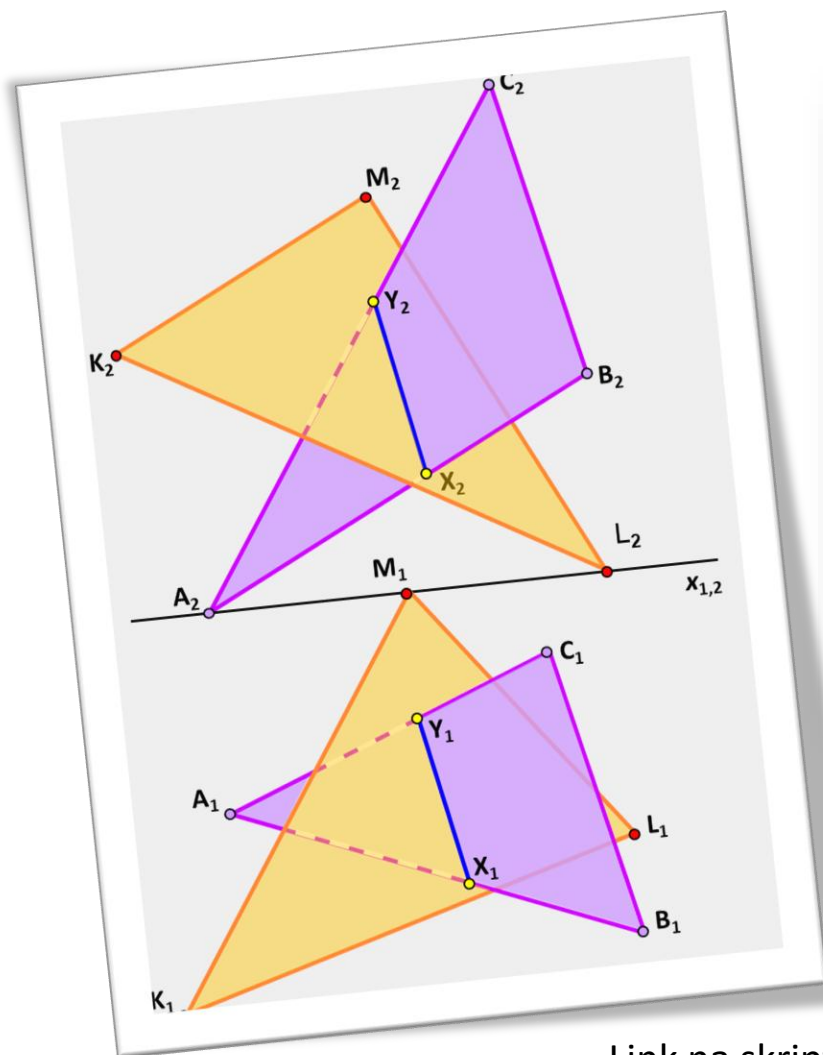
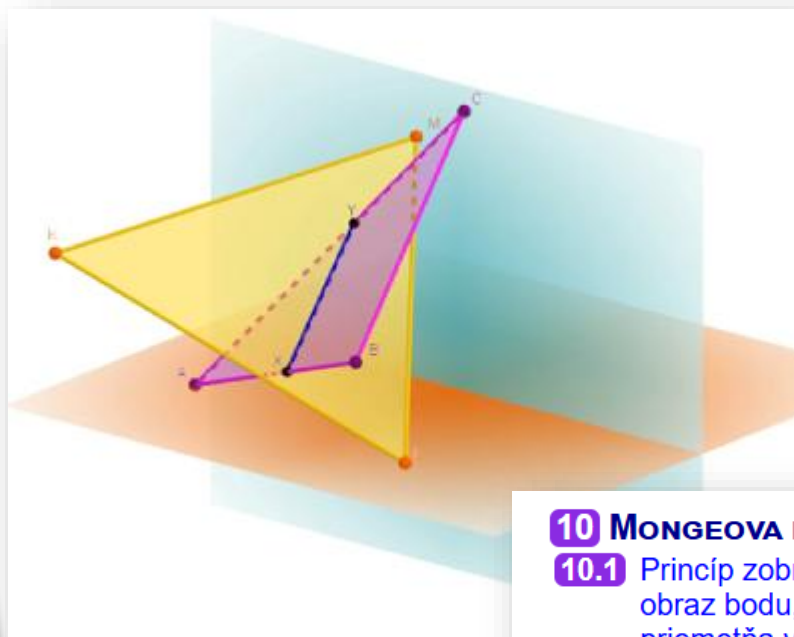


MONGEOVA Projekcia 2



Link na skriptá:



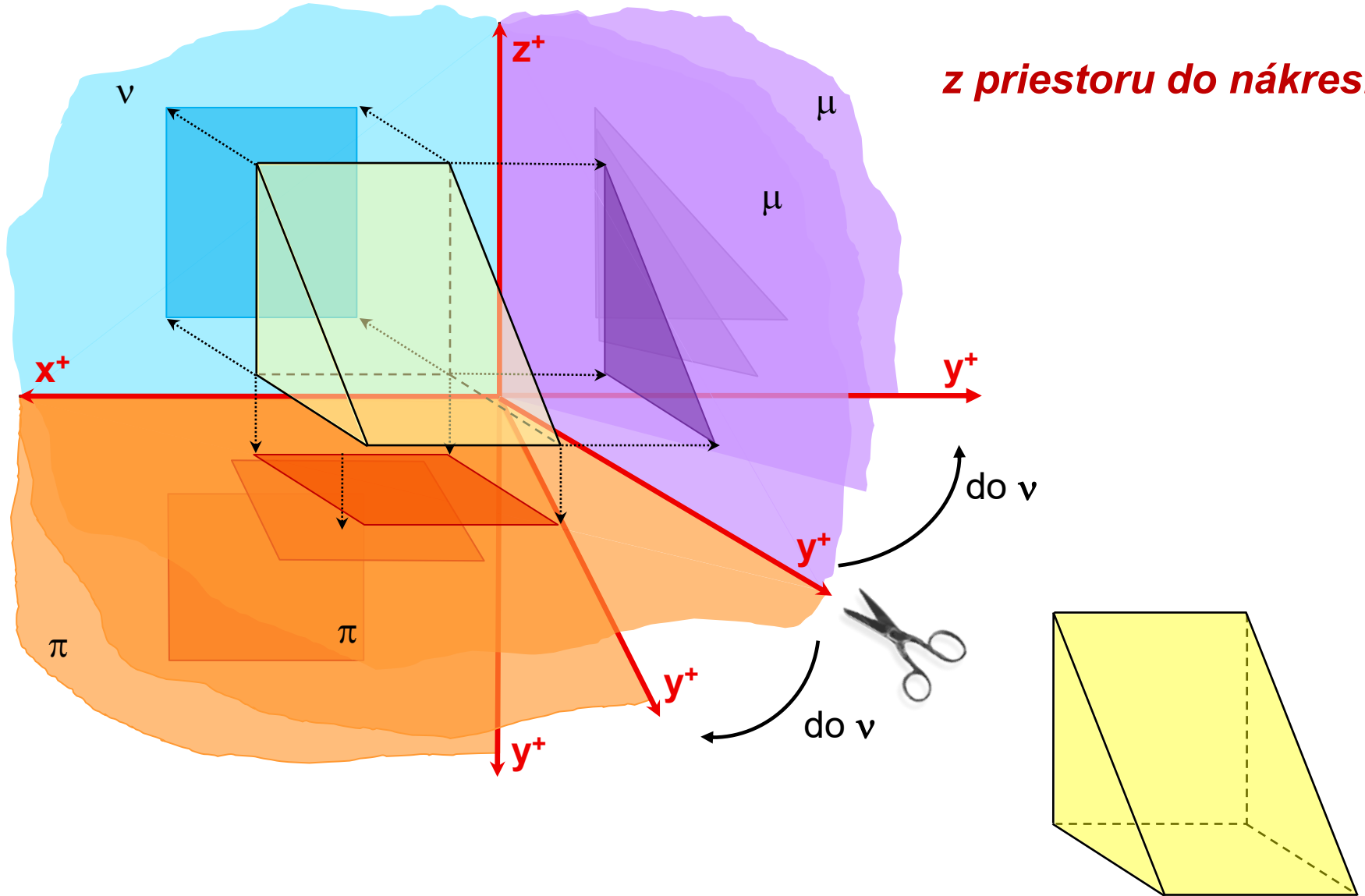
10 MONGEOVA PROJEKCIA

- 10.1 Princíp zobrazenia, obraz bodu, tretia priemetňa v Mongeovej projekcii
- 10.2 Obraz priamky, roviny v Mongeovej projekcii
- 10.3 Polohové úlohy v Mongeovej projekcii
- 10.4 Metrické úlohy v Mongeovej projekcii
- 10.5 Riešené úlohy - telesá s podstavou v špeciálnych rovinách v MP

<http://math.sk/~skripta/deskriptivna-geometria-pre-stavebne-odbory/>

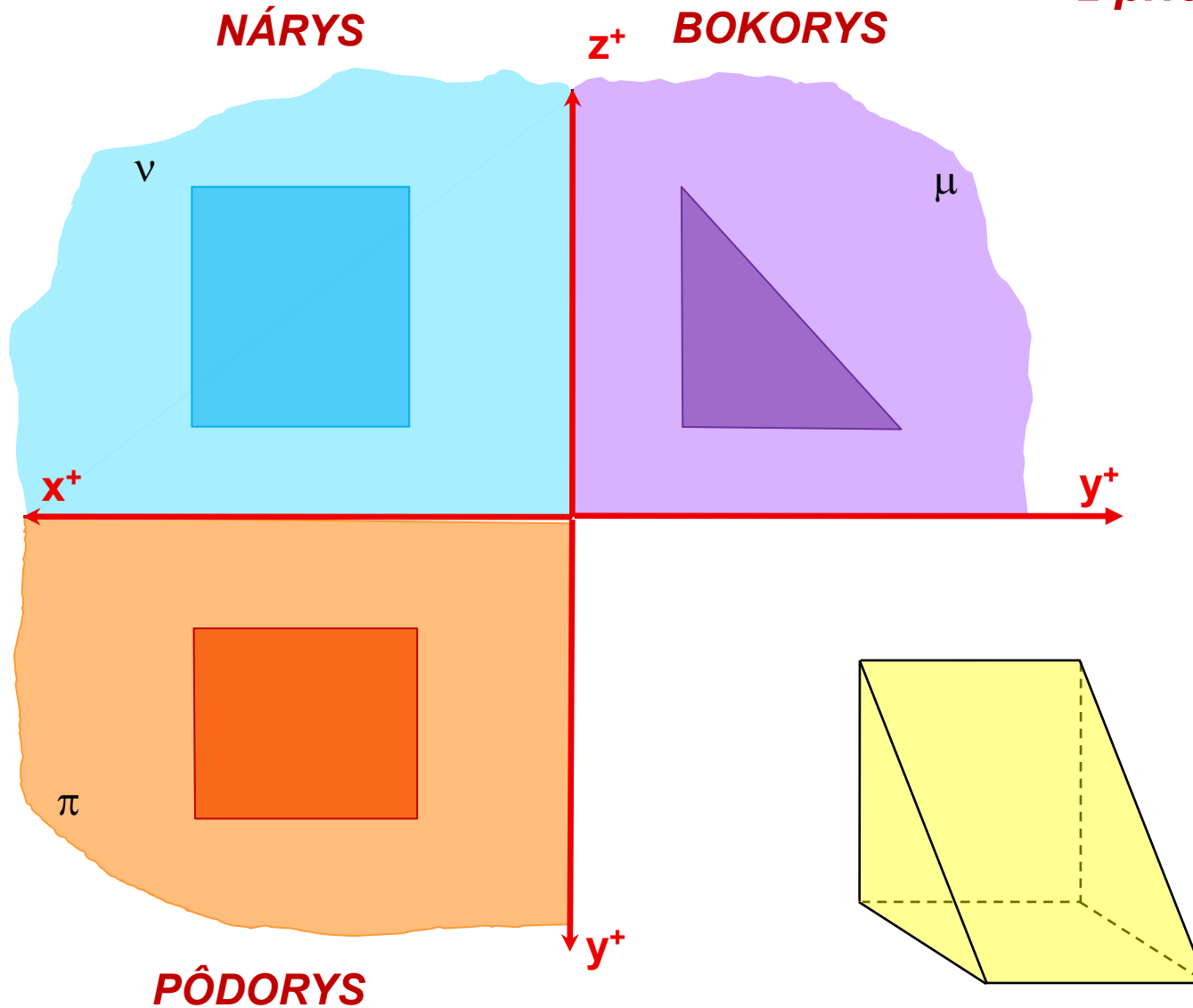
ZDRUŽENIE PRIEMETNÍ

z priestoru do nákresne



ZDRUŽENIE PRIEMETNÍ

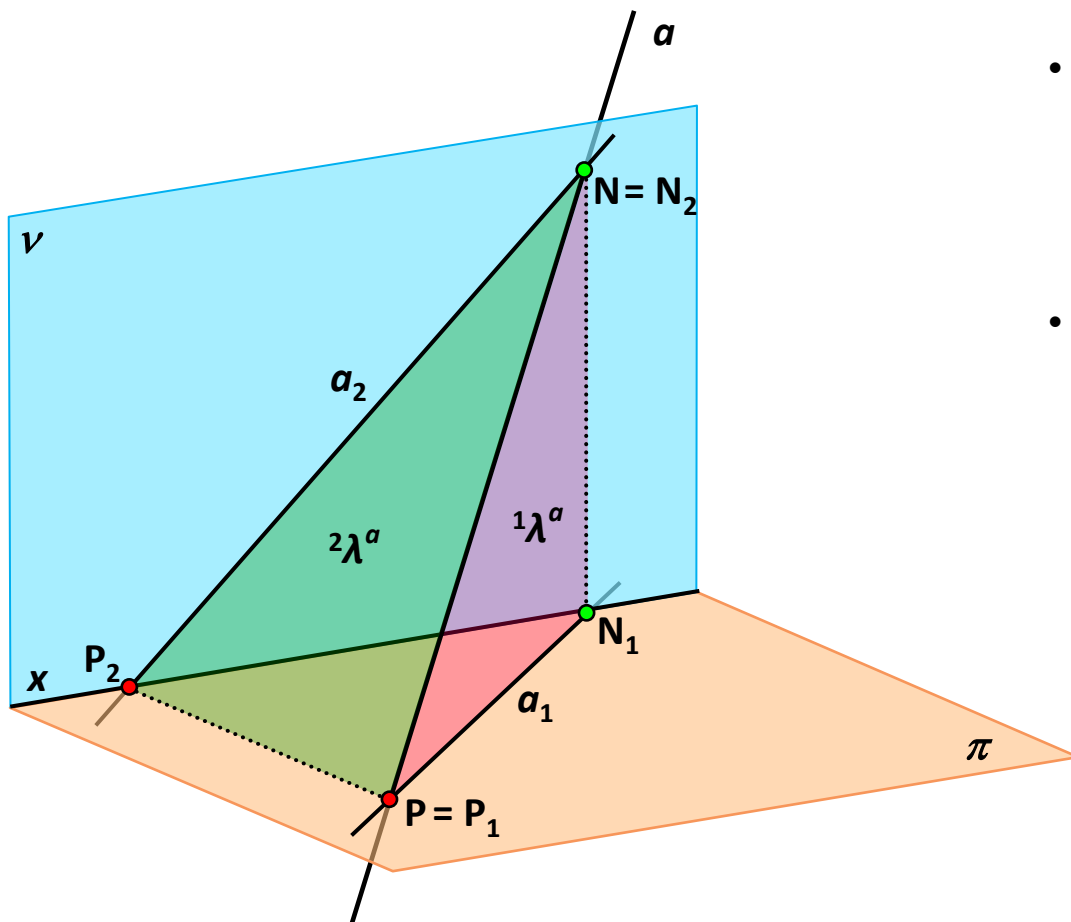
z priestoru do nákresne



10.2 Obraz priamky, roviny v Mongeovej projekcii

Zobrazenie priamky

Priamka a vo všeobecnej polohe vzhľadom na priemetne sa v Mongeovej projekcii premietne do dvojice priamok (a_1, a_2), ktoré nazývame združené priemety priamky a .



Poznámka: Pri práci s viacerými priamkami v jednej úlohe odlišujeme stopníky jednotlivých priamok pomocou označenia, kde horný index pomenúva konkrétnu priamku, napr. P_1^a alebo N_2^b .

- ${}^1\lambda^a$ – 1. premietacia rovina priamky a ,
 ${}^1\lambda^a \perp \pi, {}^1\lambda^a \cap \pi = a_1$,
 a_1 – **pôdorys** priamky a
- ${}^2\lambda^a$ – 2. premietacia rovina priamky a ,
 ${}^2\lambda^a \perp \nu, {}^2\lambda^a \cap \nu = a_2$,
 a_2 – **nárys** priamky a

Priesečník priamky s pôdorysňou sa nazýva **pôdorysný stopník P**.

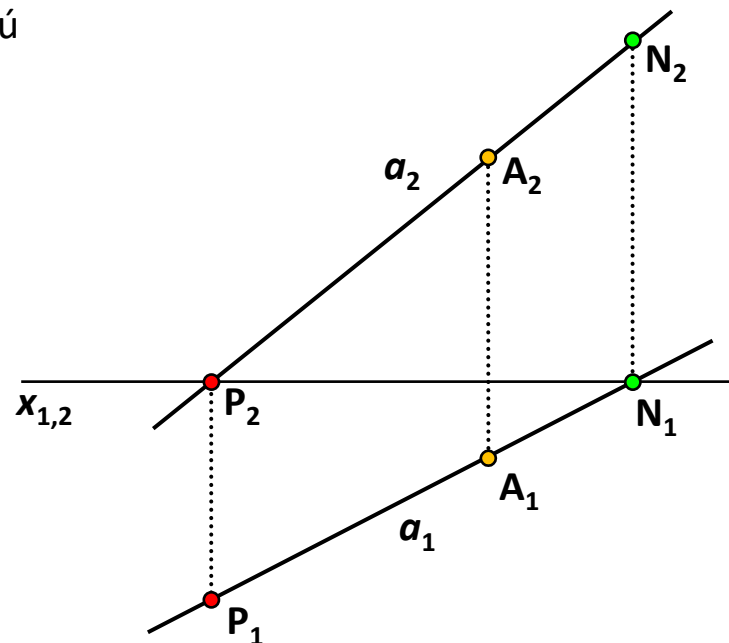
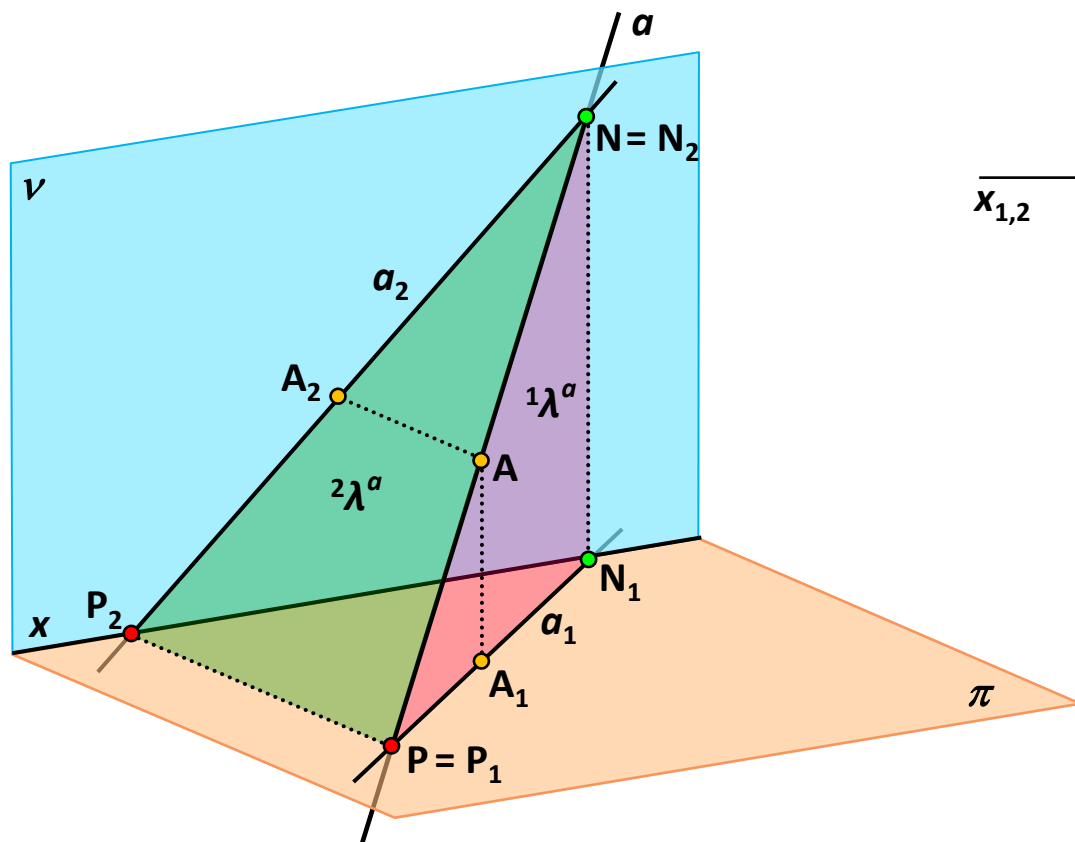
- $a \cap \pi = P, P = P_1, P_2 \in x_{1,2}$

Priesečník priamky s nárysňou sa nazýva **nárysný stopník N**.

- $a \cap \nu = N, N = N_2, N_1 \in x_{1,2}$

Zobrazenie priamky

Príklad 10.3: Určte priemety stopníkov priamky a , ak sú dané jej združené priemety (a_1, a_2). Doplníte chýbajúci priemet bodu A , ktorý na nej leží. Daný je pôdorys A_1 .

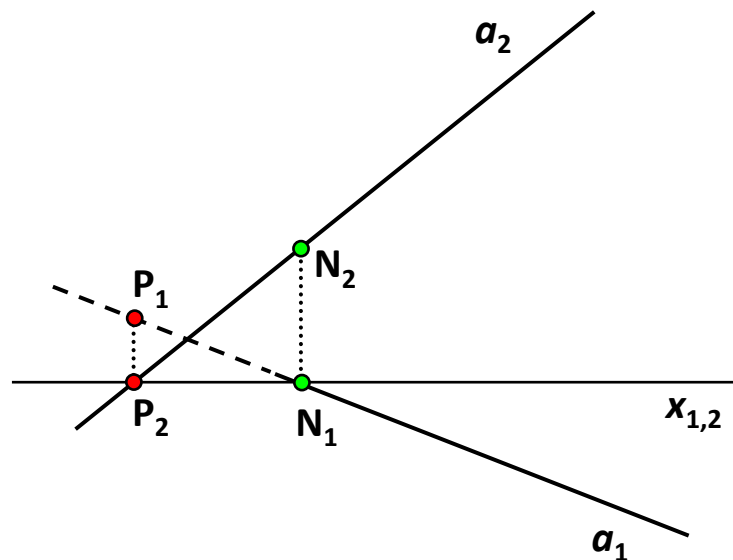
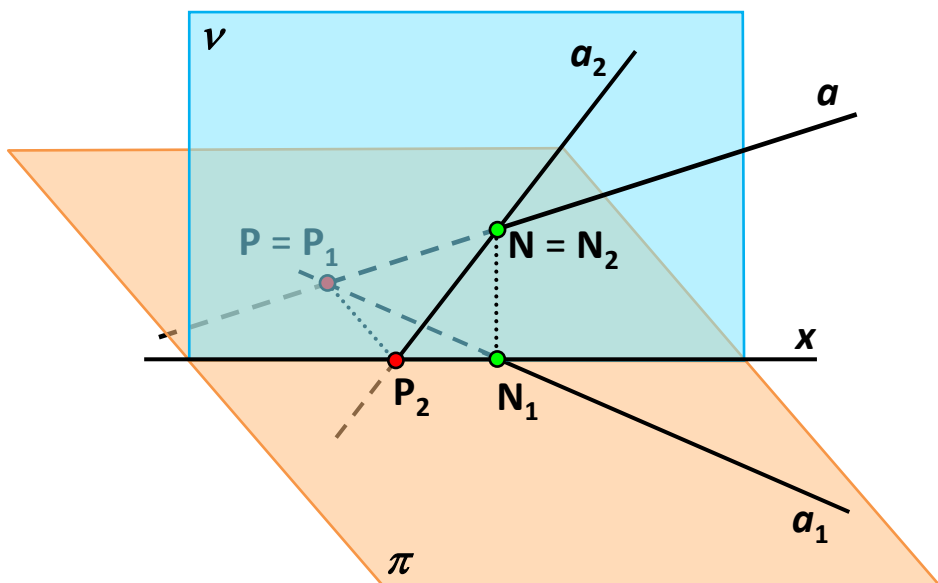


Postup:

1. $N_1; a_1 \cap x_{1,2} = N_1$.
2. $N_2; N_1 \rightarrow N_2 \in a_2$.
3. $P_2; a_2 \cap x_{1,2} = P_2$.
4. $P_1; P_2 \rightarrow P_1 \in a_1$.
5. $A_2; A_1 \rightarrow A_2 \in a_2$.

Poznámka: Ak bod A leží na priamke a , tak jeho priemet A_1 inciduje s priemetom a_1 a zároveň priemet A_2 inciduje s priemetom a_2 . Vyplýva to z vlastností rovnobežného premietania.

Príklad 10.4: Dané sú združené priemety priamky a (a_1, a_2). Určte stopníky priamky a .



Poznámka: Pomocou stopníkov P a N zrekonštruujeme polohu priamky a v priestore.

Postup:

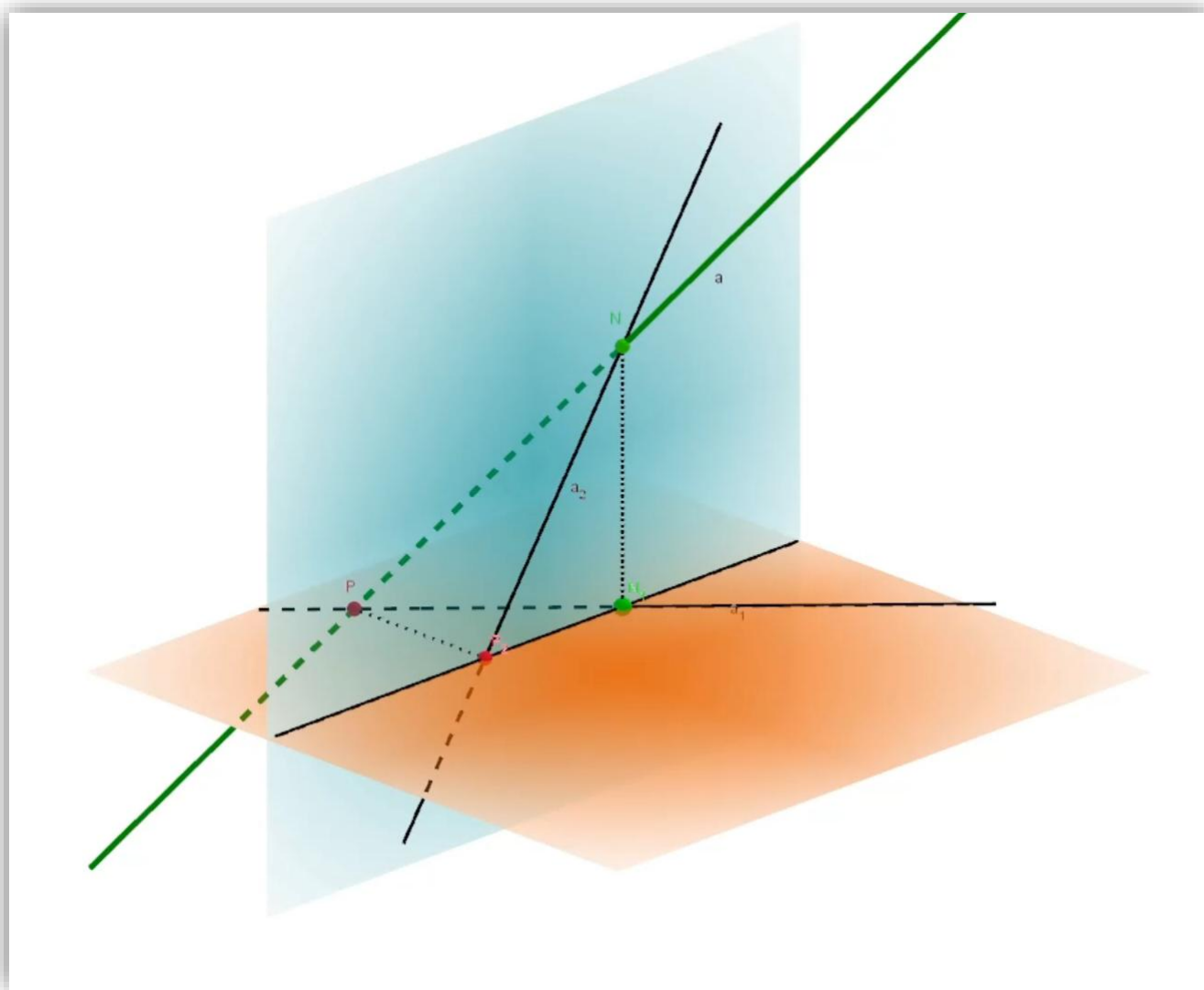
1. $N_1; a_1 \cap x_{1,2} = N_1$.
2. $N_2; N_1 \rightarrow N_2 \in a_2$.
3. $P_2; a_2 \cap x_{1,2} = P_2$.

Po predĺžení priamky a_1 dourčíme bod P_1 :

4. $P_1; P_2 \rightarrow P_1 \in a_1$.

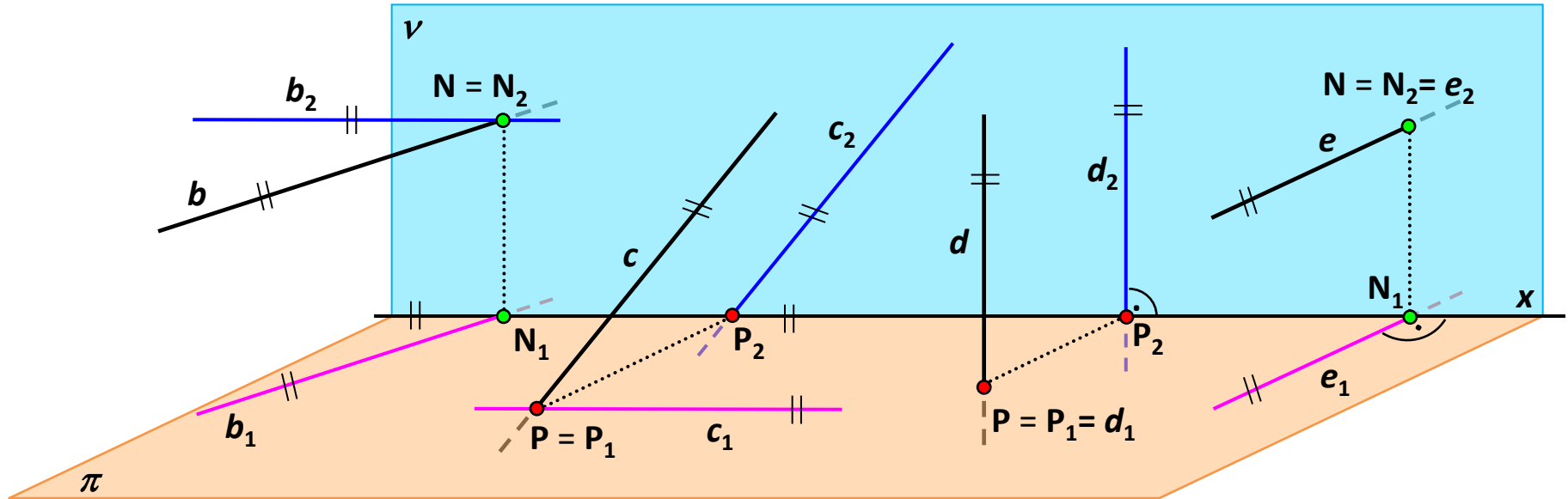


Po prejdení myškou na obrázok sa objaví panel na spustenie videa.



Obráz priamky v špeciálnej polohe

Okrem všeobecnej polohy môže mať priamka v Mongeovej projekcii špeciálnu polohu vzhľadom na pôdorysňu alebo narysňu. V prípade, že je priamka na priemetňu kolmá, jeden z jej priemetov je bod.

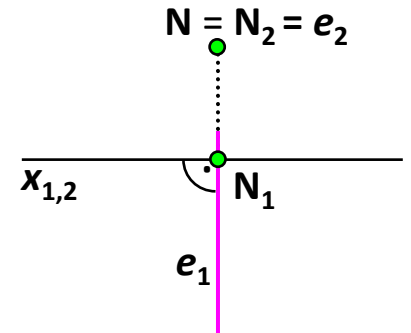
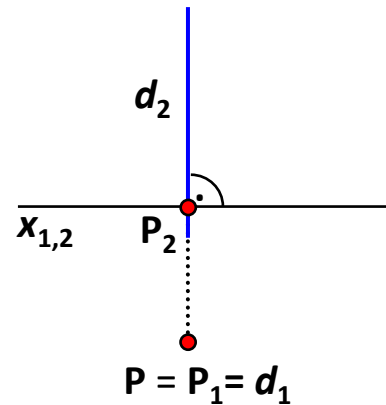
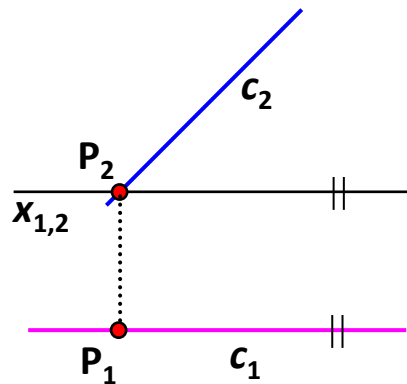
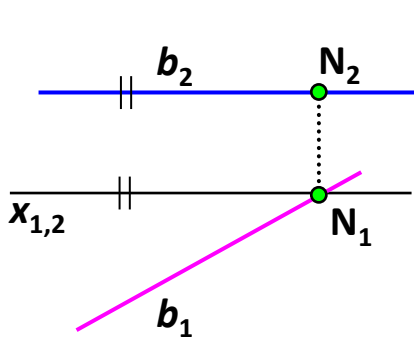


$$b \parallel \pi \rightarrow b_2 \parallel x_{1,2}$$

$$c \parallel v \rightarrow c_1 \parallel x_{1,2}$$

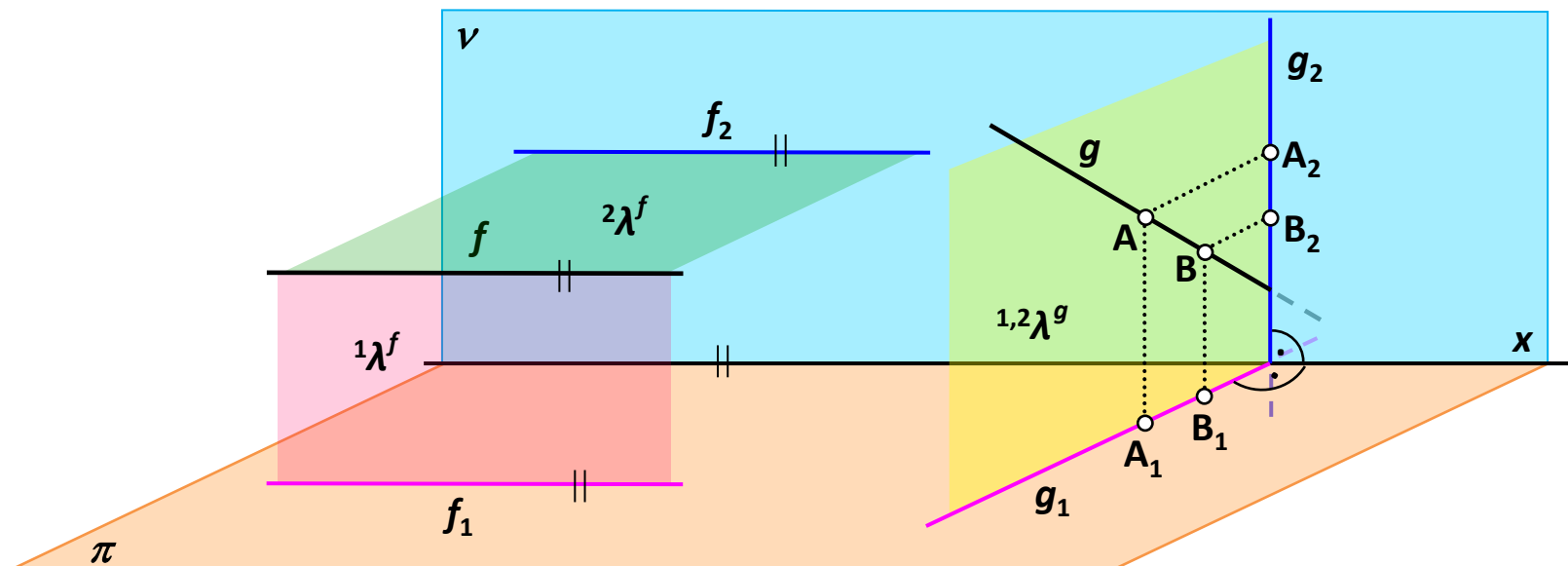
$$d \perp \pi \rightarrow d_2 \perp x_{1,2}$$

$$e \perp v \rightarrow e_1 \perp x_{1,2}$$



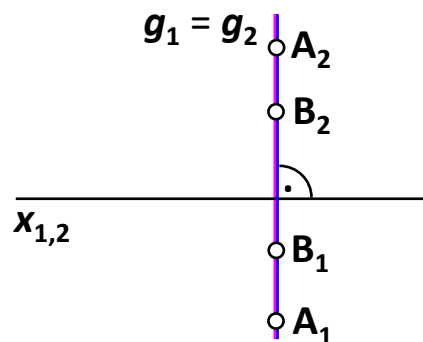
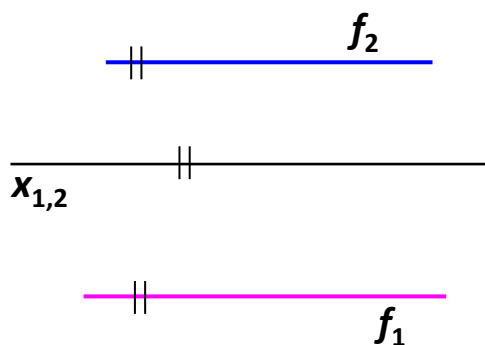
Obráz priamky v špeciálnej polohe

Ďalšie špeciálne polohy má priamka v Mongeovej projekcii vzhľadom na základnicu x . Môže byť rovnobežná s x (t. j. leží v rovine rovnobežnej s x) alebo je kolmá na x (t. j. leží v rovine kolmej na x).



$$f \parallel x \rightarrow f_1 \parallel x_{1,2}, f_2 \parallel x_{1,2}$$

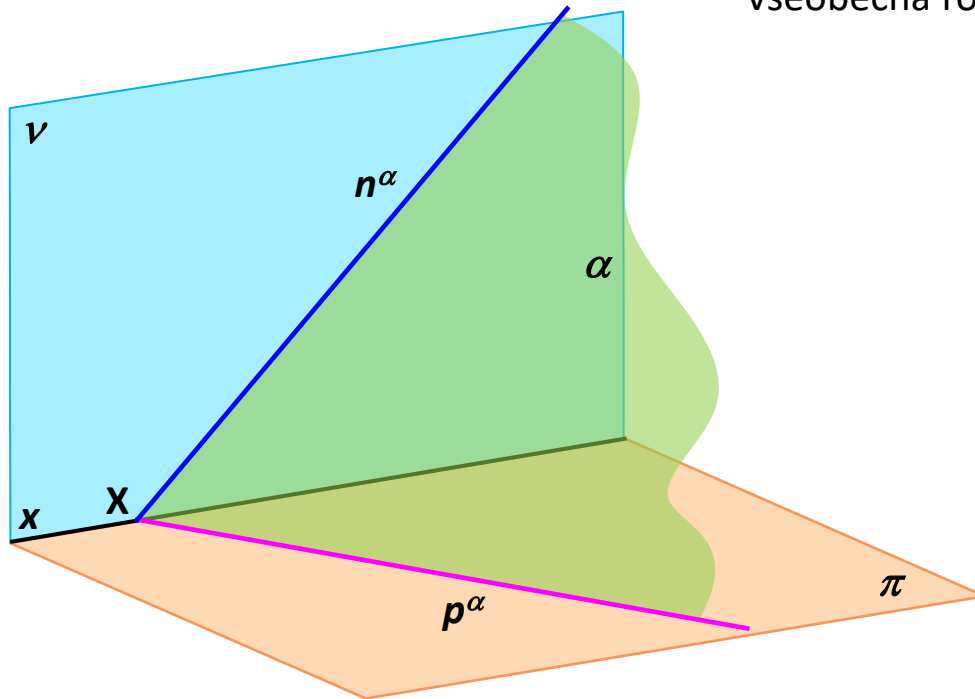
$$g \perp x \rightarrow g_1 = g_2 \perp x_{1,2}$$



Aby bola priamka kolmá na os x jednoznačne určená, musí byť daná priemetmi ľubovoľných 2 bodov, ktoré s ňou incidujú.

Zobrazenie roviny

Pôdorysom roviny α , ktorá je vo všeobecnej polohe vzhľadom na priemetne (t. j. nie je so žiadnou priemetňou rovnobežná ani na ňu kolmá) je celá pôdorysňa, jej nárysom je celá nárysňa.



Všeobecná rovina α pretína obidve priemetne v tzv. **stopách**.

Priesečnica roviny α s pôdorysňou sa nazýva **pôdorysná stopa** a označuje sa p^α .

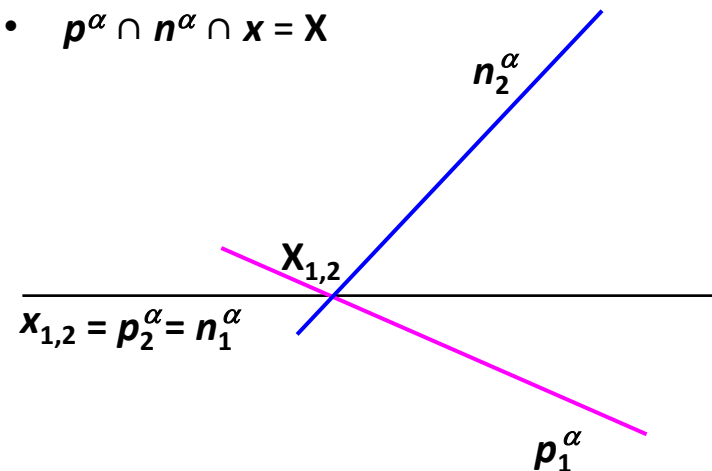
- $\alpha \cap \pi = p^\alpha, p^\alpha = p_1^\alpha, p_2^\alpha = x_{1,2}$

Priesečnica roviny α s nárysňou sa nazýva **nárysná stopa** a označuje sa n^α .

- $\alpha \cap v = n^\alpha, n^\alpha = n_2^\alpha, n_1^\alpha = x_{1,2}$

Obidve stopy sa pretínajú v bode na základnici x .

- $p^\alpha \cap n^\alpha \cap x = X$



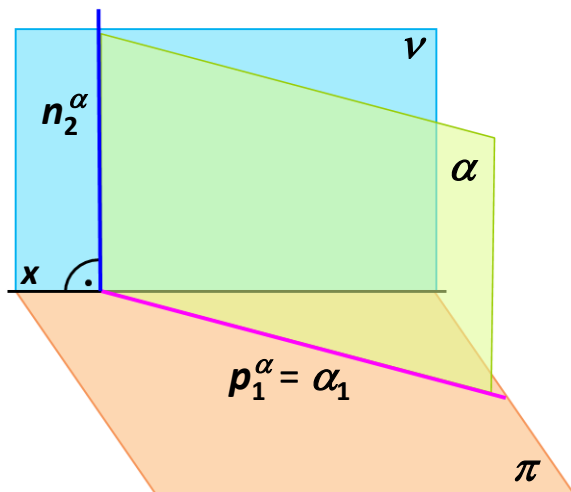
Rovina je určená:

- trojicou nekolineárnych bodov,
- priamkou a bodom, ktorý na nej neleží,
- dvojicou rôznobežných priamok,
- dvojicou rovnobežných priamok.

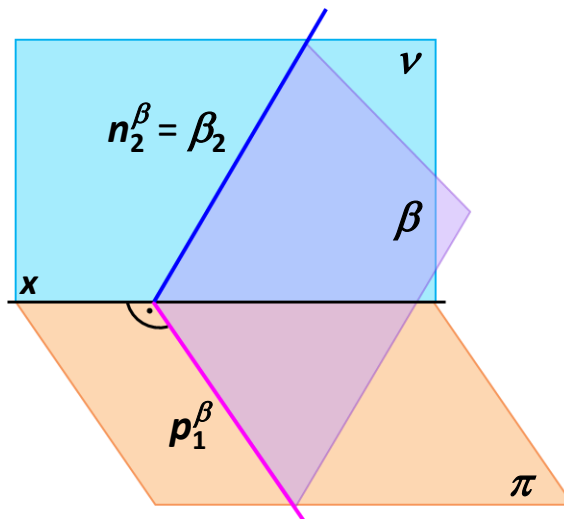
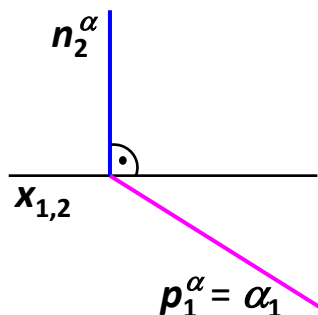
Poznámka: Ak to konštrukcia nevyžaduje, zobrazujeme iba „viditeľné časti“ stôp.

Obraz roviny v špeciálnej polohe

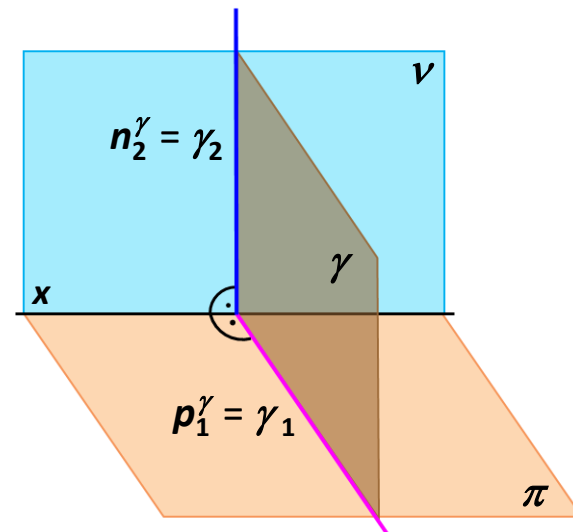
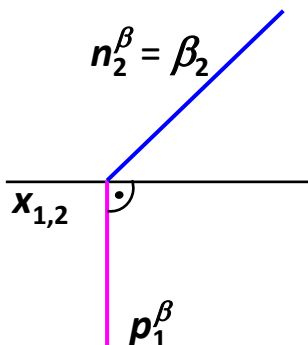
Okrem všeobecnej polohy môže mať rovina vzhľadom na priemetne špeciálnu polohu. Je to napríklad rovina kolmá na jednu priemetňu (premietacia rovina), prípadne na obe priemetne.



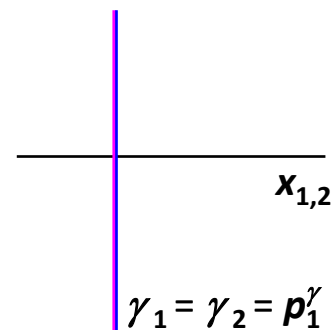
$$\alpha \perp \pi \rightarrow p_1^\alpha = \alpha_1, n_2^\alpha \perp x_{1,2}$$



$$\beta \perp v \rightarrow p_1^\beta \perp x_{1,2}, n_2^\beta = \beta_2$$

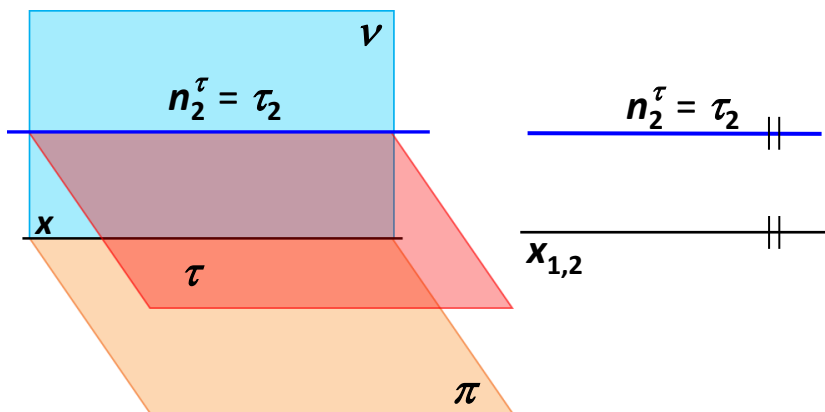


$$\begin{aligned} \gamma \perp x &\rightarrow p_1^\gamma = \gamma_1 \perp x_{1,2}, \\ &\rightarrow n_2^\gamma = \gamma_2 \perp x_{1,2} \end{aligned}$$

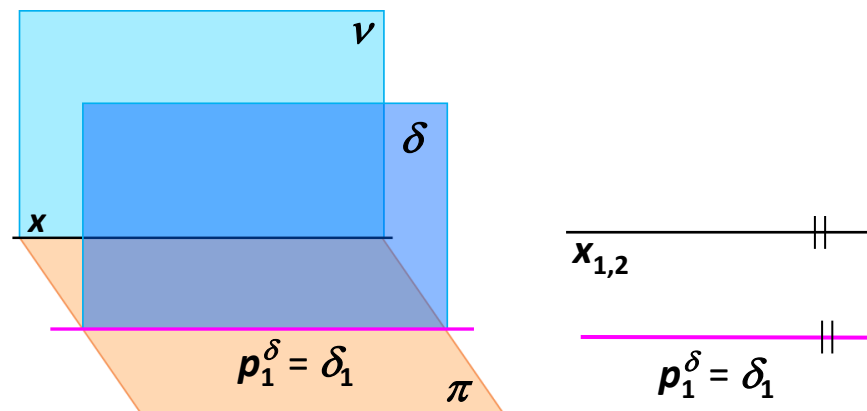


Obraz roviny v špeciálnej polohe

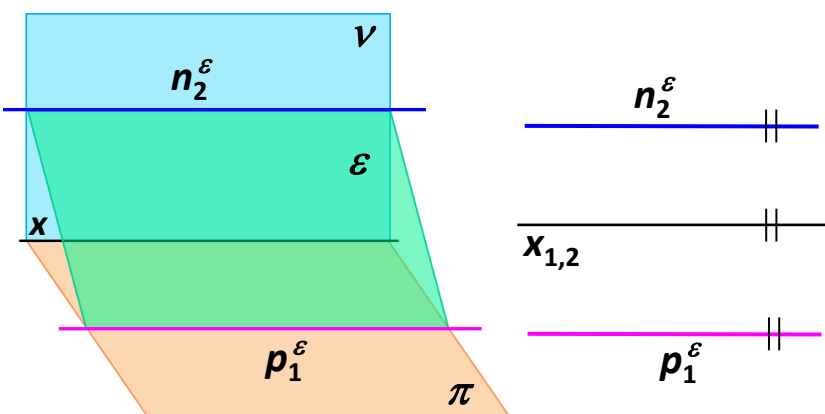
Ako ďalšie špeciálne polohy roviny uvádzame prípady, keď je rovina rovnobežná s niektorou z priemetní (hlavná rovina) a rovina rovnobežná s osou x alebo rovina, ktorá osou x prechádza.



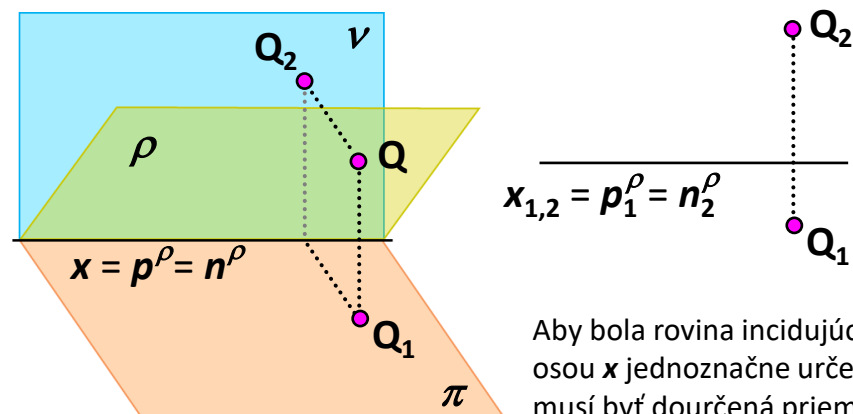
$$\tau \parallel \pi \rightarrow n_2^\tau = \tau_2 \parallel x_{1,2}$$



$$\delta \parallel \nu \rightarrow p_1^\delta = \delta_1 \parallel x_{1,2}$$



$$\varepsilon \parallel x_{1,2} \rightarrow p_1^\varepsilon \parallel n_2^\varepsilon \parallel x_{1,2}$$



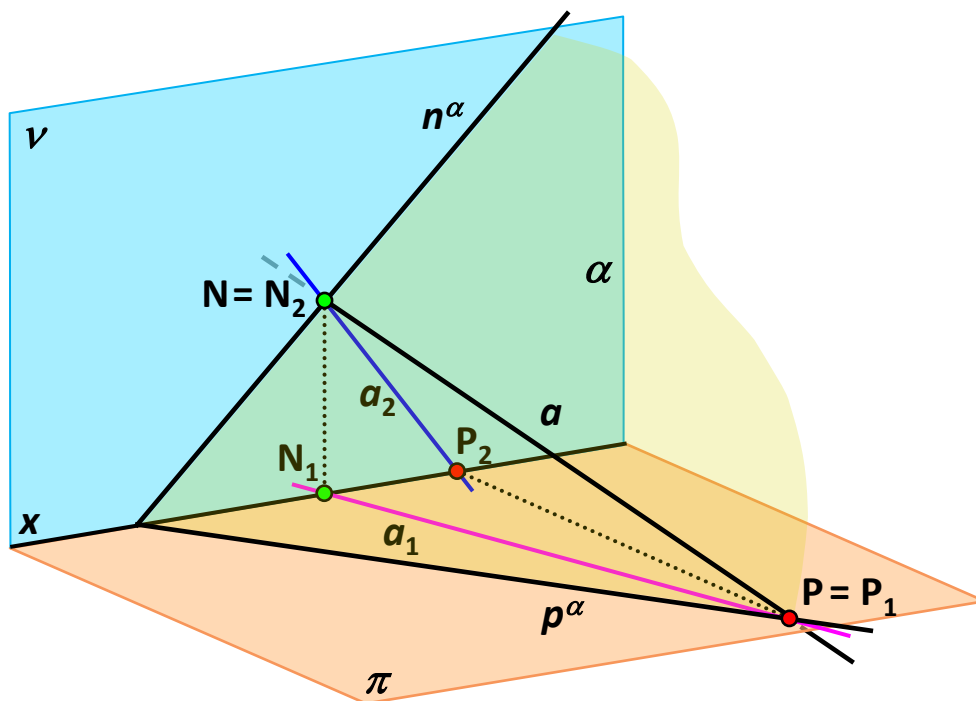
$$x_{1,2} \in \rho \rightarrow x_{1,2} = p_1^\rho = n_2^\rho$$

Aby bola rovina incidujúca s osou x jednoznačne určená, musí byť dourčená priemetmi bodu alebo priamky, ktoré v nej ležia.

Priamka ležiaca v rovine

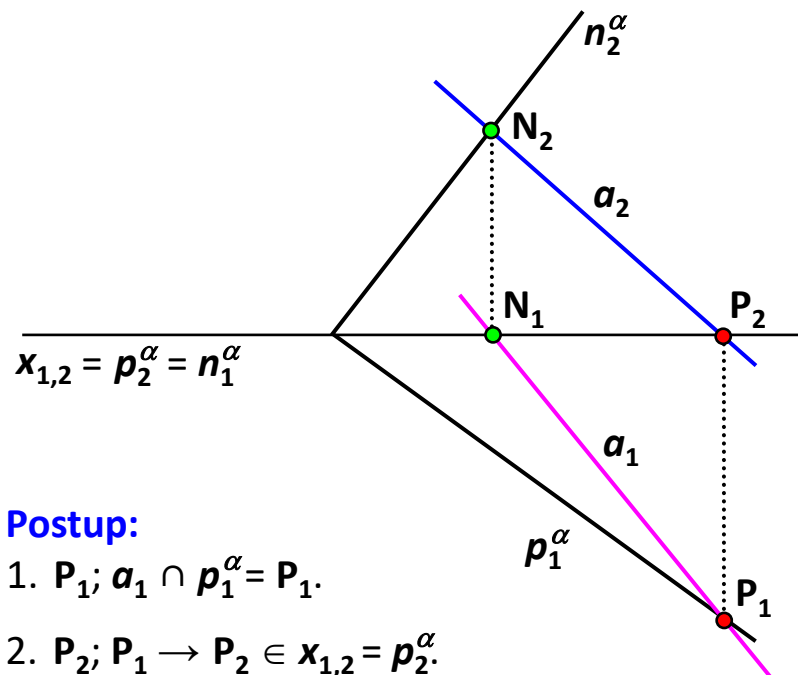
Priamka a , ktorá leží v rovine α , má svoje stopníky (ak existujú) na stopách roviny, t. j. pôdorysný stopník priamky leží na pôdorysnej stope roviny a nárýsný stopník leží na nárýsnej stope roviny.

$$\bullet \quad a \in \alpha \rightarrow P^a \in p^\alpha, N^a \in n^\alpha$$



Poznámka: V prípade, že rovina je určená ľubovoľnými priamkami alebo bodmi, ktoré v nej ležia, pri hľadaní jej stôp využijeme stopníky priamok ležiacich v rovine.

Príklad 10.5: Daný je pôdorys a_1 priamky a . Určte nárýs a_2 priamky a tak, aby priamka ležala v rovine α (p_1^α, n_2^α).

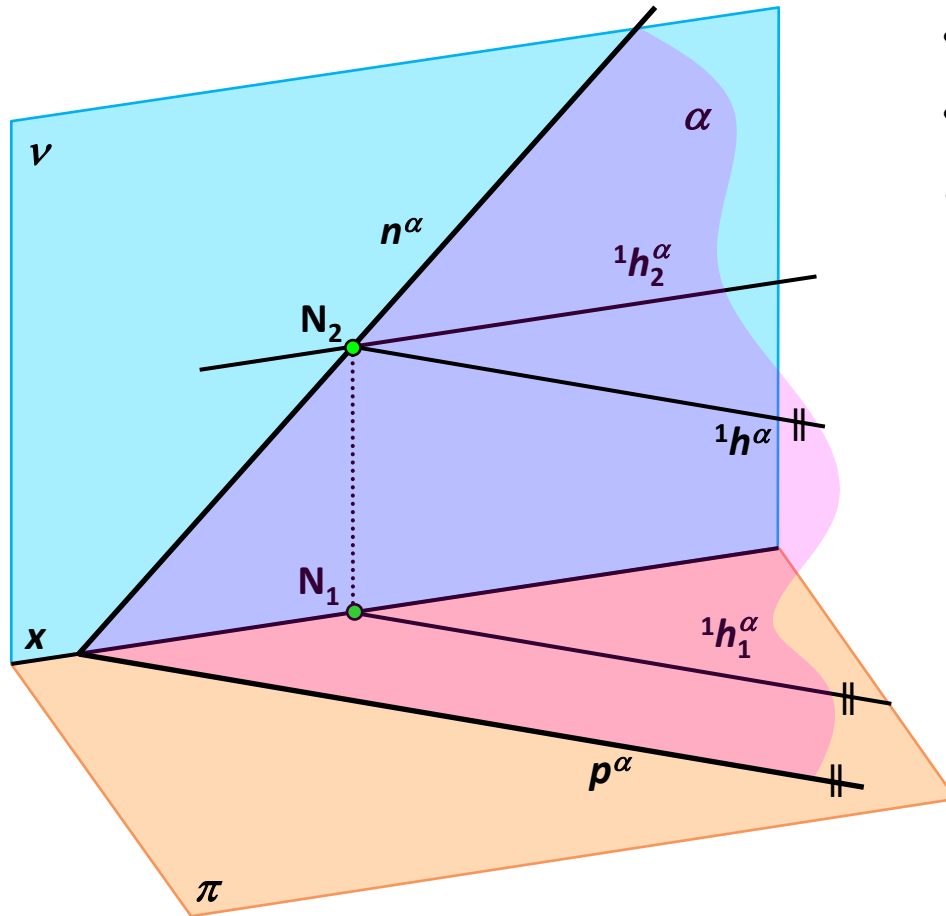


Postup:

1. $P_1; a_1 \cap p_1^\alpha = P_1$.
2. $P_2; P_1 \rightarrow P_2 \in x_{1,2} = p_2^\alpha$.
3. $N_1; x_{1,2} = n_1^\alpha, a_1 \cap x_{1,2} = N_1$.
4. $N_2; N_1 \rightarrow N_2 \in n_2^\alpha$.
5. $a_2; a_2 = N_2 P_2$.

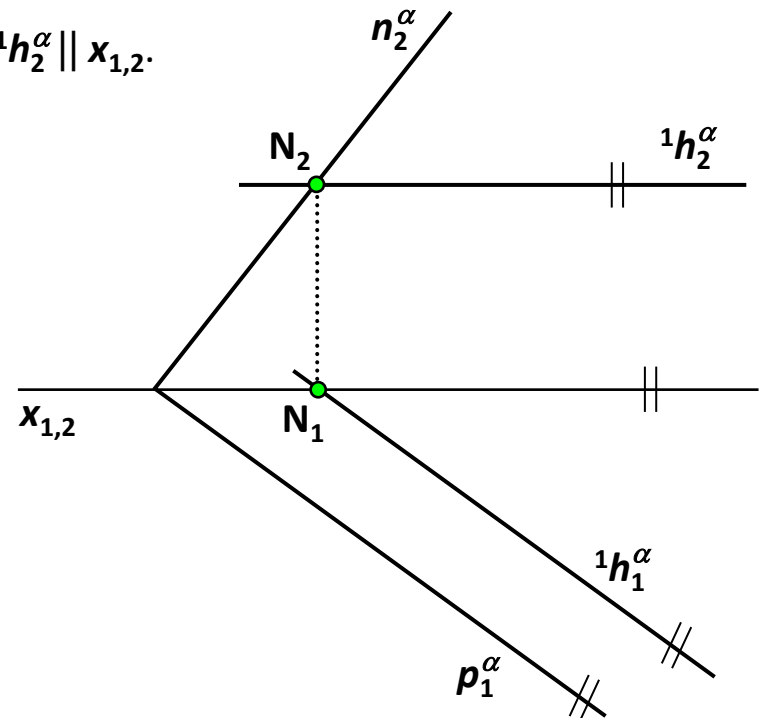
Hlavné a spádové priamky 1. osnovy

Významné priamky v rovine sú jej **hlavné** a **spádové priamky**. Hlavné priamky sú priamky, ktoré ležia v rovine a sú rovnobežné s priemetňou (a teda aj so stopou roviny). Spádové priamky sú priamky roviny, ktoré sú kolmé na hlavné priamky. V Mongeovej projekcii má rovina dve osnovy hlavných a dve osnovy spádových priamok.

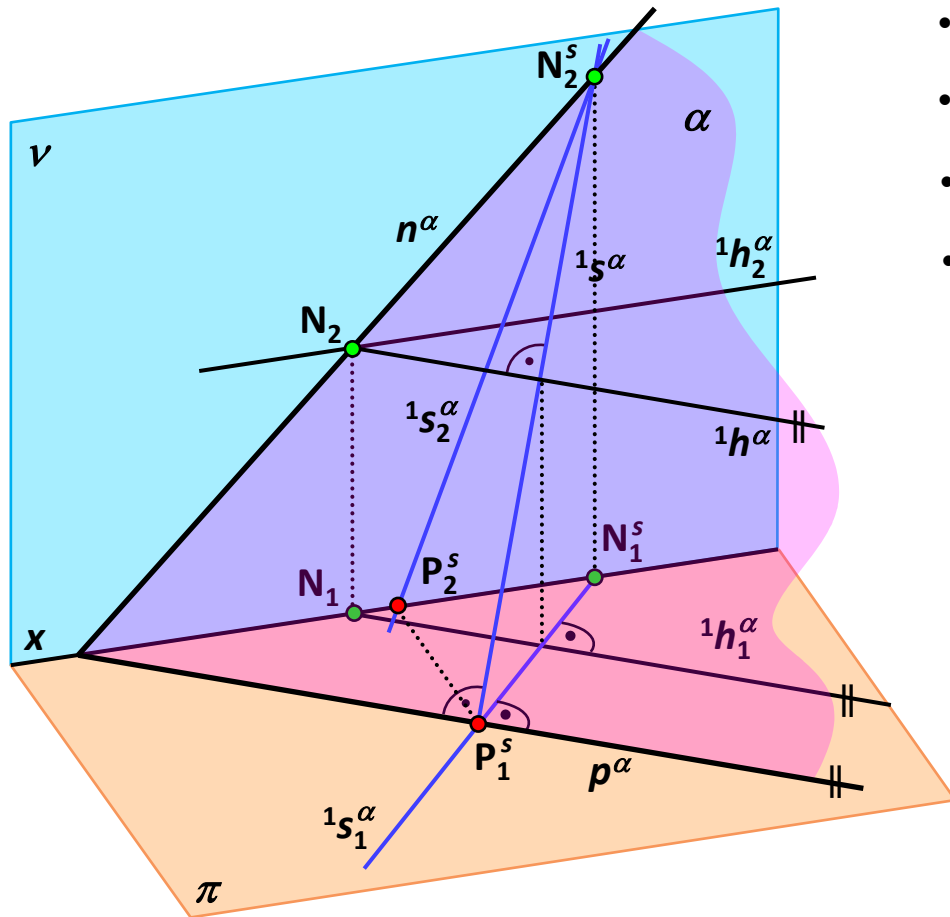


Hlavná priamka 1. osnovy

- $^1h^\alpha$ - hlavná priamka 1. osnovy roviny α ,
- $^1h^\alpha \parallel \pi, ^1h^\alpha \parallel p^\alpha$,
- $^1h_1^\alpha \parallel p_1^\alpha$,
- $^1h_2^\alpha \parallel x_{1,2}$.



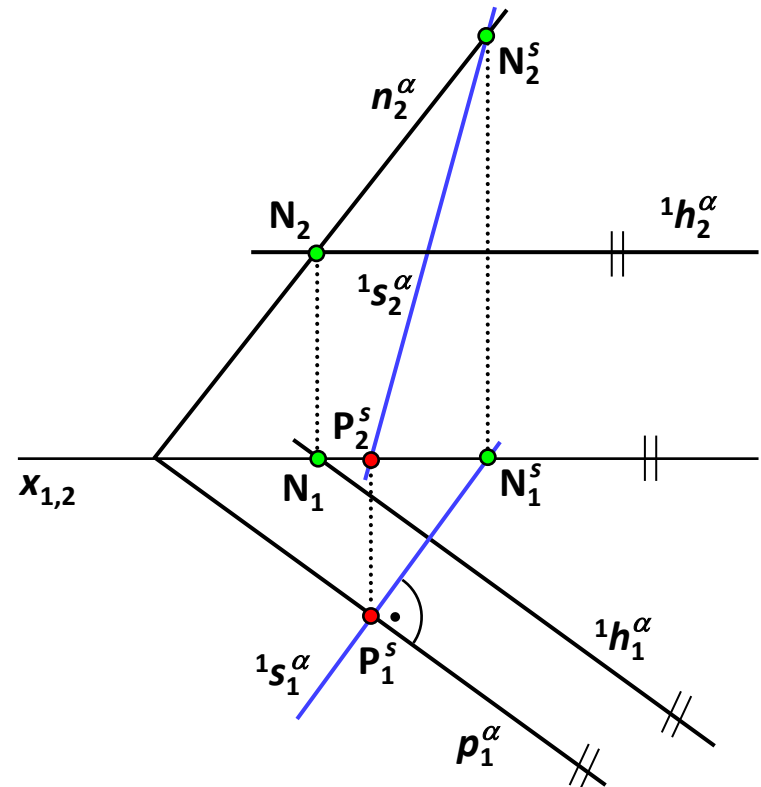
Hlavné a spádové priamky 1. osnovy



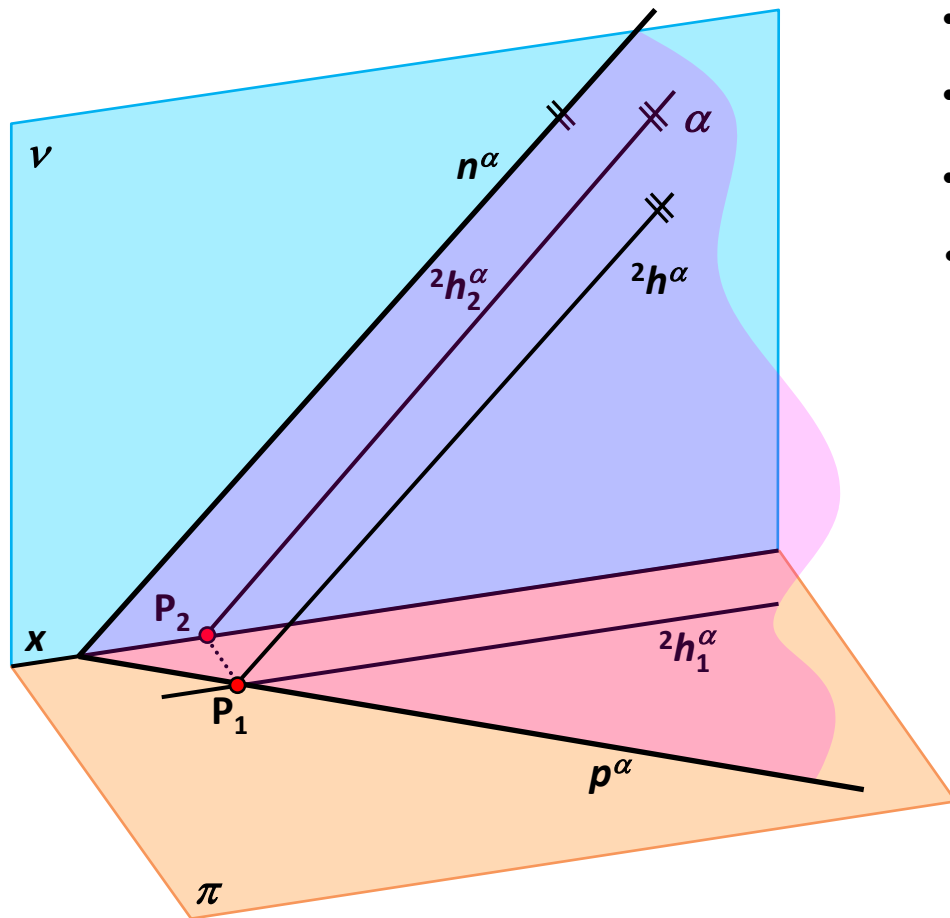
Poznámka: Každým bodom roviny prechádza práve jedna z každej osnovy hlavných a spádových priamok.

Spádová priamka 1. osnovy

- $^1s^\alpha$ - spádová priamka 1. osnovy roviny α ,
- $^1s^\alpha \perp ^1h^\alpha \rightarrow ^1s^\alpha \perp p^\alpha$,
- $^1s_1^\alpha \perp p_1^\alpha, ^1s_1^\alpha \perp ^1h_1^\alpha$,
- $^2s_2^\alpha$ dourčíme ako priamku v rovine α .

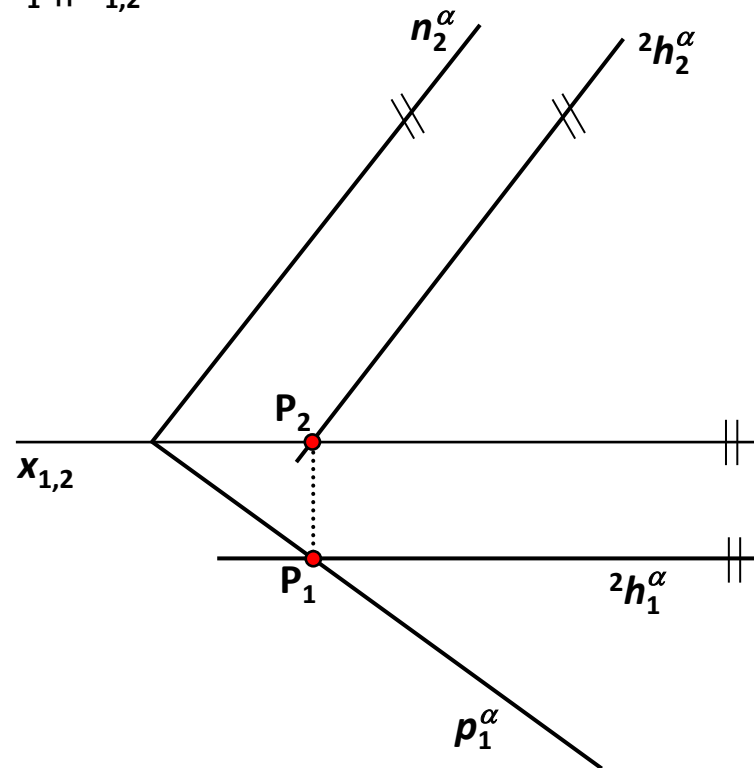


Hlavné a spádové priamky 2. osnovy

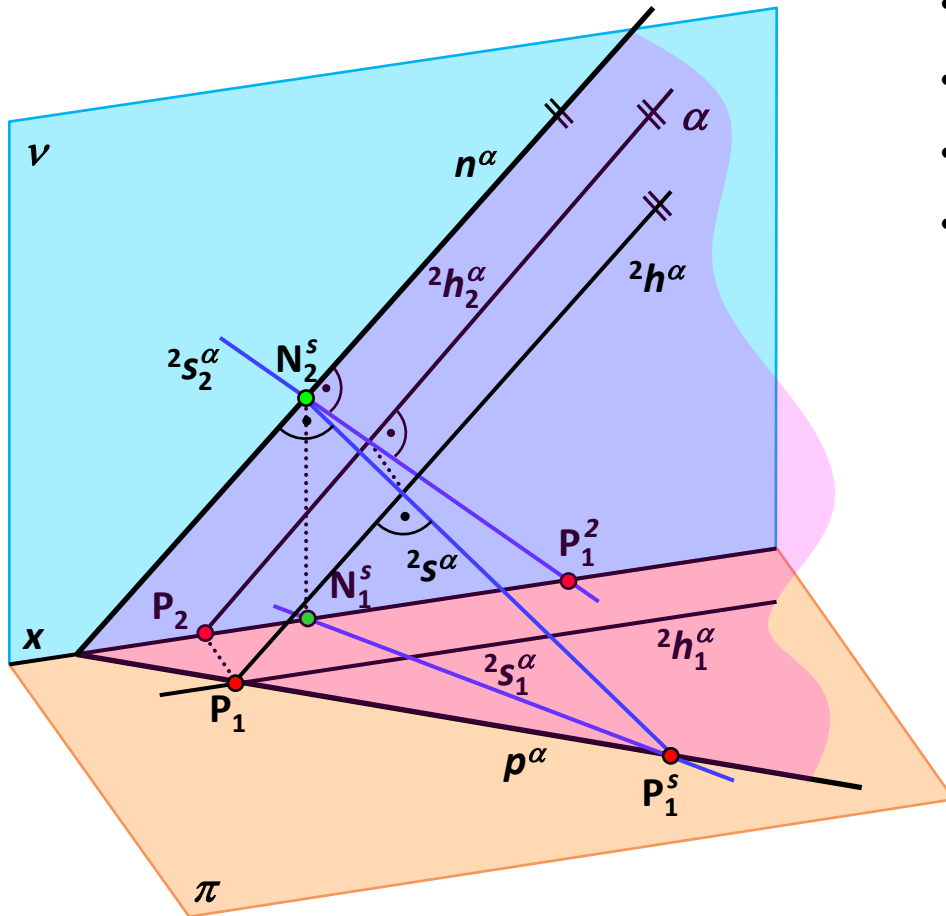


Hlavná priamka 2. osnovy

- ${}^2h^\alpha$ - hlavná priamka 2. osnovy roviny α ,
- ${}^2h^\alpha \parallel v, {}^2h^\alpha \parallel n^\alpha$,
- ${}^2h_2^\alpha \parallel n_2^\alpha$,
- ${}^2h_1^\alpha \parallel x_{1,2}$.

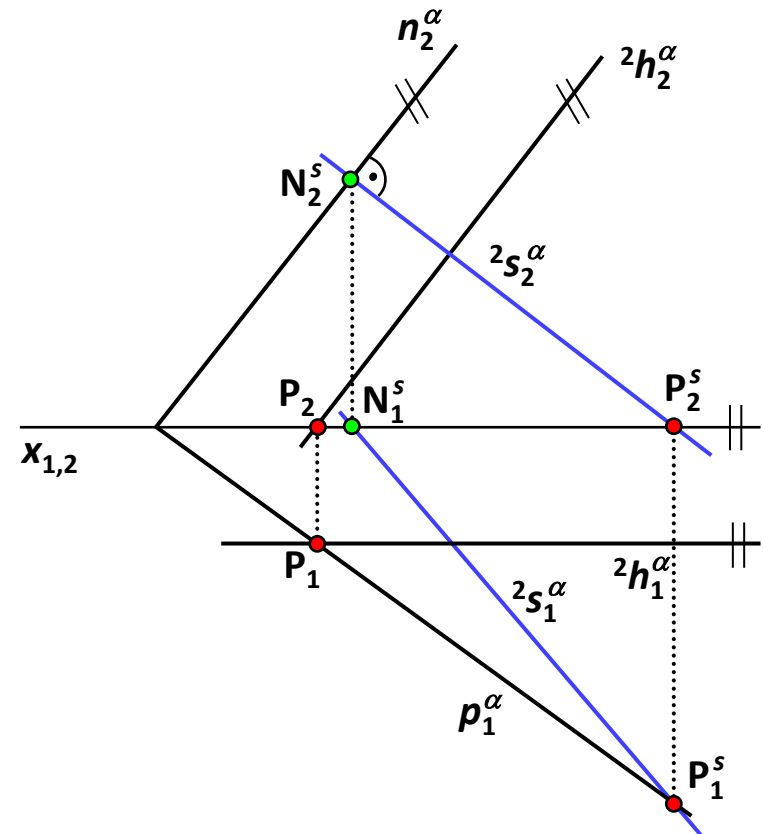


Hlavné a spádové priamky 2. osnovy



Spádová priamka 2. osnovy

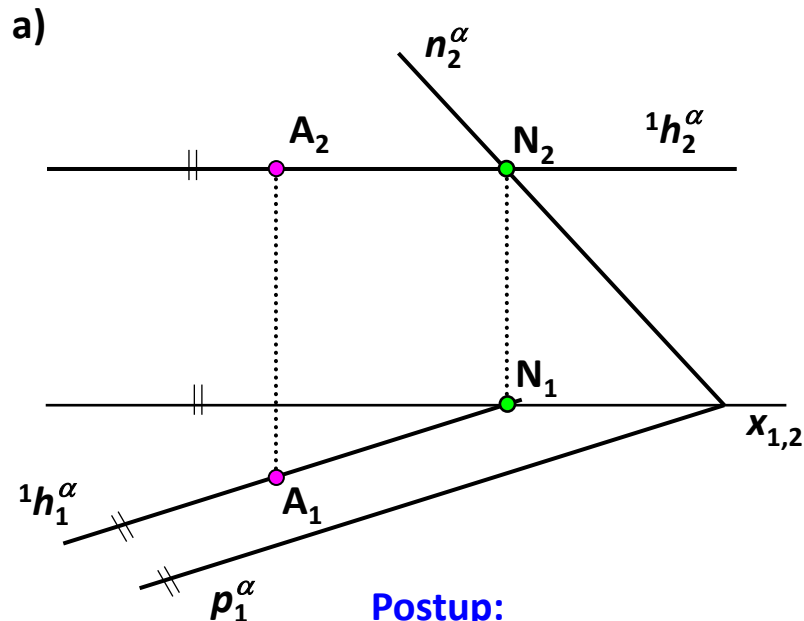
- ${}^2s^\alpha$ - spádová priamka 2. osnovy roviny α ,
- ${}^2s^\alpha \perp {}^2h^\alpha \rightarrow {}^2s^\alpha \perp n^\alpha$,
- ${}^2s_2^\alpha \perp n_2^\alpha, {}^2s_2^\alpha \perp {}^2h_2^\alpha$,
- ${}^2s_1^\alpha$ dourčíme ako priamku v rovine α .



Bod ležiaci v rovine

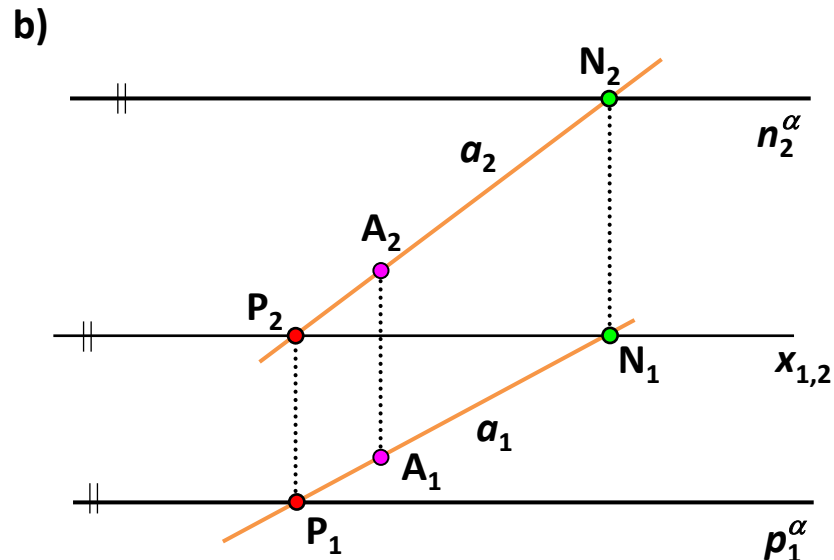
Hlavné priamky v rovine sa často používajú na určenie chýbajúcich priemetov bodov ležiacich v rovine. Okrem hlavných priamok však na tento účel môžeme použiť ľubovoľnú priamku roviny s dostupnými stopníkmi.

Príklad 10.6: Daný je pôdorys A_1 bodu A . Určte nárys A_2 bodu A tak, aby bod A ležal v rovine $\alpha (p_1^\alpha, n_2^\alpha)$.



Postup:

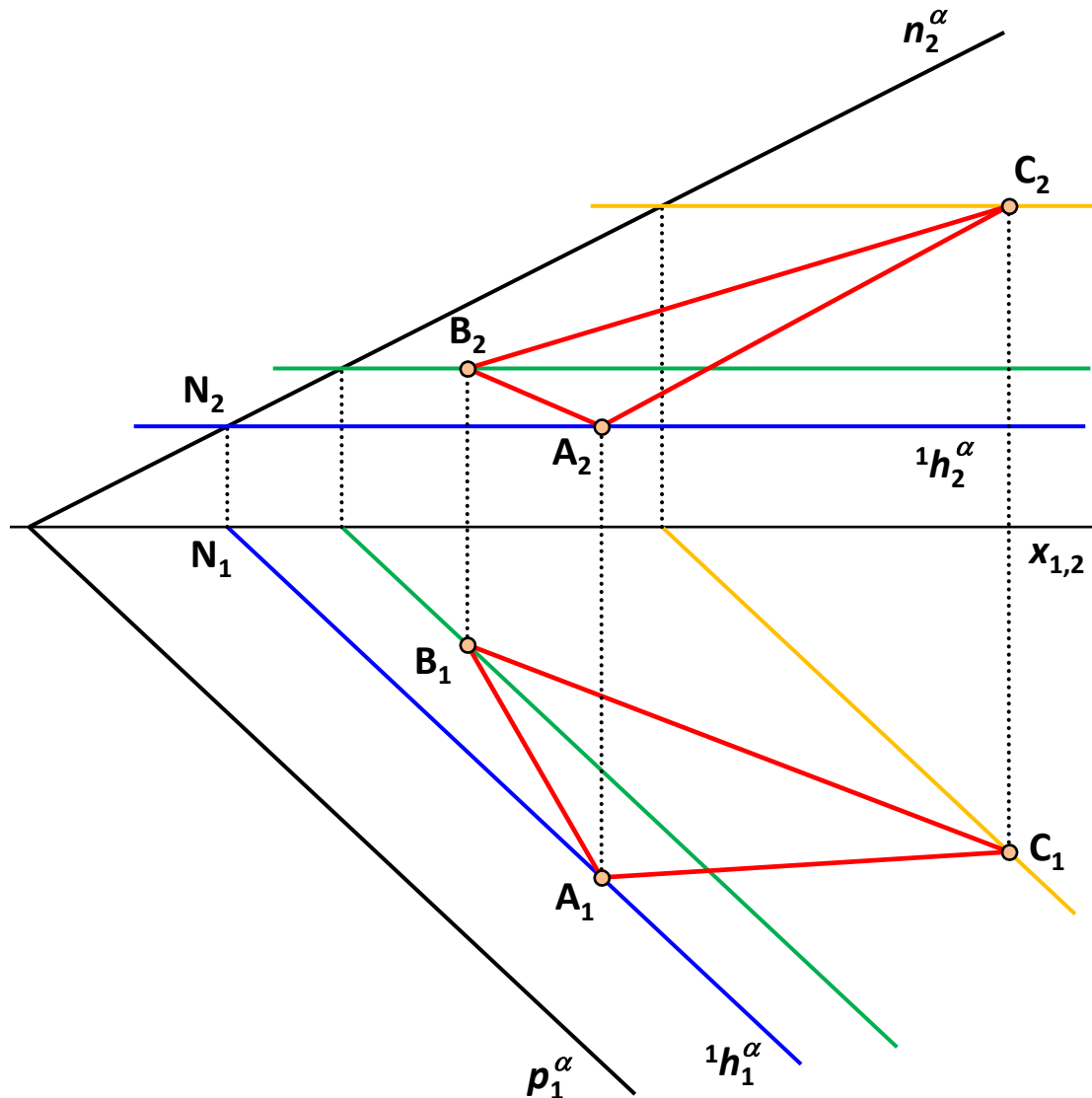
1. ${}^1h_1^\alpha, A_1 \in {}^1h_1^\alpha, {}^1h_1^\alpha \parallel p_1^\alpha$.
2. $N_1; {}^1h_1^\alpha \cap x_{1,2} = N_1$.
3. $N_2; N_1 \rightarrow N_2 \in n_2^\alpha$.
4. ${}^1h_2^\alpha, N_2 \in {}^1h_2^\alpha, {}^1h_2^\alpha \parallel x_{1,2}$.
5. $A_2; A_1 \rightarrow A_2 \in {}^1h_2^\alpha$.



Postup:

1. $a_1; A_1 \in a_1, a_1 \perp x_{1,2}$.
2. $P_1, N_1; a_1 \cap p_1^\alpha = P_1, a_1 \cap x_{1,2} = N_1$.
3. $P_2, N_2; P_1 \rightarrow P_2 \in x_{1,2}, N_1 \rightarrow N_2 \in n_2^\alpha$.
4. $a_2; a_2 = N_2P_2$.
5. $A_2; A_1 \rightarrow A_2 \in a_2$.

Príklad 10.8: Zostrojte združené priemety trojuholníka **ABC** (A_1, B_1, C_1), ktorý leží v rovine α (p_1^α, n_2^α).



Postup:

1. Na zostrojenie chýbajúcich priemetov bodov trojuholníka **ABC** využijeme hlavné priamky 1. osnovy roviny α (podrobný popis v príklade 10.6 a)).
2. Nakoniec zostrojíme pôdorys $A_1 B_1 C_1$ a nárys $A_2 B_2 C_2$ trojuholníka pospájaním prvých a druhých priemetov jednotlivých bodov.

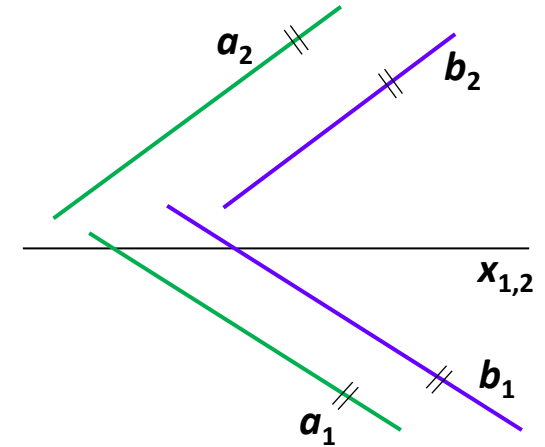
10.3 Polohové úlohy v Mongeovej projekcii

Vzájomná poloha dvoch priamok

Zobrazenie dvojice rovnobežných priamok

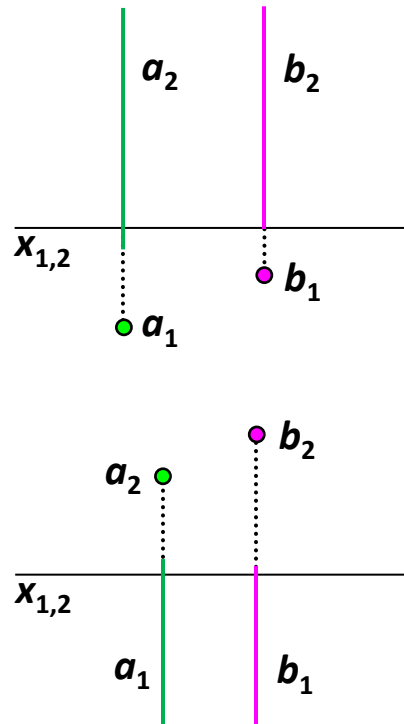
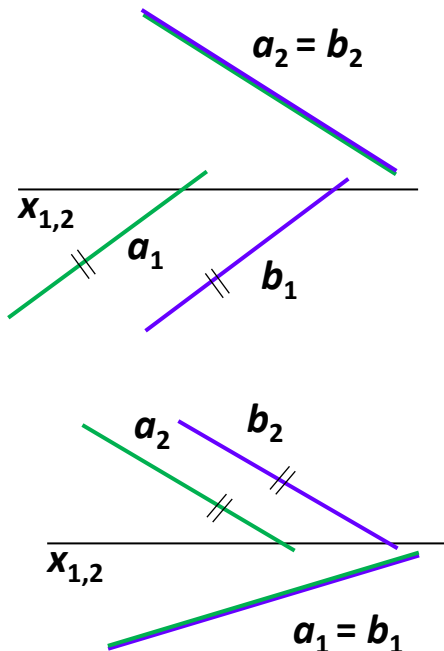
Dve **rovnobežné priamky**, ktoré majú **všeobecnú polohu** vzhľadom na priemetne a nemajú spoločnú premietacu rovinu, sa zobrazia do rovnobežných priamok v pôdoryse aj v náryse. Je to dôsledok toho, že ich príslušné premietacie roviny sú rovnobežné.

$$\begin{aligned} a \parallel b &\rightarrow a_1 \parallel b_1 \\ &\rightarrow a_2 \parallel b_2 \end{aligned}$$

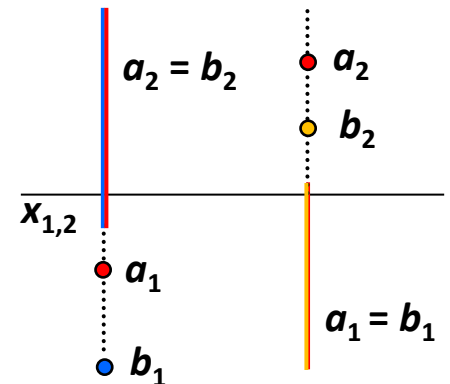


Ak rovnobežky **určujú spoločnú premietacu rovinu** (kolmú na pôdorysňu alebo nárysňu), tak sú aj ich príslušné priemety (pôdorysy alebo nárysy) totožné.

Ak sú rovnobežky **kolmé na pôdorysňu (nárysňu)**, tak ich pôdorysom (nárysom) sú dva body a ich nárysy (pôdorysy) sú kolmé na základnicu x .



Ak sú rovnobežky **kolmé na pôdorysňu (nárysňu)**, a majú **spoločnú premietacu rovinu**, tak sú totožné aj ich príslušné priemety (priamky).



Zobrazenie dvojice rôznobežných priamok

Dve **rôznobežné priamky**, vo **všeobecnej polohe** vzhľadom na priemetne, ktoré nemajú spoločnú premietacu rovinu, sa zobrazia do dvoch rôznobežných priamok v pôdoryse aj v náryse. Priesečníky ich prvých a druhých priemetov ležia na spoločnej ordinále.

Ak sú **prvé (druhé) premietacie roviny** rôznobežiek **totožné**, tak ich pôdorysom (nárysom) sú totožné priamky.

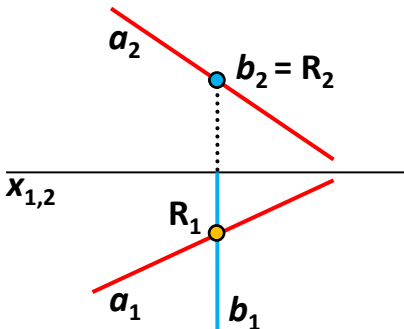
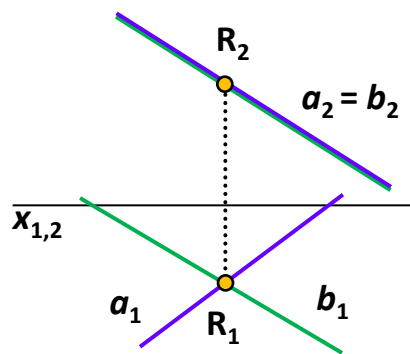
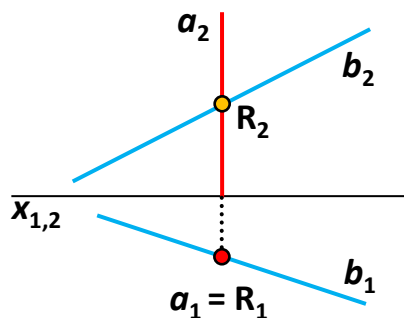
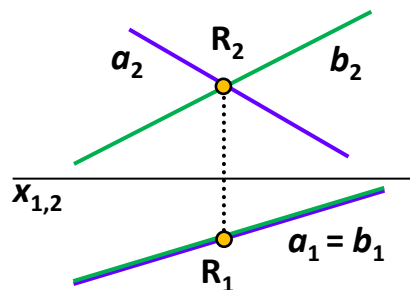
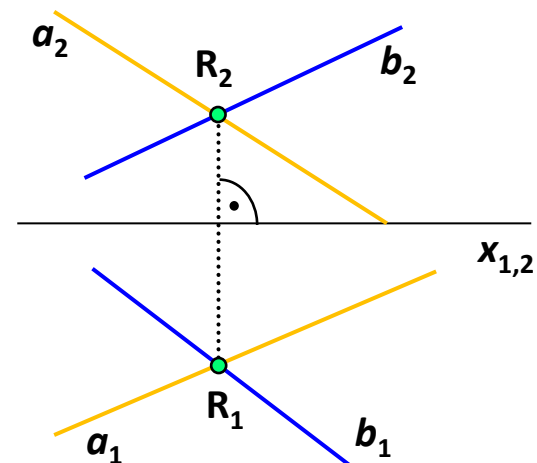
Ak je jedna z rôznobežiek **kolmá na pôdorysňu (nárysňu)**, tak jej pôdorysom (nárysom) je bod ležiaci na pôdoryse (náryse) druhej priamky.

$$a \cap b = R$$

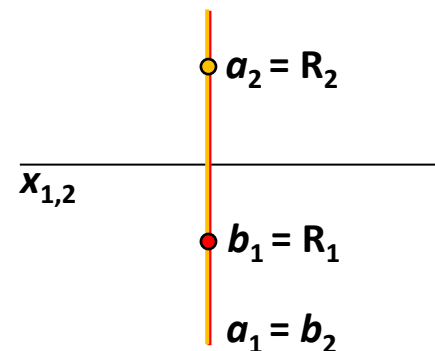
$$\rightarrow a_1 \cap b_1 = R_1$$

$$\rightarrow a_2 \cap b_2 = R_2$$

$$\rightarrow R_1 R_2 \perp x_{1,2}$$



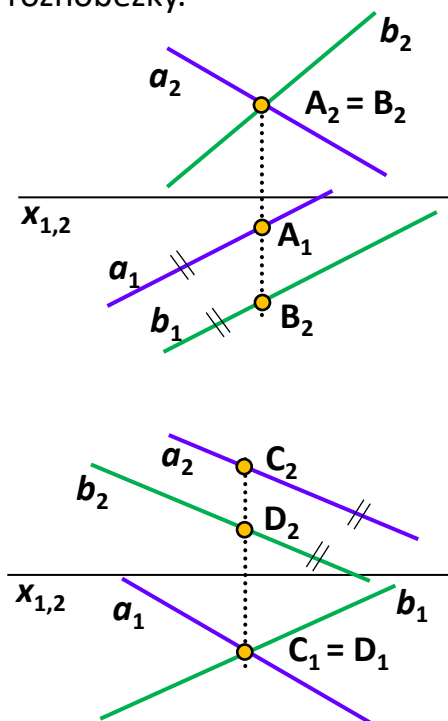
Rôznobežky, z ktorých **jedna je kolmá na pôdorysňu a druhá na nárysňu**, sa premietnu do jednej priamky kolmej na základnicu x .



Zobrazenie dvojice mimobežných priamok

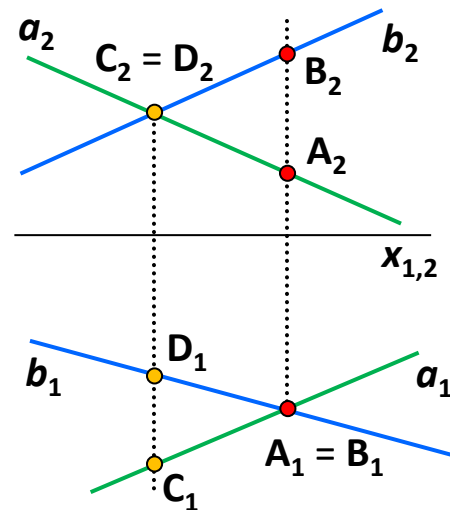
Dve **mimobežné priamky**, vo **všeobecnej polohe** vzhľadom na priemetne, sa zobrazia do dvoch rôznobežných priamok v pôdoryse aj v náryse. Priesečníky ich prvých a druhých priemetov neležia na spoločnej ordinále.

Ak sú **prvé (druhé) premietacie roviny** mimobežiek **rovnobežné**, tak ich pôdorysom (nárysom) sú dve rovnobežky a nárysom (pôdorysom) dve rôznobežky.

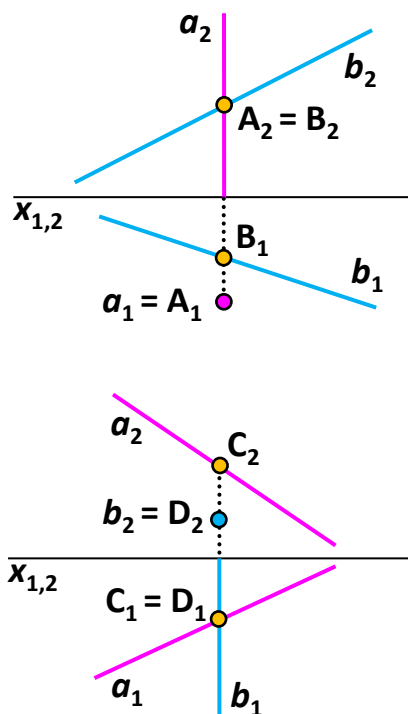


Spoločný bod pôdorysov a_1, b_1 priamok a, b je pôdorysom dvoch rôznych bodov $A \in a, B \in b$.

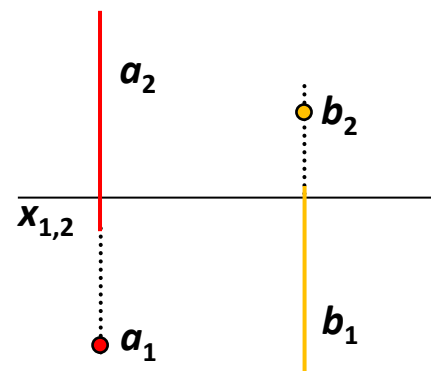
Spoločný bod nárysov a_2, b_2 je nárysom dvoch rôznych bodov $C \in a, D \in b$.



Ak je jedna z mimobežiek **kolmá na pôdorysňu (nárysňu)**, tak jej pôdorysom (nárysom) je bod, ktorý neleží na pôdoryse (náryse) druhej mimobežky.

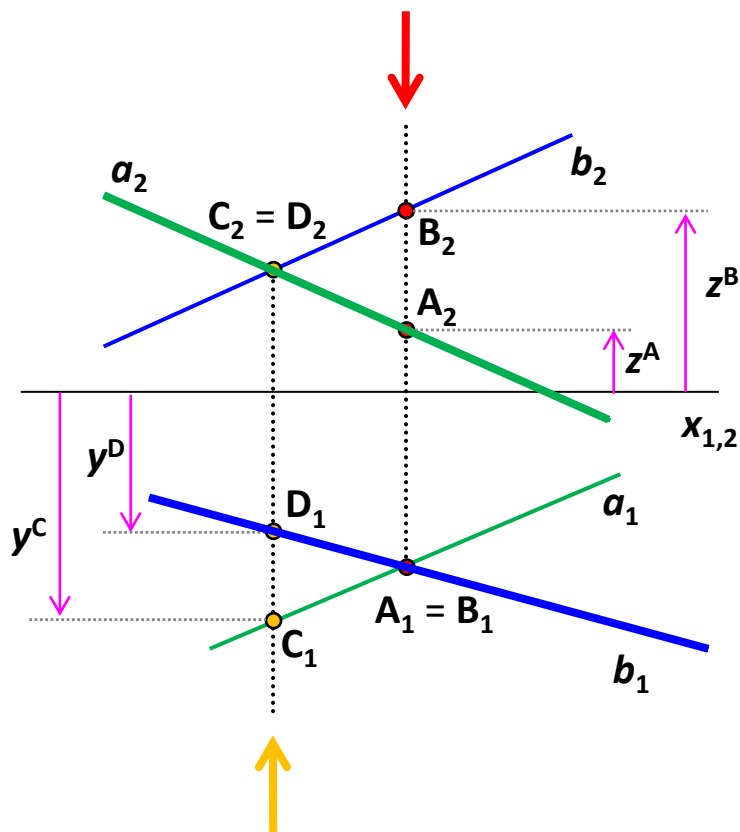


Mimobežky, z ktorých **jedna je kolmá na pôdorysňu a druhá na nárysňu**, sa premietnu nasledovne:



Určenie viditeľnosti pomocou krycích bodov

Pri zobrazení mimobežných priamok a a b v Mongeovej projekcii priesečník pôdorysov, t. j. bod $A_1 = B_1$, a priesečník nárysov, t. j. bod $C_2 = D_2$, neležia na jednej ordinále. Nazývame ich **krycie body** a majú význam pri určovaní viditeľnosti.



Viditeľnosť v pôdoryse:

Pôdorys je pohľad zhora, preto je viditeľný ten bod, ktorý je „vyššie“, t. j. má väčšiu z -ovú súradnicu.

Z nárysov bodov A a B je zrejmé, že bod B je vyššie než bod A a „zakrýva“ ho pri pohľade zhora.

- $A_1 = B_1$ - krycí bod, ($A \in a$, $B \in b$)
- $z^B < z^A \rightarrow$ viditeľný je bod B na priamke b

Viditeľnosť v náryse:

Nárys je pohľad spredu, preto je viditeľný ten bod, ktorý je „viac vpredu“, t. j. má väčšiu y -ovú súradnicu.

Z pôdorysov bodov C a D je zrejmé, že bod C je pred bodom D a „zakrýva“ ho pri pohľade spredu.

- $C_2 = D_2$ - krycí bod, ($C \in a$, $D \in b$)
- $y^C > y^D \rightarrow$ viditeľný je bod C na priamke a

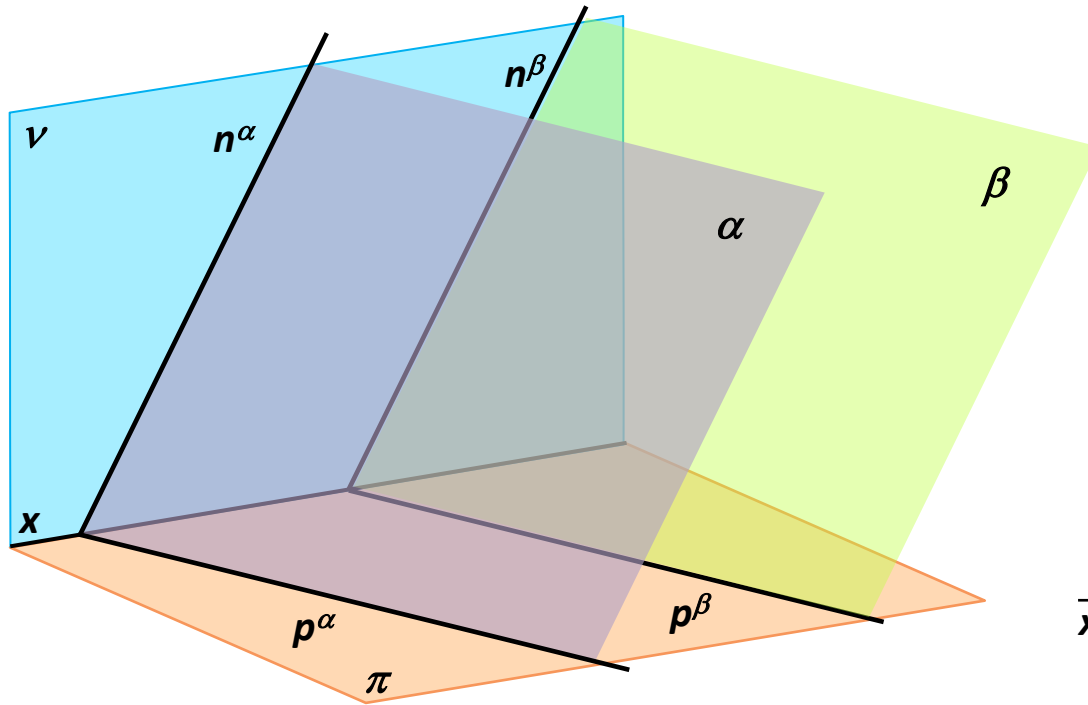
Poznámka: Určovanie viditeľnosti použijeme pri zobrazovaní vzájomnej polohy útvarov v priestore (napr. prienik dvoch trojuholníkov) a pri zobrazovaní telies.

Vzájomná poloha dvoch rovín

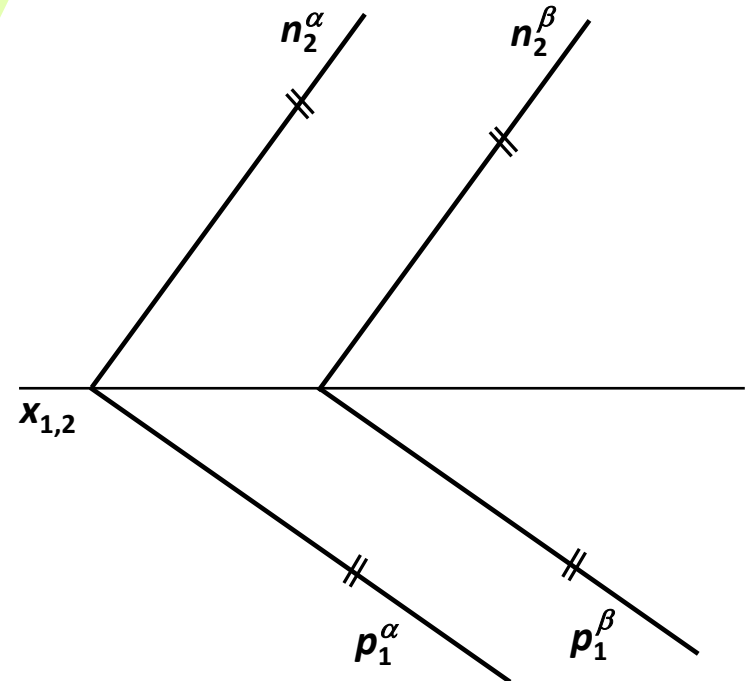
Zobrazenie dvoch rovnobežných rovín

Pri zobrazení rovnobežných rovín vychádzame z poznatku, že ak dve navzájom rovnobežné roviny pretínajú tretiu rovinu (pôdorysňu, nárysňu), tak ich priesečnice s ňou sú navzájom rovnobežné priamky.

Pre rovnobežné roviny α a β z toho vyplýva, že pôdorysná stopa p^α bude rovnobežná s pôdorysnou stopou p^β a nárysná stopa n^α bude rovnobežná s nárysnou stopou n^β .



$$\alpha \parallel \beta \rightarrow p_1^\alpha \parallel p_1^\beta, n_2^\alpha \parallel n_2^\beta$$

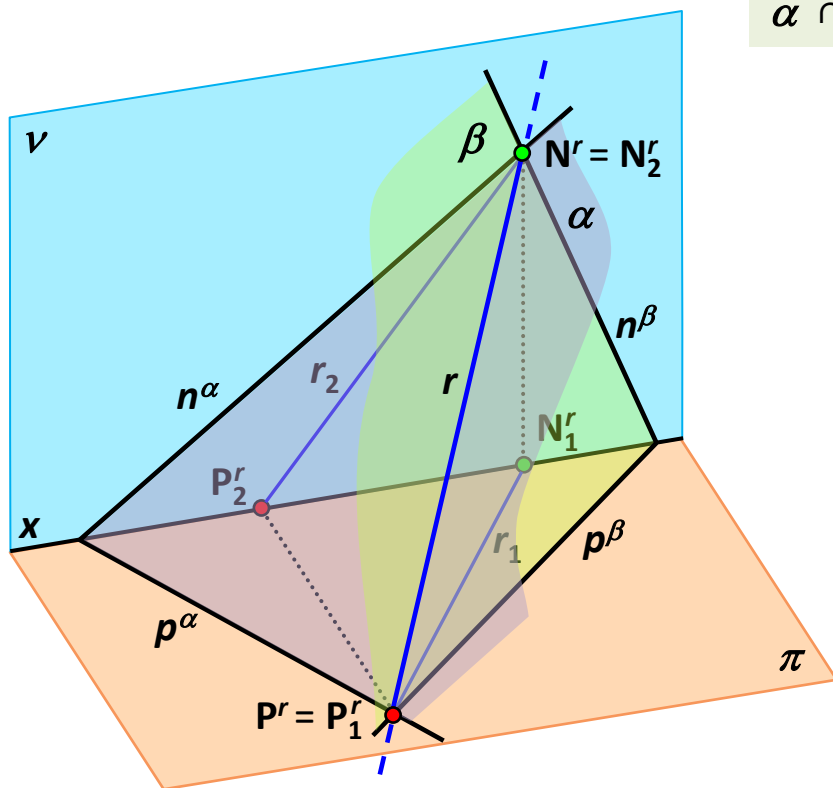


Poznámka: Z rovnobežnosti pôdorysných (nárysných) stôp vyplýva, že priemety hlavných priamok 1.osnovy (2.osnovy) sú tiež navzájom rovnobežné.

Zobrazenie dvoch rôznobežných rovín

Dve rôznobežné roviny majú spoločnú priamku. Na zostrojenie tejto priesečnice stačí určiť jej dva rôzne body. V prípade rovín daných stopami, môžeme za tieto dva body považovať priesečníky pôdorysných a nárysnych stôp oboch rovín.

Pre rôznobežné roviny α a β je priesečník ich pôdorysných stôp p^α a p^β bod P^r , ktorý je pôdorysným stopníkom ich priesečnice r . Priesečník nárysnych stôp n^α a n^β je bod N^r , ktorý je nárysým stopníkom priesečnice r .



$$\begin{aligned} \alpha \cap \beta &= r \rightarrow p^\alpha \cap p^\beta = P^r \\ &\rightarrow n^\alpha \cap n^\beta = N^r \\ &\rightarrow r = P^r N^r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_1 &= P_1^r N_1^r \\ r_2 &= P_2^r N_2^r \end{aligned}$$

