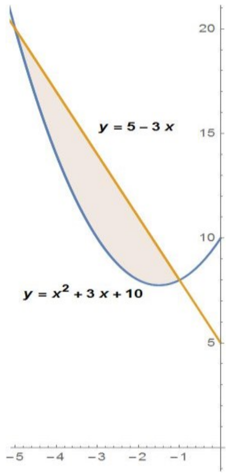

**Obrázok 7** *Oblasť v Pr.1.*

2. $S = \frac{8}{3}$



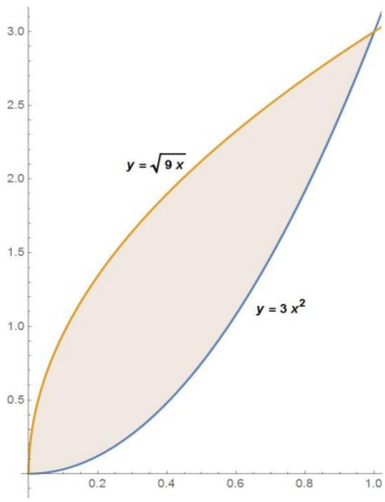

**Obrázok 8** ***Oblasť v Pr. 2.***

3. $S = \frac{32}{3}$



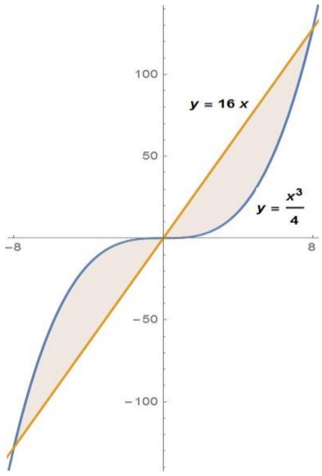

**Obrázok 9** ***Oblasť v Pr. 3.***

4. $S = 1$



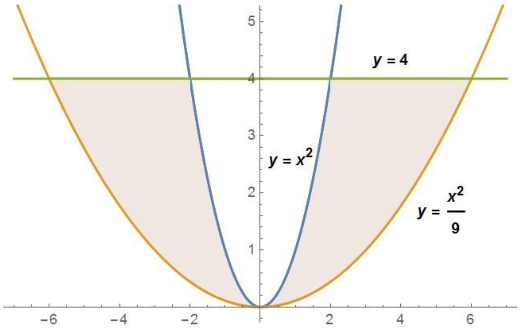

**Obrázok 10** ***Oblasť v Pr. 4.***

5. $S = 512$



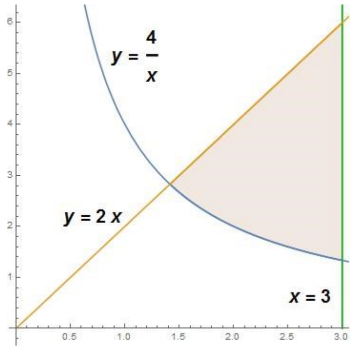

Obrázok 11 *Oblasť v Pr. 5.*

6. $S = \frac{64}{3}$



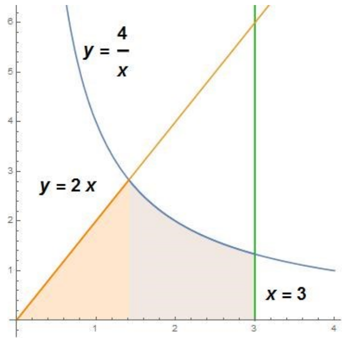

Obrázok 12 *Oblasť v Pr. 6.*

7. $S = 7 - 2\ln\left(\frac{9}{2}\right)$



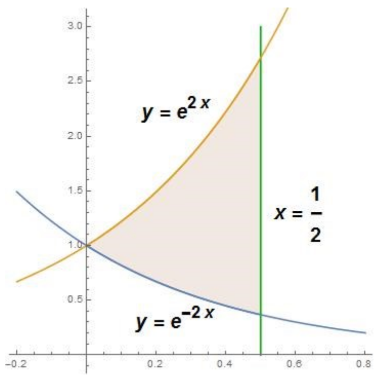

Obrázok 13 *Oblasť v Pr. 7.*

8. $S = 2 + 2\ln\left(\frac{9}{2}\right)$



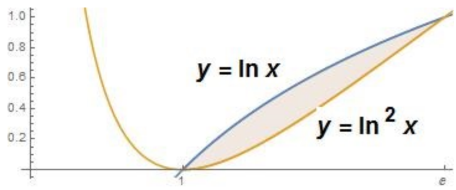

Obrázok 14 *Oblasť v Pr. 8.*

$9.\ S=\frac{1}{2e}(e-1)^2$



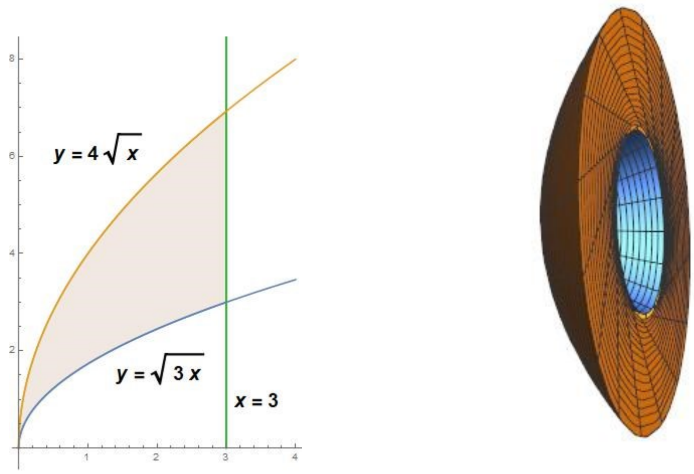

Obrázok 15 *Oblasť v Pr. 9.*

$10.\ S=3-e$



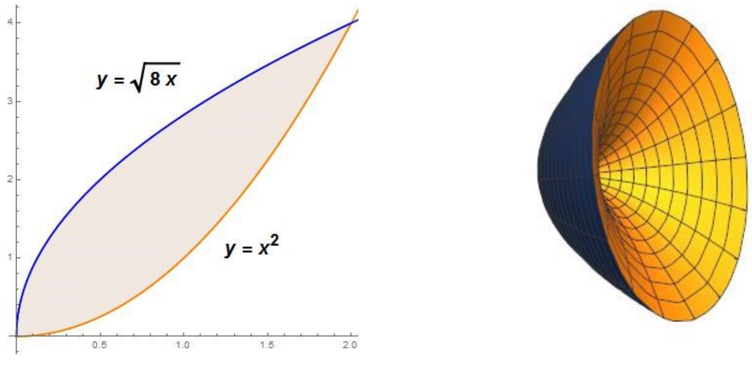

Obrázok 16 *Oblasť v Pr. 10.*

$11.\ V=\frac{117}{2}\pi$



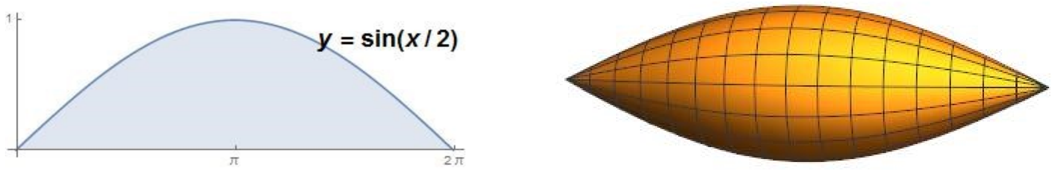

Obrázok 17 *Rotačná oblasť a teleso v Pr. 11.*

$12.\ V=\frac{48}{5}\pi$



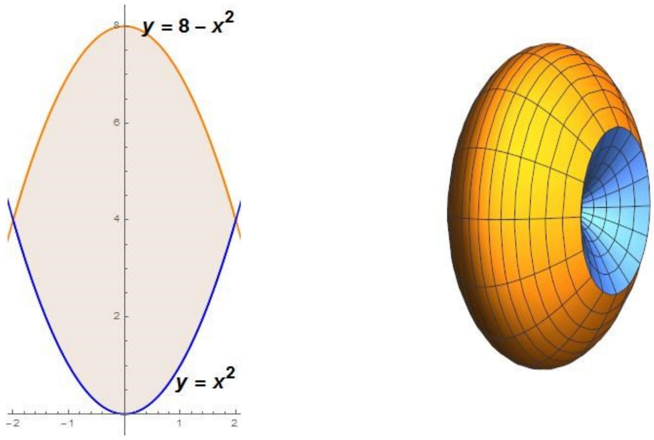

Obrázok 18 *Rotačná oblasť a teleso v Pr. 12.*

13. $V = \pi^2$



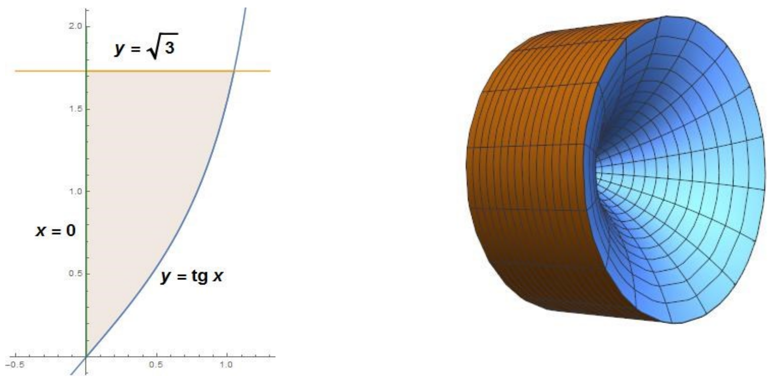

Obrázok 19 *Rotačná oblasť a teleso v Pr. 13.*

14. $V = \frac{512}{3}\pi$



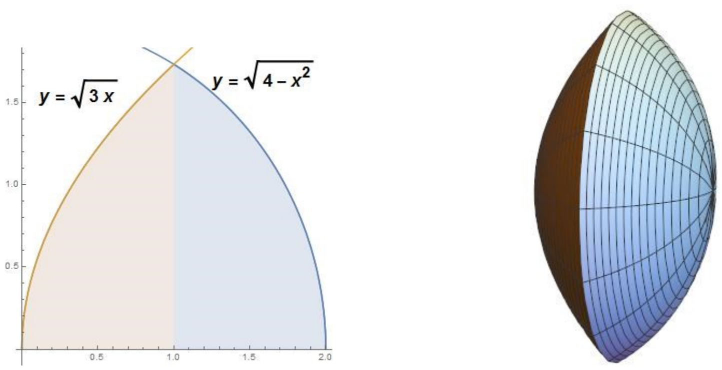

Obrázok 20 *Rotačná oblasť a teleso v Pr. 14.*

15. $V = \left(\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}\right)\pi$



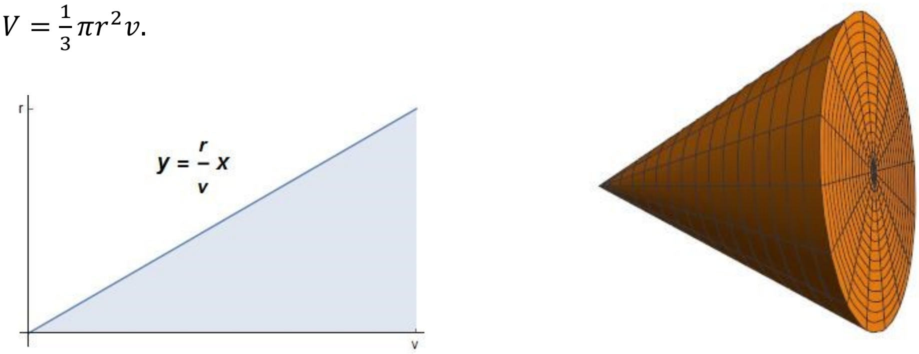

Obrázok 21 *Rotačná oblasť a teleso v Pr. 15.*

16. $V = \frac{19}{6}\pi$




Obrázok 22 *Rotačná oblasť a teleso v Pr. 16.*

17. Kužeľ vznikne rotáciou pravouhlého trojuholníka, ktorého preponu tvorí úsečka $y = \frac{r}{v}\, x$ na intervale $[0, v]$, $V = \frac{1}{3}\pi r^2 v$.




**Obrázok 23** ***Rotačná oblasť a teleso (kužeľ) v Pr. 17.***

# 3. Obyčajné diferenciálne rovnice

Z doterajších poznatkov vieme riešiť len diferenciálne rovnice typu $y^{(n)} = f(x)$, kde $y^{(n)}$ je $n$-tá derivácia funkcie $y = g(x)$ na intervale $I$. Riešením (všeobecným) nie je len jedna funkcia, ale celá trieda funkcií $y = g(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$, kde $c_i, i = 1, \dots, n$ sú konštanty.

### *Príklad 16.*

Nájdite všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice:

a) $y' = \operatorname{arcotg} x$,

b) $y'' = \frac{\ln(2x)}{x}$.

*Riešenie* :

**a)**

$$y = \int \operatorname{arccotg} x \, dx = \begin{vmatrix} u = \operatorname{arccotg} x, & u' = -\dfrac{1}{1+x^2} \\ v' = 1, & v = x \end{vmatrix} = x \operatorname{arccotg} x + \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\, dx =$$

$$= x \operatorname{arccotg} x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

**b)** Aby sme dostali riešenie, musíme funkciu na pravej strane dva razy zintegrovať.

$$\int \frac{\ln(2x)}{x}\, dx = \begin{vmatrix} t = \ln(2x) \\ dt = \dfrac{1}{x}\, dx \end{vmatrix} = \int t \, dt = \frac{1}{2}\ln^2(2x) + c,$$

$$\int \ln(2x)\, dx = \begin{vmatrix} u = \ln(2x), & u' = \dfrac{1}{x} \\ v' = 1, & v = x \end{vmatrix} = x\ln(2x) - x + c,$$

$$\int \ln^2(2x)\, dx = \begin{vmatrix} u = \ln^2(2x), & u' = \dfrac{2}{x}\ln(2x) \\ v' = 1, & v = x \end{vmatrix} = x\ln^2(2x) - 2\int \ln(2x)\, dx =$$

$$= x\ln^2(2x) - 2x\ln(2x) + 2x + c,$$

$$y = \int \left( \int \frac{\ln(2x)}{x} dx \right) dx = \int \left( \frac{1}{2}\ln^2(2x) + c_1 \right) dx = \frac{1}{2}\int \ln^2(2x)\, dx + c_1 x + c_2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x\ln^2(2x) - 2x\ln(2x) + 2x\right) + c_1 x + c_2 =$$

$$= \frac{x}{2}\ln^2(2x) - x\ln(2x) + \tilde{c_1} x + c_2, \qquad \tilde{c_1}, c_2 \in \mathbb{R}.$$

## 3.1. Diferenciálne rovnice (DR) 1. rádu

### 3.1.1. Separovateľné diferenciálne rovnice

*Čo si treba pamätať z prednášky:*

*Hľadáme funkciu $y = g(x)$, ktorá je riešením DR pre $x$ na intervale $I$.*

Základný tvar ⇔ všeobecný tvar separovateľnej DR

$$y' = p(x)q(y) \Leftrightarrow p_1(x)q_1(y)y' + p_2(x)q_2(y) = 0 \text{ ak } p_1(x)q_1(y) \neq 0$$

$$y' = -\frac{p_2(x)q_2(y)}{p_1(x)q_1(y)}$$

$p(x)$ $q(y)$

*Postup riešenia :*

1) *Separácia premenných, ak* $q(y) \neq 0$ $(q_2(y) \neq 0, p_1(x) \neq 0)$:

$$y' = p(x)q(y) \ / \ \frac{1}{q(y)} \qquad p_1(x)q_1(y)y' = p_2(x)q_2(y) \ / \ \frac{1}{q_2(y)} \ \frac{1}{p_1(x)}$$

$$\frac{1}{q(y)}y' = p(x) \qquad \frac{q_1(y)}{q_2(y)}y' = \frac{p_2(x)}{p_1(x)} \qquad \text{(separovaná DR)}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} \Rightarrow \qquad \frac{1}{q(y)}dy = p(x)dx$$

2) *Integrovanie:*

$$\int \frac{1}{q(y)}dy = \int p(x)dx + c, \qquad c \in \mathbb{R}$$

*a vyjadrenie všeobecného riešenia v tvare* $y = g(x, c)$.

3) *Z* $q(y) = 0$ $(q_2(y) = 0)$ *dostaneme ďalšie riešenia vrátane singulárnych (t. j. takých, ktoré nemožno zahrnúť do všeobecného riešenia ) a všetky riešenia zhrnieme.*

*Pod pojmom **separácia premenných** rozumieme oddelenie výrazov obsahujúcich $y$ na jednej strane rovnice a výrazov obsahujúcich premennú $x$ na druhej strane. Najskôr osamostatním* *sčítanec obsahujúci $y'$ na jednu stranu rovnice, a potom len delím rovnicu príslušnými funkciami.*

*Postupy používané pri úpravách:*

- $\boldsymbol{c}$ chápeme ako symbol ľub. konštanty, nie ako konkrétne číslo, preto ak konštantu $\boldsymbol{c}$ násobíme (delíme) konkrétnou konštantou, zostáva nezmenená. Napr. nepíšeme $4\boldsymbol{c}$**,** lebo je to stále ľubovoľná konštanta.
- Každé $c \in \mathbb{R}$ môžeme vyjadriť ako logaritmus absolútnej hodnoty iného nenulového čísla $c_1$, t. j. $c = \ln|c_1|$, $c_1 \neq 0$. Ak $\boldsymbol{c}$ je symbol ľub. konštanty, potom $\boldsymbol{c_1}$ chápeme ako symbol ľub. nenulovej konštanty.
- Ak $\boldsymbol{c}$ chápeme ako symbol ľub. konštanty, potom

$$|y| = |\boldsymbol{c}\, g(x)| \quad \Rightarrow \text{ riešením je } \; y = \boldsymbol{c}\, g(x),$$

$$|y| = e^{f(x)+\boldsymbol{c}} \;\Rightarrow\; y = \pm\, e^{\boldsymbol{c}}.e^{f(x)} = \boldsymbol{c_1}\, e^{f(x)}, \qquad \boldsymbol{c_1} \neq 0.$$

## PRÍKLAD 17.

Nájdite riešenie DR: a) $y' = xe^{-y}$, b) $y' = (y-2)\operatorname{cotg} x$, c) $xy = \sqrt{1-x^2}\, y'$, d) $y' - xy^2 - y^2 - xy - y = 0$.

*Riešenie:*

$$\frac{1}{e^{-y}} = e^{y}, \quad e^{-y} \neq 0$$

**a)** $y' = xe^{-y} / . e^{y}$

$$a^{y} = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad y = \log_a f(x)$$

$$e^{y} y' = x \qquad \Rightarrow \qquad e^{y} dy = x\, dx\,,$$

$$\int e^{y} dy = \int x\, dx \qquad \Rightarrow \qquad e^{y} = \frac{x^2}{2} + c \qquad \Rightarrow \qquad y = \ln\left(\frac{x^2}{2} + c\right), \quad c \in \mathbb{R}.$$

---

**b)**

- $y' = (y-2)\operatorname{cotg} x \,/\, \frac{1}{y-2}$ $\qquad y - 2 \neq 0 \;\Rightarrow\; y \neq 2$

$$\frac{1}{y-2}\, y' = \operatorname{cotg} x \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y-2}\, dy = \operatorname{cotg} x\, dx.$$

- $$\int \frac{1}{y-2}\,dy = \int \operatorname{cotg} x\,dx \qquad\qquad \int \operatorname{cotg} x\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx$$

  $\ln|y-2| = \ln|\sin x| + c = \ln|\sin x| + \ln|c_1| = \ln|c_1 \sin x|, \qquad c_1 \neq 0,$

  $|y-2| = |c_1 \sin x| \;\Rightarrow\; y-2 = c_1 \sin x \;\Rightarrow\; y = 2 + c_1 \sin x.$ $\qquad \ln x = \ln y \;\Leftrightarrow\; x = y$

- Konštantná funkcia $y = 2$ je tiež riešením DR.

  ( $y = 2, y' = 0$, dosadíme do DR $0 = (2-2)\operatorname{cotg} x$ )

  Všetky riešenia môžeme zapísať jedným predpisom

$$y = 2 + c\,\sin x\,, \qquad c \in \mathbb{R}\,.$$

Všimnime si, že hoci funkcia $y(x)$ je definovaná pre všetky $x \in \mathbb{R}$, DR má zmysel, len ak $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ (čo je definičný obor funkcie $\operatorname{cotg} x$), čiže funkcia $y(x)$ je riešením len na tomto def. obore.

---

**c)** V tomto prípade je DR vyjadrená vo všeobecnom tvare, takže budeme deliť aj funkciami premennej $x$.

- $xy = \sqrt{1-x^2}\,y' \;/\; \frac{1}{y}, \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad y \neq 0, \sqrt{1-x^2} \neq 0 \qquad (y = 0 \text{ je riešením rovnice})$

  $$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{y}\,y' \quad\Rightarrow\quad \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{1}{y}\,dy$$

- $$\int \frac{1}{y}\,dy = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \qquad\qquad \frac{1}{-2}\int \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \begin{vmatrix} t = 1-x^2 \\ dt = -2x\,dx \end{vmatrix} = \frac{1}{-2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} =$$

  $\ln|y| = -\sqrt{1-x^2} + c \qquad\qquad = -\sqrt{t} + c = -\sqrt{1-x^2} + c$

  $|y| = e^{-\sqrt{1-x^2}+c} = e^{-\sqrt{1-x^2}}\,e^{c} \;\Rightarrow\; y = c_1\,e^{-\sqrt{1-x^2}} \qquad c_1 \neq 0.$

- Všetky riešenie môžeme zjednotiť predpisom $y = c\,e^{-\sqrt{1-x^2}}\,,\quad c \in \mathbb{R}\,.$

  Funkcia $y(x)$ je riešením DR len pre $x \in (-1,1)$ (čo je def. obor $y'(x)$ ) , t. j. nie na celom def. obore funkcie $y(x)$ $[-1,1]$.

---

**d)** Najskôr si osamostatním sčítanec, ktorý obsahuje $y'$ a upravíme pravú stranu na súčin funkcií $f_1(x)$ a $f_2(y)$:

- $y' = xy^2 + y^2 + xy + y = y^2(x+1) + y(x+1) = (x+1)(y^2+y) \;/\; \frac{1}{y^2+y}$ $\quad y^2 + y \neq 0$

  $$\frac{1}{y^2+y}\, y' = x + 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y^2+y}\, dy = (x+1)\, dx$$

- $$\int \frac{1}{y^2+y}\, dy = \int (x+1)\, dx \qquad \frac{1}{y^2+y} = \frac{1}{y} - \frac{1}{y+1}$$

  $$\ln|y| - \ln|y+1| = \frac{x^2}{2} + x + c \quad \Rightarrow \quad \ln\left|\frac{y}{y+1}\right| = \frac{x^2}{2} + x + c$$

  $$\left|\frac{y}{y+1}\right| = e^{\frac{x^2}{2}+x+c} = e^c e^{\frac{x^2}{2}+x} \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{y+1} = c_1 e^{\frac{x^2}{2}+x}, \qquad c_1 \neq 0$$

  $$y = (y+1)c_1 e^{\frac{x^2}{2}+x} = y\, c_1\, e^{\frac{x^2}{2}+x} + c_1\, e^{\frac{x^2}{2}+x} \quad \Rightarrow \quad y\left(1 - c_1\, e^{\frac{x^2}{2}+x}\right) = c_1\, e^{\frac{x^2}{2}+x}$$

  $$y = \frac{c_1\, e^{\frac{x^2}{2}+x}}{1 - c_1\, e^{\frac{x^2}{2}+x}}$$

- Z podmienky $y^2 + y = 0$ dostaneme riešenia rovnice $y = 0,\; y = -1.$

  Všetky riešenia DR sú:

$$y = \frac{c\, e^{\frac{x^2}{2}+x}}{1 - c\, e^{\frac{x^2}{2}+x}}, \quad c \in \mathbb{R} \qquad \text{a singulárne riešenie} \qquad y = -1.$$

*Čo si treba pamätať z prednášky:*

Ak k DR pridáme začiatočnú podmienku $y(x_0) = y_0$, dostaneme tzv. Cauchyovskú úlohu. Riešenie takejto úlohy $y = g(x, c_0)$ voláme *partikulárne riešenie*. Konkrétnu hodnotu $c_0$ vypočítame dosadením podmienky do všeobecného riešenia DR .

*Postup riešenia* :

a) Najskôr nájdem všeobecné riešenie a ak mám zadanú aj podmienku,
b) dopočítam konkrétnu hodnotu $c_0$ dosadením podmienky do všeobecného riešenia.

## *PRÍKLAD 18.*

Nájdite partikulárne riešenia DR:

a) $xy' = y\ln y$, *i)* $y(1) = 1$, *ii)* $y(1) = 2$, *iii)* $y(1) = \frac{1}{3}$

b) $-1 + e^{-y}(1 + y') = 0$, *i)* $y(0) = 0$, *ii)* $y(1) = -1$.

*Riešenie:*

**a)**

- $xy' = y\ln y \quad / \ \frac{1}{x}, \frac{1}{y\ln y}$ $\qquad y\ln y \neq 0, \quad x \neq 0$

  $$\frac{1}{y\ln y}\, y' = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y\ln y}\, dy = \frac{1}{x}\, dx. \qquad (*)$$

- $$\int \frac{1}{y\ln y}\, dy = \int \frac{1}{x}\, dx \qquad \frac{1}{y\ln y} = \frac{\frac{1}{y}}{\ln y}$$

  $\ln|\ln y| = \ln|x| + c = \ln|x| + \ln|c_1| = \ln|c_1\, x|$, $\quad c_1 \neq 0$

  $\ln y = c_1\, x \quad \Rightarrow \quad y = e^{c_1 x}$.

- Jedno riešenie dostaneme z rovnosti $y\ln y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 1$.

  Všetky riešenia separovateľnej DR možno zapísať v tvare:

$$y = e^{c\,x}, \quad c \in \mathbb{R} \quad \text{pre} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

- Hľadáme partikulárne riešenie, ktoré spĺňa začiatočnú podmienku $\qquad a^{\log_a x} = x$
  - *i)* $y(1) = 1 \quad \Rightarrow \quad 1 = e^{c\,1} \quad \Leftrightarrow \quad c = 0 \quad \Rightarrow \quad y = e^{0x} = 1.$
  - *ii)* $y(1) = 2 \quad \Rightarrow \quad 2 = e^{c\,1} \quad \Leftrightarrow \quad c = \ln 2 \quad \Rightarrow \quad y = e^{\ln(2)\,x} = \left(e^{\ln(2)}\right)^x = 2^x.$
  - *iii)* $y(1) = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{3} = e^{c\,1} \quad \Leftrightarrow \quad c = \ln\left(\frac{1}{3}\right) \quad \Rightarrow \quad y = e^{\ln\left(\frac{1}{3}\right)x} = \left(e^{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}\right)^x = \left(\frac{1}{3}\right)^x.$

Všimnime si, že funkcia $y = e^{c\,x}$ je riešením separovanej DR $(*)$ pre $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

---

**b)**

- $-1 + e^{-y}(1 + y') = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -1 + e^{-y} + e^{-y}\,y' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{-y}\,y' = 1 - e^{-y} \quad / \ \frac{1}{1-e^{-y}}$

  $$\frac{e^{-y}}{1 - e^{-y}}\, y' = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{e^{-y}}{1 - e^{-y}}\, dy = dx \qquad 1 - e^{-y} \neq 0$$

- $$\int \frac{e^{-y}}{1-e^{-y}}\, dy = \int dx \qquad\qquad (1-e^{-y})' = \ e^{-y}$$

  $\ln|1-e^{-y}| = x + c \quad \Rightarrow \quad |1-e^{-y}| = e^{x+c} \quad \Rightarrow \quad 1-e^{-y} = c_1 e^x, \quad c_1 \neq 0,$

  $e^{-y} = 1 - c_1 e^x \quad \Rightarrow \quad y = -\ln(1-c_1 e^x)\,.$

- Z rovnice $1-e^{-y} = 0$ dostaneme riešenie $y = 0$. Takže všeobecné riešenie DR je

  $y = -\ln(1-ce^x), \quad c \in \mathbb{R}$ na definičnom obore funkcie $y(x)$, (ktorý závisí od hodnoty $c$).

- Hľadáme partikulárne riešenie, ktoré spĺňa začiatočnú podmienku
  - *i)* $y(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = -\ln(1-ce^0) \quad \Leftrightarrow \quad c = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \ -\ln(1) = 0.$
  - *ii)* $y(1) = -1 \quad \Rightarrow \quad -1 = -\ln(1-ce^1) \quad \Leftrightarrow \quad 1 - ce = e \quad \Rightarrow$

    $c = (1-e)/e \quad \Rightarrow \quad y = -\ln\left(1 - \frac{1-e}{e} e^x\right) = \ -\ln(1-(1-e)e^{x-1}).$

---

## *Príklady na prepočítanie*

Riešte diferenciálne rovnice

**1.** $y' = \mathrm{tg}(2x) + x\, e^{4x}.$

**2.** $y'' = \operatorname{arctg} x.$

**3.** $(2-x)y' = 3 + y.$

**4.** $y' = 10^{2x+y}.$

**5.** $2^{2x+1} - 2^y\, y' = 0.$

**6.** $2 + y^2 + 3x^2 yy' = 0.$

**7.** $e^{-2y}(3 + y') = 2.$

**8.** $xy = (1+x^2)(3+y)y'.$

**9.** $y' = (y-2)\operatorname{cotg} x$ .

**10.** $xy = \sqrt{1-x^2}\,y'$.

**11.** $y^2 - 4y - xy' = 0$.

**12.** $(1+\sqrt[3]{x})y' = \dfrac{y}{3x}$.

**13.** $\dfrac{1+y^2}{1+x^2} - y' = 0, \qquad y(0) = 1.$

**14.** $y' = \dfrac{2x-5}{3y^2}, \qquad y(0) = 2.$

**15.** $y' = xy + 6x - 2y - 12, \quad y(0) = -2.$

**16.** $xy(4+x^2)y' = 3 + y^2, \quad y(1) = 0.$

## VÝSLEDKY

1. $y = -\frac{1}{2}\ln|\cos 2x| + \left(\frac{x}{4} - \frac{1}{16}\right)e^{4x} + c\,,\ c \in \mathbb{R},$

2. $y = \frac{1}{2}((x^2-1)\operatorname{arctg} x - x\ln(1+x^2)) + c_1 x + c_2\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$

3. $y = \frac{c}{2-x} - 3,\ c \in \mathbb{R},$ 4. $y = -\log\left(c - \frac{1}{2}10^{2x}\right),\ c \in \mathbb{R},$ 5. $y = \log_2(e^{2x} + c)\,,\ c \in \mathbb{R},$

6. $y^2 = ce^{\left(\frac{2}{3x}\right)} - 2,\ c \in \mathbb{R}\,,$ 7. $y = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2}{3} - ce^{6x}\right),\ c \in \mathbb{R},$

8. $y + 3\ln|y| - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c = 0\,,\ c \in \mathbb{R},$ 9. $y = c\sin x + 2,\ c \in \mathbb{R} - \{0\},$

10. $y = ce^{-\sqrt{1-x^2}},\ c \in \mathbb{R},$ 11. $y = \frac{4}{1-cx^4}\,,\ c \in \mathbb{R}\,,$ 12. $y = \frac{c\,\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\,,\ c \in \mathbb{R}\,,$

13. $y = \frac{1+x}{1-x}$, k úprave výsledného riešenia použijeme vzťah $\operatorname{tg}(x-y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$.

14. $y = \sqrt[3]{x^2 - 5x + 8}.$ 15. $y = 4e^{\frac{1}{2}x^2 - 2x} - 6.$ 16. $y^2 = 3\sqrt{5}\frac{x}{\sqrt{4+x^2}} - 3.$

### 3.1.2. Lineárne diferenciálne rovnice (LDR) 1. rádu

*Čo si treba pamätať z prednášky:*

Základný tvar LDR (s pravou stranou) $p(x), f(x)$ spojité funkcie na intervale $I$.

$$y' + p(x)y = f(x). \qquad (1)$$

Homogénna LDR (bez pravej strany):

$$y' + p(x)y = 0 . \qquad (2)$$

Všeobecné riešenie LDR (1) sa dá vždy vyjadriť v tvare

$$y = y_H + y_{P,}$$

*kde $y_H$ je všeobecným riešením homogénnej LDR (2) a $y_P$ je partikulárnym riešením (1).*

*(ľubovoľným)*

Ak funkcie $p(x), f(x)$ sú spojité na intervale $(a, b)$, potom všeobecné riešenie LDR (1) $y = g(x, c)$ je riešením pre všetky $x \in (a, b)$ a $c \in \mathbb{R}$. Netreba rozoberať zvlášť definičný obor riešenia a prípad, keď $y = 0$.

---

<u>Postup riešenia</u> (metóda variácie konštánt):

1) *Hľadám riešenie homogénnej LDR $y_H$ (čo je separovateľná DR)*

$$y' = -p(x)\, y \quad / \ \frac{1}{y}$$

$$\frac{1}{y}\, y' = -p(x) \ \Rightarrow \ \frac{1}{y} dy = -p(x) dx \ \Rightarrow \ \int \frac{1}{y} dy = -\int p(x) dx + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\ln|y| = -\int p(x) dx + c \quad \Rightarrow \quad |y| = e^{-\int p(x)dx} e^{c} \quad \Rightarrow$$

$|y| = e^{f(x)+c} \ \Rightarrow \ y = \pm\, e^{c} . e^{f(x)} = c_1\, e^{f(x)}, \qquad c_1 \neq 0$

Ak $c_1 = 0$, $y = 0$ je tiež riešením (2).

$$y_H = c e^{-\int p(x)dx}, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Pri hľadaní riešenia $y_H$ v príkladoch buď opakujem postupnosť úprav, alebo využijem výsledok ako vzorec, do ktorého budem dosadzovať.

2) *Hľadám všeobecné riešenie LDR (1) v tvare:*

$$y = c(x)e^{-\int p(x)dx},$$

t. j. konštantu $c$ v riešení homogénnej rovnice nahradím zatiaľ neznámou funkciou $c(x)$. Dopočítam si deriváciu navrhnutého riešenia , dosadím do rovnice (1) za $y$ a $y'$ a následne dopočítam funkciu $c(x)$ tak, aby nami navrhnuté riešenie bolo skutočne riešením LDR (1).

---

## PRÍKLAD 19.

Nájdite riešenie LDR:

a) $y' + \frac{1}{x}y = x^2$, b) $y' + y\cos x = \cos x$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$, c) $x^2y' = 2xy - 3$, $y(-1) = 1$.

*Riešenie:*

$\ln a - \ln b = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$, $c\ln a = \ln a^c$

$\ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y$, $e^{\ln x} = x$

**a)**

1. Najskôr riešim homogénnu LDR:

$$y' + \frac{1}{x}y = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = -\frac{1}{x}y \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y}dy = -\frac{1}{x}dx \quad \Rightarrow \quad \int\frac{1}{y}dy = -\int\frac{1}{x}dx \quad \Rightarrow$$

$$\ln|y| = -\ln|x| + \ln|c| = \ln\left|\frac{c}{x}\right| \quad \Rightarrow \quad \boxed{y_H = \frac{c}{x}}.$$

Alebo dosadím do vzorca $y = ce^{-\int p(x)dx}$, $p(x) = \frac{1}{x}$ .

$$\int\frac{1}{x}dx = \ln|x| \quad \Rightarrow \quad y = c\,e^{-\ln|x|} = c\,e^{\ln|x|^{-1}} = c\,|x|^{-1} \quad \Rightarrow \quad y_H = \frac{c}{x}.$$

2. Všeobecné riešenie pôvodnej rovnice s pravou stranou hľadám v tvare

$$y = \frac{c(x)}{x},$$

kde $c(x)$ je zatiaľ neznáma funkcia. Dopočítam jej deriváciu $y' = \frac{c'(x)x - c(x)}{x^2}$ a dosadím do pôvodnej rovnice :

$$y' + \frac{1}{x}y = x^2$$

$$\frac{c'(x)x - c(x)}{x^2} + \frac{1}{x}\frac{c(x)}{x} = x^2$$

$$\frac{c'(x)}{x} - \cancel{\frac{c(x)}{x^2}} + \cancel{\frac{c(x)}{x^2}} = x^2 \qquad \text{vždy sa členy obsahujúce } c(x) \text{ odčítajú !!!}$$

$$\frac{c'(x)}{x} = x^2 \quad \Rightarrow \quad c'(x) = x^3 \quad \Rightarrow \quad c(x) = \int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Dosadím funkciu $c(x)$ do návrhu riešenia:

Ak $c = 0$, dostanem jedno partikulárne riešenie $y_P$. Súčet partikulárneho (ľubovoľného) a všeobecného riešenia homogénnej rovnice nám dá všeobecné riešenie LDR s pravou stranou (tento súčet dostaneme automaticky, ak dosadzujeme funkciu $c(x)$ v tvare s konštantou $c \in \mathbb{R}$.)

$$y = \frac{\frac{x^4}{4} + c}{x} = \underbrace{\frac{x^3}{4}}_{y_P} + \underbrace{\frac{c}{x}}_{y_H}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

---

$\ln y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad y = e^{f(x)}$

$|y| = e^{f(x)+c} \Rightarrow y = \underbrace{\pm e^c}_{c_1} . e^{f(x)}$

**b)** $y' + y\cos x = \cos x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2.$

1. Riešim homogénnu LDR:

$$y' + y\cos x = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = -y\cos x \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y}\,dy = -\cos x\,dx \quad \Rightarrow$$

$$\int \frac{1}{y}\,dy = -\int \cos x\;dx \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = -\sin x + c \quad \Rightarrow \quad y_H = ce^{-\sin x}.$$

Alebo dosadím do vzorca $y = ce^{-\int p(x)dx}$, $p(x) = \cos x$.

$$\int \cos x\;dx = \sin x \quad \Rightarrow \quad y_H = c\,e^{-\sin x}.$$

2. Hľadám všeobecné riešenie v tvare:

$y = c(x)\,e^{-\sin x}$.

Dopočítam deriváciu navrhnutého riešenia:

$y' = c'(x)e^{-\sin x} + c(x)e^{-\sin x}(-\cos x)$

a dosadíme do rovnice s pravou stranou:

$$c'(x)\,e^{-\sin x} + \cancel{c(x)e^{-\sin x}(-\cos x)} + \cancel{c(x)\,e^{-\sin x}\cos x} = \cos x$$

$$c'(x)\,e^{-\sin x} = \cos x \quad \Rightarrow \quad c'(x) = \cos x\;e^{\sin x} \quad \Rightarrow \quad c(x) = \int \cos x\;e^{\sin x}\;dx$$

$$c(x) = \left|\begin{matrix} t = \sin x \\ dt = \cos x\;dx \end{matrix}\right| = \int e^t dt = e^{\sin x} + c.$$

Dosadením do návrhu riešenia dostanem všeobecné riešenie:

$$y = \left(e^{\sin x} + c\right)e^{-\sin x} = 1 + ce^{-\sin x}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

3. Dosadím podmienku:

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \quad \Rightarrow \quad 2 = 1 + ce^{-\sin\frac{\pi}{2}} = 1 + \frac{c}{e} \quad \Rightarrow \quad c = e.$$

Hľadané partikulárne riešenie je:

$$y = 1 + e\,e^{-\sin x} = 1 + e^{1-\sin x}.$$

---

**c)** $x^2y' = 2xy - 3, \quad y(-1) = 1.$

Treba si uvedomiť, že ľavú stranu LDR tvoria vždy len dva členy súčtu $k(x)\, y'$ a $q(x)\, y$, ostatné členy tvoria pravú stranu rovnice, rovnicu prepíšem (ak nepoužívam na výpočet homogénneho riešenia vzorec, nie je nutné upraviť ju až na základný tvar $y' + p(x)y = f(x)$) :

$$x^2y' - 2xy = -3. \quad (*)$$

1. Riešim homogénnu LDR:

$$x^2y' - 2xy = 0 \;\Rightarrow\; x^2y' = 2xy \;\Rightarrow\; \frac{1}{y}\,dy = \frac{2}{x}\,dx \;\Rightarrow \int \frac{1}{y}\,dy = \int \frac{2}{x}\,dx \;\Rightarrow$$

$$\ln|y| = 2\ln|x| + \ln|c| = \ln|cx^2| \;\Rightarrow\; y_H = cx^2.$$

Ak chcem použiť vzorec, musím rovnicu dostať na základný tvar $y' - \frac{2}{x}\,y = -\frac{3}{x^2} \quad (**)$ .

Dosadím do vzorca $y = ce^{-\int p(x)dx}$, $p(x) = -\frac{2}{x}$.

$$\int -\frac{2}{x}\,dx = -2\ln|x| \quad \Rightarrow\; y_H = c\,e^{2\ln|x|} = c\,e^{\ln|x|^2} = cx^2.$$

2. Hľadám všeobecné riešenie v tvare:

$$y = c(x)\,x^2$$

Dopočítam deriváciu navrhnutého riešenia:

$$y' = c'(x)x^2 + c(x)2x$$

a dosadíme do rovnice s pravou stranou, je jedno či do rovnice $(*)$ alebo $(**)$ :

$$x^2(c'(x)x^2 + c(x)2x) - 2x\,c(x)\,x^2 = -3$$

$$c'(x)\,x^4 = -3 \;\Rightarrow\; c'(x) = -\frac{3}{x^4} \;\Rightarrow\; c(x) = -\int \frac{3}{x^4}\,dx = \frac{1}{x^3} + c\,.$$

Dosadením do návrhu riešenia dostanem všeobecné riešenie:

$$y = \left(\frac{1}{x^3} + c\right)x^2 = \frac{1}{x} + cx^2, \quad c \in \mathbb{R}.$$

3. Dosadím podmienku:

$$y(-1) = 1 \;\Rightarrow\; 1 = -1 + c \;\Rightarrow\; c = 2.$$

Hľadané partikulárne riešenie, spĺňajúce začiatočnú podmienku, je:

$$y = \frac{1}{x} + 2x^2.$$

Lineárne DR, v ktorých $p(x) = k\,f(x)$, $k \in \mathbb{R}$, (viď. napr. príklad 19 b) ) sú zároveň separovateľnými DR. Čiže ich možno riešiť dvoma spôsobmi, variáciou konštánt alebo separáciou premenných.

## *Príklady na prepočítanie*

Riešte lineárne diferenciálne rovnice

**1.** $y' + 5y = x^2.$

**2.** $y' + y\sin x = 2\sin x.$

**3.** $y' = y\cos x + \sin 2x.$

**4.** $y'\cos x - y\sin x = \operatorname{tg} x.$

**5.** $y' + \dfrac{1}{x(x+1)}\,y = (x+1)\ln x.$

**6.** $y' + 2xy = xe^{x^2}.$

**7.** $y' - \dfrac{4x}{1+x^2}\,y = -3x.$

**8.** $y' + \dfrac{y}{3\sqrt{x-1}} = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}.$

**9.** $xy' = 2y + x^3\sin x\,.$

**10.** $2xy' = y + \ln 2x + 3.$

**11.** $y' = e^x(e^x - y), \quad y(0) = 0.$

**12.** $2xy' + y = \dfrac{1}{1+x}\,, \qquad y(1) = -\dfrac{\pi}{2}.$

VÝSLEDKY

1. $y = \frac{1}{125}(25x^2 - 10x + 2) + ce^{-5x},\ c \in \mathbb{R},$ 2. $y = 2 - ce^{\cos x}, c \in \mathbb{R}\,,$

3. $y = -2(\sin x + 1) + ce^{\sin x}, c \in \mathbb{R},$ 4. $y = -\frac{\ln|\cos x|}{\cos x} + \frac{c}{\cos x}\,, c \in \mathbb{R},$

5. $y=\left(\frac{x^2}{2}\left(\ln x-\frac{1}{2}\right)+c\right)\left(1+\frac{1}{x}\right), c\in\mathbb{R}$, 6. $y=\frac{1}{4}e^{x^2}+ce^{-x^2}, c\in\mathbb{R}$,

7. $y=\frac{3}{2}(1+x^2)+c\,(1+x^2)^2, c\in\mathbb{R}$, 8. $y=3-ce^{-\frac{2}{3}\sqrt{x-1}}, c\in\mathbb{R}$,

9. $y=-x^2\cos x+cx^2, c\in\mathbb{R}$, 10. $y=-\ln(2x)-5+c\sqrt{x},\ c\in\mathbb{R}$,

11. $y=e^x-1$, 12. $y=\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}-\frac{3}{4}\pi}{\sqrt{x}}$.

## *3.2. Lineárne diferenciálne rovnice 2. a vyššieho rádu s konštantnými koeficientami*

### 3.2.1. Homogénne LDR

*Čo si treba pamätať z prednášky:*

Homogénna LDR 2. rádu s konštantnými koeficientami

$$y'' + py' + qy = 0, \qquad p, q \in \mathbb{R}.$$

Všeobecné riešenie tejto rovnice sa dá vyjadriť ako lineárna kombinácia dvoch lineárne nezávislých riešení $y_1$ a $y_2$:

$$y = c_1\, y_1 + c_2\, y_2, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

POSTUP PRI HĽADANÍ $y_1$ A $y_2$:

Riešením rovnice je funkcia $y = e^{rx}$, kde $r$ je konštanta. Vyjadríme derivácie a dosadíme do rovnice: $y' = re^{rx}$, $y'' = r^2 e^{rx}$ $\Rightarrow$

$r^2 e^{rx} + p\, re^{rx} + q\, e^{rx} = 0 \quad \Rightarrow \quad e^{rx}(r^2 + pr + q) = 0.$

Keďže $e^{rx} \neq 0$, dostaneme charakteristickú rovnicu LDR 2. rádu:

$$r^2 + pr + q = 0.$$

Hľadáme korene kvadratickej rovnice:

- *Ak* $D = p^2 - 4q > 0$ $\Rightarrow$ existujú dva rôzne reálne korene

  $r_1, r_2 = \frac{-p \pm \sqrt{D}}{2} \quad \Rightarrow \quad y_1 = e^{r_1 x}$ a $y_2 = e^{r_2 x}$;

- *Ak* $D = p^2 - 4q = 0$ $\Rightarrow$ existuje jeden dvojnásobný reálny koreň

  $r = r_1 = r_2 = \frac{-p}{2} \quad \Rightarrow \quad y_1 = e^{rx}$ a $y_2 = xe^{rx}$;

- *Ak* $D = p^2 - 4q < 0$ $\Rightarrow$ koreňmi rovnice sú komplexne združené čísla

  $\alpha \pm \boldsymbol{i}\,\beta$, *kde* $\boldsymbol{i} := \sqrt{-1}$ *je* imaginárna jednotka,

$$r_{1,2} = \frac{-p \pm \boldsymbol{i}\sqrt{|D|}}{2} = \underbrace{\frac{-p}{2}}_{\alpha} \pm \boldsymbol{i}\, \underbrace{\frac{\sqrt{|D|}}{2}}_{\beta}$$

Potom

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos(\beta x) \qquad \text{a} \qquad y_2 = e^{\alpha x}\sin(\beta x)\,;$$

POZNÁMKA:

- Homogénna LDR $n$-tého rádu má $n$ lineárne nezávislých riešení , ktoré dostaneme ako korene charakteristického polynómu $n$-tého rádu. Ak niektorý z koreňov $r_i$ je $k$ – násobným koreňom $y_i = e^{r_i x}, y_{i+1} = e^{r_i x}x, \dots , y_{i+(k-1)} = e^{r_i x}x^{k-1}$.

  Pri polynómoch vyšších rádov $n \geq 4$ môžu byť $k$ - násobnými koreňmi aj komplexne združené korene $r_{i,i+1} = \alpha_i \pm \boldsymbol{i}\,\beta_i$. Potom

  $y_i = e^{\alpha_i x}\cos(\beta_i x), \quad y_{i+1} = e^{\alpha_i x}\sin(\beta_i x),$

  $y_{i+2} = e^{\alpha_i x}\cos(\beta_i x)\,x, \ \ y_{i+3} = e^{\alpha_i x}\sin(\beta_i x)x, \ \dots$
- Systém riešení homogénnej LDR $\{y_1, y_2, \dots , y_n\}$ voláme FUNDAMENTÁLNYM SYSTÉMOM riešenia.

## PRÍKLAD 20.

Nájdite riešenie LDR:

a) $y'' - 5y' + 6y = 0$, b) $y'' - 2y' + y = 0$ c) $y'' + 2y' + 5y = 0$, d) $y'' + 4y = 0$.

Korene kvadratickej funkcie

$P_2(x) = ax^2 + bx + c$

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \qquad D = b^2 - 4ac$

*Riešenie:*

*a)* $y'' - 5y' + 6y = 0.$

$$y = e^{rx}$$
$$y' = r\,e^{rx} \qquad r^2 e^{rx} - 5\,re^{rx} + 6\,e^{rx} = 0 \quad \Rightarrow \quad e^{rx}(r^2 - 5r + 6) = 0.$$
$$y'' = r^2 e^{rx}$$

Hľadáme korene charakteristickej rovnice $r^2 - 5r + 6 = 0$. Diskriminant $D = 25 - 24 = 1$,

čiže mám dva rôzne reálne korene $r_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$.

$y_1 = e^{3x}, \ y_2 = e^{2x} \quad \Rightarrow \quad y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{2x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$

---

b) $y'' - 2y' + y = 0$

Hľadáme korene charakteristickej rovnice $r^2 - 2r + 1 = 0$. Diskriminant $D = 4 - 4 = 0$, čiže mám jeden dvojnásobný koreň $r = r_{1,2} = \frac{2}{2} = 1$.

$y_1 = e^{1x}, \ y_2 = e^{1x}x \quad \Rightarrow \quad y = c_1 e^{x} + c_2 x e^{x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$

---

c) $y'' + 2y' + 5y = 0$

Hľadáme korene charakteristickej rovnice $r^2 + 2r + 5 = 0$. Diskriminant $D = 4 - 20 = -16$,

čiže rovnica má komplexne združené korene $\sqrt{D} = \sqrt{-16} = \sqrt{16}\,\underbrace{\sqrt{-1}}_{i} = 4\,i$

$$r_{1,2} = \frac{-2 \pm 4\,\boldsymbol{i}}{2} = \frac{-2}{2} \pm \frac{4\,\boldsymbol{i}}{2} = \underbrace{-1}_{\alpha} \pm \underbrace{2}_{\beta}\,\boldsymbol{i}.$$

$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$
$y_1 = e^{\alpha x}\sin\beta x$

$y_1 = e^{-x}\cos 2x, \quad y_2 = e^{-x}\sin 2x \quad \Rightarrow \quad y = c_1 e^{-x}\cos 2x + c_2 e^{-x}\sin 2x, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$

---

d) $y'' + 4y = 0$

Hľadáme korene charakteristickej rovnice $r^2 + 4 = 0$.

$r^2 = -4 \quad \Rightarrow \quad r_{1,2} = \pm\sqrt{-4} = \pm 2\,\boldsymbol{i} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0, \ \beta = 2$

$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$
$y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$

$y_1 = e^{0x}\cos 2x = \cos 2x, \quad y_2 = e^{0x}\sin 2x = \sin 2x \quad \Rightarrow$

$$y = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

V prípade DR 2. rádu na jednoznačné určenie partikulárneho riešenia potrebujeme dve podmienky. Poznáme dva typy podmienok:

- začiatočné $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = \widetilde{y_0}$ a
- okrajové $y(x_0) = y_0, y(x_1) = \widetilde{y_0}$.

Pri začiatočných podmienkach, dosadzujeme nielen do všeobecného riešenia DR, ale aj do jeho derivácie, ktorú si treba dopočítať.

## PRÍKLAD 21.

Nájdite riešenie LDR spĺňajúce podmienky:

a) $y'' - 10y' + 25y = 0, \ \ y(0) = 0, y'(0) = 1,$ (začiatočné podmienky)

b) $y'' + y' - 6y = 0, \ \ y(0) = 0, \ \ y(1) = {}^{1}/_{e^3}.$ (okrajové podmienky)

*Riešenie:*

a) $y'' - 10y' + 25y = 0, \ \ y(0) = 0, y'(0) = 1$

Hľadáme korene charakteristickej rovnice $r^2 - 10r + 25 = 0$. Diskriminant $D = 100 - 100 = 0$, čiže mám jeden dvojnásobný koreň $r = r_{1,2} = \frac{10}{2} = 5$ .

$y_1 = e^{5x}$, $y_2 = e^{5x}x \quad \Rightarrow \quad y = c_1 e^{5x} + c_2 x e^{5x}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$,

Hľadáme partikulárne riešenie DR spĺňajúce začiatočné podmienky:

$$y(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = c_1 \underbrace{e^0}_{1} + \underbrace{c_2 0\, e^0}_{0} \quad \Rightarrow \quad c_1 = 0$$

Aby sme mohli dosadiť do druhej podmienky, musíme si vyjadriť $y'$ :

$$y' = c_1 5e^{5x} + c_2 e^{5x} + c_2 5xe^{5x}$$

$$y'(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad 1 = c_1 5e^0 + c_2 e^0 \quad \Rightarrow \quad c_2 = 1$$

Hľadané riešenie je funkcia:

$$y = xe^{5x}.$$

---

b) $y'' + y' - 6y = 0$, $y(0) = 0$, $y(1) = {}^1/_{e^3}$

Hľadáme korene charakteristickej rovnice $r^2 + r - 6 = 0$. Diskriminant $D = 1 + 24 = 25$, čiže $r_{1,2} = \frac{-1 \pm 5}{2} = \begin{cases} -3 \\ 2 \end{cases}$.

$y_1 = e^{-3x}$, $y_2 = e^{2x} \quad \Rightarrow \quad y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{2x}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$,

Hľadáme partikulárne riešenie DR spĺňajúce okrajové podmienky:

$$y(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = c_1 \underbrace{e^0}_{1} + c_2 \underbrace{e^0}_{1} \quad \Rightarrow \quad c_2 = -c_1$$

$$y(1) = {}^1/_{e^3} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{e^3} = c_1 e^{-3} + c_2 e^2 = c_1 e^{-3} - c_1 e^2 = c_1 \left( \frac{1}{e^3} - e^2 \right) = c_1 \frac{1 - e^5}{e^3}$$

$$\Rightarrow \quad c_1 = \frac{1}{1 - e^5}, \qquad c_2 = -\frac{1}{1 - e^5}$$

Hľadané riešenie je funkcia:

$$y = \frac{1}{1 - e^5} e^{-3x} - \frac{1}{1 - e^5} e^{2x}.$$

## Príklady na prepočítanie

Nájdite riešenie LDR

**1**. $y'' - y' - 6y = 0.$

**2**. $4\,y'' - 4y' + y = 0.$

**3**. $y'' - 3y = 0.$

**4**. $y'' + 3y = 0.$

**5**. $2y'' - 3y' = 0.$

**6**. $y'' - 4y' + 13y = 0.$

**7**. $y'' - 2y' + 4y = 0.$

**8**. $9\,y''' - 6y'' + y' = 0.$

Nájdite riešenie LDR spĺňajúce podmienky:

**9**. $y'' - 7y' + 10y = 0,\qquad \begin{array}{l} y(1) = 0 \\ y'(1) = e^5 \end{array}.$

**10**. $y'' + 5y = 0,\qquad \begin{array}{l} y(0) = 3 \\ y'(0) = \sqrt{5} \end{array}.$

**11**. $y'' - 12y' + 36y = 0,\qquad \begin{array}{l} y(0) = 4 \\ y(1) = 3e^6 \end{array}.$

**12**. $y'' - 4y = 0,\qquad \begin{array}{l} y(0) = 1 - e^2 \\ y\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \end{array}.$

VÝSLEDKY

1. $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R},$ 2. $y = c_1 e^{\frac{1}{2}x} + c_2 x e^{\frac{1}{2}x},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R},$

3. $y = c_1 e^{\sqrt{3}x} + c_2 e^{-\sqrt{3}x}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, 4. $y = c_1 \sin\sqrt{3}x + c_2 \cos\sqrt{3}x$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$,

5. $y = c_1 + c_2 e^{\frac{3}{2}x}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, 6. $y = c_1 e^{2x}\cos 3x + c_2 e^{2x}\sin 3x$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$,

7. $y = c_1 e^{x}\cos\sqrt{3}x + c_2 e^{x}\sin\sqrt{3}x$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, 8. $y = c_1 + c_2 e^{\frac{1}{3}x} + c_3 x e^{\frac{1}{3}x}$, $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$

9. $y = \frac{1}{3}e^{5x} - \frac{1}{3}e^{2x+3}$, 10. $y = \sin\sqrt{5}x + 3\cos\sqrt{5}x$, 11. $y = 4e^{6x} - x\,e^{6x}$,

12. $y = e^{2x} - e^{-2x+2}$.

### 3.2.2. LDR 2. rádu so špeciálnou pravou stranou

*Čo si treba pamätať z prednášky:*

LDR s konštantnými koeficientami 2. rádu (s pravou stranou)

$$y'' + py' + qy = f(x), \qquad p, q \in \mathbb{R}.$$

Všeobecné riešenie každej LDR (akéhokoľvek rádu) sa dá vyjadriť ako súčet ľubovoľného partikulárneho riešenia tejto rovnice $y_p$ a všeobecného riešenia homogénnej rovnice $y_H$:

$$y = y_p + y_H.$$

Postup pri riešení:

- *Vypočítame riešenie homogénnej rovnice* $y_H = c_1 y_1 + c_2 y_2$.
- *Nájdeme nejaké partikulárneho riešenia rovnice* $y_p$.
- *Zapíšeme všeobecné riešenie rovnice* $y = y_p + y_H = y_p + c_1 y_1 + c_2 y_2$.
- *Ak sú k LDR pridané podmienky, dosadením do nich dopočítame konštanty* $c_1, c_2$.

Partikulárne riešenie môžeme hľadať dvoma spôsobmi. Buď **metódou variácie konštánt**, ktorá je univerzálnejšia a možno ju použiť pri ľubovoľnej pravej strane, alebo pri špeciálnych pravých stranách vieme **navrhnúť tvar partikulárneho riešenia priamo**, až na reálne konštanty, ktoré následne dopočítavame.

---

Partikulárne riešenie môžeme hľadať metódou variácie konštánt[2] v tvare:

$$y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x),$$

kde $y_1, y_2$ sú lineárne nezávislými riešeniami homogénnej rovnice a funkcie $c_1(x)$ a $c_2(x)$ počítam pomocou špeciálnych determinantov:

Wronskiánu funkcií $y_1, y_2$ $\quad W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$, $\quad W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f & y_2' \end{vmatrix}$ a $W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f \end{vmatrix}$,

kde $y_1'$, $y_2'$ sú derivácie riešení homogénnej rovnice a $f$ je funkcia na pravej strane LDR. Potom funkcie $c_1(x)$ a $c_2(x)$ rátam ako

$$c_1(x) = \int \frac{W_1}{W}\,dx, \quad c_2(x) = \int \frac{W_2}{W}\,dx\,.$$

---

## ***PRÍKLAD 22.***

Nájdite riešenie LDR: $\quad y'' - y = \frac{e^x}{e^x+1}$ .

*Riešenie:*

1. Najprv nájdeme riešenie homogénnej rovnice $y'' - y = 0$. Vypočítame korene charakteristického polynómu $\quad \mathrm{r}^2 - 1 = 0, \;\; r_{1,2} = \pm 1$. Potom
   $y_1 = e^x, \qquad y_2 = e^{-x} \qquad \Rightarrow \quad \mathrm{y_H} = \mathrm{c_1 e^x + c_2 e^{-x}}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$

2. Hľadáme partikulárne riešenie v tvare

$$y_p(x) = c_1(x)e^x + c_2(x)e^{-x}.$$

Teraz dopočítame funkcie $c_1(x)$ a $c_2(x)$ :

Najskôr vyjadríme determinanty:

---

[2] Pozri napr.

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = e^x(-e^{-x}) - e^x e^{-x} = -2,$$

$$\boldsymbol{W_1(x)} = \begin{vmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{e^{-x}} \\ \dfrac{\boldsymbol{e^x}}{\boldsymbol{e^x}+\mathbf{1}} & \boldsymbol{-e^{-x}} \end{vmatrix} = -\frac{\boldsymbol{e^x}}{\boldsymbol{e^x}+\mathbf{1}}\,\boldsymbol{e^{-x}} = -\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{e^x}+\mathbf{1}},$$

$$W_2(x) = \begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & \dfrac{e^x}{e^x+1} \end{vmatrix} = \frac{e^x}{e^x+1}\,e^x = \frac{e^{2x}}{e^x+1}.$$

Teraz vyjadrím neznáme funkcie cez integrály:

$$c_1(x) = \int \frac{-\frac{1}{e^x+1}}{-2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1\,e^x}{(e^x+1)e^x}\,dx = \begin{vmatrix} t = e^x \\ dt = e^x\,dx \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\int \frac{1+t-t}{(t+1)t}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right)dt = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right) + k_1, \quad k_1 \in \mathbb{R}$$

$$c_2(x) = \int \frac{\frac{e^{2x}}{e^x+1}}{-2}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{e^x e^x}{e^x+1}\,dx = \begin{vmatrix} t = e^x \\ dt = e^x\,dx \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\int \frac{t+1-1}{t+1}\,dt$$

$$= -\frac{1}{2}\int \left(1 - \frac{1}{t+1}\right)dt = -\frac{1}{2}(e^x - \ln(e^x+1)) + k_2, \quad k_2 \in \mathbb{R}.$$

Konštanty $k_1, k_2$ môžeme položiť rovné nule a dostaneme jedno partikulárne riešenie:

$$y_p(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right) e^x + \frac{1}{2}(\ln(e^x+1) - e^x)\ e^{-x} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^x \ln\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right) + e^{-x}\ln(e^x+1) - 1\right).$$

Všeobecným riešením diferenciálnej rovnice je funkcia $y = y_p + y_H$, čiže

$$y = \frac{1}{2}\left(e^x \ln\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right) + e^{-x}\ln(e^x+1) - 1\right) + c_1 e^x + c_2 e^{-x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

---

Keď pracujeme len so špeciálnymi typmi funkcií na pravej strane LDR, môžeme partikulárne riešenie získať iným postupom, a to priamo navrhnutím tvaru partikulárneho riešenia podľa tvaru funkcie na pravej strane. Tieto návrhy vždy obsahujú neznáme konštanty, ktoré následne dopočítame.

## *Postup pri hľadaní partikulárneho riešenia navrhnutím jeho tvaru:*

- Podľa funkcie na pravej strane navrhnem partikulárne riešenie. Riešenie obsahuje neznáme reálne konštanty.
- Následne vyjadríme derivácie tohto návrhu a dosadíme do pôvodnej LDR s pravou stranou.
- Porovnávaním koeficientov pri polynómoch, resp. funkciách na oboch stranách rovnice dostaneme lineárnu sústavu rovníc, ktorej riešením sú hľadané neznáme konštanty v návrhu riešenia.

### AKO NAVRHNÚŤ PARIKULÁRNE RIEŠENIE?

Pri špeciálnych typoch funkcií na pravej strane rovnice, vieme navrhnúť priamo tvar partikulárneho riešenia nasledovne:

- Ak $f(x) = P_n(x)e^{kx}$, kde $P_n(x)$ je polynóm n-tého stupňa, $k \in \mathbb{R}$ .

Napríklad: $f(x) = 2xe^{-x}$, $x^3 + 4 \left( = \underbrace{(x^3+4)}_{P_3(x)} e^{0x} \right)$, $5 \,(= \underbrace{5}_{P_0(x)} \; e^{0x})$, $e^{3x} (= \underbrace{1}_{P_0(x)} \; e^{3x})$, ...

**Všeobecný tvar polynómu**

$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$

*$n$ je **stupeň** polynómu, $a_i$ sú konštanty, t.j.*

$P_0(x) = a_0, \quad P_1(x) = a_0x + a_1,$

$P_2(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2, \ldots$

### *Návrhy partikulárneho riešenia:*

Nech $n$ je stupeň polynómu na pravej strane, potom konkrétny polynóm z pravej strany nahradíme v návrhu partikulárneho riešenia jeho všeobecným tvarom obsahujúcim zatiaľ neznáme konštanty.

- Ak $k$ nie je koreňom homogénnej LDR $(k \neq r_1, r_2)$

$$\mathbf{y_p} = \Big(\underbrace{\mathbf{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n}}_{\mathbf{P_n(x)}}\Big)\mathbf{e^{kx}}$$

- Ak $k$ je jednoduchým koreňom homogénnej LDR $(k = r_1 \neq r_2)$

$$\mathbf{y_p} = \Big(\underbrace{\mathbf{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n}}_{\mathbf{P_n(x)}}\Big)\mathbf{e^{kx}x}$$

- Ak $k$ je dvojnásobným koreňom homogénnej LDR $(k = r_1 = r_2)$

$$\mathbf{y_p} = \left(\underbrace{\mathbf{a_0x^n +\ a_1x^{n-1} +\ \dots\ + a_{n-1}x + a_n}}_{\mathbf{P_n(x)}}\right)\mathbf{e^{kx}x^2},$$

kde $a_0, a_1, \dots, a_n$ sú neznáme konštanty, ktorých hodnotu dostaneme zo vzťahov po dosadení do DR.

Pre jednoduchosť nebudeme v príkladoch používať indexové označenie konštánt $a_0, a_1, a_3, \dots$, ale len veľké písmena abecedy $A, B, C \dots$

## ***PRÍKLAD 23.***

Nájdite riešenie LDR:

a) $y'' - 4y' + 2y = f(x)$; $\quad i)\ f(x) = 10\, e^{-x}$,
$ii)\ f(x) = 7x\, e^{2x}$,
$iii)\ f(x) = 2x^2 + 1$,

b) $y'' - 4y' = f(x)$; $\quad i)\ f(x) = 2x + 3$,
$ii)\ f(x) = (32\, x + 4)e^{-4x}$,
$iii)\ f(x) = 10$,

c) $y'' + 8y' + 16y = f(x)$; $\quad i) f(x) = 2e^{-4x}$,
$ii)\ f(x) = 4x$.

*Riešenie:*

**a)** $y'' - 4y' + 2y = f(x)$

1. Najprv nájdeme riešenie homogénnej rovnice $y'' - 4y' + 2y = 0$. Vypočítame korene

   charakteristického polynómu $\quad \mathrm{r}^2 - 4\mathrm{r} + 2 = 0,\ r_{1,2} = \frac{4\pm\sqrt{8}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}$

   $\mathrm{y_H} = \mathrm{c_1 e^{(2+\sqrt{2})x} +\ c_2 e^{(2-\sqrt{2})x}}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$

2. Navrhneme partikulárne riešenie pre

   *i)* $\quad f(x) = \underbrace{10}_{P_0(x)}\ \underbrace{e^{-x}}_{e^{kx}}, \quad k = -1 \neq r_{1,2} \quad \Rightarrow \quad$ $y_p = Ae^{-x}$, $y_p' = -Ae^{-x}$, $y_p'' = Ae^{-x}$

   Dosadíme do rovnice $y'' - 4y' + 2y = f(x)$ a dopočítam neznámu konštantu

   $$Ae^{-x} + 4Ae^{-x} + 2\, Ae^{-x} = 10\, e^{-x} \quad \Rightarrow \quad 7\, Ae^{-x} = 10\, e^{-x} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{10}{7}$$

   $$y_p = \frac{10}{7}\ e^{-x},$$

   Všeobecné riešenie $y = y_H + y_p$:

$$y = \frac{10}{7}\ e^{-x} + c_1 e^{(2+\sqrt{2})x} + c_2 e^{(2-\sqrt{2})x}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

---

*ii)* $f(x) = \underbrace{7x}_{P_1(x)}\ \underbrace{e^{2x}}_{e^{kx}}, \quad k = 2 \neq r_{1,2} \quad \Rightarrow$

$$y_p = (Ax + B)e^{2x}$$
$$y_p' = Ae^{2x} + (Ax + B)2e^{2x} = (2Ax + A + 2B)e^{2x}$$
$$y_p'' = 2Ae^{2x} + (2Ax + A + 2B)2e^{2x} = (4Ax + 4A + 4B)e^{2x}$$

Dosadíme do rovnice $y'' - 4y' + 2y = f(x)$

$$(4Ax + 4A + 4B)\cancel{e^{2x}} - 4(2Ax + A + 2B)\cancel{e^{2x}} + 2(Ax + B)\cancel{e^{2x}} = 7x\ \cancel{e^{2x}}$$

Porovnáme koeficienty polynómu:

$ax + b = cx + d \quad \Leftrightarrow \quad a = c,\ b = d$

Pri $x$: $4A - 4 \cdot 2A + 2A = 7 \quad \Rightarrow -2A = 7 \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{7}{2}$

$x^0$: $4A + 4B - 4(A + 2B) + 2B = 0 \quad \Rightarrow \quad -2B = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 0$

$$y_p = -\frac{7}{2}xe^{2x},$$

$$y = -\frac{7}{2}xe^{2x} + c_1 e^{(2+\sqrt{2})x} + c_2 e^{(2-\sqrt{2})x}, \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

---

*iii)* $f(x) = 2x^2 + 1 = \underbrace{(2x^2 + 1)}_{P_2(x)}\ \underbrace{e^{0x}}_{e^{kx}}, \quad k = 0 \neq r_{1,2} \quad \Rightarrow$

$$y_p = Ax^2 + Bx + C$$
$$y_p' = 2Ax + B$$
$$y_p'' = 2A$$

Dosadíme do rovnice $y'' - 4y' + 2y = f(x)$ a porovnám koeficienty polynómu

$2A - 4(2Ax + B) + 2(Ax^2 + Bx + C) = 2x^2 + 1$

Pri $x^2$: $2A = 2 \quad \Rightarrow \quad A = 1$

$x$: $-4 \cdot 2A + 2B = 0 \quad \Rightarrow \quad 2B = 8 \quad \Rightarrow \quad B = 4$

$x^0$: $2A - 4B + 2C = 1 \quad \Rightarrow \quad 2C = 1 - 2 + 16 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{15}{2}$

$$y_p = x^2 + 4x + \frac{15}{2},$$

$$y = x^2 + 4x + \frac{15}{2} + c_1 e^{(2+\sqrt{2})x} + c_2 e^{(2-\sqrt{2})x}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

---

**b)** $y'' - 4y' = f(x)$

*1.* Najprv nájdeme riešenie homogénnej rovnice $y'' - 4y' = 0$. Vypočítame korene charakteristického polynómu $\mathrm{r}^2 - 4\mathrm{r} = \mathrm{r}(\mathrm{r}-4) = 0$, $r_{1,2} = \begin{cases} 0 \\ 4 \end{cases}$,

$$\mathrm{y_H} = \mathrm{c_1 e^{0x}} + \mathrm{c_2 e^{4x}} = \mathrm{c_1} + \mathrm{c_2 e^{4x}}.$$

2. Navrhneme partikulárne riešenie pre

*i)* $f(x) = 2x + 3 = \underbrace{(2x+3)}_{P_1(x)} \underbrace{e^{0x}}_{e^{kx}}$, $k = 0 = r_1 \neq r_2 \Rightarrow$

$$y_p = (Ax + B)x = Ax^2 + Bx$$
$$y_p' = 2Ax + B$$
$$y_p'' = 2A$$

Dosadíme do rovnice $y'' - 4y' = f(x)$

$$2A - 4(2Ax + B) = 2x + 3$$

Porovnáme koeficienty polynómu:

Pri $x$: $-8A = 2 \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{1}{4}$

$x^0$: $2\mathrm{A} - 4\mathrm{B} = 3 \quad \Rightarrow \quad 4B = -\frac{1}{2} - 3 \quad \Rightarrow \quad B = -\frac{7}{8}$

$$y_p = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{7}{8}x,$$

$$y = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{7}{8}x + c_1 + c_2 e^{4x}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

---

*ii)* $f(x) = \underbrace{(32x + 4)}_{P_1(x)} \underbrace{e^{-4x}}_{e^{kx}}$, $k = -4 \neq r_{1,2} \Rightarrow$

$$y_p = (Ax + B)e^{-4x}$$
$$y_p' = Ae^{-4x} - (Ax + B)4e^{-4x} = (-4Ax + A - 4B)e^{-4x}$$
$$y_p'' = -4A\,e^{-4x} - (-4Ax + A - 4B)4\,e^{-4x} = (16Ax - 8A + 16B)e^{-4x}$$

Dosadíme do rovnice $y'' - 4y' = f(x)$

$$(16Ax - 8A + 16B)\cancel{e^{-4x}} - 4(-4Ax + A - 4B)\cancel{e^{-4x}} = (32x + 4)\,\cancel{e^{-4x}}$$

Porovnáme koeficienty polynómu:

Pri $x$: $16A + 16A = 32 \quad \Rightarrow \quad A = 1$

$x^0$: $-8\mathrm{A} + 16\mathrm{B} - 4(\mathrm{A} - 4\mathrm{B}) = 4 \quad \Rightarrow \quad -12A + 32B = 4 \quad \Rightarrow \quad B = \frac{1}{2}$

$$y_p = \left(x + \frac{1}{2}\right)e^{-4x},$$

$$y = \left(x + \tfrac{1}{2}\right) e^{-4x} + c_1 + c_2 e^{4x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

---

*iii)* $f(x) = 10 = \underbrace{10}_{P_0(x)} \underbrace{e^{0x}}_{e^{kx}}, \quad k = 0 = r_1 \neq r_2 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} y_p &= Ax \\ y_p' &= A \\ y_p'' &= 0 \end{aligned}$

Dosadíme do rovnice $y'' - 4y' = f(x)$

$$0 - 4A = 10 \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{5}{2}$$

$$y_p = -\frac{5}{2}x, \qquad y = -\frac{5}{2}x + c_1 + c_2 e^{4x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

---

**c)** $y'' + 8y' + 16y = f(x)$

1. Najprv nájdeme riešenie homogénnej rovnice $y'' + 8y' + 16y = 0$. Charakteristický polynóm $r^2 + 8r + 16 = 0$ má dvojnásobný koreň $r = r_1 = r_2 = -4$

   $y_H = c_1 e^{-4x} + c_2 x e^{-4x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$

2. Navrhneme partikulárne riešenie pre

*i)* $f(x) = \underbrace{2}_{P_0(x)} \underbrace{e^{-4x}}_{e^{kx}}, \quad k = -4 = r_1 = r_2 \quad \Rightarrow$

$$\begin{aligned} y_p &= Ae^{-4x}x^2 \\ y_p' &= -4Ae^{-4x}x^2 + Ae^{-4x}2x = \quad Ae^{-4x}(-4x^2 + 2x) \\ y_p'' &= -4Ae^{-4x}(-4x^2 + 2x) + Ae^{-4x}(-8x + 2) = Ae^{-4x}(16x^2 - 16x + 2) \end{aligned}$$

Dosadíme do rovnice $y'' + 8y' + 16y = f(x)$

$$A\cancel{e^{-4x}}(16x^2 - 16x + 2) + 8A\cancel{e^{-4x}}(-4x^2 + 2x) + 16A\cancel{e^{-4x}}x^2 = 2\cancel{e^{-4x}}$$

Porovnáme koeficienty polynómu:

Pri $x^2$: $16A - 32A + 16A = 0$

$x$: $-16A + 16A = 0$

$x^0$: $2A = 2 \quad \Rightarrow \quad A = 1$

$$y_p = e^{-4x}x^2, \qquad y = e^{-4x}x^2 + c_1 e^{-4x} + c_2 x e^{-4x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

---

*ii)* $f(x) = 4x = \underbrace{4x}_{P_1(x)}\ \underbrace{e^{0x}}_{e^{kx}},\quad k = 0 \neq r_{1,2} \quad \Rightarrow \qquad \begin{aligned} y_p &= Ax + B \\ y_p' &= A \\ y_p'' &= 0 \end{aligned}$

Dosadíme do rovnice $y'' + 8y' + 16y = f(x)$

$8A + 16(Ax + B) = 4x$

Porovnáme koeficienty polynómu:

Pri $x$: $16A = 4 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{4}$

$x^0$: $8A + 16B = 0 \quad \Rightarrow \quad B = -\frac{1}{8}$

$y_p = \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}, \qquad y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{8} + c_1e^{-4x} + c_2xe^{-4x}\ c_1 + c_2e^{4x},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$

Pravú stranu môžeme ešte zovšeobecniť pridaním trigonometrickej funkcie:

Ak $f(x) = (P_n(x)\sin(lx) + Q_m(x)\cos(lx))e^{kx}$ kde $P_n(x), Q_m(x)$ sú polynómy n-tého a m-tého stupňa (alebo 0) a $k, l \in \mathbb{R}$

Napríklad:

$$\begin{aligned}
f(x) &= 2\sin(3x) \left( = \left( \underbrace{2}_{P_0(x)} \sin(3x) + 0\cos(3x) \right) e^{0x} \right), \\
&= e^{3x}\cos(x) \left( = \left( \underbrace{1}_{P_0(x)} \cos(1x) + 0\sin(1x) \right) e^{3x} \right), \\
&= 3\sin(5x) - 2\cos(5x) \left( = \left( \underbrace{3}_{P_0(x)} \sin(5x) - \underbrace{2}_{Q_0(x)} \cos(5x) \right) e^{0x} \right), \\
&= x^2e^{3x}\cos x \left( = \left( 0\sin(1x) + \underbrace{x^2}_{Q_2(x)} \cos(1x) \right) e^{3x} \right), \\
&= (3x+2)\sin(5x) - 2\cos(5x) \left( = \left( \underbrace{(3x+2)}_{P_1(x)} \sin(5x) - \underbrace{2}_{Q_0(x)} \cos(5x) \right) e^{0x} \right) \\
&= \left( \underbrace{(x+2)}_{P_1(x)} \sin(2x) - \underbrace{x^3}_{Q_3(x)} \cos(2x) \right) e^{-2x}
\end{aligned}$$

***Návrhy partikulárneho riešenia:***

Označme $\tilde{n} = \max\ (n, m)$, t.j. maximálny stupeň polynómu na pravej strane

- Ak $k\ \pm \mathbf{i}\, l$ nie sú koreňmi homogénnej LDR $\ (k\ \pm \mathbf{i}\, l \neq \alpha \pm \boldsymbol{i}\, \beta)$

$$\mathbf{y_p} = (\mathbf{P_{\tilde{n}}(x)\sin(lx)} + \mathbf{Q_{\tilde{n}}(x)\ \cos(lx)})\, \mathbf{e^{kx}}$$

- Ak $k\ \pm \mathbf{i}\, l$ sú koreňmi homogénnej LDR $(k\ \pm \mathbf{i}\, l = \alpha \pm \boldsymbol{i}\, \beta\ )$

$$\mathbf{y_p} = (\mathbf{P_{\tilde{n}}(x)\sin(lx)} + \mathbf{Q_{\tilde{n}}(x)\ \cos(lx)})\, \mathbf{e^{kx}x},$$

kde $P_{\tilde{n}}(x),\ Q_{\tilde{n}}(x)$ sú všeobecné polynómy ñ-tého stupňa so zatiaľ neznámymi koeficientami, t.j.

$$\boldsymbol{P_{\tilde{n}}(x)} = \mathbf{a_0x^{\tilde{n}}} + \mathbf{a_1x^{\tilde{n}-1}} + \ \dots + \mathbf{a_{\tilde{n}-1}x} + \mathbf{a_{\tilde{n}}},$$

$$\mathbf{Q_{\tilde{n}}(x)} = \mathbf{b_0x^{\tilde{n}}} + \mathbf{b_1x^{\tilde{n}-1}} + \ \dots + \mathbf{b_{\tilde{n}-1}x} + \mathbf{b_{\tilde{n}}}\ .$$

---

## PRÍKLAD 24.

Nájdite riešenie LDR:

a) $y'' - 3y' + 2y = f(x)$; $\ i)\ f(x) = \sin 2x$

$ii)\ f(x) = e^{2x}\cos x$

$iii)\ f(x) = (2x + 1)\sin x.$

b) $y'' + y = f(x)$; $\quad i)\ f(x) = 2\cos x$

$ii)\ f(x) = e^{-x}\sin x$

$iii)\ f(x) = x^2e^{3x}\cos x\ \ $ (len návrh )

$iv)\ f(x) = x\sin x - \cos x\ \ $ (len návrh ).

*Riešenie:*

**a)** $y'' - 3y' + 2y = f(x)$

*1.* Najprv nájdeme riešenie homogénnej rovnice $y'' - 3y' + 2y = 0$. Charakteristický polynóm

$r^2 - 3r + 2 = 0$ má dva reálne korene $\ r_{1,2} = \frac{3\pm1}{2} = \begin{cases}2\\1\end{cases} \quad \Rightarrow$

$y_H = c_1e^{2x} + c_2e^x\,, \qquad c_1, c_2\ \in \mathbb{R}.$

2. Navrhneme partikulárne riešenie pre

*i)* $\quad f(x) = \sin 2x = \underbrace{1}_{P_0(x)}\ \underbrace{e^{0x}}_{e^{kx}}\ \underbrace{\sin 2x}_{\sin lx}, \quad k = 0, l = 2 \quad 0 \pm 2\boldsymbol{i}\ \neq r_{1,2} \quad \Rightarrow$

*Aj keď pravá strana rovnice obsahuje len jednu z funkcií* $\sin(lx), \cos(lx)$, *v návrhu partikulárneho riešenia musia figurovať obidve !!!*

$$y_p = A\sin 2x + B\cos 2x$$
$$y_p' = 2A\cos 2x - 2B\sin 2x$$
$$y_p'' = -4A\sin 2x - 4B\cos 2x$$

Dosadíme do rovnice $y'' - 3y' + 2y = f(x)$

$$-4A\sin 2x - 4B\cos 2x - 3(2A\cos 2x - 2B\sin 2x) + 2(A\sin 2x + B\cos 2x) = \sin 2x$$

Porovnáme koeficienty pri funkciách $\sin 2x$ a $\cos 2x$:

Pri $\sin 2x: -4A + 6B + 2A = 1 \quad \Rightarrow \quad -2A + 6B = 1$

$\cos 2x: -4B - 6A + 2B = 0 \quad \Rightarrow \quad -6A - 2B = 0 \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{1}{20}, \quad B = \frac{3}{20}$

$$y_p = -\frac{1}{20}\sin 2x + \frac{3}{20}\cos 2x,$$

$$y = -\frac{1}{20}\sin 2x + \frac{3}{20}\cos 2x + c_1e^{2x} + c_2e^x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

---

*ii)* $f(x) = e^{2x}\cos x = \underbrace{1}_{P_0(x)}\ \underbrace{e^{2x}}_{e^{kx}}\ \underbrace{\cos x}_{\cos lx}, \quad k = 2, l = 1 \quad 2 \pm \boldsymbol{i} \neq r_{1,2} \quad \Rightarrow$

$$y_p = (A\sin x + B\cos x)e^{2x}$$
$$y_p' = (A\cos x - B\sin x)e^{2x} + 2(A\sin x + B\cos x)e^{2x} =$$
$$= \big((2A - B)\sin x + (A + 2B)\cos x\big)e^{2x}$$
$$y_p'' = \big((2A - B)\cos x - (A + 2B)\sin x\big)e^{2x} + \big((2A - B)\sin x + (A + 2B)\cos x\big)2e^{2x} =$$
$$= \big((3A - 4B)\sin x + (4A + 3B)\cos x\big)e^{2x}$$

Dosadíme do rovnice $y'' - 3y' + 2y = f(x)$

$$\big((3A - 4B)\sin x + (4A + 3B)\cos x\big)\cancel{e^{2x}} - 3\big((2A - B)\sin x + (A + 2B)\cos x\big)\cancel{e^{2x}}$$
$$+ 2(A\sin x + B\cos x)\cancel{e^{2x}} = \cancel{e^{2x}}\cos x$$

Porovnáme koeficienty pri funkciách $\sin x$ a $\cos x$:

Pri $\sin x: 3A - 4B - 3(2A - B) + 2A = 0 \quad \Rightarrow \quad -A - B = 0$

$\cos x: 4A + 3B - 3(A + 2B) + 2B = 1 \quad \Rightarrow \quad A - B = 1 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{2}, \quad B = -\frac{1}{2}$

$$y_p = \left(\frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x\right)e^{2x},$$

$$y = \left(\frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x\right)e^{2x} + c_1e^{2x} + c_2e^x, \quad c_1, c_2 \in R.$$

---

*iii)* $f(x) = (2x+1)\sin x = \underbrace{(2x+1)}_{P_1(x)}\,\underbrace{e^{0x}}_{e^{kx}}\,\underbrace{\sin x}_{\sin lx}, \quad k=0, l=1 \quad 0 \pm \boldsymbol{i} \neq r_{1,2} \quad \Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
y_p &= (Ax+B)\sin x + (Cx+D)\cos x \\
y_p' &= A\sin x + (Ax+B)\cos x + C\cos x - (Cx+D)\sin x = \\
&= (-Cx+A-D)\sin x + (Ax+B+C)\cos x \\
y_p'' &= -C\sin x + (-Cx+A-D)\cos x + A\cos x - (Ax+B+C)\sin x = \\
&= (-Ax-B-2C)\sin x + (-Cx+2A-D)\cos x
\end{aligned}
$$

Dosadíme do rovnice $y'' - 3y' + 2y = f(x)$

$$
\begin{aligned}
&(-Ax-B-2C)\sin x + (-Cx+2A-D)\cos x \\
&\quad - 3\big((-Cx+A-D)\sin x + (Ax+B+C)\cos x\big) \\
&\quad + 2\big((Ax+B)\sin x + (Cx+D)\cos x\big) = (2x+1)\sin x
\end{aligned}
$$

Porovnáme koeficienty pri funkciách $\sin x$ a $\cos x$:

$$
\begin{aligned}
&\text{Pri } \sin x: \text{ pri } x: & -A+3C+2A &= 2 & \Rightarrow\quad & A + 3C = 2 \\
&\text{pri } x^0: & -B-2C-3A+3D+2B &= 1 & \Rightarrow\quad & -3A+B-2C+3D = 1 \\
&\cos x: \text{ pri } x: & -C-3A+2C &= 0 & \Rightarrow\quad & -3A + C = 0 \\
&\text{pri } x^0: & 2A - D - 3B - 3C + 2D &= 0 & \Rightarrow\quad & 2A-3B-3C+D = 0
\end{aligned}
$$

Riešením sústavy dostaneme $A = 0.2, B = 0.14, C = 0.6, D = 0.98$

$$y_p = (0.2x+0.14)\sin x + (0.6x+0.98)\cos x,$$

$$y = (0.2x+0.14)\sin x + (0.6x+0.98)\cos x + c_1e^{2x} + c_2e^{x}, \quad c_1, c_2 \in R.$$

---

**b)** $y'' + y = f(x)$

*1.* Najprv nájdeme riešenie homogénnej rovnice $y'' + y = 0$.

$r^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 = -1 \quad \Rightarrow \quad r_{1,2} = \pm\sqrt{-1} = \pm\boldsymbol{i} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0, \beta = 1.$

$$y_H = c_1\sin x + c_2\cos x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2. Navrhneme partikulárne riešenie pre

*i)* $f(x) = 2\cos x = \underbrace{2}_{P_0(x)}\,\underbrace{e^{0x}}_{e^{kx}}\,\underbrace{\cos x}_{\cos lx}, \quad k=0, l=1 \quad 0 \pm \boldsymbol{i} = r_{1,2} \quad \Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
y_p &= (A\sin x + B\cos x)x \\
y_p' &= (A\cos x - B\sin x)x + (A\sin x + B\cos x) \\
y_p'' &= (-A\sin x - B\cos x)x + 2(A\cos x - B\sin x)
\end{aligned}
$$

*Všimnime si, že ak by sme v návrhu part. riešenia nepridali $x$, $y_H$ a $y_p$ by sa zhodovali. Žiadna funkcia nemôže byť zároveň riešením homogénnej rovnice a rovnice s nenulovou pravou stranou. To isté platí v predchádzajúcich prípadoch, keď sme do návrhu pridávali $x$.*

Dosadíme do rovnice $y'' + y = f(x)$

$$\cancel{(-A\sin x - B\cos x)}x + 2(A\cos x - B\sin x) + \cancel{(A\sin x + B\cos x)}x = 2\cos x$$

Porovnáme koeficienty pri funkciách $\sin x$ a $\cos x$:

Pri $\sin x: -2B = 0 \quad \Rightarrow \; B = 0;$

$\cos x: 2A = 2 \quad \Rightarrow \; A = 1;$

$y_p = x\sin x, \qquad y = x\sin x + c_1\sin x + c_2\cos x, \quad c_1, c_2 \in R.$

---

*ii)* $f(x) = \underbrace{1}_{P_0(x)} \underbrace{e^{-x}}_{e^{kx}} \underbrace{\sin x}_{\sin lx}, \quad k = -1, l = 1, \; -1 \pm \boldsymbol{i} \neq r_{1,2}$

$$y_p = (A\sin x + B\cos x)e^{-x}$$

$$y_p' = (A\cos x - B\sin x)e^{-x} - (A\sin x + B\cos x)e^{-x} = \big((A-B)\cos x - (A+B)\sin x\big)e^{-x}$$

$$y_p'' = (-(A-B)\sin x - (A+B)\cos x)e^{-x} - \big((A-B)\cos x - (A+B)\sin x\big)e^{-x}$$

$$= \big((-2A)\cos x - (2B)\sin x\big)e^{-x}$$

Dosadíme do rovnice $y'' + y = f(x)$

$$\big((-2A)\cos x - (2B)\sin x\big)\cancel{e^{-x}} + (A\sin x + B\cos x)\cancel{e^{-x}} = \cancel{e^{-x}}\sin x$$

Porovnáme koeficienty pri funkciách $\sin x$ a $\cos x$:

Pri $\sin x: -2B + A = 1$

$\cos x: -2A + B = 0 \quad \Rightarrow \; A = -\frac{1}{3}, B = -\frac{2}{3};$

$$y_p = \left(-\frac{1}{3}\sin x - \frac{2}{3}\cos x\right)e^{-x},$$

$$y = \left(-\frac{1}{3}\sin x - \frac{2}{3}\cos x\right)e^{-x} + c_1\sin x + c_2\cos x, \quad c_1, c_2 \in R.$$

---

V nasledujúcich prípadoch navrhneme len tvar partikulárneho riešenia:

*iii)* $f(x) = \underbrace{x^2}_{P_2(x)} \underbrace{e^{3x}}_{e^{kx}} \underbrace{\cos x}_{\cos lx}, \quad k = 3, l = 1, \; 3 \pm \boldsymbol{i} \neq r_{1,2}$

$$y_p = \big((Ax^2 + Bx + C)\sin x + (Ex^2 + Fx + G)\cos x\big)e^{3x}.$$

---

*iv)* $f(x) = x\sin x - \cos x = \underbrace{x}_{P_1(x)} \underbrace{e^{0x}}_{e^{kx}} \underbrace{\sin x}_{\sin lx} + \underbrace{(-1)}_{P_0(x)} \underbrace{e^{0x}}_{e^{kx}} \underbrace{\cos x}_{\cos lx}, \quad k = 0, l = 1, \; 0 \pm \boldsymbol{i} = r_{1,2}$

Pri funkcii $\sin x$ je polynóm 1. stupňa, pri $\cos x$ 0. stupňa, $\tilde{n} = \max(1,0) = 1 \quad \Rightarrow$

$$y_p = \big((Ax + B)\sin x + (Cx + D)\cos x\big)x.$$

- Princíp superpozície

Ak pravá strana LDR rovnice je tvorená súčtom funkcií

$y'' + py' + qy = f_1(x) + \cdots + f_n(x),$

všeobecné riešenie tejto rovnice sa dá vyjadriť ako súčet partikulárnych riešení LDR s pravou stranou $f_i(x)$, $i = 1 \dots n$ a všeobecného riešenia homogénnej rovnice .

$y'' + py' + qy = 0 \quad \to \quad y_H$

$y'' + py' + qy = f_1(x) \quad \to \quad y_{p_1} \qquad\qquad y = y_{p_1} + \cdots + y_{p_n} + y_H.$

$\vdots$

$y'' + py' + qy = f_n(x) \quad \to \quad y_{p_n}$

- Rovnakým postupom riešime aj LDR $n$-tého rádu $n > 2$ , len charakteristická rovnica bude polynóm $n$-tého rádu s $n$ koreňmi (vrátane násobnosti).

## PRÍKLAD 25.

Nájdite riešenie LDR:

a) $y'' - 2y' + y = e^x \cos 2x + 2e^x$

b) $y''' - 2y'' + 2y' = \sin x + 6e^x + 4$

*Riešenie:*

**a)** $y'' - 2y' + y = e^x \cos 2x + 2e^x$

*1.* Najprv nájdeme riešenie homogénnej rovnice $y'' - 2y' + y = 0$.

$\mathrm{r}^2 - 2\mathrm{r} + 1 = 0 \qquad \Rightarrow \mathrm{r} = \mathrm{r}_{1,2} = 1$

$\mathrm{y_H} = \mathrm{c_1 e^x} + \mathrm{c_2 x\, e^x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$

*2.* Navrhneme partikulárne riešenie pre $f_1(x) = e^x \cos 2x$.

*Keď charakteristická rovnica nemá komplexné korene, pri tomto type pravej strany (obsahujúcej funkcie sin a cos ) nikdy nepridávame $x$. Nemôže platiť rovnosť $k \pm \boldsymbol{i}\, l = r_i$ .*

$$y_{p_1} = (A\sin 2x + B\cos 2x)e^x$$
$$y'_{p_1} = (2A\cos 2x - 2B\sin 2x)e^x + (A\sin 2x + B\cos 2x)e^x =$$
$$= \big((A-2B)\sin 2x + (B+2A)\cos 2x\big)e^x$$
$$y''_{p_1} = \big((A-2B)2\cos 2x - (B+2A)2\sin 2x\big)e^x + \big((A-2B)\sin 2x + (B+2A)\cos 2x\big)e^x =$$
$$= \big((-3A-4B)\sin 2x + (-3B+4A)\cos 2x\big)e^x$$

Dosadíme do rovnice: $y'' - 2y' + y = e^x \cos 2x$

$$\big((-3A-4B)\sin 2x + (-3B+4A)\cos 2x\big)\cancel{e^x} - 2\big((A-2B)\sin 2x + (B+2A)\cos 2x\big)\cancel{e^x} +$$
$$+(A\sin 2x + B\cos 2x)\cancel{e^x} = \cancel{e^x}\cos 2x$$

Porovnáme koeficienty pri funkciách $\sin 2x$ a $\cos 2x$:

Pri $\sin 2x: -3A - 4B - 2A + 4B + A = 0 \quad \Rightarrow \quad -4A = 0 \quad \Rightarrow \quad A = 0$

$\cos 2x: -3B + 4A - 2B - 4A + B = 1 \quad \Rightarrow \quad -4B = 1 \quad \Rightarrow \quad B = -\frac{1}{4}$

$$y_{p_1} = \left(-\frac{1}{4}\cos 2x\right)e^x.$$

3. Navrhneme partikulárne riešenie pre $f_2(x) = 2e^x$. $k = 1 = r_{1,2}$

$$y_{p_2} = Ae^x x^2$$
$$y'_{p_2} = Ae^x x^2 + Ae^x 2x = Ae^x(x^2 + 2x)$$
$$y''_{p_2} = Ae^x(x^2 + 2x) + Ae^x(2x + 2) = Ae^x(x^2 + 4x + 2)$$

Dosadíme do rovnice $y'' - 2y' + y = 2e^x$

$$A\cancel{e^x}(x^2 + 4x + 2) - 2A\cancel{e^x}(x^2 + 2x) + A\cancel{e^x}x^2 = 2\cancel{e^x}$$

Porovnáme koeficienty polynómu:

Pri $x^2: A - 2A + A = 0$

$x\ :\ 4A - 4A = 0$

$x^0: 2A = 2 \quad \Rightarrow \quad A = 1$

$$y_{p_2} = e^x x^2$$

Riešením rovnice je

$$y = c_1 e^x + c_2 x\, e^x + \left(-\frac{1}{4}\cos 2x\right)e^x + e^x x^2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

---

**b)** $y''' - 2y'' + 2y' = \sin x + 6e^x + 4$

1. Najprv nájdeme riešenie homogénnej rovnice $y''' - 2y'' + 2y' = 0$.

$\mathrm{r}^3 - 2\mathrm{r}^2 + 2\mathrm{r} = \mathrm{r}(\mathrm{r}^2 - 2\mathrm{r} + 2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{r}_1 = 0, \ \mathrm{r}_{2,3} = 1 \pm \boldsymbol{i}$

$$y_H = c_1 \underbrace{e^{0x}}_{1} + c_2 e^x \sin x + c_3 e^x \cos x \,, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

2. Navrhneme partikulárne riešenie pre $f_1(x) = \sin x$. $k = 0, l = 1,\; 0 \pm \boldsymbol{i} \neq r_i,\; i = 1,2,3$

$$\begin{aligned} y_{p_1} &= A \sin x + B \cos x \\ y'_{p_1} &= A \cos x - B \sin x \\ y''_{p_1} &= -A \sin x - B \cos x \\ y'''_{p_1} &= -A \cos x + B \sin x \end{aligned}$$

Dosadíme do rovnice: $y''' - 2y'' + 2y' = \sin x$ :

$$-A \cos x + B \sin x - 2(-A \sin x - B \cos x) + 2\,(A \cos x - B \sin x) = \sin x$$

Porovnáme koeficienty pri funkciach $\sin x$ a $\cos x$:

Pri $\sin x$ : $B + 2A - 2B = 1 \quad \Rightarrow \quad 2A - B = 1$

$\cos x$: $-A + 2B + 2A = 0 \quad \Rightarrow \quad A + 2B = 0 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{2}{5}\,,\; B = -\frac{1}{5}$

$$y_{p_1} = \frac{2}{5} \sin x - \frac{1}{5} \cos x.$$

3. Navrhneme partikulárne riešenie pre $f_2(x) = 6\, e^x$. $k = 1,\; 1 \neq r_i,\; i = 1,2,3$

$$\begin{aligned} y_{p_2} &= Ae^x \\ y'_{p_2} &= Ae^x \\ y''_{p_2} &= Ae^x \\ y'''_{p_2} &= Ae^x \end{aligned}$$

Dosadíme do rovnice $y''' - 2y'' + 2y' = 6e^x$ :

$Ae^x - 2Ae^x + 2\,Ae^x = 6e^x \quad \Rightarrow \quad A = 6$

$$y_{p_2} = 6e^x.$$

4. Navrhneme partikulárne riešenie pre $f_3(x) = 4$. $k = 0$, $0 = r_1$

$$\begin{aligned} y_{p_3} &= Ax \\ y'_{p_3} &= A \\ y''_{p_3} &= 0 \\ y'''_{p_3} &= 0 \end{aligned}$$

Dosadíme do rovnice $y''' - 2y'' + 2y' = 4$ :

$2\,A = 4 \quad \Rightarrow \quad A = 2$

$$y_{p_3} = 2x.$$

Riešením DR je funkcia

$$y = \frac{2}{5} \sin x - \frac{1}{5} \cos x + 6e^x + 2x + c_1 + c_2 e^x \sin x + c_3 e^x \cos x \,, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

## *Príklady na prepočítanie*

Nájdite riešenie LDR:

**1.** $y'' + 3y' - 4y = f(x)$; $a)$ $f(x) = 2x + 1$;

$b)$ $f(x) = 12e^{4x}$;

$c)$ $f(x) = -4x^2 + 1$;

$d)$ $f(x) = 10xe^{x}$;

$e)$ $f(x) = -26e^{x} \sin x$.

**2.** $y'' + 4y' + 4y = f(x)$; $a)$ $f(x) = 8$;

$b)$ $f(x) = (16x + 24)e^{2x}$;

$c)$ $f(x) = 6e^{-2x}$;

$d)$ $f(x) = 11 \cos x + 2 \sin x$ .

**3.** $2\, y'' - y' = f(x)$ ; $a)$ $f(x) = 10$;

$b)$ $f(x) = 2x + 1$;

$c)$ $f(x) = (x - 1)e^{x}$;

$d)$ $f(x) = -17 \cos 2x$ .

**4.** $y'' + y = f(x)$ ; $a)$ $f(x) = 2e^{-2x}$;

$b)$ $f(x) = 5e^{-x} \sin x$ ;

$c)$ $f(x) = x^2$;

$d)$ $f(x) = 3 \cos x$ .

**5.** $y'' - 2y = f(x)$ ; $a)$ $f(x) = 2x^3$;

$b)$ $f(x) = 2e^{\sqrt{2}x}$;

$c)$ $f(x) = 6 \cos 2x - \sin 2x$ ;

$d)$ $f(x) = 3xe^{2x}$ .

**6.** $y'' - 6y' + 13y = f(x)$ ; $a)$ $f(x) = 8e^{3x}$ ;

$b)$ $f(x) = 26x^2 + 1$;

$c)$ $f(x) = 25 \cos 2x$ ;

$d)$ $f(x) = 2e^{3x} \sin 2x$ .

**7.** $2y'' - 3y' - 2y = f(x)$; $a)\ f(x) = x^2 + 3x$;

$b)\ f(x) = 9e^{-2x} + 10e^{2x}$;

$c)\ f(x) = 4 - 34\cos 2x$;

$d)\ f(x) = -53e^{2x}\sin x$.

**8.** $y''' - 6y'' + 9y' = f(x)$; $a)\ f(x) = 36x - 21$;

$b)\ f(x) = 54e^{-3x} + 6$;

$c)\ f(x) = 18e^{3x}$;

$d)\ f(x) = 169\cos 2x - 25\sin x$.

## VÝSLEDKY

1. $y = c_1e^x + c_2e^{-4x} + y_p,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $a)\ y_p = -\frac{1}{2}x - \frac{5}{8}$;

$b)\ y_p = \dfrac{1}{2}e^{4x}$;

$c)\ y_p = x^2 + \dfrac{3}{2}x + \dfrac{11}{8}$;

$d)\ y_p = \left(x^2 - \dfrac{2}{5}x\right)e^x$;

$e)\ y_p = e^x(\sin x + 5\cos x)$.

2. $y = c_1e^{-2x} + c_2xe^{-2x} + y_p,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $a)\ y_p = 2$;

$b)\ y_p = (x+1)e^{2x}$;

$c)\ y_p = 3x^2e^{-2x}$;

$d)\ y_p = 2\sin x + \cos x$.

3. $y = c_1 + c_2e^{\frac{x}{2}} + y_p,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $a)\ y_p = -10x$;

$b)\ y_p = -x^2 - 5x$;

$c)\ y_p = (x-4)e^x$;

$d)\ y_p = \dfrac{1}{2}\sin 2x + 2\cos 2x$.

4. $y = c_1\sin x + c_2\cos x + y_p,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $a)\ y_p = \frac{2}{5}e^{-2x}$;

$b)\ y_p = e^{-x}(\sin x + 2\cos x)$;

$c)\ y_p = x^2 - 2$;

$d)\ y_p = \dfrac{3}{2}x\sin x$.

5. $y = c_1 e^{\sqrt{2}x} + c_2 e^{-\sqrt{2}x} + y_p,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R},\quad a)\ \ y_p = -x^3 - 3x;$

$b)\ y_p = \dfrac{\sqrt{2}}{2} x e^{\sqrt{2}x};$

$c)\ y_p = \dfrac{1}{6} \sin 2x - \cos 2x\,;$

$d)\ y_p = \left(\dfrac{3}{2}x - 3\right) e^{2x}.$

6. $y = c_1 e^{3x} \cos 2x + c_2 e^{3x} \sin 2x + y_p,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R},\quad a)\ \ y_p = 2e^{3x};$

$b)\ y_p = 2x^2 + \dfrac{24}{13}\,x + \dfrac{105}{169}\,;$

$c)\ y_p = -\dfrac{4}{3} \sin 2x + \cos 2x\,;$

$d)\ y_p = -\dfrac{1}{2} x e^{3x} \cos 2x.$

7. $y = c_1 e^{-\frac{1}{2}x} + c_2 e^{2x} + y_p,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R},\quad a)\ \ y_p = -\frac{1}{2}x^2 - 1;$

$b)\ y_p = \dfrac{3}{4} e^{-2x} + 2x e^{2x};$

$c)\ y_p = -2 + \dfrac{3}{2} \sin 2x + \dfrac{5}{2} \cos 2x\,;$

$d)\ y_p = (14 \sin x + 5 \cos x) e^{2x}.$

8. $y = c_1 + c_2 e^{3x} + c_3 x e^{3x} + y_p,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R},\quad a)\ \ y_p = 2x^2 + \frac{1}{3}x;$

$b)\ y_p = \dfrac{2}{3}x - \dfrac{1}{2} e^{-3x};$

$c)\ y_p = 3x^2 e^{3x};$

$d)\ y_p = -\dfrac{3}{2} \sin x + 2 \cos x + \dfrac{5}{2} \sin 2x + 6 \cos 2x.$

# 4. Funkcia dvoch a viacerých premenných

## *4.1. Základné pojmy, parciálne derivácie*

*Definičný obor funkcie $f(x,y)$* $\quad D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ \exists\ f(x,y)\}$.

### PRÍKLAD 26.

Zapíšte a znázornite definičný obor funkcie

a) $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$,

b) $f(x,y) = \ln\left(\frac{x}{y-4}\right)$,

c) $f(x,y) = \arcsin(x+4y)$,

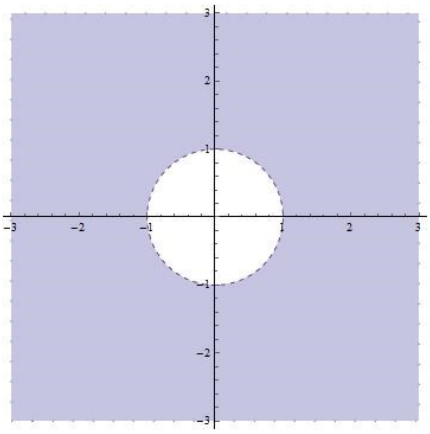
d) $f(x,y) = \frac{\sqrt{16-4x^2-y^2}}{\ln(x^2+y^2-1)}$.

*Riešenie:*

a) Hodnota $f(x,y)$ je definovaná len ak $x^2+y^2-1>0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2+y^2>1$

*mimo jednotkového kruhu*

$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y^2>1\}$.

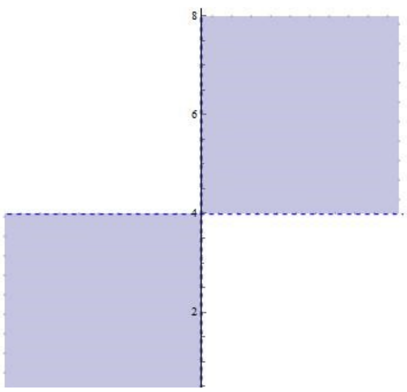



Obrázok 24

b) Funkcia $\ln x$ je definovaná len pre $x>0$.

$\Rightarrow \quad \frac{x}{y-4} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x>0 \wedge y>4) \vee (x<0 \wedge y<4)$.

$D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ \frac{x}{y-4} > 0\right\}$

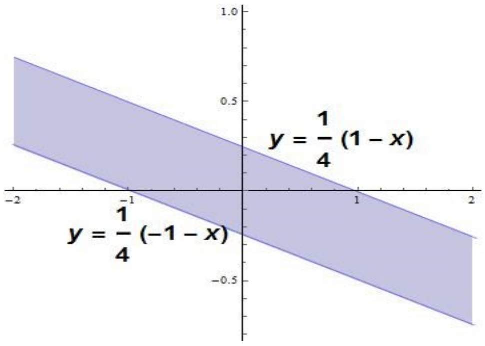



Obrázok 25

c) Funkcia $\arcsin x$ je definovaná len pre $x \in [-1, 1]$.

$\Rightarrow \ -1 \ \leq \ x + 4y \leq 1 \quad \Leftrightarrow \ \frac{1}{4}(-1 - x) \ \leq \ y \leq \frac{1}{4}(1 - x)$ *oblasť medzi dvomi rovnobežkami*

$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ |x + 4y| \ \leq 1\}$

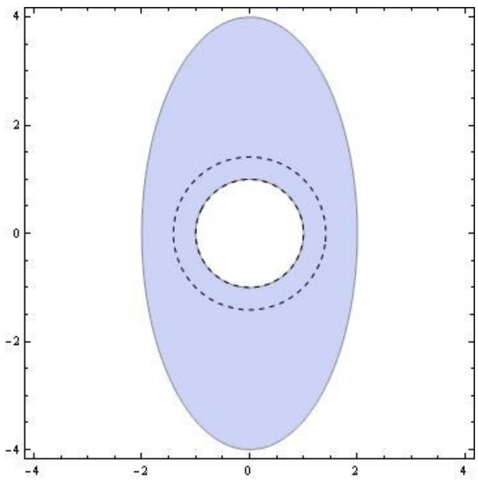



Obrázok 26

d) Hodnota $f(x, y) = \frac{\sqrt{16 - 4x^2 - y^2}}{\ln(x^2 + y^2 - 1)}$ je definovaná len ak

- $16 - 4x^2 - y^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4x^2 + y^2 \leq 16 \ \Leftrightarrow \ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} \leq 1$ *vnútro elipsy*
- $x^2 + y^2 - 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 > 1$ *mimo jednotkového kruhu*
- $\ln(x^2 + y^2 - 1) \neq 0 \ \Leftrightarrow \ x^2 + y^2 - 1 \ \neq 1 \ \Leftrightarrow \ x^2 + y^2 \neq 2$ *kružnica s polomerom* $\sqrt{2}$

$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ 4x^2 + y^2 \leq 16 \ \wedge \ x^2 + y^2 > 1 \wedge \ x^2 + y^2 \neq 2\}$




Obrázok 27

- *Kružnica* *Stred* $S[0,0]$, *polomer* $r$:
  $x^2 + y^2 = r^2$
- *Elipsa* *Stred* $S[0,0]$, $a, b$ - *výseky na osi* $x$ *a* $y$:
  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Vrstevnica - množina všetkých bodov, v ktorých má funkcia konštantnú hodnotu $f(x, y) = c$, čiže nenulový prienik grafu funkcie a roviny rovnobežnej s rovinou $xy$, $\quad z = c$.

## *PRÍKLAD 27.*

Pomocou rezov a vrstevníc načrtni graf funkcie: a) $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$, b) $f(x,y) = \sqrt{2x^2+y^2}$.

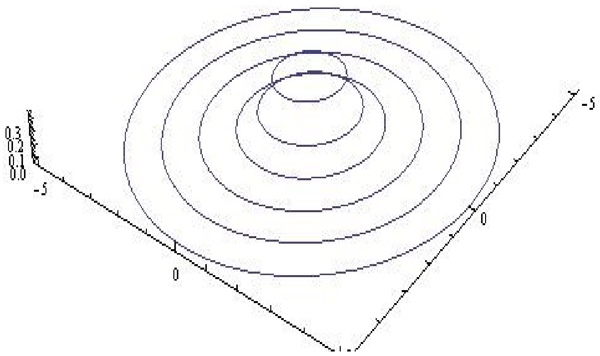
*Riešenie:*

a) Najskôr zobrazíme vrstevnice $f(x,y) = e^{-x^2-y^2} = c$, čiže prieniky grafu funkcie a roviny $z = c$.

- Keďže $e^{-x^2-y^2} > 0 \Rightarrow$ *pre všetky* $c \leq 0$ *sú prieniky prázdne, čiže graf funkcie leží celý nad základnou rovinou* $xy$, ( čiže $z = 0$).
- *Podobne* $e^{-x^2-y^2} \leq 1 \Rightarrow$ *graf funkcie leží celý pod rovinou* $z = 1$, *(až na bod* $(0,0,1)$*)*

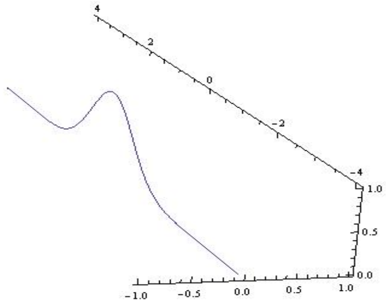
$$e^{-x^2-y^2} = 1 \Leftrightarrow -x^2-y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$$

- *Vyjadríme prienik s rovinou*
  - $z = e^{-25} \Rightarrow e^{-25} = e^{-x^2-y^2} \Leftrightarrow 25 = x^2+y^2$, *vrstevnica v tejto rovine je kružnica so stredom v* $(0,0)$ *a polomerom* 5.
  - $z = e^{-16} \Rightarrow e^{-16} = e^{-x^2-y^2} \Leftrightarrow 16 = x^2+y^2$, *vrstevnica v tejto rovine je kružnica so stredom v* $(0,0)$ *a polomerom* 4.
  - $z = e^{-9} \Rightarrow e^{-9} = e^{-x^2-y^2} \Leftrightarrow 9 = x^2+y^2$, *vrstevnica v tejto rovine je kružnica so stredom v* $(0,0)$ *a polomerom* 3.
  - $z = e^{-4} \Rightarrow e^{-4} = e^{-x^2-y^2} \Leftrightarrow 4 = x^2+y^2$, *vrstevnica v tejto rovine je kružnica so stredom v* $(0,0)$ *a polomerom* 2.
  - $z = e^{-1} \Rightarrow e^{-1} = e^{-x^2-y^2} \Leftrightarrow 1 = x^2+y^2$, *vrstevnica v tejto rovine je kružnica so stredom v* $(0,0)$ *a polomerom* 1.
  - $z = e^{-\frac{1}{4}} \Rightarrow e^{-\frac{1}{4}} = e^{-x^2-y^2} \Leftrightarrow \frac{1}{4} = x^2+y^2$, *vrstevnica v tejto rovine je kružnica so stredom v* $(0,0)$ *a polomerom ½* .
- Znázornime vypočítané vrstevnice:




**Obrázok 28**

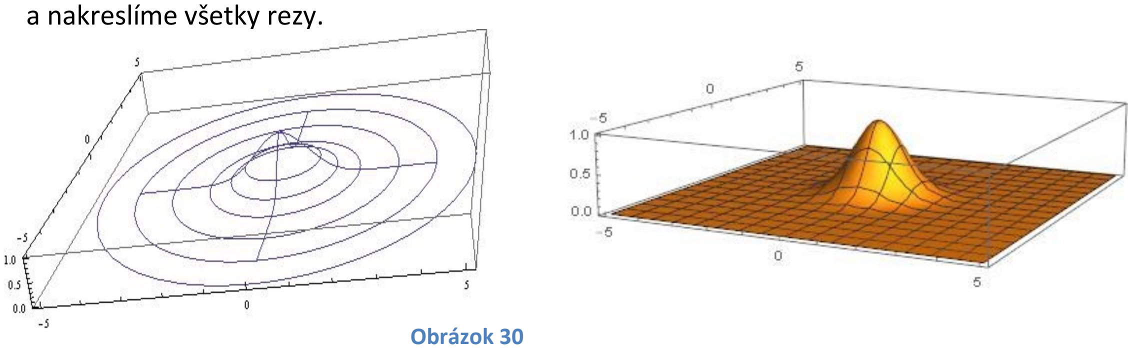
- Urobíme rez základnou rovinou $yz$, t. j. $x = 0 \quad \Rightarrow \quad z = e^{-0^2 - y^2} = e^{-y^2}$




Obrázok 29

- Rovnako urobíme rez základnou rovinou $xz$, t. j. $y = 0 \quad \Rightarrow \quad z = e^{-x^2 - 0^2} = e^{-x^2}$

  a nakreslíme všetky rezy.



Obrázok 30

b) Najskôr zobrazíme vrstevnice $f(x, y) = \sqrt{2x^2 + y^2} = c$.

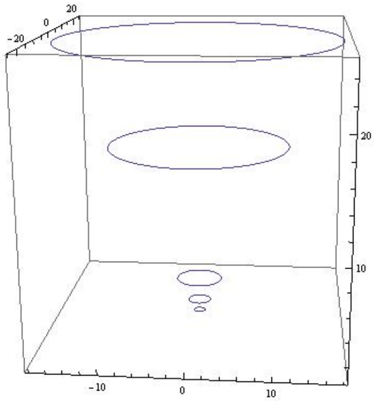
- Keďže $\sqrt{2x^2 + y^2} \geq 0$ $\Rightarrow$ *pre všetky* $c < 0$ *sú prieniky prázdne, čiže graf funkcie leží celý nad základnou rovinou* $xy$ ( $z = 0$)
- *Vyjadríme prienik s rovinou*
  - $z = 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2x^2 + y^2} = 0 \;\Leftrightarrow\; 2x^2 + y^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = y = 0$, *prienikom je len bod* $(0,0,0)$.
  - $z = 1 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2x^2 + y^2} = 1 \;\Leftrightarrow\; 1 = 2x^2 + y^2 \;\Leftrightarrow\; 1 = \frac{x^2}{\frac{1}{2}} + y^2$, *vrstevnica v tejto rovine je elipsa so stredom v* $(0,0)$ *a výsekmi* $a = \sqrt{\frac{1}{2}}$ , $b = 1$.
  - $z = 2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2x^2 + y^2} = 2 \;\Leftrightarrow\; 4 = 2x^2 + y^2 \;\Leftrightarrow\; 1 = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4}$, *vrstevnica v tejto rovine je elipsa so stredom v* $(0,0)$ *a výsekmi* $a = \sqrt{2}$ , $b = 2$.
  - $z = 4 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2x^2 + y^2} = 4 \;\Leftrightarrow\; 16 = 2x^2 + y^2 \;\Leftrightarrow\; 1 = \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{16}$, *vrstevnica v tejto rovine je elipsa so stredom v* $(0,0)$ *a výsekmi* $a = \sqrt{8}$ , $b = 4$.
  - $z = 16 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2x^2 + y^2} = 16 \;\Leftrightarrow\; 16^2 = 2x^2 + y^2 \;\Leftrightarrow\; 1 = \frac{x^2}{\frac{16^2}{2}} + \frac{y^2}{16^2}$,

    *vrstevnica v tejto rovine je elipsa so stredom v* $(0,0)$ *a výsekmi* $a = \frac{16}{\sqrt{2}}$ , $b = 16$.

- $z = 25 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2x^2 + y^2} = 25 \; \Leftrightarrow \; 25^2 = 2x^2 + y^2 \quad \Leftrightarrow \quad 1 = \frac{x^2}{\frac{25^2}{2}} + \frac{y^2}{25^2}$,

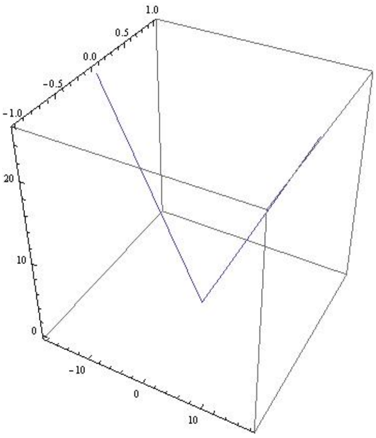
  *vrstevnica v tejto rovine je elipsa so stredom v* $(0,0)$ *a výsekmi* $a = \frac{25}{\sqrt{2}}$ , $b = 25$.

- Znázornime vypočítané vrstevnice:




Obrázok 31

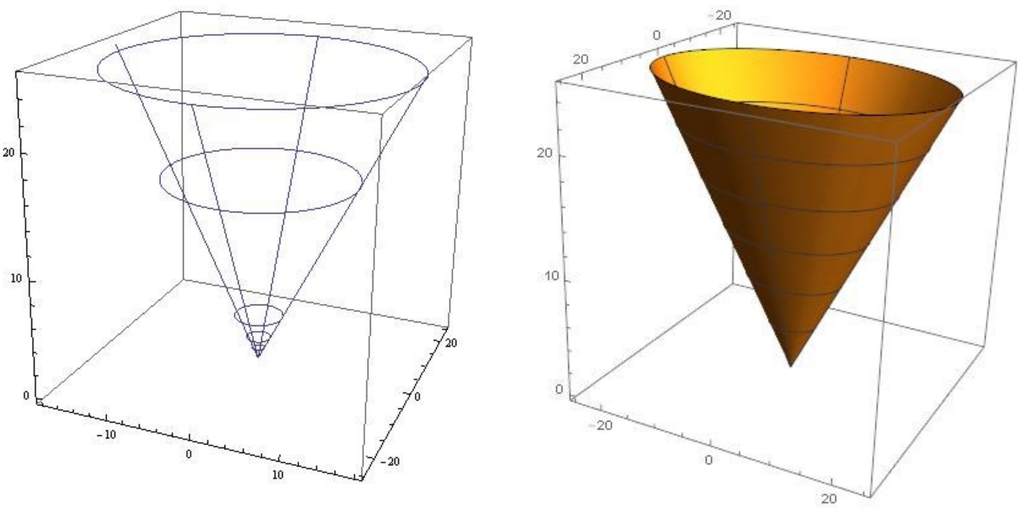
- Urobíme rez základnou rovinou $yz$, t. j. $x = 0 \quad \Rightarrow \quad z = \sqrt{2\,.\,0^2 + y^2} = \sqrt{y^2} = |y|$




Obrázok 32

- Rovnako urobíme rez základnou rovinou $xz$, t. j. $y = 0 \quad \Rightarrow \quad z = \sqrt{2\,x^2} = \sqrt{2}\,|x|$

  a nakreslíme všetky rezy.




Obrázok 33 *Eliptický kužel*

*Parciálna derivácia funkcie $f(x,y)$ podľa premennej $x$*

používané označenia: $\partial_x f(x,y), \quad \dfrac{\partial}{\partial x} f(x,y), \quad f_x'(x,y)$

*Pri výpočte parciálnej derivácie podľa $x$ druhú premennú $y$ zafixujeme a berieme ju ako konštantu. Potom funkciu $f(x,y)$ derivujeme ako funkciu jednej premennej $x$.*

*Naopak pri parciálnej derivácie podľa $y$ $\partial_y f(x,y)$ funkciu $f(x,y)$ derivujeme ako funkciu jednej premennej $y$ a $x$ beriem ako konštantu.*

*Pri funkcii troch premenných $f(x,y,z)$ rátame tri prvé parciálne derivácie. Pri výpočte parciálnej derivácie podľa prvej premennej $x$ zafixujem hodnoty $y, z$. Na funkciu $f$ hľadíme ako na funkciu jednej premennej $x$ a druhé dve premenné berieme ako konštanty. Podobne postupuje pri výpočte parciálnych derivácií podľa $y$ či $z$.*

## PRÍKLAD 28.

Vypočítajte prvé parciálne derivácie funkcií :

a) $f(x,y) = e^{2xy^2}\sin(x^2-y)$,

b) $f(x,y) = x^{3y-2} - \frac{2y}{x}$.

c) $f(x,y,z) = 2x^2(3y-1)^{\ln(z)}$

*Riešenie*

a) $f(x,y) = \underbrace{e^{2xy^2}}_{u}\underbrace{\sin(x^2-y)}_{v}$. $\qquad (u\,.\,v)' = u'v + u\,v', \quad (c\,f(x))' = c\,f'(x))$

Nezabudnime derivovať ako súčin dvoch funkcií premennej $x$ ($y$ je braná ako konštanta)

$$\partial_x f(x,y) = \underbrace{e^{2xy^2}}_{e^{g(x)}}\ \underbrace{2y^2}_{g'(x)}\sin(x^2-y) + e^{2xy^2}\cos(x^2-y)\,2x. \qquad g(x) = \underbrace{2y^2}_{c}\,x$$

Derivujeme ako súčin dvoch funkcií premennej $y$ ($x$ je braná ako konštanta)

$$\partial_y f(x,y) = e^{2xy^2}\underbrace{4xy}_{g'(y)}\ \sin(x^2-y) + e^{2xy^2}\cos(x^2-y)\,(-1). \qquad g(y) = \underbrace{2x}_{c}\,y^2$$

b) $f(x,y) = x^{3y-2} - \frac{2y}{x}$.

Derivujeme ako funkciu premennej $x$ ($y$ je braná ako konštanta)

$$\partial_x f(x,y) = (3y-2)x^{3y-3} + \frac{2y}{x^2}. \qquad (x^n)' = n\,x^{n-1}, \qquad \frac{2y}{x} = \underbrace{2y}_{c}\ x^{-1}$$

Derivujeme ako funkciu premennej $y$ ($x$ je braná ako konštanta)

$$\partial_y f(x,y) = x^{3y-2}\ln(x).3 - \frac{2}{x}\ . \qquad (a^y)' = a^y\,.\ln a, \qquad \frac{2y}{x} = \frac{2}{\underbrace{x}_{c}}\ y$$

---

c) $f(x,y,z) = 2x^2(3y-1)^{\ln(z)}$.

Derivujeme ako funkciu premennej $x$ ($y, z$ sú brané ako konštanty)

$$\partial_x f(x,y,z) = 4x\ (3y-1)^{\ln(z)}. \qquad (c\ f(x))' = c\ f'(x))$$

Derivujeme ako funkciu premennej $y$ ($x, z$ sú brané ako konštanty)

$$\partial_x f(x,y,z) = 2x^2\ln(z)\ (3y-1)^{\ln(z)-1}.3\ . \qquad (y^n)' = n\ y^{n-1}$$

Derivujeme ako funkciu premennej $z$ ($x, y$ sú brané ako konštanty)

$$\partial_x f(x,y,z) = 2x^2(3y-1)^{\ln(z)}.\ln(3y-1).\frac{1}{z}\ . \qquad (a^z)' = a^z\,.\ln a$$

---

## *Príklady na prepočítanie*

Nájdite a znázornite definičný obor funkcie

**1.** $f(x,y) = \arcsin(3x^2 + 9y^2)$.

**2.** $f(x,y) = \ln\left(\frac{x-2}{y-5}\right)$.

**3.** $f(x,y) = \arccos(4x - y)$.

**4**. $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x-1}+\sqrt{y-2}}{\sqrt{10-2x-y}}$.

**5**. $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{8-x^2-y^2}}{\sqrt{2-|x|}}$.

**6**. $f(x,y) = \dfrac{\ln(12-4x^2-3y^2)}{\sqrt{y-x^2}}$.

Pomocou vrstevníc a rezov načrtnite grafy funkcií

**7**. $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}}$.

**8**. $f(x,y) = \sqrt{1-\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}}$.

**9**. $f(x,y) = \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}$.

**10**. $f(x,y) = 5-2\left(\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}\right)$.

Vypočítajte prvé parciálne derivácie funkcie

**11**. $f(x,y) = \sqrt{2y(4xy^3-2x^2)}$.

**12**. $f(x,y) = \ln\left(\dfrac{x-2y}{2+xy}\right)$.

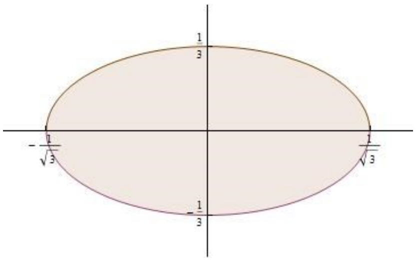
**13**. $f(x,y) = y\,x^{2-y}$.

**14**. $f(x,y) = 2x^2y\sin\left(\dfrac{x}{y}\right)$.

**15**. $f(x,y,z) = \dfrac{x}{2y}-\dfrac{y}{z+2}+\dfrac{z^2}{x}$.

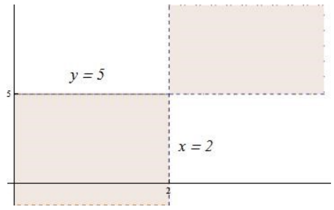
## VÝSLEDKY

1. $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 3x^2 + 9y^2 \leq 1\}.$



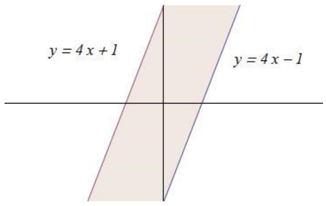
Obrázok 34 *Definičný obor z pr. 1.*

2. $D_f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \frac{x-2}{y-5} > 1\right\}.$



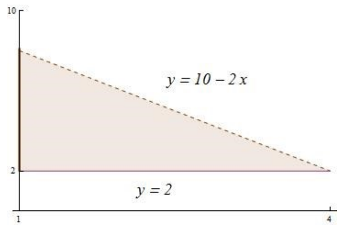

Obrázok 35 *Definičný obor z pr. 2.*

3. $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |4x - y| \leq 1\}.$



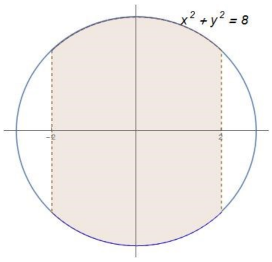

Obrázok 36 *Definičný obor z pr. 3.*

4. $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ (x \geq 1) \wedge (y \geq 2) \wedge (y < 10 - 2x)\}.$



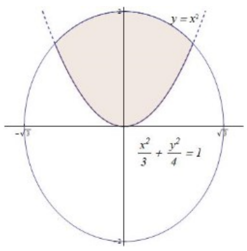

Obrázok 37 *Definičný obor z pr. 4.*

5. $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ (x^2 + y^2 \leq 8)\ \wedge (|x| < 2)\}.$



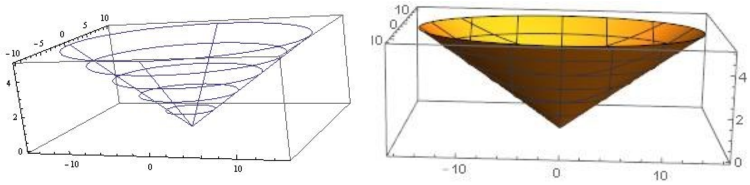

Obrázok 38 *Definičný obor z pr. 5.*

6. $D_f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \left(\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} \leq 1\right) \wedge (y > x^2)\right\}.$



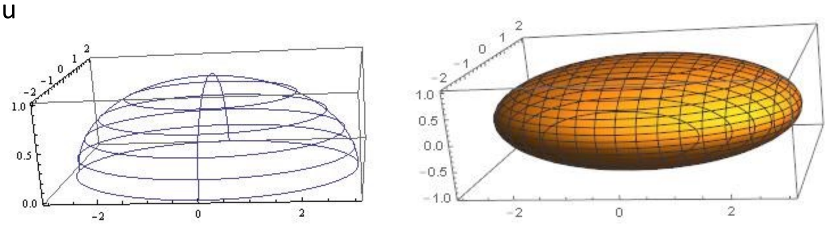

Obrázok 39 *Definičný obor z pr. 6.*

7. eliptický kužeľ



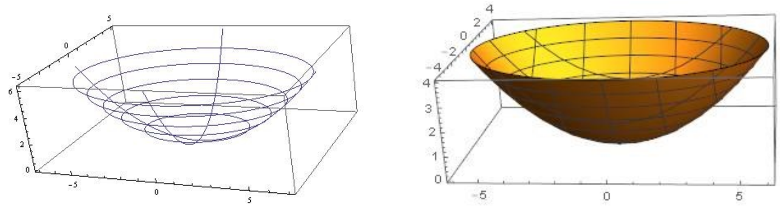
Obrázok 40 *Eliptický kužeľ*

8. horná kopula elipsoidu



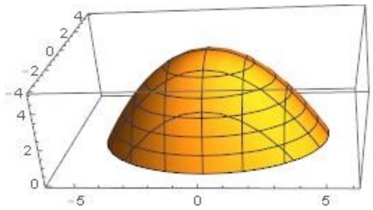
Obrázok 41 *Elipsoid (vľavo jeho horná časť)*

9. eliptický paraboloid



Obrázok 42 *Eliptický paraboloid*

10. eliptický paraboloid z pr. 9 zúžený, otočený a posunutý o 5 hore v smere osi z



Obrázok 43 *Eliptický paraboloid*

11. $\partial_x f(x,y) = \frac{4y^4-4xy}{\sqrt{2y(4xy^3-2x^2)}}$ , $\partial_y f(x,y) = \frac{-2x^3-8xy^3}{\sqrt{2y(4xy^3-2x^2)}}$ .

12. $\partial_x f(x,y) = \frac{2+2y^2}{(x-2y)(2+xy)}$ , $\partial_y f(x,y) = \frac{-4-x^2}{(x-2y)(2+xy)}$ .

13. $\partial_x f(x,y) = y(2-y)x^{1-y}$ , $\partial_y f(x,y) = x^{2-y}(1-y\ln x)$.

14. $\partial_x f(x,y) = 4xy\sin\left(\frac{x}{y}\right) + 2x^2\cos\left(\frac{x}{y}\right)$, $\partial_y f(x,y) = 2x^2\sin\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{2x^3}{y}\cos\left(\frac{x}{y}\right)$.

15. $\partial_x f(x,y,z) = \frac{1}{2y} - \frac{z^2}{x^2}$ , $\partial_y f(x,y,z) = -\frac{x}{2y^2} - \frac{1}{z+2}$ , $\partial_z f(x,y,z) = \frac{y}{(z+2)^2} + \frac{2z}{x}$.

## 4.2. Dotyková rovina, normála, totálny diferenciál a gradient funkcie

*Čo si treba pamätať z prednášky:*

*Nech bod* $T = (x_0, y_0) \in D_f$ a funkcia $f$ má parciálne derivácie v tomto bode. *Bod* $\tilde{T}(x_0, y_0, z_0)$, $z_0 = f(T)$ leží na grafe funkcie $f(x,y)$ . *Potom:*

- *Dotyková rovina* $\tau$ *ku grafu funkcie* $z = f(x,y)$ *v bode* $\tilde{T}$

$$\tau: \quad \partial_x f(T)(x - x_0) + \partial_y f(T)(y - y_0) - (z - z_0) = 0.$$

*t. j. normálový vektor dotykovej roviny* $\tau$ *v bode* $\tilde{T}$ *je*

$$\vec{n_\tau} = \left(\partial_x f(T), \partial_y f(T), -1\right).$$

- *Normála* $\boldsymbol{n}$ *ku grafu funkcie* $z = f(x,y)$ *v bode* $\tilde{T}(x_0, y_0, z_0)$ *(t.j. priamka kolmá na dotykovú rovinu* $\tau$*)*

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \partial_x f(T)\, t \\ y &= y_0 + \partial_y f(T)\, t\ , \qquad t \in \mathbb{R}, \\ z &= z_0 - t \end{aligned}$$

*t. j. smerový vektor normály* **n** $\vec{s_{\mathbf{n}}} = \vec{n_\tau} = \left(\partial_x f(T), \partial_y f(T), -1\right).$

- *Totálny diferenciál* $df(T,x,y)$ *funkcie* $f$ *v bode* $T$

$$df(T,x,y) = \partial_x f(T)(x - x_0) + \partial_y f(T)(y - y_0).$$

- Rovina

  *Ak je daný bod ležiaci v rovine* $A = (x_0, y_0, z_0)$ *a normálový vektor (t. j. vektor kolmý na rovinu)* $\vec{n} = (a, b, c)$*, potom*

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0;$$

- Priamka v priestore

  *Ak je daný bod ležiaci na priamke* $A = (x_0, y_0, z_0)$ *a smerový vektor* $\vec{s} = (s_1, s_2, s_3)$,

$$\begin{aligned} x &= x_0 + s_1 t \\ y &= y_0 + s_2 t\ , \qquad t \in \mathbb{R}. \\ z &= z_0 + s_3 t \end{aligned}$$

## ***PRÍKLAD 29.***

Nájdite dotykovú rovinu a normálu ku grafu funkcie $f(x,y)$ v bode $T$:

a) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-9}\,,\quad T=(5,0,?)$, b) $f(x,y)=\ln\left(\frac{y^2}{x}\right),\quad T=(1,1,?)$

*Riešenie*

a) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-9}\,,\quad T=(5,0,?)$

- Najskôr dopočítame $z$*-ovú hodnotu dotykového bodu* $z_0=\sqrt{25+0-9}=4 \quad \Rightarrow$

  $T=(5,0,4)$

- Nájdeme normálový vektor roviny $\vec{n}=(a,b,-1)$.

  *Ak $\vec{n}$ je normálovým vektorom, potom aj ľubovoľný násobok $k\,.\vec{n},\ k\in\mathbb{R}$ je normálovým vektorom.*

  - $a=\partial_x f(T)=\left.\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2-9}}\right|_T=\frac{5}{4}$
  - $b=\partial_y f(T)=\left.\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2-9}}\right|_T=\frac{0}{4}=0 \qquad \Rightarrow \quad \vec{n}=\left(\frac{5}{4},0,-1\right)\sim(5,0,-4).$

  Môžeme použiť pôvodný normálový vektor, alebo jeho ľubovoľný násobok.

- Napíšeme rovnicu roviny

  $5(x-5)+0(y-0)-4(z-4)=0 \qquad \Leftrightarrow \quad 5x-4z-9=0.$

- Rovnica normály:

$$\begin{aligned} x&=5+5\,t\\ y&=0+0\,t\,, \qquad t\in\mathbb{R}.\\ z&=4-4\,t \end{aligned}$$

---

b) $f(x,y)=\ln\left(\frac{y^2}{x}\right),\quad T=(1,1,?)$

- Najskôr dopočítame $z$-tovú hodnotu dotykového bodu $z_0=\ln 1=0 \quad \Rightarrow$

  $T=(1,1,0).$

- Nájdeme normálový vektor roviny $\vec{n}=(a,b,-1)$.

  - $a=\partial_x f(T)=-\left.\frac{1}{x}\right|_T=1$ $\qquad \ln\left(\frac{y^2}{x}\right)=2\,\ln y-\ln x$
  - $b=\partial_y f(T)=\left.\frac{2}{y}\right|_T=2 \qquad \Rightarrow \quad \vec{n}=(1,2,-1).$

- Napíšeme rovnicu roviny

  $1(x-1)+2(y-1)-1(z-0)=0 \qquad \Leftrightarrow \quad x+2y-z-3=0.$

- Rovnica normály:

$$x = 1 + 1\,t$$
$$y = 1 + 2\,t\,, \qquad t \in \mathbb{R}.$$
$$z = 0 - 1\,t$$

---

## PRÍKLAD 30.

Nájdite dotykovú rovinu ku grafu funkcie $f(x,y)$, ktorá je rovnobežná s rovinou $\alpha$ :

a) $f(x,y) = x^2y^2$, $\quad i)\ \alpha: 2x - 2y - z + 10 = 0,\quad ii)\ \alpha: 8x - 2y + 2z + 4 = 0,$

b) $f(x,y) = e^{x-y}$, $\quad i)\ \alpha: x - y - z + 10 = 0,\quad ii)\ \alpha: x + y - z + 4 = 0.$

*Riešenie*

*Dve roviny $\alpha, \beta$ sú rovnobežné $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{n_\alpha} = k\,.\overrightarrow{n_\beta},\ k \in \mathbb{R}$*

a) $f(x,y) = x^2y^2$

- Vyjadríme si normálový vektor dotykovej roviny $\tau$: $\overrightarrow{n_\tau} = (a, b, -1)$ v zatiaľ neznámom bode $T = (x_0, y_0, z_0)$
  - $a = \partial_x f(T) = 2xy^2|_T = 2x_0y_0^2$
  - $b = \partial_y f(T) = 2x^2y\,|_T = 2x_0^2y_0 \qquad \Rightarrow \quad \overrightarrow{n_\tau} = (2x_0y_0^2\,, 2x_0^2y_0, -1)$
- Vyjadríme si normálový vektor roviny

  $i)\ \alpha: 2x - 2y - z + 10 = 0$
  - $\overrightarrow{n_\alpha} = (2, -2, -1)$ (vezmeme taký jeho násobok , aby z-ová hodnota bola -1)
  - Z rovnobežnosti rovín $\quad \overrightarrow{n_\tau} = \overrightarrow{n_\alpha} \quad \Rightarrow$

    $2x_0y_0^2 = 2 \qquad \Rightarrow \quad x_0 = \frac{1}{y_0^2}$

    $2x_0^2y_0 = -2 \qquad \left(\frac{1}{y_0^2}\right)^2 y_0 = -1 \quad \Rightarrow \quad y_0 = -1,\ x_0 = 1$
  - Dopočítame $z_0 = f(x_0, y_0) = 1^2\,(-1)^2 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad T = (1, -1, 1)$

  Dotyková rovina:

  $\tau: \quad 2(x-1) - 2(y+1) - (z-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x - 2y - z - 3 = 0.$

  $ii)\ \alpha: 8x - 2y + 2z + 4 = 0$
  - $\overrightarrow{n_\alpha} = (8, -2, 2) \sim (-4, 1, -1)$ ( vezmeme taký násobok , aby z-tová hodnota bola -1)

- Z rovnobežnosti rovín $\overrightarrow{n_\tau} = \overrightarrow{n_\alpha} \quad \Rightarrow$

  $$2x_0 y_0^2 = -4 \qquad \Rightarrow \quad x_0 = -\frac{2}{y_0^2}$$

  $$2x_0^2 y_0 = 1 \qquad 2\left(-\frac{2}{y_0^2}\right)^2 y_0 = 1 \ \Rightarrow \ y_0 = 2,\ x_0 = -\frac{1}{2}$$

- Dopočítame $z_0 = f(x_0, y_0) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 (2)^2 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad T = \left(-\frac{1}{2}, 2, 1\right)$

Dotyková rovina:

$$\tau: \quad -4\left(x + \frac{1}{2}\right) + 1(y - 2) - (z - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad -4x + y - z - 3 = 0.$$

---

b) $f(x, y) = e^{x-y}$

- Vyjadríme si normálový vektor dotykovej roviny $\tau$: $\overrightarrow{n_\tau} = (a, b, -1)$ v zatiaľ neznámom bode $T = (x_0, y_0, z_0)$
  - $a = \partial_x f(T) = e^{x-y}|_T = e^{x_0 - y_0}$
  - $b = \partial_y f(T) = -e^{x-y}\,|_T = -e^{x_0 - y_0} \qquad \Rightarrow \quad \overrightarrow{n_\tau} = (e^{x_0 - y_0}, -e^{x_0 - y_0}, -1)$
- Vyjadríme si normálový vektor roviny

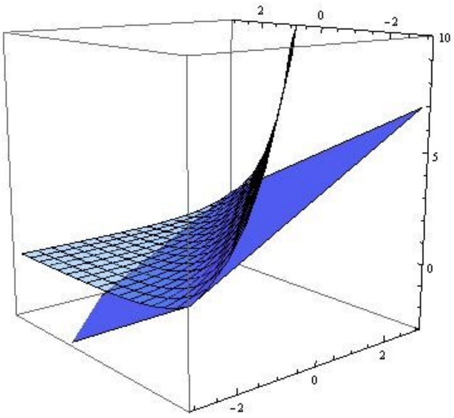
  $i)$ $\alpha: x - y - z + 10 = 0$
  - $\overrightarrow{n_\alpha} = (1, -1, -1)$
  - Z rovnobežnosti rovín $\overrightarrow{n_\tau} = \overrightarrow{n_\alpha} \quad \Rightarrow$

    $$e^{x_0 - y_0} = 1 \qquad \Rightarrow \quad x_0 - y_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = y_0 = t, \ \ t \in \mathbb{R}$$
    $$-e^{x_0 - y_0} = -1$$
  - Dopočítame $z_0 = f(x_0, y_0) = e^{t-t} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad T_t = (t, t, 1), \quad t \in \mathbb{R}$

    V tomto prípade neexistuje len jeden dotykový bod, ale dotykové body $T_t$ tvoria priamku $y = x$ v rovine $z = 1$.

Dotyková rovina:

$$\tau: \quad 1(x - t) - 1(y - t) - (z - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x - y - z + 1 = 0.$$




Obrázok 44 *Zobrazenie dotykovej roviny k ploche* $z = e^{x-y}$

$ii)\ \alpha: x + y - z + 4 = 0$

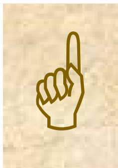
- $\overrightarrow{n_\alpha} = (1\ , 1, -1)$
- Z rovnobežnosti rovín $\quad \overrightarrow{n_\tau} = \overrightarrow{n_\alpha} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} e^{x_0 - y_0} = 1, \\ -e^{x_0 - y_0} = 1. \end{array}$

  Sústava rovníc nemá riešenie, čiže žiadna dotyková rovina k danej ploche nie je rovnobežná s rovinou $\alpha$.

---

Teraz si ukážeme, ako možno totálny diferencál použiť na upresnenie hodnôt, či odhad chýb.

---



*Dotykovú rovinu $\tau$ môžeme prepísať do tvaru:*

$$z = z_0 + df(T, x, y) \quad \Rightarrow \quad f(x, y) \doteq f(T) + df(T, x, y),$$

*kde $df(T, x, y)$ je totálny diferenciál funkcie v bode $T$ a funkciu $f(x, y)$ v okolí bodu $T$ aproximujeme jej dotykovou rovinou. Tento vzťah používame na odhad hodnoty funkcie v bodoch „blízko" bodu $T$, kde vyjadriť presne hodnotu $f(x, y)$ je náročné alebo nemožné, ale hodnotu $f(T)$ poznám.*

---

## PRÍKLAD 31.

Vypočítajte približne hodnotu $1.05^{2.01}$.

*Riešenie*

Je jasné, že $1.05^{2.01} \doteq 1^2$. Chceme hodnotu ešte upresniť. Ak hodnotu 1.05 nahradíme premennou $x$ a hodnotu 2.01 premennou $y$, dostaneme funkciu $f(x, y) = x^y$. Potom

$$1.05^{2.01} \doteq 1^2 \quad \Rightarrow \quad f(1.05, 2.01) \doteq f(1,2) = 1.$$

Na upresnenie hodnoty vypočítam totálny diferenciál funkcie $df(T, x, y)$, $T = (1,2)$.

$$\begin{array}{l} \partial_x f(x, y) = y\, x^{y-1}|_T = 2 \\ \partial_y f(x, y) = x^y \ln x\, |_T = 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad df(T, x, y) = 2(x - 1) + 0(y - 2) = 2(x - 1).$$

Funkčné hodnoty v bodoch $(x, y)$ v blízkosti bodu $T = (1,2)$ možno odhadnúť vzťahom

$$f(x, y) \doteq f(1,2) + 2(x - 1) \quad \Rightarrow \quad 1.05^{2.01} = f(1.05, 2.01) \doteq 1 + 2(1.05 - 1) = 1.1\,.$$

---

*Diferenciál môžeme použiť aj na odhad chýb výstupnej hodnoty, ak poznáme chyby vstupu.*

## ***PRÍKLAD 32.***

Vypočítajte objem valca s polomerom podstavy $r = 5 \pm 0.02$ cm a výškou $v = 4 \pm 0.01$ cm.

*Riešenie*

Objem valca rátame vzorcom $V(r,v) = \pi r^2 v.$

Objem telesa môžeme odhadnúť

$$V(r,v) \doteq V\underbrace{(5,4)}_{T} + dV(T,r,v) = 100\,\pi + dV(T,r,v).$$

Dopočítam totálny diferenciál

$$\begin{aligned} \partial_r f(r,v) &= 2\pi r v|_T = 40\pi \\ \partial_v f(r,v) &= \pi r^2|_T = 25\pi \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad df(T,r,v) = 40\pi(r-5) + 25\pi(v-4).$$

$$V(5 \pm 0.02, 4 \pm 0.01) \doteq 100\pi + 40\pi(\pm 0.02) + 25\pi(\pm 0.01) = 100\pi \pm 1.05\pi \quad cm^3.$$

---

*Čo si treba pamätať z prednášky:*

Gradient funkcie $F(x,y)\big(F(x,y,z)\big)$ je vektorová funkcia

$$\nabla F(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_x F(x,y) \\ \partial_y F(x,y) \end{pmatrix}, \left( \nabla F(x,y,z) = \begin{pmatrix} \partial_x F(x,y,z) \\ \partial_y F(x,y,z) \\ \partial_z F(x,y,z) \end{pmatrix} \right)$$

Použitie gradientu:

- Vektor $\nabla F(A)$ je vektor najstrmšieho rastu grafu funkcie $z = F(x,y)$ v bode A.
- Ak $F(x,y) = 0$ je implicitne zadaná krivka v rovine, potom $\nabla F(T)$ je normálovým vektorom jej dotyčnice v bode T, t. j. dotyčnica v bode T:

  $\partial_x F(T)(x - x_0) + \partial_y F(T)(y - y_0) = 0.$
- Ak $F(x,y,z) = 0$ je implicitne zadaná plocha v priestore, potom $\nabla F(T)$ je normálovým vektorom jej dotykovej roviny v bode T, t. j.

  $\tau: \ \partial_x F(T)(x - x_0) + \partial_y F(T)(y - y_0) + \partial_z F(T)(z - z_0) = 0.$

Všimnime si, že zavedený vzorec pre dotykovú rovinu zovšeobecňuje vzorec pre explicitne zadanú funkciu. Pre plochu zadanú explicitne dostaneme

$$z = f(x,y) \quad \Leftrightarrow \quad F(x,y,z) = f(x,y) - z = 0, \quad \vec{n_\tau} = \nabla F(T) = \begin{pmatrix} \partial_x F(T) \\ \partial_y F(T) \\ \partial_z F(T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x f(T) \\ \partial_y f(T) \\ -1 \end{pmatrix}.$$

## PRÍKLAD 33.

Nájdite rovnicu dotyčnice k elipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ v bode $T = \left(2, \frac{\sqrt{20}}{3}\right)$.

*Riešenie*

$F(x,y) = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - 1$

- Nájdeme normálový vektor dotyčnice $\vec{n} = (a,b)$.
  - $a = \partial_x F(T) = \frac{2x}{9}\Big|_T = \frac{4}{9}$
  - $b = \partial_y F(T) = \frac{2y}{4}\Big|_T = \frac{\sqrt{20}}{6} = \frac{\sqrt{5}}{3} \qquad \Rightarrow \quad \vec{n} = \left(\frac{4}{9}, \frac{\sqrt{5}}{3}\right) \sim (4{,}3\sqrt{5})$

*Dotyčnica:* $4(x-2) + 3\sqrt{5}\left(y - \frac{\sqrt{20}}{3}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad 4x + 3\sqrt{5}\,y - 108 = 0.$

---

## PRÍKLAD 34.

Nájdite dotykovú rovinu k ploche $F(x,y,z) = 0$ v bode $T$:

a) $x^2 + y^2 + z^2 = 19, \qquad T = (3,-1{,}3)$ (guľová plocha),

b) $e^{x-y}\cos(yz) + e = 0, \qquad T = (2{,}1,\pi)$.

*Riešenie*

a) $x^2 + y^2 + z^2 = 19, \qquad T = (3,-1,3)$.

$F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 19.$

- Nájdeme normálový vektor dotykovej roviny $\vec{n} = (a,b,c)$:
  - $a = \partial_x F(T) = 2x|_T = 6,$
  - $b = \partial_y F(T) = 2y\,|_T = -2,$
  - $c = \partial_z F(T) = 2z\,|_T = 6 \qquad \Rightarrow \quad \vec{n} = (6,-2{,}6) \sim (3,-1{,}3).$

Dotyková rovina:

$3(x-3) - (y+1) + 3(z-3) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 3x - y + 3z - 19 = 0.$

---

b) $e^{x-y}\cos(yz)+e=0, \qquad T=(2,1,\pi)$ ,

$F(x,y,z)=e^{x-y}\cos\,(yz)+e.$

- Nájdeme normálový vektor dotykovej roviny $\vec{n}=(a,b,c)$:
  - $a=\partial_x F(T)=e^{x-y}\cos\,(yz)\,|_T=-e,$
  - $b=\partial_y F(T)=-e^{x-y}\cos\,(yz)-\ e^{x-y}\sin\,(yz)z\,|_T=e,$
  - $c=\partial_z F(T)=-e^{x-y}\sin\,(yz)y\ |_T=0 \qquad \Rightarrow \quad \vec{n}=(-e,e,0)\sim(1,-1,0).$

Dotyková rovina:

$1(x-2)-1(y-1)+0(z-\pi)=0 \qquad \Rightarrow \qquad x-y-1=0.$

## *Príklady na prepočítanie*

Nájdite dotykovú rovinu a normálu ku grafu funkcie $f(x,y)$ v bode $T$.

**1.** $f(x,y)=x^3-4xy+2y^2, \qquad T=(1,2,?).$

**2.** $f(x,y)=\sqrt{17-x^2-y^2}, \qquad T=(1,0,?).$

**3.** $f(x,y)=\ln(2x^2-4xy)^2\,, \qquad T=\left(1,\frac{1}{4},?\right).$

**4.** $f(x,y)=2x\cos\left(\frac{y^2}{x}\right), \qquad T=(1,0,?).$

**5.** $f(x,y)=\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right), \qquad T=(3,3,?).$

**6.** $f(x,y)=y\,e^{2x^2-y^2}, \qquad T=(1,1,?).$

Nájdite dotykovú rovinu ku grafu funkcie $f(x,y)$, ktorá je rovnobežná s rovinou α.

**7.** $f(x,y)=\ln\left(\frac{x^2}{2y}\right), \quad \alpha\colon\ x-2y-2z+3=0.$

**8.** $f(x,y)=3x^2+2y^2, \quad \alpha\colon\ 3x-2y+z-1=0.$

**9.** $f(x,y)=2x^3y, \quad \alpha\colon\ 2x-2y-z+2=0\,.$

**10**. $f(x,y) = e^{y^2-x^2}$, $\alpha$: $2ey - z = 0$.

**11.** Použitím diferenciálu vypočítajte približne hodnotu *a)* $1{,}02^3 . 3{,}99^2$, *b)* $\sqrt{3{,}01^2 + 4{,}03^2}$.

**12.** Vypočítajte objem kužeľa s polomerom podstavy $r = 9 \pm 0{,}01$ cm a výškou $12 \pm 0{,}02$ cm.

Nájdite dotykovú rovinu k ploche zadanej implicitne.

**13**. $e^{xz} - zy + xy - e = 0$, $\quad T(1{,}0{,}1)$.

**14**. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$, $\quad T\left(1{,}2{,}\frac{\sqrt{11}}{3}\right)$.

**15**. $x^{2z} \ln\left(\frac{z}{y}\right) - yz = 0$, $\quad T(1{,}1{,}e)$.

**16**. $x^2 y + \frac{x}{z} - \frac{z^2}{y} - 2 = 0$, $\quad T\left(1{,}\frac{1}{2}{,}\frac{1}{2}\right)$.

## VÝSLEDKY

1. $\tau$: $-2x + 4y - z - 5 = 0$, $\quad n$: $\begin{array}{l} x = 1 - 2t \\ y = 2 + 4t, \\ z = 1 - t \end{array}$ $t \in \mathbb{R}$.

2. $\tau$: $x + 4z - 17 = 0$, $\quad n$: $\begin{array}{l} x = 1 + t \\ y = 0 \\ z = 4 + 4t \end{array}$, $t \in \mathbb{R}$.

3. $\tau$: $6x - 8y - z - 4 = 0$, $\quad n$: $\begin{array}{l} x = 1 + 6t \\ y = \frac{1}{4} - 8t, \\ z = \quad -t \end{array}$ $t \in \mathbb{R}$.

4. $\tau$: $2x - z = 0$, $\quad n$: $\begin{array}{l} x = 1 + 2t \\ y = 0 \\ z = 2 - t \end{array}$, $t \in \mathbb{R}$.

5. $\tau$: $x - y + 6z - \frac{3}{2}\pi = 0$, $\quad n$: $\begin{array}{l} x = 3 + t \\ y = 3 - t \\ z = \frac{\pi}{4} + 6t \end{array}$, $t \in \mathbb{R}$ .

6. $\tau$: $4x - y - \frac{1}{e}z - 2 = 0,$ $\quad n$: $\begin{array}{l} x = 1 + 4t \\ y = 1 - \ \ t \\ z = e - \frac{1}{e}t \end{array}$, $\ t \in \mathbb{R}$.

7. $x - 2y - 2z + 2\ln 8 - 2 = 0$.

8. $3x - 2y + z + \frac{5}{4} = 0$.

9. $2x - 2y - z + 2 = 0$.

10. $2y - \frac{1}{e}z - 1 = 0$.

11. *a)* $16{,}88$ *b)* $5{,}03$.

12. $324\pi \pm 1{,}26\,\pi\ \mathrm{cm}^3$.

13. $z - 1 = 0$.

14. $9x + 8y + 3\sqrt{11}\,z - 36 = 0$.

15. $2x - 2y + \frac{1}{e}\,z - 1 = 0$.

16. $2x + y - 3z - 1 = 0$.

## *4.3. Parciálne derivácie vyšších rádov, lokálne extrémy*

*Čo si treba pamätať z prednášky:*

*Parciálne derivácie druhého rádu*

- *Nezmiešané*

$\partial^2_{x^2} f(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \partial_x(\partial_x f(x,y))$ ďalšie používané označenia: $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y) = f''_{xx}(x,y)$

$\partial^2_{y^2} f(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \partial_y(\partial_y f(x,y))$ $\dfrac{\partial^2}{\partial y^2} f(x,y) = f''_{yy}(x,y)$

- *Zmiešané*

$\partial^2_{yx} f(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \partial_y(\partial_x f(x,y))$ $\dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y) = f''_{xy}(x,y)$

$\partial^2_{xy} f(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \partial_x(\partial_y f(x,y))$ $\dfrac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x,y) = f''_{yx}(x,y)$

- *Ak zmiešané parciálne derivácie funkcie existujú v bode* $\mathrm{A}(x,y)$ *z jeho definičného oboru a sú tu spojité, potom*
$$\partial^2_{yx} f(x,y) = \partial^2_{xy} f(x,y).$$
*Pre elementárne funkcie táto rovnosť platí vždy, preto v ďalšom budeme rátať len jednu zmiešanú parciálnu deriváciu.*
- *Derivácie vyšších rádov definujeme podobne, napr.*
$\partial^3_{xyx} f(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \partial_x\left(\partial^2_{yx} f(x,y)\right) = \partial_x(\partial_y(\partial_x f(x,y)))$ ...

### Príklad 35.

Vypočítajte druhé parciálne derivácie funkcie $\mathrm{f}(x,y) = x \operatorname{arctg}(xy)$.

*Riešenie*

$$\partial_x \mathrm{f}(x,y) = \operatorname{arctg}(xy) + \frac{xy}{1+x^2y^2}, \qquad \partial_y \mathrm{f}(x,y) = \frac{x^2}{1+x^2y^2}$$

$$\partial^2_{x^2} \mathrm{f}(x,y) = \partial_x\left(\operatorname{arctg}(xy) + \frac{xy}{1+x^2y^2}\right) = \frac{y}{1+x^2y^2} + \frac{y(1+x^2y^2) - xy(2xy^2)}{(1+x^2y^2)^2} = \frac{2y}{(1+x^2y^2)^2}$$

$$\partial^2_{y^2} f(x,y) = \partial_y \left( \frac{x^2}{1+x^2y^2} \right) = \frac{-x^2(2x^2y)}{(1+x^2y^2)^2} = \frac{-2x^4y}{(1+x^2y^2)^2}$$

$$\partial^2_{xy} f(x,y) = \partial_x \left( \frac{x^2}{1+x^2y^2} \right) = \frac{2x(1+x^2y^2) - x^2(2xy^2)}{(1+x^2y^2)^2} = \frac{2x}{(1+x^2y^2)^2}$$

$$\partial^2_{yx} f(x,y) = \partial_y \left( \operatorname{arctg}(xy) + \frac{xy}{1+x^2y^2} \right) = \frac{x}{1+x^2y^2} + \frac{x(1+x^2y^2) - xy(2x^2y)}{(1+x^2y^2)^2} = \frac{2x}{(1+x^2y^2)^2} \,.$$

---

*Čo si treba pamätať z prednášky:*

## *Lokálne extrémy*

### ***Postup pri hľadaní lokálnych extrémov:***

- *Vyjadríme definičný obor funkcie.*
- *Nájdeme stacionárne body $S_i$ , t. j. body z definičného oboru, v ktorých*

$$\partial_x f(S_i) = 0, \qquad \partial_y f(S_i) = 0.$$

- *Otestujeme stacionárne body*

  *Zadefinujme funkciu $D(x,y)$ ako determinant*

$$D(x,y) = \begin{vmatrix} \partial^2_{x^2} f & \partial^2_{xy} f \\ \partial^2_{yx} f & \partial^2_{y^2} f \end{vmatrix} \overset{\partial^2_{yx} f = \partial^2_{xy} f}{=} \partial^2_{x^2} f(x,y)\, \partial^2_{y^2} f(x,y) - \left( \partial^2_{xy} f(x,y) \right)^2$$

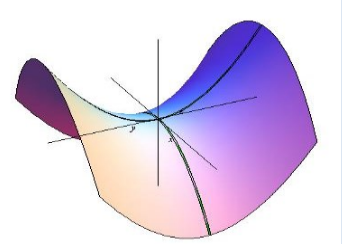
  *Ak*

  - $D(S_i) > 0 \;\Rightarrow\;$ v $S_i$ funkcia nadobúda lok. extrém

    ak $\partial^2_{x^2} f(S_i) > 0$ bod lok. minima

    ak $\partial^2_{x^2} f(S_i) < 0$ bod lok. maxima
  - $D(S_i) < 0$ $S_i$ je sedlovým bodom funkcie

    *Napr. bod $(0,0)$ je **sedlovým bodom** funkcie $f(x,y) = x^2 - y^2$, t. j. v reze $x = 0$ je bodom lok. maxima a v reze $y = 0$ bodom lok. minima, viď obrázok 45.*



**Obrázok 45** $f(x,y) = x^2 - y^2$

  - $D(S_i) = 0$ nevieme z testu určiť.

- Vypočítame lokálne extrémy ako hodnoty funkcie v bodoch lokálneho minima (maxima).

*Funkcia môže nadobúdať lokálne extrémy iba v stacionárnych bodoch, alebo v bodoch, kde prvé derivácie nie sú definované (ak nie je definovaná len jedna, druhá sa rovná nule). (Napr. funkcia $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ má lokálne minimum v bode $(0,0)$, kde prvé parciálne derivácie nie sú definované.) Takéto body, ako aj stacionárne body, kde $D(S_i) = 0$, musíme skúmať zvlášť.*

## PRÍKLAD 36.

Nájdite lokálne extrémy funkcie $f(x,y) = 3\ln\frac{x}{6} + 2\ln y + \ln(12 - x - y)$.

*Riešenie*

- Vyjadríme definičný obor funkcie

$$D_f = \{(x,y) \epsilon\, \mathbb{R}^2;\ x > 0 \wedge y > 0 \wedge x + y < 12\}.$$

- Hľadáme stacionárne body

$$\partial_x f(x,y) = \frac{3}{x} - \frac{1}{12 - x - y} = \frac{36 - 4x - 3y}{x(12 - x - y)} = 0 \quad \Rightarrow \quad 4x + 3y = 36$$

$$\partial_y f(x,y) = \frac{2}{y} - \frac{1}{12 - x - y} = \frac{24 - 2x - 3y}{y(12 - x - y)} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x + 3y = 24 \qquad \Rightarrow$$

$$x = 6, y = 4 \qquad \Rightarrow S = (6{,}4) \in D_f$$

- Testujeme stacionárny bod

$$\partial^2_{x^2} f(x,y) = -\frac{3}{x^2} - \frac{1}{(12 - x - y)^2}\bigg|_S = -\frac{1}{3} < 0$$

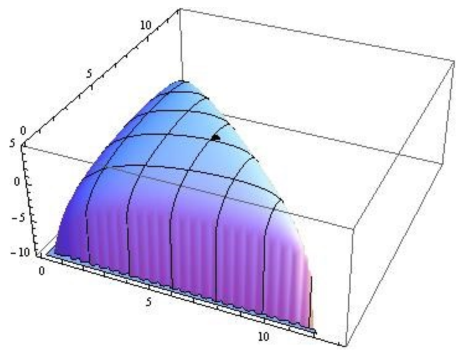
$$\partial^2_{y^2} f(x,y) = -\frac{2}{y^2} - \frac{1}{(12 - x - y)^2}\bigg|_S = -\frac{3}{8}$$

$$\partial^2_{xy} f(x,y) = -\frac{1}{(12 - x - y)^2}\bigg|_S = -\frac{1}{4}$$

$$D(S) = \left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{3}{8}\right) - \left(-\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16} > 0 \quad \text{v } S \text{ je lokálne maximum.}$$

- Počítame lokálne maximum

*Keďže S je jediný stacionárny bod a prvé derivácie funkcie sú definované na celom def. obore, je nielen lokálnym, ale aj celkovým maximom, viď. obrázok 46.*




**Obrázok 46** $f(x,y) = 3\ln\frac{x}{6} + 2\ln y + \ln(12 - x - y)$

$$\text{Max} \;\; = f(S) = 5\ln 2.$$

## PRÍKLAD 37.

Nájdite lokálne extrémy funkcie $f(x,y) = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20.$

*Riešenie*

- Vyjadríme definičný obor funkcie

$$D_f = \mathbb{R}^2$$

- Hľadáme stacionárne body

$$\partial_x f(x,y) = 3x^2 - 6y - 39 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 2y - 13 = 0$$

$$\partial_y f(x,y) = 2y - 6x + 18 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 3x - 9 \quad \Rightarrow$$

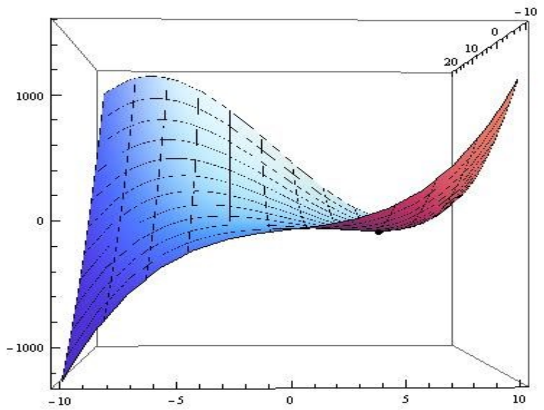
$$x^2 - 2\,(3x - 9\,) - 13 = 0 \quad \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \left\langle \begin{matrix} 1 & y_1 = -6 \\ 5 & y_2 = 6 \end{matrix} \right.$$

$$\Rightarrow S_1 = (1,-6), S_2 = (5,6)$$

- Testujeme stacionárne body

| | $S_1 = (1,-6)$ | $S_2 = (5,6)$ |
|---|---|---|
| $\partial^2_{x^2}\ f(x,y) = 6x$ | 6 | 30 >0 |
| $\partial^2_{y^2}\ f(x,y) = 2$ | 2 | 2 |
| $\partial^2_{xy}\ f(x,y) = -6$ | -6 | -6 |
| $D(S_i) = \partial^2_{x^2} f(S_i)\, \partial^2_{y^2} f(S_i) - \left(\partial^2_{xy} f(S_i)\right)^2$ | 12-36<0 | 60-36 >0 |
| Záver | Sedlov. bod | Lok. min |

- Počítame lokálne minimum




**Obrázok 47** $f(x,y) = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20$

$$\text{Lok. min} \;\; = f(S_2) = -86.$$

## PRÍKLAD 38.

Nájdite lokálne extrémy funkcie $f(x,y) = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$.

*Riešenie*

- Vyjadríme definičný obor funkcie

$$D_f = \mathbb{R}^2$$

- Hľadáme stacionárne body

$$\partial_x f(x,y) = 8x^3 - 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x(4x^2-1) = 0 \quad \Rightarrow x_1 = 0, \quad x_{2,3} = \pm\frac{1}{2}$$

$$\partial_y f(x,y) = 4y^3 - 4y = 0 \quad \Rightarrow \quad 4y(y^2-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad y_1 = 0, \quad y_{2,3} = \pm 1$$

Keďže medzi hodnotami $x$ a $y$ nie je žiaden funkčný vzťah, t. j. neexistuje žiadna funkcia $g$, pre ktorú by platilo $y = g(x)$, dostávame 9 stacionárnych bodov.

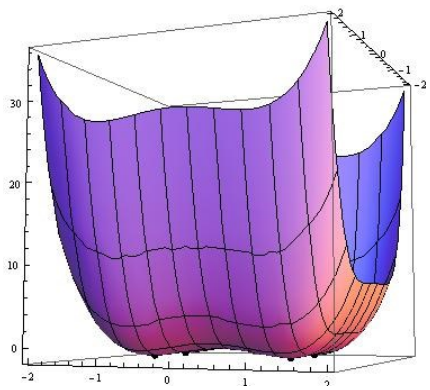
$$S_1 = (0,0), S_2 = (0,1),\ S_3 = (0,-1), S_4 = \left(\frac{1}{2},0\right),\ S_5 = \left(\frac{1}{2},1\right),$$

$$S_6 = \left(\frac{1}{2},-1\right), S_7 = \left(-\frac{1}{2},0,\right), S_8 = \left(-\frac{1}{2},1\right),\ S_9 = \left(-\frac{1}{2},-1\right)$$

- Testujeme stacionárne body

| | $S_1(0,0)$ | $S_2(0,1)$ | $S_3(0,-1)$ | $S_4\left(\frac{1}{2},0\right)$ | $S_5\left(\frac{1}{2},1\right)$ | $S_6\left(\frac{1}{2},-1\right)$ | $S_7\left(-\frac{1}{2},0\right)$ | $S_8\left(-\frac{1}{2},1\right)$ | $S_9\left(-\frac{1}{2},-1\right)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\partial^2_{x^2} f(x,y) = 24x^2 - 2$ | -2<0 | -2 | -2 | 4 | 4>0 | 4>0 | 4 | 4>0 | 4>0 |
| $\partial^2_{y^2}\ f(x,y) = 12y^2 - 4$ | -4 | 8 | 8 | -4 | 8 | 8 | -4 | 8 | 8 |
| $\partial^2_{xy}\ f(x,y) = 0$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $D(S_i)$ | 8 > 0 | -16<0 | -16<0 | -16<0 | 32>0 | 32>0 | -16<0 | 32>0 | 32>0 |
| Záver | max | Sedl. | Sedl. | Sedl. | min | min | Sedl. | min | min |

- Počítame hodnoty lokálnych extrémov




Obrázok 48 $f(x,y) = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$

$$\text{Lok. maximum } = f(0,0) = 0, \text{lok. minimá} = f\left(\pm\frac{1}{2},\pm 1\right) = -\frac{9}{8}.$$

## *PRÍKLAD 39.*

Nájdite lokálne extrémy funkcie $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.

*Riešenie*

- Vyjadríme definičný obor funkcie

$$D_f = \mathbb{R}^2$$

- Hľadáme stacionárne body

$$\partial_x f(x,y) = 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 - 5 = 0$$

$$\partial_y f(x,y) = 6xy - 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{2}{x}, \quad x \neq 0 \quad \Rightarrow$$

$$x^2 + \left(\frac{2}{x}\right)^2 - 5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^4 - 5x^2 + 4 = 0\,, \quad t = x^2 \quad \Rightarrow \quad t^2 - 5t + 4 = 0$$

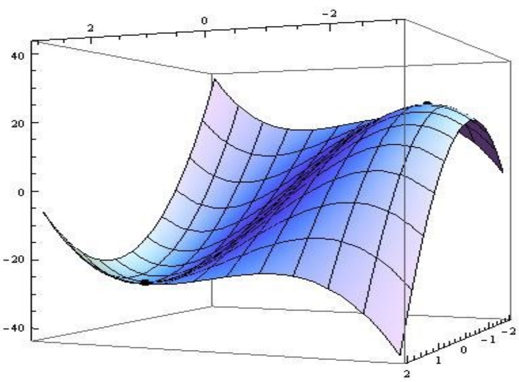
$$t_{1,2} = \left\langle \begin{matrix} 1 & x^2 = 1 & \Rightarrow & x_{1,2} = \pm 1 \\ 4 & x^2 = 4 & \Rightarrow & x_{3,4} = \pm 2 \end{matrix} \right.$$

$$\Rightarrow S_1 = (1,2), S_2 = (-1,-2),\ S_3 = (2,1), S_4 = (-2,-1)$$

- Testujeme stacionárne body

| | $S_1 = (1,2)$ | $S_2 = (-1,-2)$ | $S_3 = (2,1)$ | $S_4 = (-2,-1)$ |
|---|---|---|---|---|
| $\partial^2_{x^2}\ f(x,y) = 6x$ | 6 | -6 | 12 >0 | -12 <0 |
| $\partial^2_{y^2}\ f(x,y) = 6x$ | 6 | -6 | 12 | -12 |
| $\partial^2_{xy}\ f(x,y) = 6y$ | 12 | -12 | 6 | -6 |
| $D(S_i) = \partial^2_{x^2} f(S_i)\, \partial^2_{y^2} f(S_i) - \left(\partial^2_{xy} f(S_i)\right)^2$ | 36-144<0 | 36-144<0 | 144-36 >0 | 144-36 >0 |
| Záver | Sedlov. bod | Sedlov. bod | Lok. min | Lok. max |

- Počítame hodnoty lokálnych extrémov




**Obrázok 49** $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.

Lok. minimum $f(2,1) = -28$, lok. maximum $f(-2,-1) = 28$.

## Príklady na prepočítanie

Nájdite lokálne extrémy funkcií

**1.** $f(x,y) = x^2 - 5x + y^2 + y + 12.$

**2.** $f(x,y) = x^2 + 4xy - y^2 - 5x.$

**3.** $f(x,y) = 2x^3 - 3xy^2 - 9x + 18.$

**4.** $f(x,y) = 2x^3 - x^2 - \frac{y^3}{3} + 3y^2.$

**5.** $f(x,y) = y^3x^2(2 - 2x - y), \quad \text{ak} \quad x > 0, y > 0.$

**6.** $f(x,y) = 16^{x^2-2x+y^2+3y+3}.$

**7.** $f(x,y) = 2xy + \frac{4}{y} - \frac{27}{x}.$

**8.** $f(x,y) = \frac{3}{2x} + \frac{x}{3y} + 2y.$

**9.** $f(x,y) = 3x\ln(x^2 + y^2)$

**10.** $f(x,y) = e^{3x}(x^2 + x + y^2 - 2y).$

### VÝSLEDKY

1. Lokálne minimum $f\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

2. Lokálne extrémy nemá, len stacionárny bod $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

3. Lokálne extrémy nemá, len stacionárne body $(\sqrt{3}, \sqrt{3}), (-\sqrt{3}, -\sqrt{3})$.

4. Lokálne maximum $f(0,6) = 36$, lokálne minimum $f\left(\frac{1}{3}, 0\right) = -\frac{1}{27}$, stacionárne body $\left(\frac{1}{3}, 6\right), (0,0)$.

5. Lokálne maximum $f\left(\frac{1}{3}, 1\right) = \frac{1}{27}$.

6. Lokálne minimum $f\left(1, -\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

7. Lokálne maximum $f\left(\frac{9}{2}, -\frac{2}{3}\right) = -18$.

8. Lokálne minimum $f\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) = 3$.

9. Lokálne maximum $f\left(-\frac{1}{e}, 0\right) = \frac{6}{e}$, lokálne minimum $f\left(\frac{1}{e}, 0\right) = -\frac{6}{e}$, stacionárne body $(0,1), (0,-1)$.

10. Lokálne minimum $f\left(\frac{1}{3}, 1\right) = -\frac{5}{9}e$, stacionárny bod $(-2,1)$.

## *4.4. Viazané lokálne extrémy a globálne extrémy*

*Čo si treba pamätať z prednášky:*

### *Viazané lokálne extrémy*

*Hľadáme (lokálne) extrémy funkcie* $z = f(x, y)$ *na oblasti definovanej rovinnou krivkou (väzbou)* $g(x, y) = 0$. *Môžu nastať dve možnosti:*

- ***z väzby*** $\boldsymbol{g(x, y) = 0}$ ***možno jednoznačne vyjadriť jednu z premenných*** $\boldsymbol{y = \varphi(x)}$, ***resp.*** $\boldsymbol{x = \psi(y)}$ ***(väzba určuje funkciu)*** $\Rightarrow$ *hľadáme extrémy funkcie jednej premennej*
  - $z = f\big(x, \varphi(x)\big)$, *resp.* $z = f(\psi(y), y)$
- ***väzba neurčuje funkciu*** $\Rightarrow$ *Lagrangeova metóda neurčitých koeficientov*

---

Lagrangeova metóda: *Hľadáme lokálne extrémy funkcie* $L(x, y) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$.

*Nájdem stacionárne body* $S_i = (x_i, y_i)$ *pre* $\lambda_i$ *ako riešenie rovníc*

$\partial x L(x, y) = 0,$
$\partial y L(x, y) = 0,$ *a otestujem ich D-testom.*
$g(x, y) = 0,$

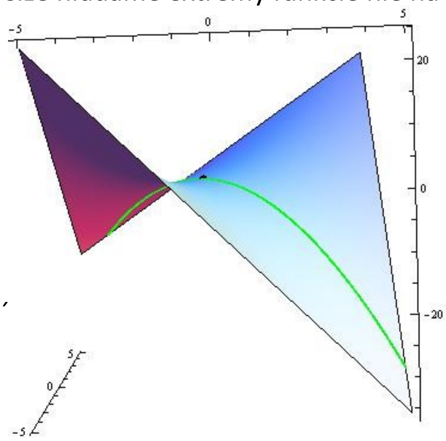
---

## ***PRÍKLAD 40.***

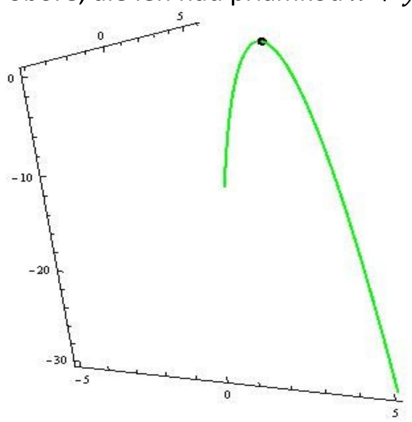
Nájdite lokálne extrémy funkcie $f(x, y) = xy - x + y - 1$ ak $x + y - 1 = 0$.

*Riešenie*

Čiže hľádáme extrémy funkcie nie na celom definičnom obore, ale len nad priamkou $x + y - 1 = 0$.



**Obrázok 51** $f(x, y) = xy - x + y - 1$



**Obrázok 50** $f(x, y) = xy - x + y - 1$ *nad priamkou* $x + y - 1 = 0$

Z väzby si vyjadríme premennú $y = 1 - x$ a dosadíme do funkcie $f(x, y)$:

$f(x, 1 - x) = x(1 - x) - x + (1 - x) - 1 = -x^2 - x$

- Hľadám stacionárny bod $f'(x) = -2x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{1}{2}, \quad y = \frac{3}{2}$
- Otestujem ho $f''(x) = -2|_{x=-\frac{1}{2}} = -2 < 0 \quad \Rightarrow$ v bode $S = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ má funkcia

  viazané lokálne maximum $f\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{4}$.

---

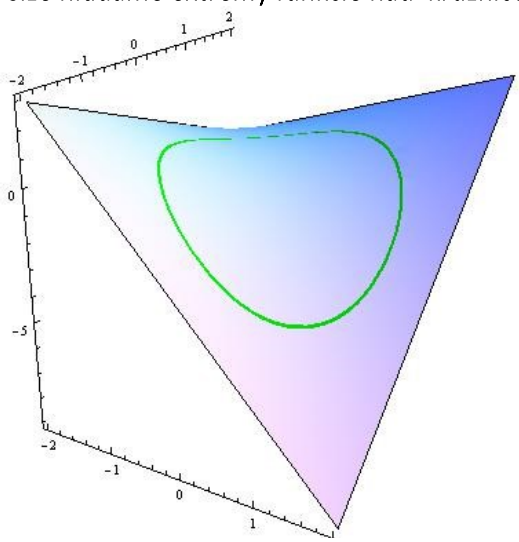
Zmeníme väzbu a budeme riešiť Lagrangeovou metódou:

## PRÍKLAD 41.

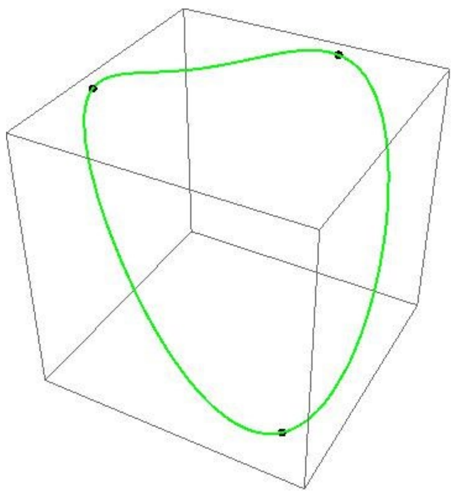
Nájdite lokálne extrémy funkcie $f(x, y) = xy - x + y - 1$ ak $x^2 + y^2 = 2$.

*Riešenie*

Čiže hľadáme extrémy funkcie nad kružnicou $x^2 + y^2 = 2$.




Obrázok 53 $f(x, y) = xy - x + y - 1$



Obrázok 52 $f(x, y) = xy - x + y - 1$ *nad* $x^2 + y^2 = 2$.

$L(x, y) = xy - x + y - 1 + \lambda(x^2 + y^2 - 2)$

$$
\begin{aligned}
\partial x L(x, y) &= y - 1 + 2\lambda x = 0 & \Rightarrow \quad & 2\lambda x + y = 1 \\
\partial y L(x, y) &= x + 1 + 2\lambda y = 0 & \Rightarrow \quad & x + 2\lambda y = -1 \quad |(-2\lambda) \\
g(x, y) &= x^2 + y^2 - 2 = 0 & & (1 - 4\lambda^2)y = 1 + 2\lambda
\end{aligned}
$$

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

- ak $1 - 4\lambda^2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1+2\lambda}{1-4\lambda^2} = \frac{1}{1-2\lambda}$ a $x = -1 - 2\lambda y = -\frac{1}{1-2\lambda}$

  Dosadíme do 3. rovnice

  $$\left(\frac{1}{1-2\lambda}\right)^2 + \left(-\frac{1}{1-2\lambda}\right)^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad (1 - 2\lambda)^2 = 1 \left\langle \begin{array}{l} 1 - 2\lambda = 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0 \\ 1 - 2\lambda = -1 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 1 \end{array} \right.$$

- Ak $\lambda = 0 \;\Rightarrow\; x = -1,\ y = 1 \quad S_1 = (-1,1)$
- Ak $\lambda = 1 \;\Rightarrow\; x = 1,\ y = -1 \quad S_2 = (1,-1)$

➢ ak $1 - 4\lambda^2 = 0 \quad \Rightarrow \lambda = \pm\frac{1}{2}$

- Ak $\lambda = \frac{1}{2} \;\Rightarrow$ sústava $\begin{matrix} x + y = 1 \\ x + y = -1 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{matrix}$ nemá riešenie
- Ak $\lambda = -\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; \begin{matrix} -x + y = 1 \\ x - y = -1 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{matrix} \;\Rightarrow\; y = 1 + x$

$$\Rightarrow \quad x^2 + (1+x)^2 = 2 \;\Leftrightarrow\; 2x^2 + 2x - 1 = 0 \;\Rightarrow\; x_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{3}}{2},\quad y_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad S_3 = \left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right), \qquad S_4 = \left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}, \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$$

Dostali sme 4 stacionárne body:

| | $S_1\ (\lambda = 0)$ | $S_2\ (\lambda = 1)$ | $S_3\ \left(\lambda = -\frac{1}{2}\right)$ | $S_4\ \left(\lambda = -\frac{1}{2}\right)$ |
|---|---|---|---|---|
| $\partial^2_{x^2}\ L(x,y) = 2\lambda$ | 0 | 2 >0 | -1 | -1 |
| $\partial^2_{y^2}\ L(x,y) = 2\lambda$ | 0 | 2 | -1 | -1 |
| $\partial^2_{xy}\ L(x,y) = 1$ | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $D(S_i) = \partial^2_{x^2}L(S_i)\,\partial^2_{y^2}L(S_i) - \left(\partial^2_{xy}L(S_i)\right)^2$ | -1<0 | 3>0 | 0 | 0 |
| Záver | Sedlov. b. | Lok. min $f(S_2) = -4$ | Neviem | Neviem |

Keďže pracujeme so spojitou funkciou nad uzavretou krivkou , čiže hľadáme extrémy uzavretej priestorovej krivky, viď obrázok 52, vieme, že maximum a minimum (t. j. najmenšia a najväčšia hodnota "$z$" bodov ležiacich na danej krivke) existuje. Využijeme fakt:

> Ak existuje maximum (minumum) funkcie, musí ho nadobúdať v niektorom zo stacionárnych bodov (keďže prvé derivácie sú definované pre všetky body z definičného oboru).

Keďže $f(S_3) = f(S_4) = \frac{1}{2}$, lokálne maximum (aj celkové) funkcia nadobúda v bodoch $S_{3,4}$.

## *PRÍKLAD 42.*

Firma vyrába dva druhy stoličiek. Ak firma vyrobí za jeden týždeň $x$ stoličiek prvého typu a $y$ druhého typu, náklady na výrobu sú popísané funkciou $N(x,y) = 6x^2 + 12y^2$. Týždenná produkcia firmy je 90 stoličiek. Koľko stoličiek prvého a druhého typu má firma vyrobiť za týždeň, aby minimalizovala náklady na výrobu? Aké budú tieto náklady?

*Riešenie*

Hľadám lokálne viazané extrémy funkcie $N(x,y) = 6x^2 + 12y^2$, keď $x + y = 90$. Z väzby vyjadrím

$y = 90 - x \quad \Rightarrow \quad N(x, 90-x) = 6x^2 + 12(90-x)^2$

$N'(x) = 12x - 24(90-x) = 36x - 2160 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 60$

$N''(x) = 36\,|_{x=60} = 36 > 0 \quad \Rightarrow$ v $x = 60$, $\;y = 90 - 60 = 30$ má funkcia $N(x,y)$ viazané lokálne minimum. Keďže je jediným viazaným lokálnym extrémom, je je aj celkovým minimum funkcie. $\mathrm{Min} = N(60{,}30) = 32\,400$.

*Minimálne náklady, a to 32 400 EUR, vynaloží firma pri výrobe 60 stoličiek 1. typu a 30 stoličiek 2. typu.*

---

*Čo si treba pamätať z prednášky:*

### *Globálne (celkové) extrémy na uzavretej oblasti*

*Hľadáme maximum a minimum spojitej funkcie* $z = f(x,y)$, $z_{\min} \le f(x,y) \le z_{\max}$ *na uzavretej podoblasti definičného oboru* $M \subset D_f$ *ohraničeného funkciami*

$g_i(x,y) = 0, \qquad i = 1, \dots, n.$

*Funkcia nadobúda lokálne extrémy*

- *v stacionárnych bodoch* $S_j$ *vo vnútri oblasti* $M$ *(lokálne extrémy)*
- *v stacionárnych bodoch* $\tilde{S}_k$ *na hranici oblasti* $M$ *(viazané lokálne extrémy)*
- *v bodoch* $A, B, \dots$, *kde sa hranice oblasti* $g_i(x,y) = 0$ *spájajú*

*potom*

$$\mathrm{Min} = z_{\min} = \min_{j,k}\{f(S_j), f(\tilde{S}_k), f(A), f(B), \dots\},$$

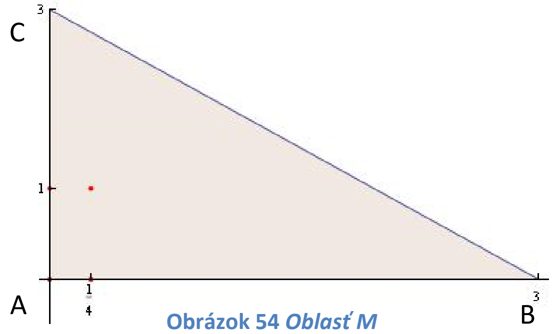
$$\mathrm{Max} = z_{\max} = \max_{j,k}\{f(S_j), f(\tilde{S}_k), f(A), f(B), \dots\}.$$

Ak $f(x,y)$ je spojitá funkcia, maximum a minimum na uzavretej oblasti vždy existuje. Pri ich hľadaní nie je nutné stacionárne body testovať .

## ***PRÍKLAD 43.***

Nájdite maximum a minimum funkcie $f(x,y) = 2x^2 - x - y^2 + 2y$ na oblasti $M: \Delta ABC, A(0,0), B(3,0), C(0,3)$.

*Riešenie*




**Obrázok 54** ***Oblasť M***

- Hľadáme stacionárne body vo vnútri oblasti M:

$$\partial_x f(x,y) = 4x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{4}$$
$$\partial_y f(x,y) = -2y + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 1$$

$$S_1 = \left(\frac{1}{4}, 1\right) \in M$$

- Hľadám stacionárne body na hraniciach oblasti (viazané extrémy)
  - Úsečka $AB$: $y = 0$, $x \in [0,3]$

    $$f(x,0) = 2x^2 - x$$
    $$f'(x) = 4x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{4}$$

    $$S_2 = \left(\frac{1}{4}, 0\right) \in AB$$

  - Úsečka $AC$: $x = 0$, $y \in [0,3]$

    $$f(0,y) = -y^2 + 2y$$
    $$f'(y) = -2y + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 1$$

    $$S_3 = (0,1) \in AC$$

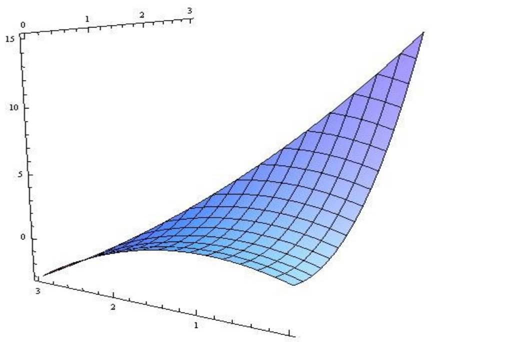
  - Úsečka $BC$: $x + y = 3 \quad \Rightarrow \quad y = 3 - x$ , $x \in [0,3]$

    $$f(x, 3-x) = 2x^2 - x - (3-x)^2 + 2(3-x) = x^2 + 3x - 3$$
    $$f'(y) = 2x + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{2}{3} \notin [0,3]$$

- Dosadím nájdené stacionárne body plus body $A, B, C$ do funkcie $f(x,y)$

$$f(S_1) = \frac{7}{8}$$
$$f(S_2) = -\frac{1}{8}$$
$$f(S_3) = 1$$

$$f(A) = 0$$
$$f(B) = 15$$
$$f(C) = -3$$



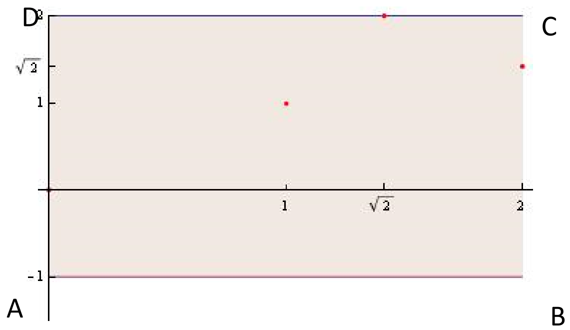

**Obrázok 55** $f(x,y) = 2x^2 - x - y^2 + 2y$ ***nad oblasťou M.***

$$\text{Max} = 15, \quad \text{Min} = -3.$$

## *PRÍKLAD 44.*

Nájdite maximum a minimum funkcie $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ na oblasti $M: \square ABCD$, $A(0,-1), B(2,-1), C(2,2), D(0,2)$.

*Riešenie*




**Obrázok 56** ***Oblasť M***

- Hľadáme stacionárne body vo vnútri oblasti M:

  $\partial_x f(x,y) = 3x^2 - 3y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = x^2$
  $\partial_y f(x,y) = 3y^2 - 3x = 0 \quad \Rightarrow \quad (x^2)^2 - x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^4 - x = x(x^3 - 1) = 0 \quad \Rightarrow$

  $x_{1,2} = \langle {0 \atop 1} \quad \Rightarrow \quad S_1 = (0,0),\ S_2 = (1,1) \in M$

- Hľadám stacionárne body na hraniciach oblasti (viazané extrémy)
  - Úsečka $AB$: $y = -1,\ x \in [0,2]$

    $f(x,-1) = x^3 - 1 + 3x$
    $f'(x) = 3x^2 + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{nemá riešenie}$
  - Úsečka $BC$: $x = 2,\ y \in [-1,2]$

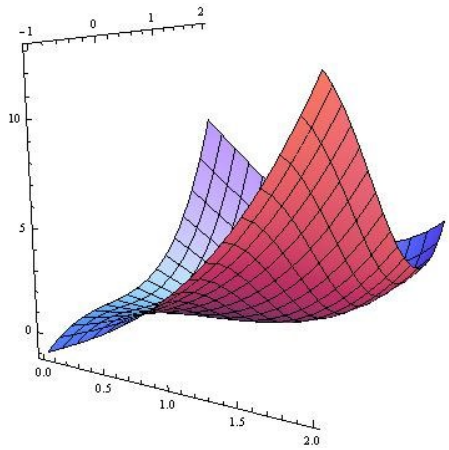
    $f(2,y) = 8 + y^3 - 6y$ $\qquad S_3 = (2,\sqrt{2}) \in BC$
    $f'(y) = 3y^2 - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \pm\sqrt{2}$ $\qquad (2,-\sqrt{2}) \notin BC$
  - Úsečka $CD$: $y = 2 \quad x \in [0,2]$

    $f(x,2) = x^3 + 8 - 6x$ $\qquad S_4 = (\sqrt{2},2) \in CD$
    $f'(x) = 3x^2 - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$ $\qquad (-\sqrt{2},2) \notin CD$
  - Úsečka $AD$: $x = 0,\ y \in [-1,2]$

    $f(0,y) = y^3$
    $f'(y) = 3y^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0$ $\qquad S_5 = (0,0) = S_1$

- Dosadím nájdené stacionárne body plus body $A, B, C, D$ do funkcie $f(x,y)$

  $f(S_1) = 0$ $\qquad f(A) = -1$
  $f(S_2) = -1$ $\qquad f(B) = 13$
  $f(S_3) = 8 - 4\sqrt{2}$ $\qquad f(C) = 4$
  $f(S_4) = 8 - 4\sqrt{2}$ $\qquad f(D) = 8$




**Obrázok 57** $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ ***nad oblasťou M.***

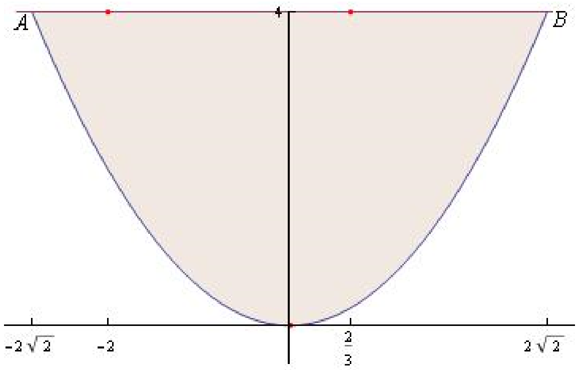
$$\text{Max} = 13, \quad \text{Min} = \ -1.$$

---

## ***PRÍKLAD 45.***

Nájdite maximum a minimum funkcie $f(x,y) = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy$ na oblasti $M$ ohraničenej krivkami $y = \frac{x^2}{2}$ , $y = 4$.

*Riešenie*




**Obrázok 58** ***Oblasť M***

- Hľadáme stacionárne body vo vnútri oblasti M:

  $$\left.\begin{matrix} \partial_x f(x,y) = 6x^2 + 8x - 2y = 0 \\ \partial_y f(x,y) = 2y - 2x = 0 \ \Rightarrow \ y = x \end{matrix}\right. \quad \Rightarrow \ 6x^2 + 6x = 6x(x+1) = 0 \ \Rightarrow \ x_{1,2} = \left\langle \begin{matrix} 0 \\ -1 \end{matrix}\right.$$

  $\Rightarrow (-1,-1) \notin M, \ S_1 = (0,0) \in M$

- Hľadám stacionárne body na hraniciach oblasti (viazané extrémy)

  - Dopočítam prieniky $A, B$: $y = 4, y = \frac{x^2}{2} \ \Rightarrow \ 4 = \frac{x^2}{2} \ \Rightarrow \ x_{1,2} = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}$

    $A = (-2\sqrt{2}, 4)$, $\qquad B = (2\sqrt{2}, 4)$.

  - Parabola $y = \frac{x^2}{2}$, $x \in [-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]$

$$f\left(x,\frac{x^2}{2}\right) = 2x^3 + 4x^2 + \left(\frac{x^2}{2}\right)^2 - 2x\frac{x^2}{2} = \frac{x^4}{4} + x^3 + 4x^2$$
$$f'(x) = x^3 + 3x^2 + 8x = 0 \quad \Rightarrow \quad x\,\underbrace{(x^2+3x+8)}_{>0} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

$$S_2 = (0,0) = S_1$$

- Úsečka $AB$: $y = 4, \quad x \in [-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]$

  $f(x,4) = 2x^3 + 4x^2 + 16 - 8x$

  $f'(x) = 6x^2 + 8x - 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \left\langle \begin{matrix} 2/3 \\ -2 \end{matrix} \right.$ $\quad S_3 = \left(\frac{2}{3}, 4\right),\ S_4 = (-2,4) \in AB$

- Dosadím nájdené stacionárne body plus body $A, B$ do funkcie $f(x,y)$

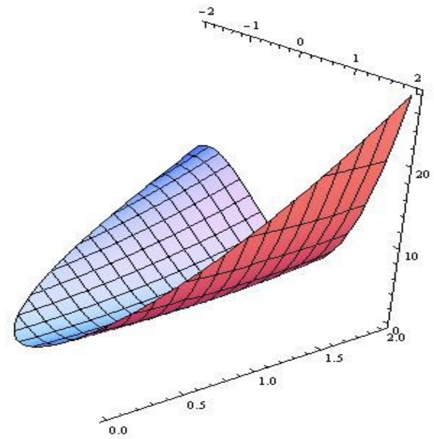
$f(S_1) = 0$

$f(S_3) = \frac{352}{27}$

$f(S_4) = 32$

$f(A) = 48 - 16\sqrt{2}$

$f(B) = 48 + 16\sqrt{2}$




Obrázok 59 $f(x,y) = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy$ *nad oblasťou M*

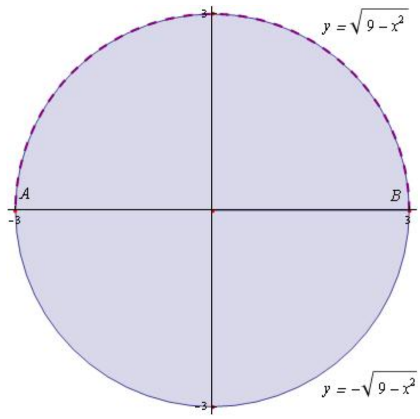
$$\text{Max} = 48 + 16\sqrt{2}, \quad \text{Min} = 0.$$

---

## PRÍKLAD 46.

Nájdite maximum a minimum funkcie $f(x,y) = x^2 - \frac{1}{3}y^2$ na kruhovej oblasti $M$: $x^2 + y^2 \leq 9$.

*Riešenie*




Obrázok 60 *Oblasť M*

- Hľadáme stacionárne body vo vnútri oblasti M:

  $\partial_x f(x,y) = 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$

  $\partial_y f(x,y) = -\frac{2}{3}y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0$ $\quad S_1 = (0,0) \in M$

- Hľadám stacionárne body na hraniciach oblasti (viazané extrémy)
    - Kružnicu rozdelím na dve polkružnice: $y = \pm\sqrt{9-x^2}$ spojené v bodoch

      $A = (-3{,}0)$, $B = (3, 0)$.

      $f\left(x, \pm\sqrt{9-x^2}\right) = x^2 - \frac{1}{3}(9 - x^2) = \frac{4}{3}x^2 - 3$

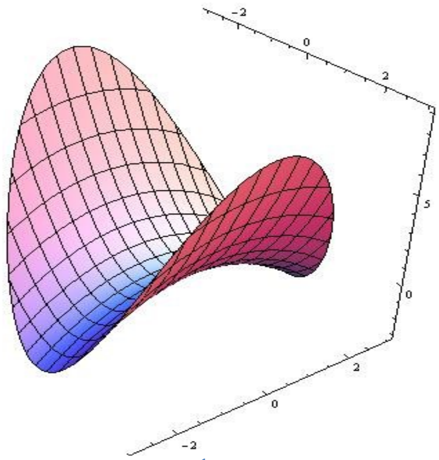
      $f'(x) = \frac{8}{3}x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$

      $S_2 = (0, -3), S_3 = (0{,}3)$

- Dosadím nájdené stacionárne body plus body $A, B$ do funkcie $f(x, y)$

$f(S_1) = 0$
$f(S_2) = -3$
$f(S_3) = -3$

$f(A) = 9$
$f(B) = 9$



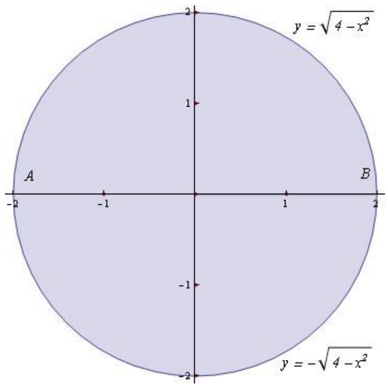
Obrázok 61 $f(x, y) = x^2 - \frac{1}{3}y^2$ *nad oblasťou M*

$$\text{Max} = 9, \quad \text{Min} = -3.$$

## *[Príklad 47.]()*

Nájdite maximum a minimum funkcie $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}(3x^2 + 2y^2)$ na kruhovej oblasti $M$: $x^2 + y^2 \leq 4$.

*Riešenie*




Obrázok 62 *Oblasť M*

- Hľadáme stacionárne body vo vnútri oblasti M:

$$\partial_x f(x,y) = e^{-x^2-y^2}(-2x)(3x^2+2y^2) + e^{-x^2-y^2}6x = 2xe^{-x^2-y^2}(-3x^2-2y^2+3) = 0$$
$$\partial_y f(x,y) = e^{-x^2-y^2}(-2y)(3x^2+2y^2) + e^{-x^2-y^2}4y = 2ye^{-x^2-y^2}(-3x^2-2y^2+2) = 0$$

1. rovnica sa rovná 0 ak:

- $x = 0$. Dosadíme do 2. rovnice

$$2ye^{-y^2}(-2y^2+2) = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 0 \\ -2y^2+2 = 0 \end{cases} \Rightarrow y_{2,3} = \pm 1$$

$S_1 = (0,0), \qquad S_2 = (0,1),\ S_3 = (0,-1)$

- $-3x^2 - 2y^2 = -3$. Dosadíme do 2. rovnice

$$2ye^{-x^2-y^2}(-3+2) = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0 \quad \Rightarrow \quad -3x^2 = -3 \quad \Leftrightarrow \quad x_{1,2} = \pm 1$$

$S_4 = (1,0), \qquad S_5 = (-1,0)$

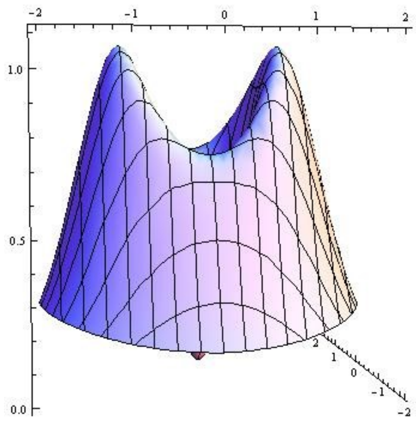
- Hľadám stacionárne body na hraniciach oblasti (viazané extrémy)
  - Kružnicu rozdelím na dve polkružnice: $y = \pm\sqrt{4-x^2}$ spojené v bodoch $A = (-2,0)$, $B = (2,0)$.

$$f\left(x, \pm\sqrt{4-x^2}\right) = e^{-4}(x^2+8)$$
$$f'(x) = 2e^{-4}x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

$S_6 = (0,-2), S_7 = (0,2)$

- Dosadím nájdené stacionárne body plus body $A, B$ do funkcie $f(x,y)$

| | $S_1(0,0)$ | $S_2(0,1)$ | $S_3(0,-1)$ | $S_4(1,0)$ | $S_5(-1,0)$ | $S_6(0,-2)$ | $S_7(0,2)$ | $A(-2,0)$ | $B(2,0)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x,y)$ | $0$ | $2e^{-1}$ | $2e^{-1}$ | $3e^{-1}$ | $3e^{-1}$ | $8e^{-4}$ | $8e^{-4}$ | $12e^{-4}$ | $12e^{-4}$ |



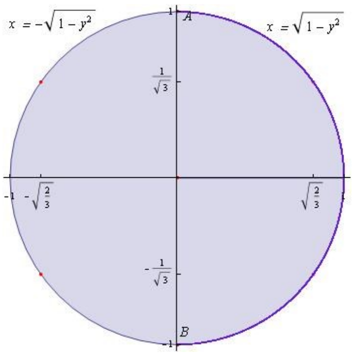

**Obrázok 63** $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}(3x^2+2y^2)$ ***nad oblasťou M***

$$\text{Max} = 3e^{-1}, \quad \text{Min} = 0.$$

## *PRÍKLAD 48.*

Nájdite maximum a minimum funkcie $f(x,y) = x^2y$ na kruhovej oblasti $M$: $x^2 + y^2 \leq 1$.

*Riešenie:*




**Obrázok 64** *Oblasť M*

- Hľadáme stacionárne body vo vnútri oblasti M:

  $\partial_x f(x,y) = 2xy = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \quad \text{alebo} \quad y = 0$
  $\partial_y f(x,y) = x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$

  Stacionárnymi bodmi, sú všetky body na úsečke $x = 0$ (os $y$) vnútri kruhu

  $S_t = (0,t), \quad t \in [-1,1]$

- Hľadám stacionárne body na hraniciach oblasti (viazané extrémy)

  - Kružnicu rozdelím na dve polkružnice: $x = \pm\sqrt{1-y^2}$ spojené v bodoch

    $A = (0,1)$, $B = (0,-1)$.

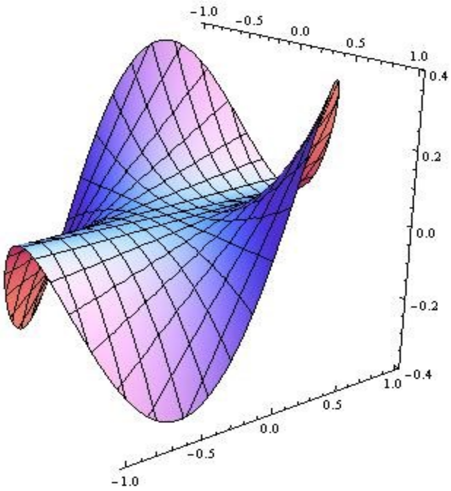
    $f\left(\pm\sqrt{1-y^2}, y\right) = (1-y^2)y = y - y^3$

    $f'(y) = 1 - 3y^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}, \quad x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$

    $S_1 = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}}\right), S_2 = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}, -\sqrt{\frac{1}{3}}\right), S_3 = \left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}}\right), S_4 = \left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, -\sqrt{\frac{1}{3}}\right).$

- Dosadím nájdené stacionárne body plus body $A, B$ do funkcie $f(x,y)$

| | $S_t(0,t)$ | $S_1\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}}\right)$ | $S_2\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, -\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$ | $S_3\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}}\right)$ | $S_4\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, -\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$ | $A(0,1)$ | $B(0,-1)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x,y)$ | $0$ | $\frac{2}{3\sqrt{3}}$ | $-\frac{2}{3\sqrt{3}}$ | $\frac{2}{3\sqrt{3}}$ | $-\frac{2}{3\sqrt{3}}$ | $0$ | $0$ |



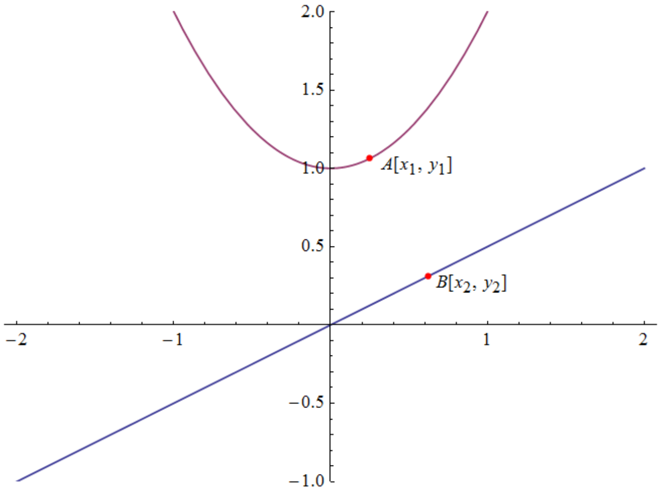

Obrázok 65 $f(x,y) = x^2y$ *nad oblasťou M*

$$\text{Max} = \frac{2}{3\sqrt{3}} \quad , \quad \text{Min} = -\frac{2}{3\sqrt{3}} \; .$$

## *PRÍKLAD 49.*

Vypočítajte vzdialenosť priamky $y = \frac{1}{2}x$ od paraboly $y = x^2 + 1$.

*Riešenie:*




Obrázok 66

Hľadáme body $A(x_1, y_1)$ (na parabole) a $B(x_2, y_2)$ (na priamke) tak, aby ich vzdialenosť bola čo najmenšia, pričom $y_1 = (x_1)^2 + 1$, $y_2 = \frac{1}{2}\, x_2$,

$$v(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + \left(\frac{1}{2}x_2 - ((x_1)^2 + 1)\right)^2}\,.$$

Počítame minimum funkcie

$$V(x_1,x_2) = v^2(A,B) = (x_2 - x_1)^2 + \left(\tfrac{1}{2}x_2 - ((x_1)^2 + 1)\right)^2$$

(funkcie $v$ a $V$ nadobúdajú extrémy v tých istých bodoch, ale funkcia $V$ je jednoduchšia.)

- Nájdeme stacionárne body

$$\partial_{x_1}V(x_1,x_2) = \; -2(x_2 - x_1) + 2\left(\tfrac{1}{2}x_2 - ((x_1)^2 + 1)\right)(-2x_1) \; = 0$$

$$\partial_{x_2}V(x_1,x_2) = \quad 2(x_2 - x_1) + \cancel{2}\left(\tfrac{1}{2}x_2 - ((x_1)^2 + 1)\right)\cancel{\tfrac{1}{2}} = 0$$

$$\left(\frac{1}{2}x_2 - ((x_1)^2 + 1)\right)(1 - 4x_1) = 0 \quad \Longrightarrow$$

- $x_1 = \frac{1}{4} \quad \Longrightarrow \quad 2\left(x_2 - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{16} - 1\right) = 0 \;\Longrightarrow\; \frac{5}{2}\,x_2 - \frac{25}{16} = 0 \quad \Longrightarrow x_2 = \frac{5}{8}$
- $\frac{1}{2}x_2 - ((x_1)^2 + 1) = 0 \;\;\Rightarrow\;\; x_2 = 2(x_1)^2 + 2 \;\;\Rightarrow\;\; 2\big((2(x_1)^2 + 2) - x_1\big) = 0$

$$2(x_1)^2 - x_1 + 2 \neq 0.$$

$$\Rightarrow \quad S = \left(\tfrac{1}{4}, \tfrac{5}{8}\right).$$

- Otestujeme stacionárny bod

$$\partial^2_{x_1^2}V(x_1,x_2) = \; 2 - 4\left(\frac{1}{2}x_2 - ((x_1)^2 + 1)\right) - 4x_1(-2\,x_1) = 12\,(x_1)^2 - 2x_2 + 6\Big|_S = \frac{11}{2} > 0$$

$$\partial^2_{x_2^2}V(x_1,x_2) = \frac{5}{2}\Big|_S = \frac{5}{2}$$

$$\partial^2_{x_1x_2}V(x_1,x_2) = -2 - 2x_1|_S = -\frac{5}{2}$$

$$D(S) = \left(\frac{11}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right) - \left(-\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{30}{4} > 0$$

V $S$ je lokálne minimum. Keďže funkcia má jediný stacionárny bod a jej prvé derivácie sú všade definované, je v $S$ aj celkové (globálne) minimum. Stačí dosadiť $y_1 = (x_1)^2 + 1,\; y_2 = \frac{1}{2}\,x_2$.

Hľadané body sú $A = \left(\frac{1}{4}, \frac{17}{16}\right)$ a $B = \left(\frac{5}{8}, \frac{5}{16}\right)$ a vzdialenosť priamky od paraboly je

$$v(A,B) = \sqrt{\left(\frac{5}{8} - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{5}{16} - \frac{17}{16}\right)^2} = \frac{3\sqrt{5}}{8}.$$

## Príklady na prepočítanie

Nájdite maximum a minimum funkcie na uzavretej oblasti $M$.

1. $f(x,y) = x^2y(2-x-2y)$, $M$: $\Delta ABC, A(0,0), B(4,0), C(0,2)$.

2. $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$, $M$: $\square ABCD, A(-2,-1), B(2,-1), C(2,1), D(-2,1)$.

3. $f(x,y) = x^2 - 2xy + 3y^2$, $M$ je kosoštvorec $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 2\}$.

4. $f(x,y) = 2x^2e^{-x^2-y^2}$, $M$ je kruh so stredom $S(0,0)$ a polomerom $r = 2$.

5. $f(x,y) = x^3 - 2xy + y^2$, $M$ je ohraničená parabolou a priamkou,

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq 2\}.$$

6. $f(x,y) = x^2 + 4x^2y^2 - y^2$, $M$ je kruh $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$.

7. $f(x,y) = \frac{y}{x} - 3x + \frac{9}{y}$, $M$: $\Delta ABC, A(1,-4), B(4,-4), C(1,-1)$.

8. $f(x,y) = y + 2x - 2\ln(xy)$, $M$: $\square ABCD, A\left(\frac{1}{2},1\right), B(e,1), C(e,e), D\left(\frac{1}{2},e\right)$.

Riešte slovné úlohy

**9.** Nájdite bod na kuželi $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$ s najmenšou vzdialenosťou k bodu $T(2,1,0)$. Vypočítajte túto vzdialenosť. (Čiže nájdite vzdialenosť bodu od plochy kužeľa).

**10.** Továreň vyrába akváriá v tvare kvádrov s objemom 64 $m^3$. Materiál podstavy stojí 20 € za $m^2$ a materiál bočných strán 10 € za $m^2$. Nájdite rozmery akvária, aby jeho výrobné náklady boli čo najmenšie. Vyjadrite hodnotu výrobných nákladov.

**11.** Spoločnosť vyrába 2 typy dáždnikov. Prvý typ sa predáva za 8 € a druhý za 12 €. Denné výrobné náklady na *x* stoviek dáždnikov 1. typu a *y* stoviek 2. typu možno vyjadriť funkciou $N = x^2 - xy + y^2 - 4x + 6y + 2$ stoviek €. Navrhni výrobu tak, aby spoločnosť mala, čo najväčší zisk. Vyjadri jeho hodnotu.

**12.** Nájdi tri kladné čísla, ktorých súčet je 27, aby súčet ich štvorcov bol čo najmenší.

**13.** Nájdi valcovú nádobu s maximálnym povrchom, ak jej objem je $54\pi$.

**14**. Nájdi valec s maximálnym objemom vpísaný do kužeľa s polomerom 9 cm a výškou 24 cm.

## VÝSLEDKY

1. $\text{Max} = 0,\ \text{Min} = -\frac{128}{27}.$

2. $\text{Max} = 25,\ \text{Min} = -2.$

3. $\text{Max} = 12,\ \text{Min} = 0.$

4. $\text{Max} = \frac{2}{e},\ \text{Min} = 0.$

5. $\text{Max} = 4 + \frac{16}{3\sqrt{3}},\ \text{Min} = -\frac{4}{27}.$

6. $\text{Max} = \frac{65}{4},\ \text{Min} = -4.$

7. $\text{Max} = 15,\ \text{Min} = -\frac{61}{4}.$

8. $\text{Max} = 2e - 1,\ \text{Min} = 4 - 2\ln 2.$

9. Hľadám minimum funkcie $V(x,y) = (x-2)^2 + (y-1)^2 + 4(x^2+y^2)$. Hľadaný bod na kuželi je $A\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ a vzdialenosť bodu $T$ od kužeľa je 2 j.d..

10. Hľadám minimum funkcie $N(a,b) = 20ab + 20(a+b)\frac{64}{ab}$. Rozmery akvária $a = b = c = 4\ \mathrm{m}$. Náklady na výrobu jedného akvária je 800 €.

11. Hľadám maximum funkcie $Z(x,y) = 8x + 12y - (x^2 - xy + y^2 - 4x + 6y + 2)$. Maximálny zisk dosiahnu pri výrobe 1000 dáždnikov prvého typu a 800 dáždnikov druhého typu. Maximálny zisk je 8200 €.

12. Hľadám minimum funkcie $f(a,b) = a^2 + b^2 + (27 - a - b)^2$. Minimum dosiahneme pri číslach $a = b = c = 9$.

13. Hľadám maximum funkcie $P(r, v) = 2\pi r\ (r + v)$ s väzbou $54\pi = \pi r^2 v$. Maximálny povrch $54\pi$ má valec s polomerom $r = 3$ a výškou $v = 6$.

14. Hľadám maximum funkcie $V(r, v) = \pi r^2 v$ s väzbou $\frac{9-r}{9} = \frac{v}{24}$ (z podobnosti trojuholníkov). Maximálny objem je $288\,\pi$ pri rozmeroch valca $r = 6, v = 8$.

# Literatúra


[1] BENICE, D.D.: Calculus and its applications. Houghton Mifflin Company, Boston, 1993, s. 687, ISBN 0-395-61548-8

[2] ELIAŠ, J., HORVÁTH, J., KAJAN, J.: Zbierka úloh z vyššej matematiky 2. Vydavateľstvo STU, Bratislava, 1995, s. 320, ISBN 80-277-0742-2.

[3] KÁLNOVÁ, G., et al.: Riešené úlohy z matematiky II. Vydavateľstvo STU, Bratislava, 1999, s. 186, ISBN 80-277-1344-9.

[4] KOLESÁROVÁ, A., BALÁŽ, V.: Matematika II. STU v Bratislave v Nakladateľstve STU, Bratislava, 2011, s. 263, ISBN 978-80-227-3493-6.

[5] KRAJŇÁKOVÁ, D., MÍČKA, J., MACHAČOVÁ, L.: Zbierka úloh z matematiky. Alfa, Bratislava, 1988, s. 536.