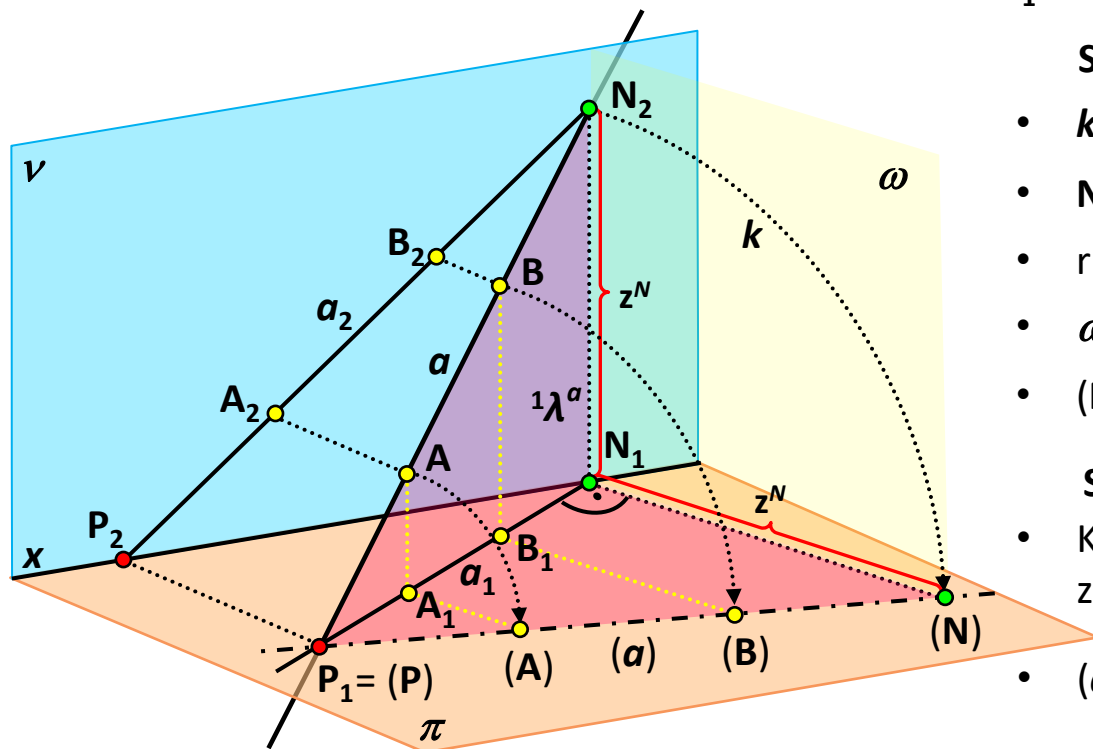


10.4 Metrické úlohy v Mongeovej projekcii

Sklápanie premietacej roviny priamky

V Mongeovej projekcii (podobne ako v kótovanom premietaní) riešime niektoré typy úloh pre priamku vo všeobecnej polohe pomocou **sklápania premietacej roviny priamky do priemetne**. Je možné takto určiť dĺžku úsečky na priamke, či uhol, ktorý zvierajú priamka s priemetňou.

Sklápanie 1. premietacej roviny ${}^1\lambda^a$ priamky a do priemetne π



Sklopenie je špeciálny prípad otočenia, kedy je **uhol otočenia 90°** . Sklopenú polohu priamky získame sklopením dvoch jej rôznych bodov. Sklopené polohy bodov označujeme zátvorkami napr. **(F)**. Útvary v sklopenej polohe budeme vyznačovať bodkočiarkovanou čiarou.

- ${}^1\lambda^a$ – 1. premietacia rovina priamky a , ${}^1\lambda^a \perp \pi$,
- a_1 – os otáčania roviny ${}^1\lambda^a$,

Sklápanie bodu N

- k – kružnica otáčania bodu N , $k(N_1, r = |z^N|)$,
- N_1 – stred otáčania bodu N ,
- $r = |z^N|$ – polomer otáčania bodu N ,
- ω – rovina otáčania bodu N , $k \subset \omega$, $\omega \perp a_1$,
- (N) – sklopená poloha bodu N .

Sklápanie bodu P

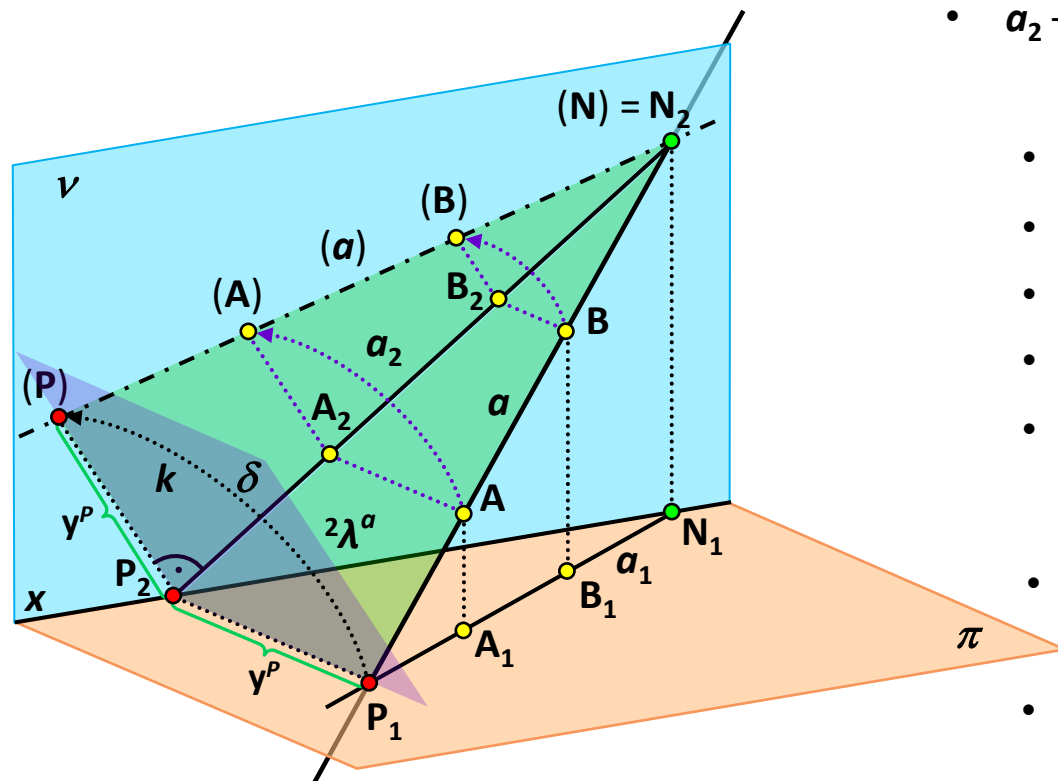
- Keďže bod P leží v priemetni π ($z^P = 0$), zostáva pri sklápaní na mieste: $P_1 = (P)$.
- $(a) = (P)(N)$ – sklopená poloha priamky a .

Poznámka: Bod A priamky a sa pri sklápaní otáča po kružnici, ktorej polomer je z -ová súradnica bodu A a stred leží v pôdoryse A_1 , analogicky pre bod B .

Sklápanie premietacej roviny priamky

Analogickým spôsobom určíme sklápanie 2. premietacej roviny priamky do nárysne, pričom osou otáčania je nárys danej priamky a polomery otáčania jednotlivých bodov priamky sú ich y -ové súradnice.

Sklápanie 2. premietacej roviny ${}^2\lambda^a$ priamky a do priemetne ν



- ${}^2\lambda^a$ – 2. premietacia rovina priamky a , ${}^2\lambda^a \perp \nu$,
- a_2 – os otáčania roviny ${}^2\lambda^a$,

Sklápanie bodu P

- k – kružnica otáčania bodu P , $k(P_2, r = |y^P|)$,
- P_2 – stred otáčania bodu P ,
- $r = |y^P|$ – polomer otáčania bodu P ,
- δ – rovina otáčania bodu P , $k \subset \delta$, $\delta \perp a_2$,
- (P) – sklopená poloha bodu P .

Sklápanie bodu N

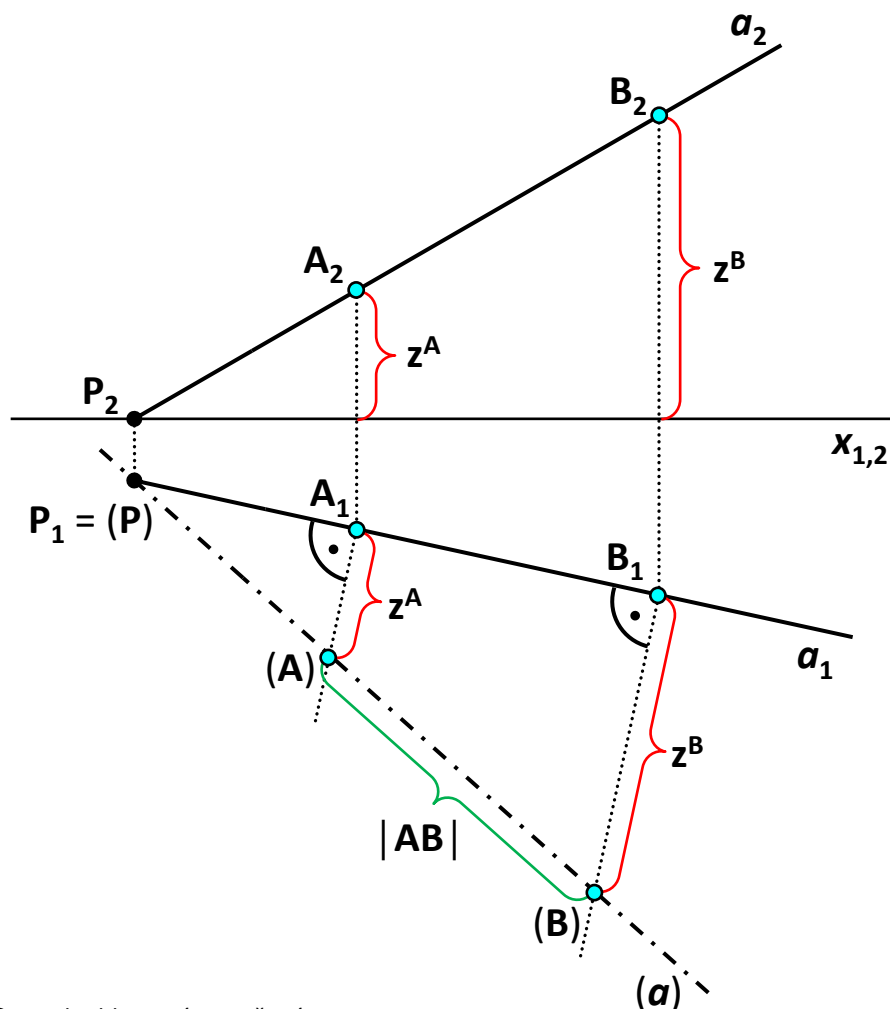
- Keďže bod N leží v priemetni ν ($y^N = 0$), zostáva pri sklápaní na mieste: $N_2 = (N)$.
- $(a) = (P)(N)$ – sklopená poloha priamky a .

Poznámka: Bod A priamky a sa pri sklápaní do nárysne otáča po kružnici, ktorej polomer je y -ová súradnica bodu A a stred leží v náryse A_2 , analogicky pre bod B .

Určenie dĺžky úsečky

V nasledujúcom príklade využijeme sklápanie premietacej roviny na **určenie dĺžky úsečky**, ktorá je vzhľadom na priemetne **vo všeobecnej polohe**. Ukážeme niekoľko možností riešenia.

Príklad 10.18: V Mongeovej projekcii určte dĺžku úsečky **AB** na priamke **a**.



1. možnosť:

Úlohu vyriešime **sklopením 1. premietacej roviny** priamky **a** do pôdorysne.

Postup:

1. Bodom $\mathbf{A}_1$ vedieme kolmicu na pôdorys $\mathbf{a}_1$ priamky $\mathbf{a}$. Na túto kolmicu nanesieme **z-ovú** súradnicu $\mathbf{z}^A$ bodu $\mathbf{A}$. Získame sklopenú polohu ($\mathbf{A}$) bodu $\mathbf{A}$.
2. Analogicky zostrojíme sklopenú polohu ($\mathbf{B}$) bodu $\mathbf{B}$.
3. Spojením bodov ($\mathbf{A}$) a ($\mathbf{B}$) získame sklopenú polohu ($\mathbf{a}$) priamky $\mathbf{a}$. Úsečka ($\mathbf{A}$)($\mathbf{B}$) určuje veľkosť úsečky $\mathbf{AB}$.

Poznámka: Body (**A**) a (**B**) ležia v tej istej polrovine vzhľadom na $\mathbf{a}_1$, lebo $\mathbf{z}^A$ a $\mathbf{z}^B$ majú rovnaké znamienko.

Poznámka: V bode, kde priamka $\mathbf{a}_1$ pretína priamku $(\mathbf{a})$, leží pôdorysný stopník priamky $\mathbf{a}$. Jeho pôdorys P_1 a sklopená poloha (P) sú totožné.

Určenie dĺžky úsečky

Príklad 10.18: V Mongeovej projekcii určte dĺžku úsečky **AB** na priamke **a**.

2. možnosť:

Úlohu vyriešime **sklopením 2. premietacej roviny** priamky **a** do nárysne.

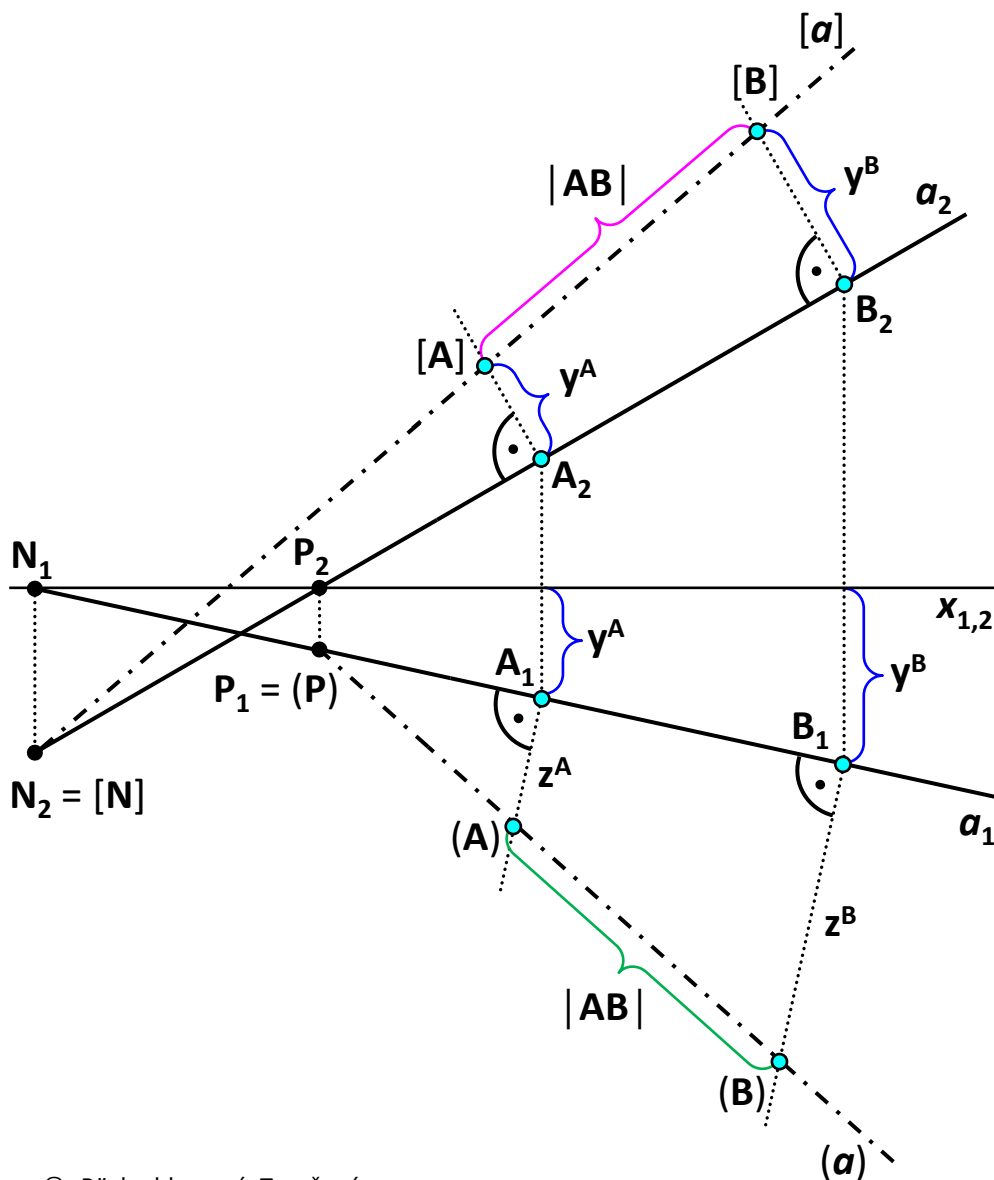
Poznámka: Keďže v obrázku budú znázornené dve sklápania do rôznych priemetní, rozlíšime ich použitím iného typu zátvoriek.

Postup:

1. Analogicky ako v predchádzajúcom postupe zostrojíme sklopené polohy **[A]**, **[B]** bodov **A**, **B** do nárysne s využitím ich **y**-ových súradníc.
2. Spojením bodov **[A]** a **[B]** získame sklopenú polohu **[a]** priamky **a** do nárysne. Úsečka **[A][B]** určuje veľkosť úsečky **AB**.

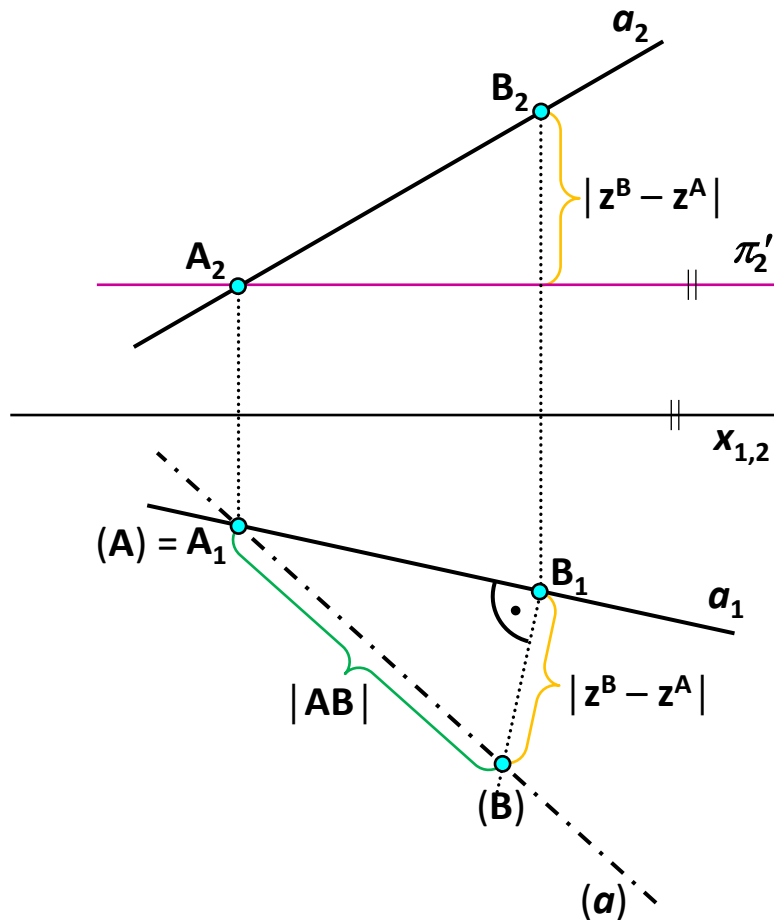
Poznámka: Body **[A]** a **[B]** opäť ležia v tej istej polrovine vzhľadom na **a₂**, lebo **y^A** a **y^B** majú rovnaké znamienko.

Poznámka: V bode, kde priamka **a₂** pretína priamku **[a]**, leží nárysný stopník priamky **a**. Jeho nárys **N₂** a sklopená poloha **[N]** sú totožné.



Určenie dĺžky úsečky

Príklad 10.18: V Mongeovej projekcii určte dĺžku úsečky **AB** na priamke **a**.



3. možnosť:

Úlohu vyriešime **sklopením 1. premietacej roviny** priamky **a** do **úrovne bodu A**.

Postup:

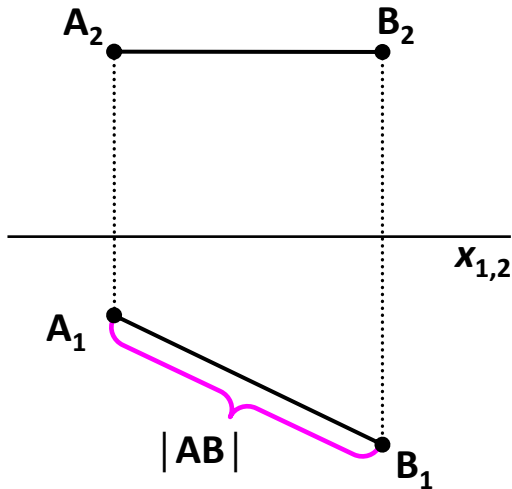
1. Bodom **A** vedieme rovinu π' (úroveň), rovnobežnú s pôdorysnou π , ktorej nárysom je priamka π_2' .
2. Sklápanie do úrovne bodu **A** znamená, že sklápame do roviny π' . Sklopená poloha (**A**) bodu **A** je teda totožná s priemetom **A**₁. Bod **B** sklopíme o rozdiel **z**-ových súradníc bodov **B** a **A**.
3. Spojením bodov (**A**) a (**B**) získame sklopenú polohu (**a**) priamky **a**. Úsečka (**A**)(**B**) určuje veľkosť úsečky **AB**.

Určenie dĺžky úsečky – špeciálne prípady

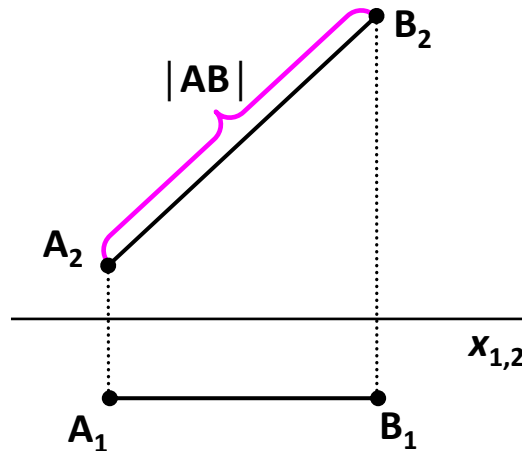
V špeciálnych prípadoch, keď je úsečka kolmá na niektorú priemetňu alebo je s ňou rovnobežná či rovnobežná s osou x , vieme určiť dĺžku úsečky priamo z jej príslušného priemetu bez využitia sklápania premietacej roviny.

Príklad 10.19: V Mongeovej projekcii určte dĺžku úsečky AB .

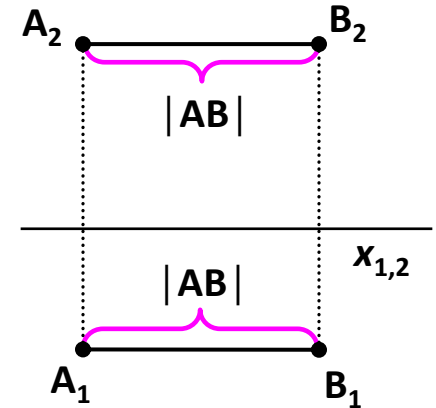
a) $AB \parallel \pi \rightarrow |AB| = |A_1B_1|$



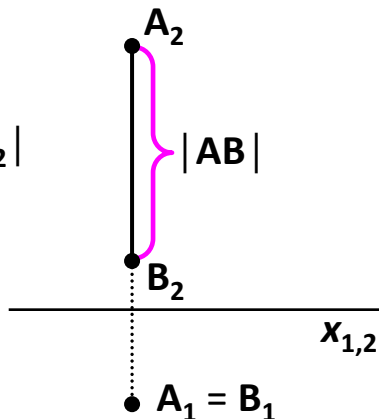
b) $AB \parallel \nu \rightarrow |AB| = |A_2B_2|$



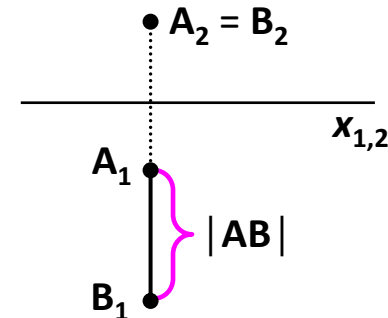
c) $AB \parallel x \rightarrow |AB| = |A_1B_1|$
 $\rightarrow |AB| = |A_2B_2|$



d) $AB \perp \pi \rightarrow |AB| = |A_2B_2|$



e) $AB \perp \nu \rightarrow |AB| = |A_1B_1|$



Odchýlka priamky od priemetne

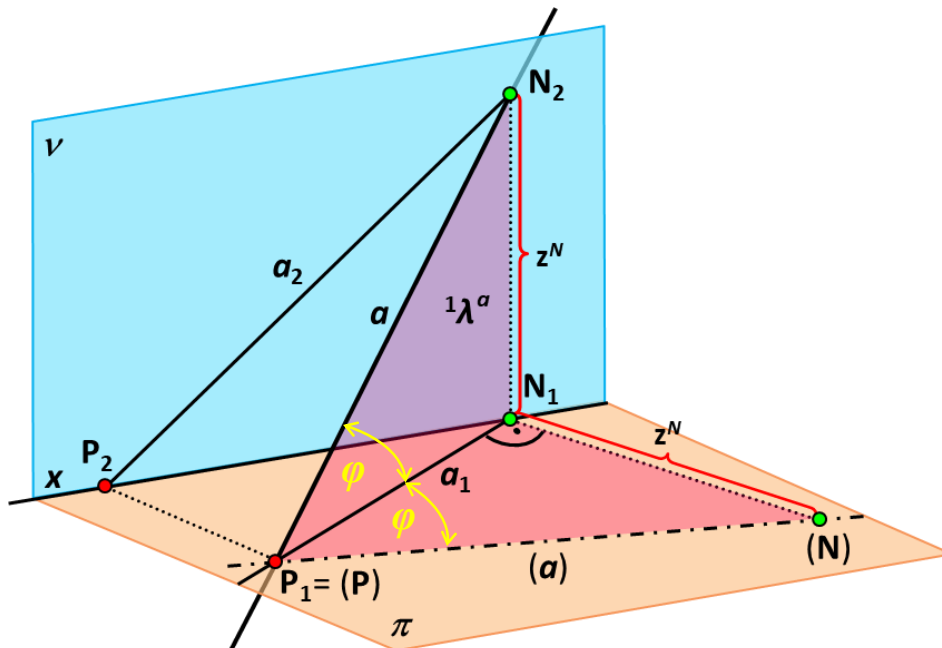
Pomocou sklopenia premietacej roviny priamky zisťujeme tiež **odchýlku priamky od priemetne**.

- je to **uhol priamky a priemetne**,
- t. j. je to **uhol, ktorý zvierá priamka a jej kolmý priemet** do tejto priemetne.

Vzhľadom na dve premietne rozlišujeme **odchýlku priamky od pôdorysne** a **odchýlku priamky od nárysne**.

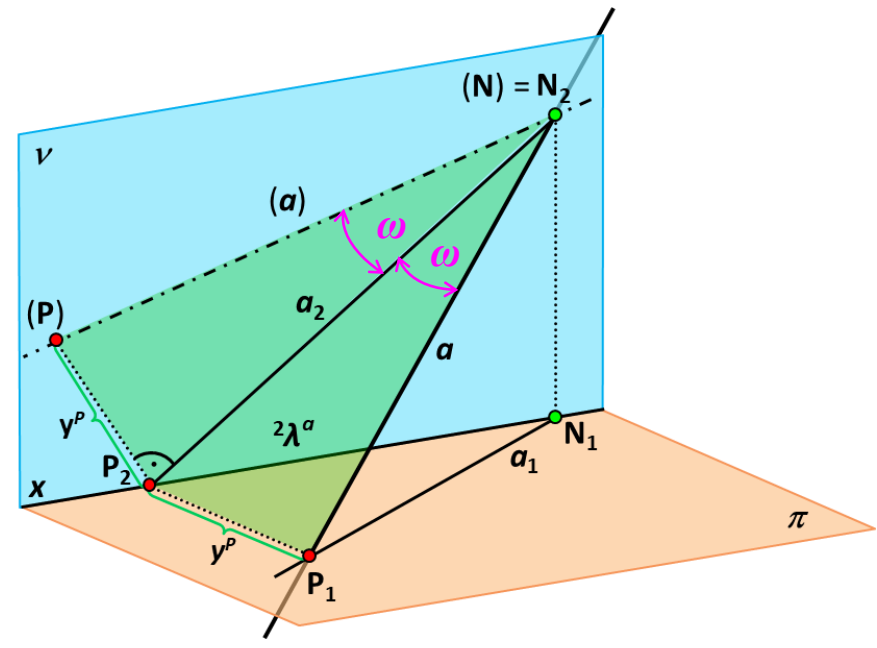
Odchýlka priamky a od pôdorysne π

$$\varphi = \not\vdash(\mathbf{a}, \pi) = \not\vdash(\mathbf{a}, \mathbf{a}_1) = \not\vdash((\mathbf{a}), \mathbf{a}_1)$$



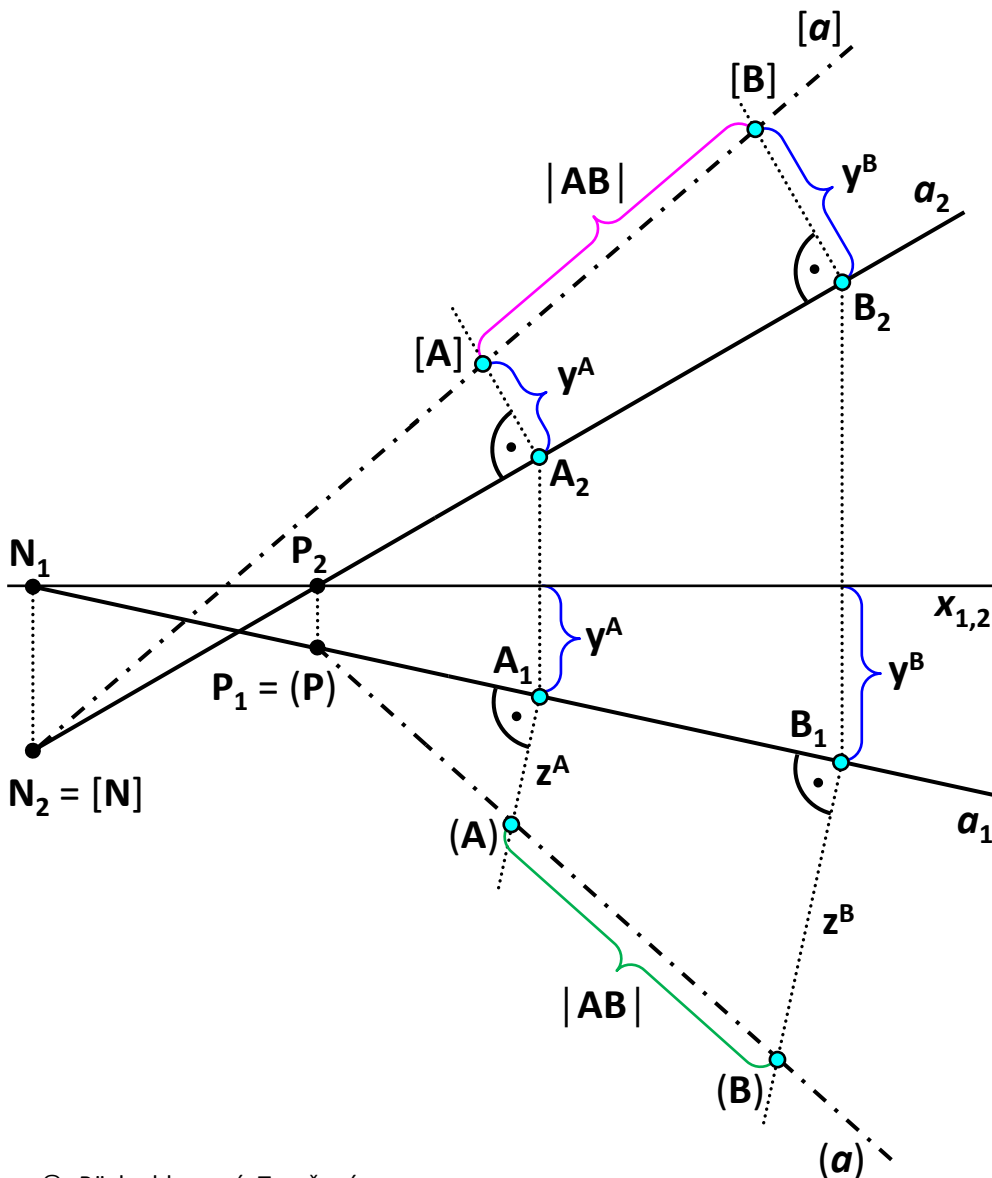
Odchýlka priamky a od nárysne v

$$\omega = \angle(a, v) = \angle(a, a_2) = \angle((a), a_2)$$



Určenie dĺžky úsečky

Príklad 10.18: V Mongeovej projekcii určte dĺžku úsečky **AB** na priamke **a**.



V Mongeovej projekcii určte odchýlku priamky $a = AB$ od pôdorysne a nárýsne.

Odchýlka priamky a od pôdorysne π

$$\varphi = \sphericalangle(a, \pi) = \sphericalangle(a, a_1) = \sphericalangle([a], a_1)$$

Odchýlka priamky a od nárýsne ν

$$\omega = \sphericalangle(a, \nu) = \sphericalangle(a, a_2) = \sphericalangle([a], a_2)$$

Príklad 10.20: V Mongeovej projekcii určte odchýlku priamky $a = AB$ od pôdorysne a nárysne.

Odchýlka φ priamky a od pôdorysne π : $\varphi = \angle(a, \pi)$

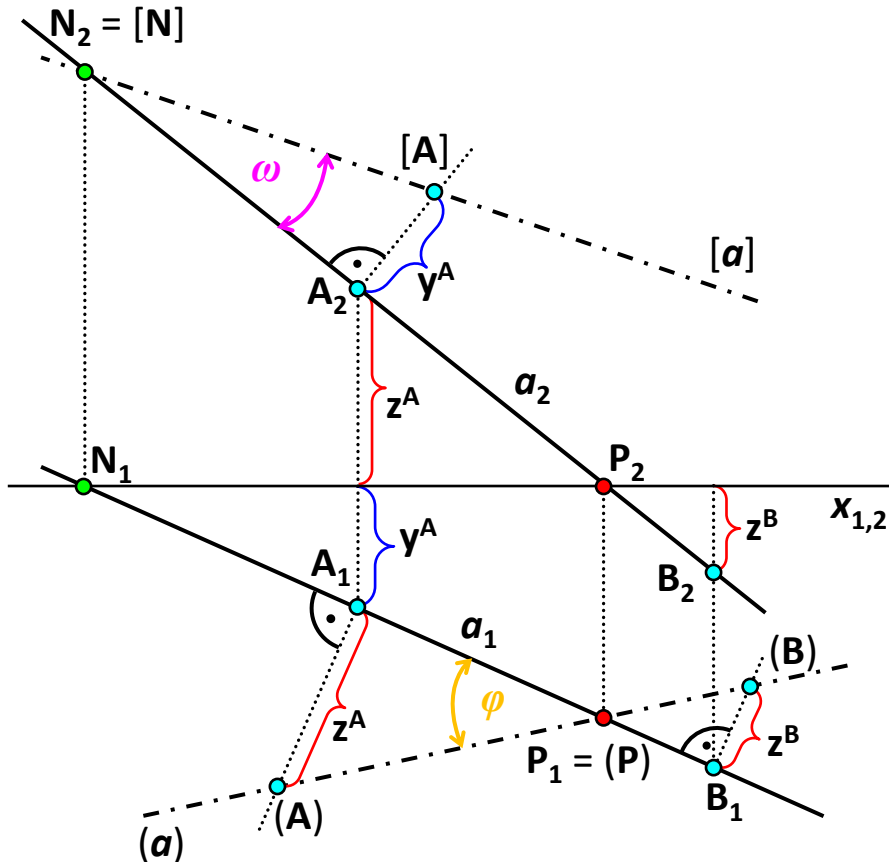
Postup:

1. Úlohu riešime v sklopení 1. premietacej roviny priamky a do priemetne π .

Poznámka: Keďže v tomto prípade je hodnota z^A kladná a hodnota z^B záporná, ležia body (A) a (B) v opačných polrovinách vzhľadom na priamku a_1 .

2. Hľadaný uhol φ je uhol priamok a_1 a (a) pri vrchole $P_1 = (P)$, pre ktorý platí:

- $\varphi = \angle(a, \pi) = \angle(a, a_1) = \angle((a), a_1)$.



Odchýlka ω priamky a od nárysne ν : $\omega = \angle(a, \nu)$

Postup:

1. Úlohu riešime v sklopení 2. premietacej roviny priamky a do priemetne ν .
2. Hľadaný uhol ω je uhol priamok a_2 a $[a]$ pri vrchole $N_2 = [N]$, pre ktorý platí:

- $\omega = \angle(a, \nu) = \angle(a, a_2) = \angle([a], a_2)$.

Odchýlka roviny od priemetne

Každá priamka roviny zvierá s priemetňou nejaký uhol. Najväčší uhol s priemetňou zvierá spádová priamka. Určuje preto **odchýlku roviny od priemetne**.

- je to **uhol roviny a priemetne**,
- t. j. je to **uhol, ktorý zvierá spádová priamka roviny a priemetňa**.

Vzhľadom na dve priemetne rozlišujeme **odchýlku roviny od pôdorysne** a **odchýlku roviny od nárysne**.

Odchýlka roviny α od pôdorysne π

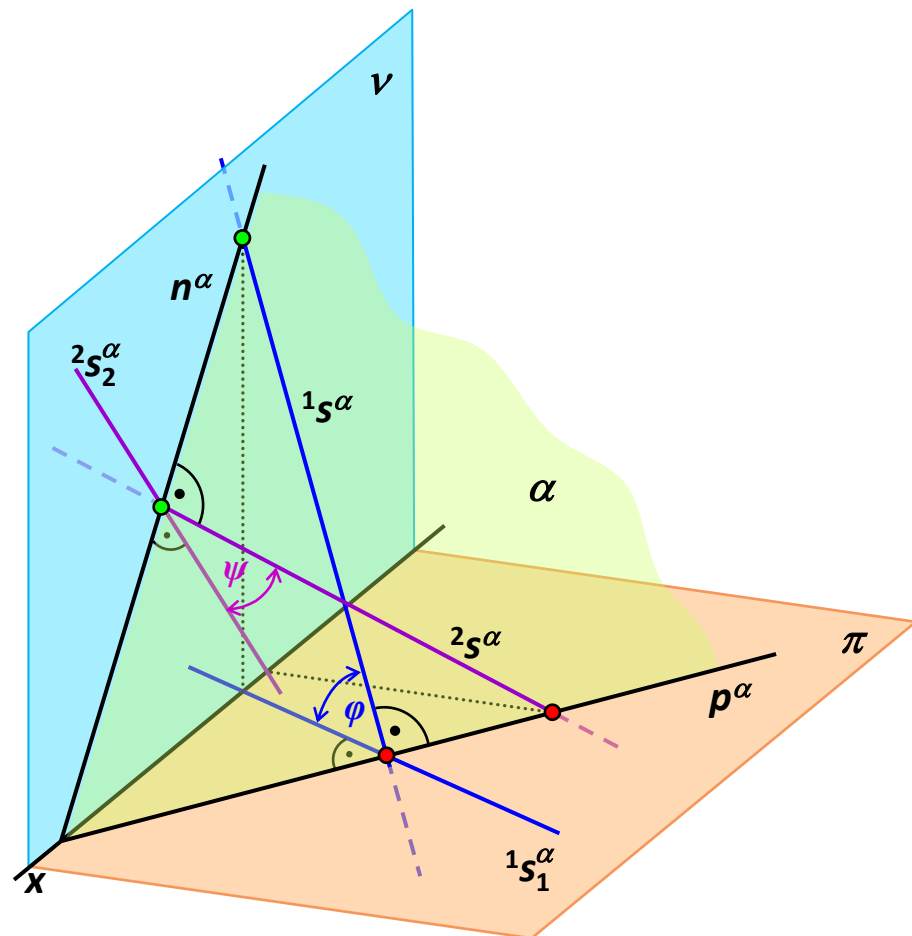
– je to uhol spádovej priamky 1. osnovy roviny α s pôdorysňou

$$\varphi = \angle(\alpha, \pi) = \angle(1s^\alpha, \pi)$$

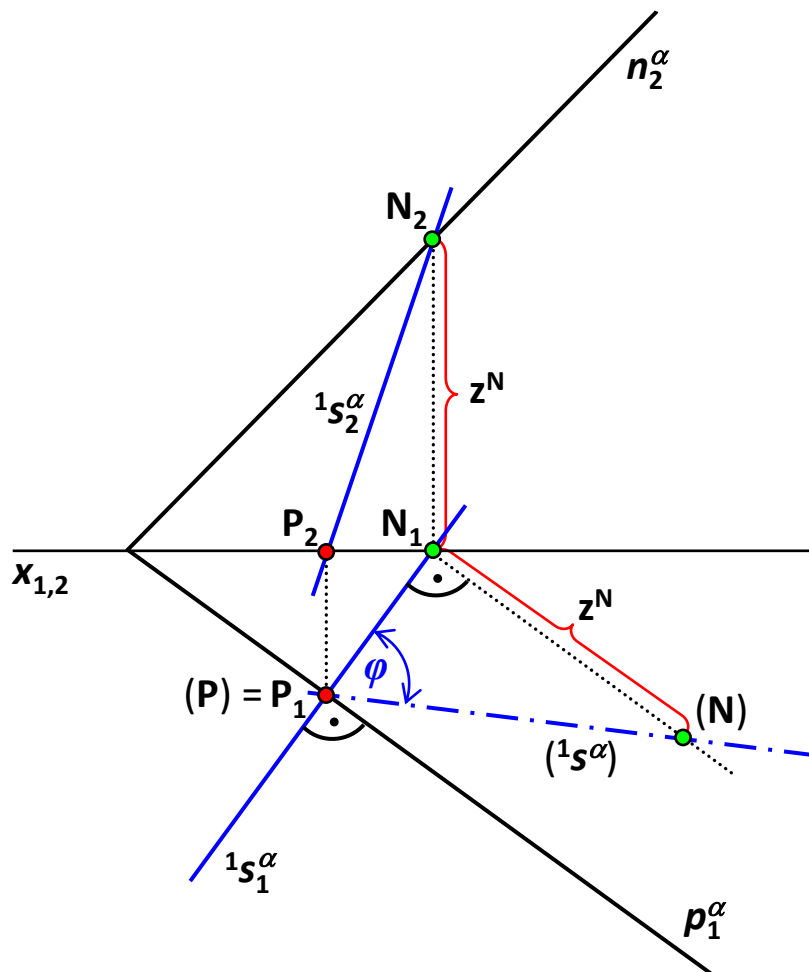
Odchýlka roviny α od nárysne ν

– je to uhol spádovej priamky 2. osnovy roviny α s nárysňou

$$\psi = \angle(\alpha, \nu) = \angle(2s^\alpha, \nu)$$



Príklad 10.21: V Mongeovej projekcii určte odchýlku roviny $\alpha(p_1^\alpha, n_2^\alpha)$ od pôdorysne.



Odchýlka φ roviny α od pôdorysne π je odchýlka spádovej priamky 1. osnovy roviny α od pôdorysne π :

$$\varphi = \angle(\alpha, \pi) = \angle(1s^\alpha, \pi).$$

Určíme ju pomocou sklopenia 1. premietacej roviny priamky $1s^\alpha$ do priemetne π .

Postup:

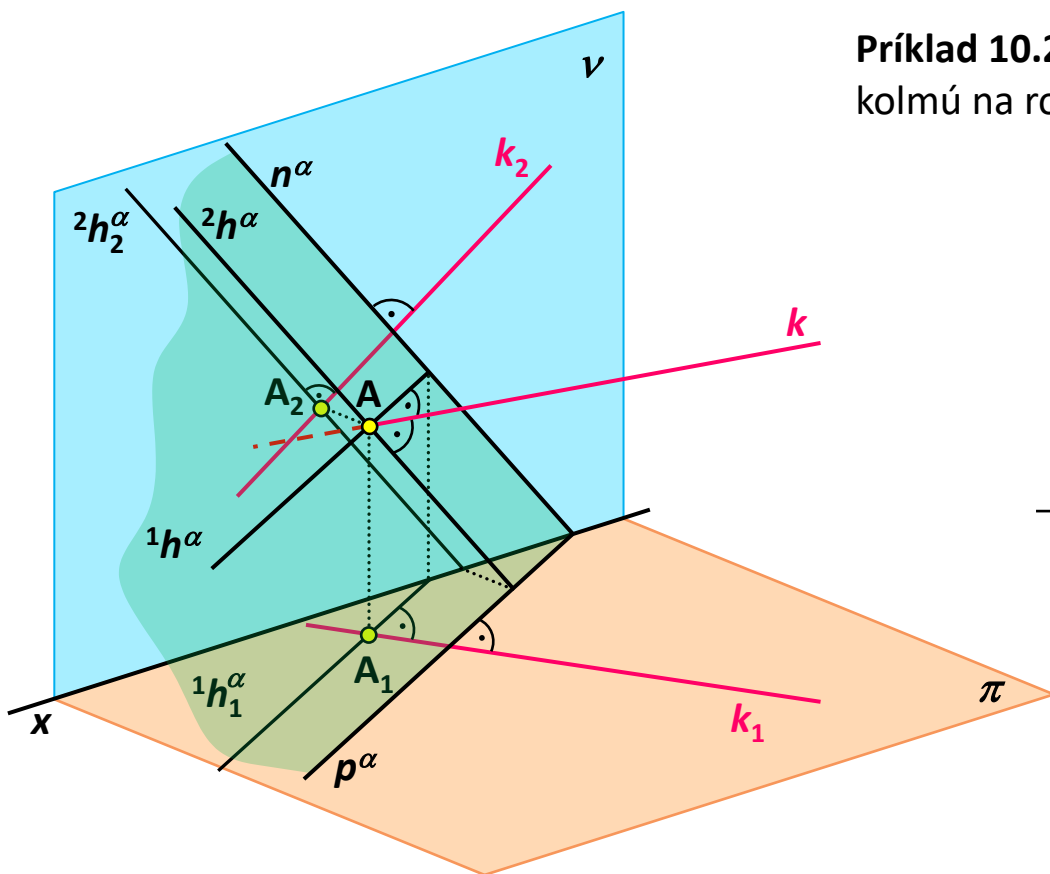
1. Zostrojíme priemety ľubovoľnej spádovej priamky 1. osnovy roviny α .
2. Sklopíme 1. premietáciu roviny priamky $1s^\alpha$ do pôdorysne.
3. Hľadaný uhol φ je uhol priamok $1s_1$ a $(1s^\alpha)$ pri vrchole $P_1 = (P)$, pre ktorý platí:

$$\varphi = \angle(\alpha, \pi) = \angle(1s^\alpha, \pi) = \angle(1s^\alpha, 1s_1^\alpha) = \angle(1s_1^\alpha, (1s^\alpha)).$$

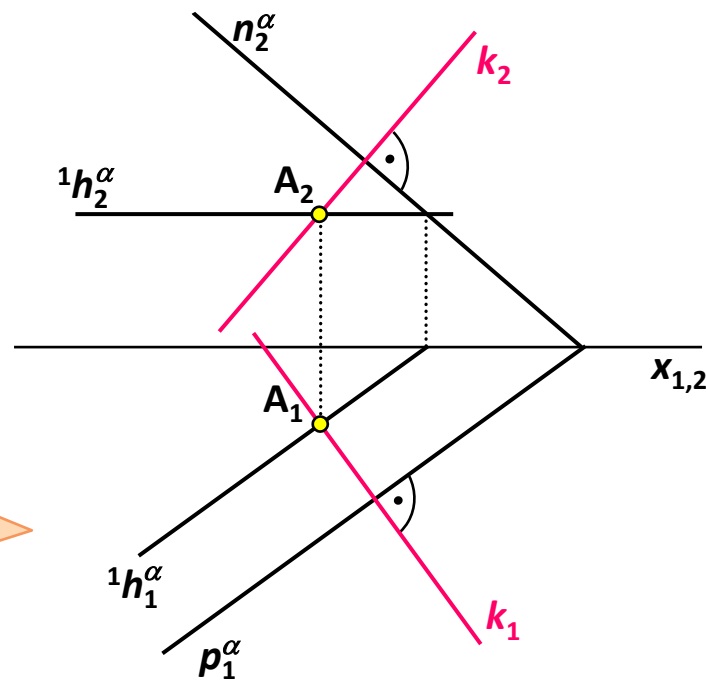
Priamka kolmá na rovinu

Priamka kolmá na rovinu je kolmá na všetky priamky roviny a preto je kolmá aj na hlavné priamky oboch osnôv vrátane stôp roviny. Z vety o priemete pravého uhla vyplýva, že:

- pôdorys priamky kolmej na rovinu je kolmý na pôdorysnú stopu roviny (a tiež na pôdorys hlavných priamok 1. osnovy): $k_1 \perp p_1^\alpha \rightarrow (k_1 \perp {}^1h_1^\alpha)$.
- nárys priamky kolmej na rovinu je kolmý na nárysnú stopu roviny (a tiež na nárys hlavných priamok 2. osnovy): $k_2 \perp n_2^\alpha \rightarrow (k_2 \perp {}^2h_2^\alpha)$.



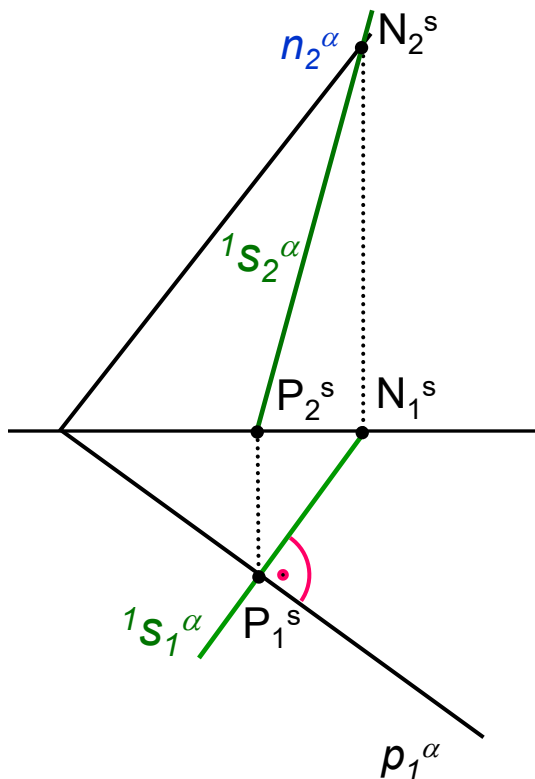
Príklad 10.23: V Mongeovej projekcii zostrojte priamku k kolmú na rovinu α a incidentnú s bodom A , $A \in \alpha$.



Porovnajte!

Spádová priamka 1. osnovy

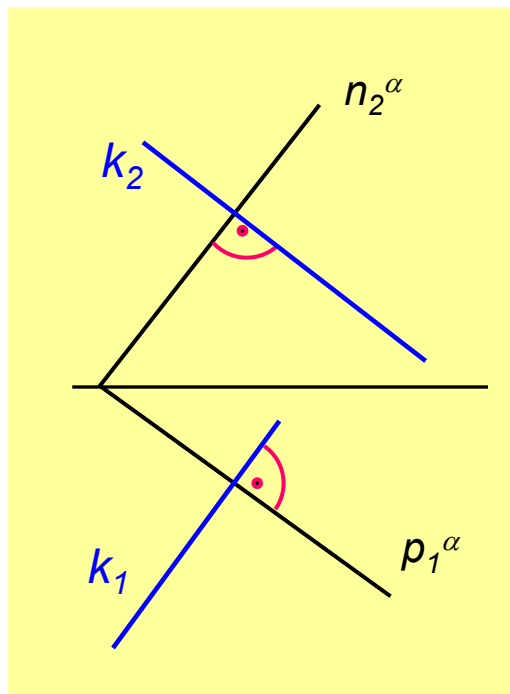
$${}^1s^\alpha \perp p^\alpha, {}^1s_1^\alpha \perp p_1^\alpha$$



Kolmica na rovinu

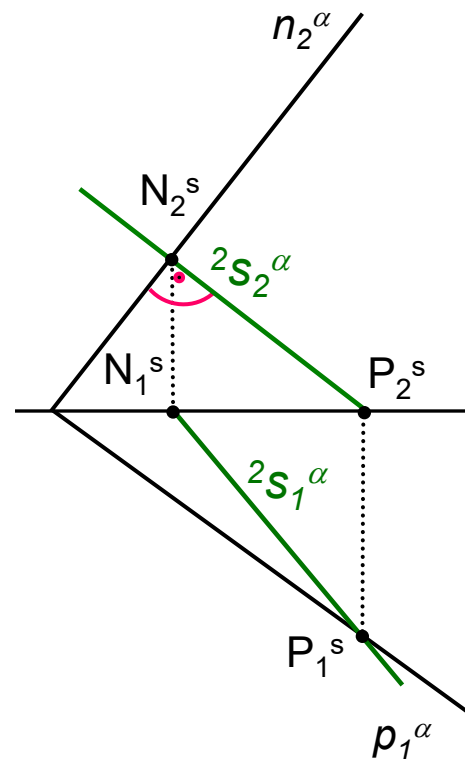
$$k \perp p^\alpha, k_1 \perp p_1^\alpha$$

$$k \perp n^\alpha, k_2 \perp n_2^\alpha$$



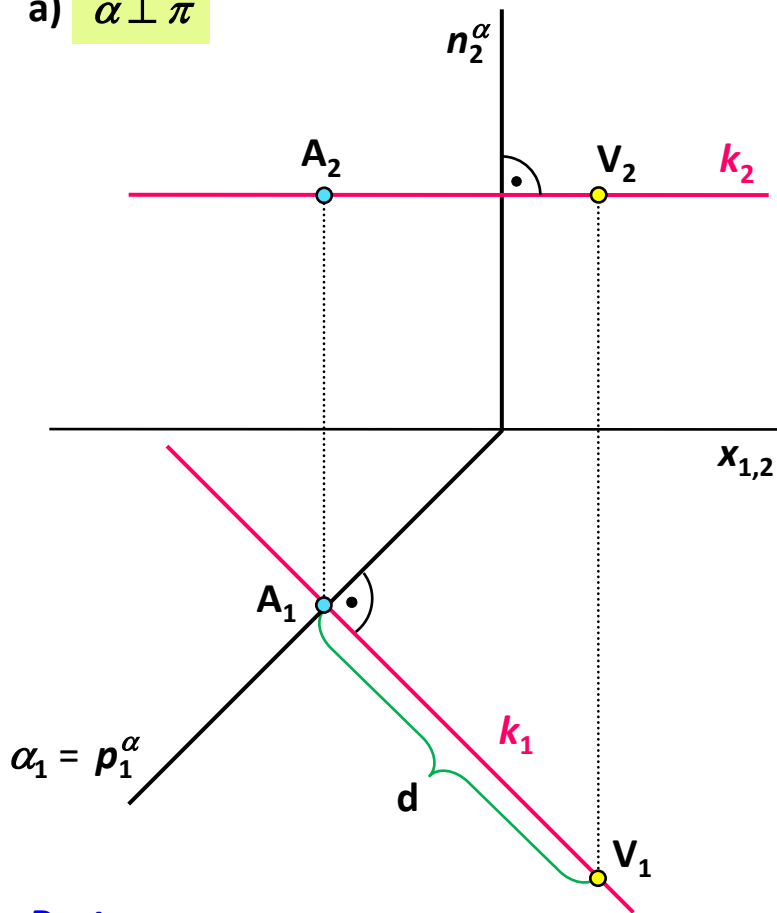
Spádová priamka 2. osnovy

$${}^2s^\alpha \perp n^\alpha, {}^2s_2^\alpha \perp n_2^\alpha$$



Príklad 10.24: V Mongeovej projekcii zostrojte priamku k kolmú na rovinu α a incidentnú s bodom A , $A \in \alpha$. Na kolmicu k naneste dĺžku $d = 5$ cm.

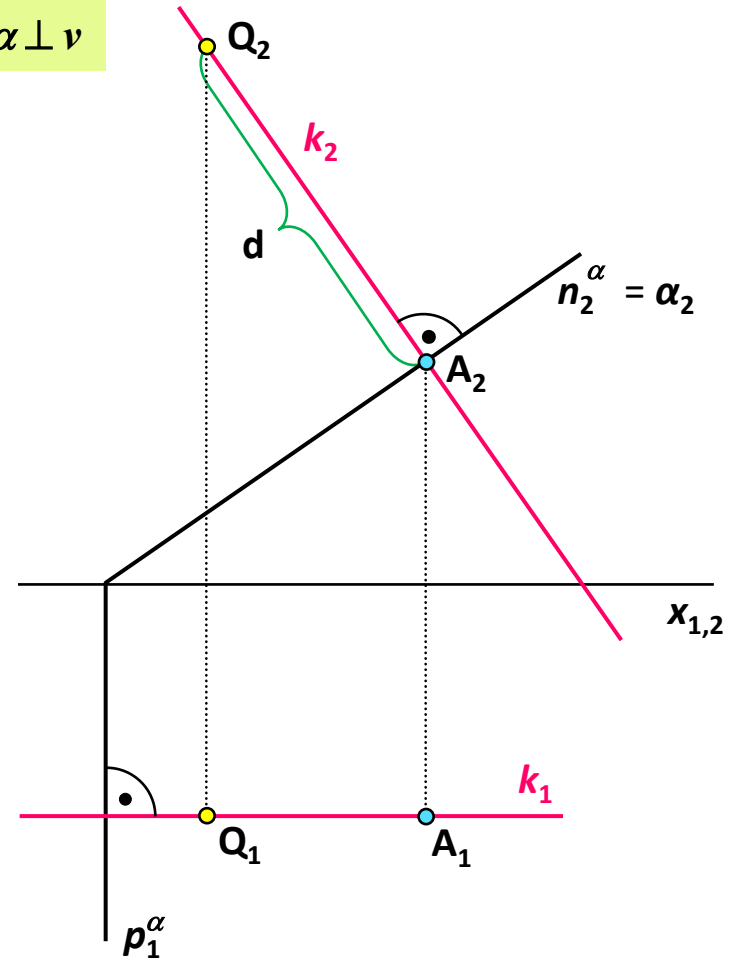
a) $\alpha \perp \pi$



Postup:

Keďže rovina α je kolmá na pôdorysňu, kolmica na ňu je s pôdorysňou rovnobežná. Preto sa príslušná dĺžka v pôdoryse na tejto kolmici zachová, t. j. $|A_1V_1| = d = 5$ cm.

b) $\alpha \perp v$



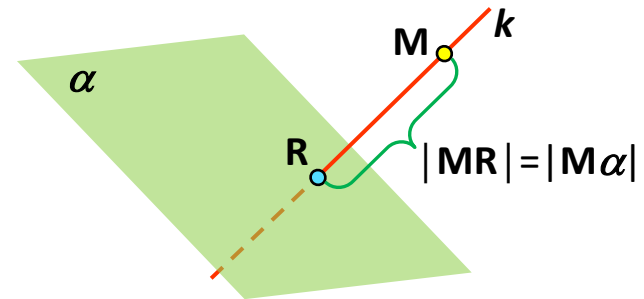
Postup:

Príklad riešime analogicky ako v prípade a). Tentoraz je zachovaná dĺžka na priemete kolmice v náryse, t. j. $|A_2Q_2| = d = 5$ cm.

Vzdialenosť bodu od roviny

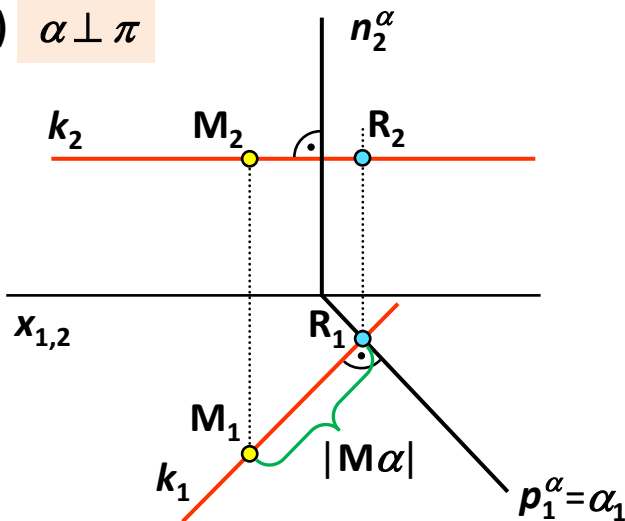
Priamka kolmá na rovinu sa tiež využíva v úlohách, kde je potrebné zistiť vzdialenosť daného bodu od roviny. Postupujeme pri tom nasledovným spôsobom:

1. Bodom **M** zostrojíme priamku **k** kolmú na rovinu α .
2. Určíme priesečník **R** kolmice **k** a roviny α .
3. Určíme dĺžku úsečky $|\mathbf{MR}| = |\mathbf{M}\alpha|$.



Príklad 10.27: V Mongeovej projekcii určte vzdialenosť bodu **M** a roviny α .

a) $\alpha \perp \pi$

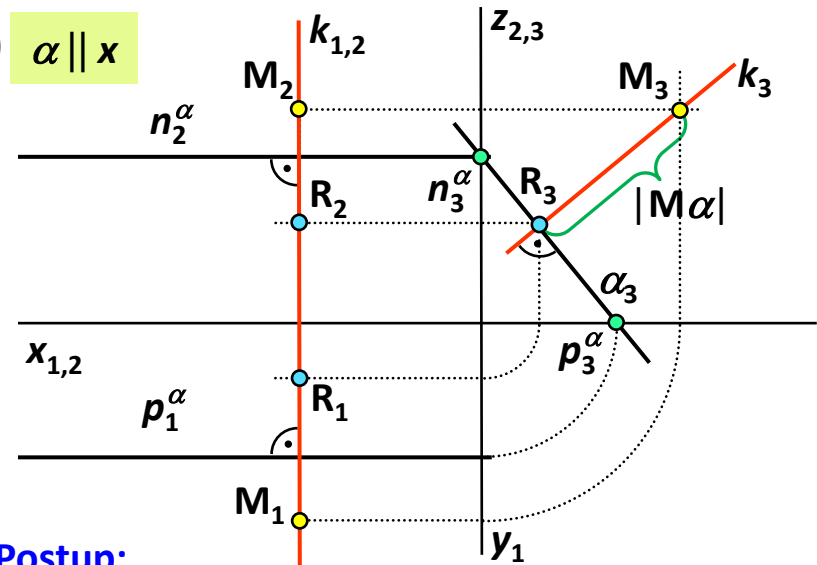


Postup:

Podľa odporúčaného postupu zostrojíme bodom **M** kolmicu **k** na rovinu α a nájdeme ich priesečník **R**. Vzdialenosť bodu **M** od roviny α je možné odmerať priamo v pôdoryse:

$$|\mathbf{M}_1\mathbf{R}_1| = |\mathbf{MR}| = |\mathbf{M}\alpha|.$$

b) $\alpha \parallel x$



Postup:

Pri riešení je výhodné použiť bokorysňu, do ktorej sa rovina α premietne ako priamka a bude tak možné odmerať vzdialenosť bodu **M** od roviny α priamo:

$$|\mathbf{M}_3\mathbf{R}_3| = |\mathbf{MR}| = |\mathbf{M}\alpha|.$$