

KURZ DESKRIPTÍVNEJ GEOMETRIE

2-1. časť Elipsa

Mgr. Juliana Beganová, PhD.

Úvod

- P Predhovor
- S Na stiahnutie
- T Tiráž

OZNAČENIA A SYMBOLY

1 ZÁKLADNÉ POJMY

2 KUŽELOSEČKY

3 PREMIETANIE, ZÁKLADNÉ
POJMY A VLASTNOSTI

4 PERSPEKTÍVNA AFINITA

5 PERSPEKTÍVNA
KOLINEÁCIA

6 KÓTOVANÉ PREMIETANIE

7 POZNÁMKY Z TEÓRIE
KRIVIEK A PLÔCH

8 TOPOGRAFICKÉ PLOCHY I

9 TOPOGRAFICKÉ PLOCHY
II

CuterCounter.com



Juliana Beganová, Tatiana Rückschlossová, Ľubica Valášková, Margita Vajsáblová, Zuzana Tereňová

DESKRIPTÍVNA GEOMETRIA PRE STAVEBNÉ ODBORY

Časť 2.2 elipsa

Vydala Slovenská technická univerzita v Bratislave v roku 2022.

Všetky práva vyhradené. Žiadna časť textu nesmie byť použitá na ďalšie šírenie akoukoľvek formou bez predchádzajúceho súhlasu autorov alebo nakladateľstva.

© Mgr. Juliana Beganová, PhD., Mgr. Tatiana Rückschlossová, PhD., RNDr. Ľubica Valášková, PhD., doc. RNDr. Margita Vajsáblová, PhD., RNDr. Zuzana Tereňová, PhD.

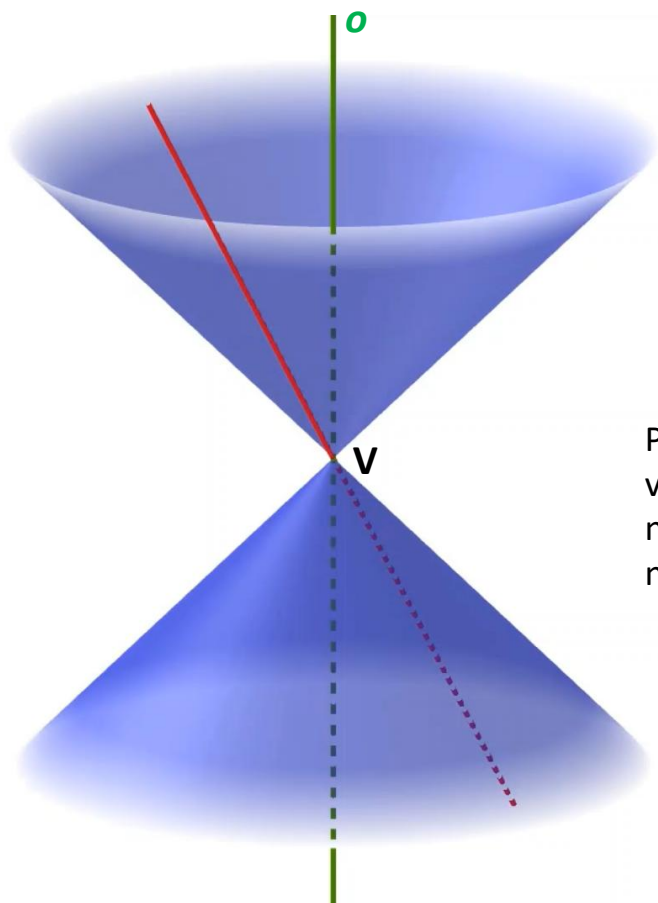
Recenzenti: doc. RNDr. Daniela Velichová, CSc.
doc. RNDr. Mária Kmeťová, PhD.
RNDr. Tatiana Hýrošová, PhD.

Návrh webovej stránky: © Mgr. Roman Rückschloss

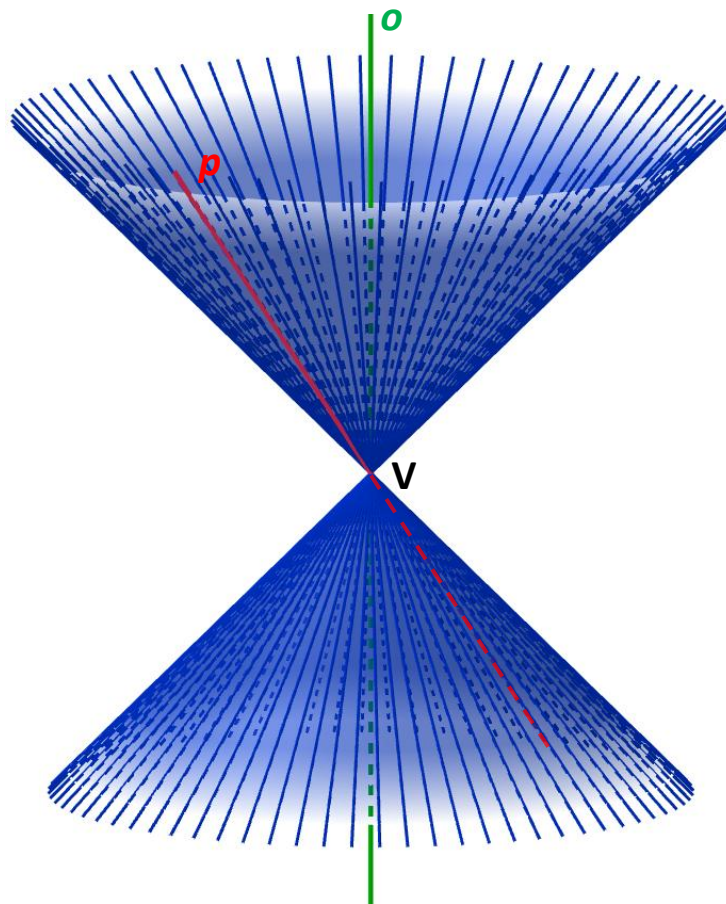
Schválila Edičná rada SvF STU. ISBN 978-80-227-5256-5

Definícia: Rotačná kužeľová plocha vznikne rotáciou priamky p okolo priamky o , pričom priamky p a o sú rôznobežné.

- Priamka o sa nazýva **os** rotačnej kužeľovej plochy.
- Priesečník priamok p a o sa nazýva **vrchol** rotačnej kužeľovej plochy a označíme ho V ($V = p \cap o$).
- Priamka rotačnej kužeľovej plochy sa nazýva **tvoriaca priamka**.
- Každá tvoriaca priamka t rotačnej kužeľovej plochy prechádza jej vrcholom V ($V \in t$).

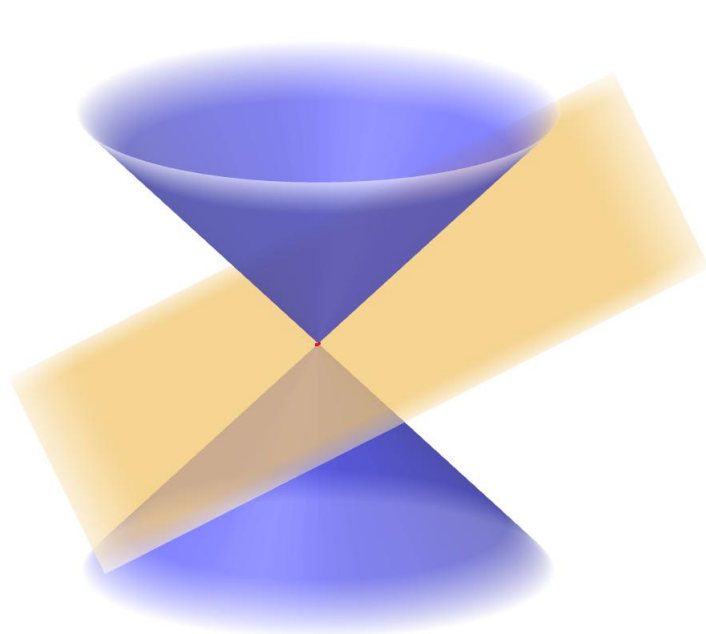


Pre ďalšie spustenie
videa prejdite myšou
na obrázok a kliknite
na prehrávanie



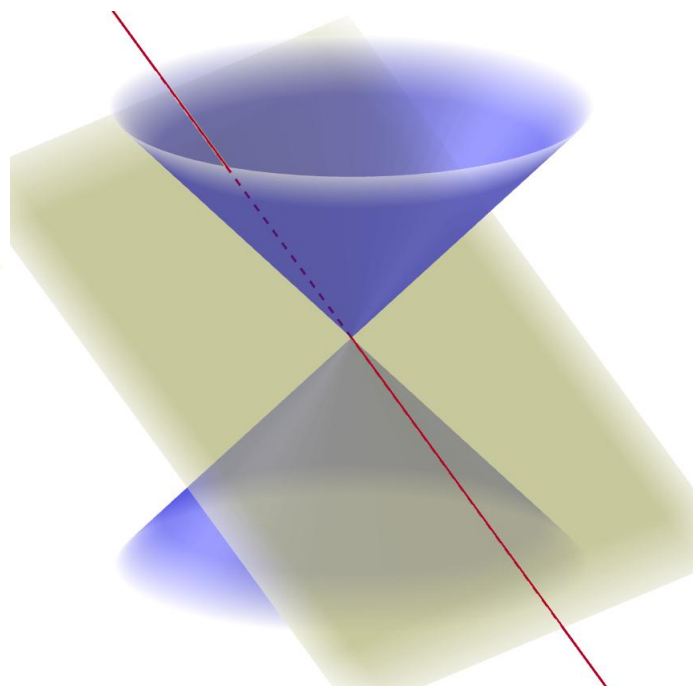
Definícia: Kužeľosečky sú rovinné rezy rotačnej kužeľovej plochy.

- Ak rovina rezu obsahuje vrchol kužeľovej plochy, tak rezom je **singulárna kužeľosečka**:
 - bod,
 - priamka,
 - dve rôznobežné priamky.



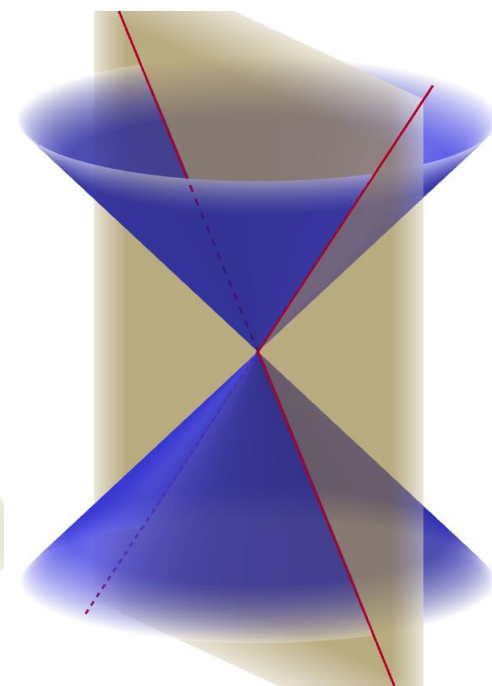
Bod

Rovina rezu pretína rotačnú kužeľovú plochu v jednom bode – vo vrchole rotačnej kužeľovej plochy.



Priamka

Rovina rezu sa dotýka rotačnej kužeľovej plochy pozdĺž jednej tvoriacej priamky.

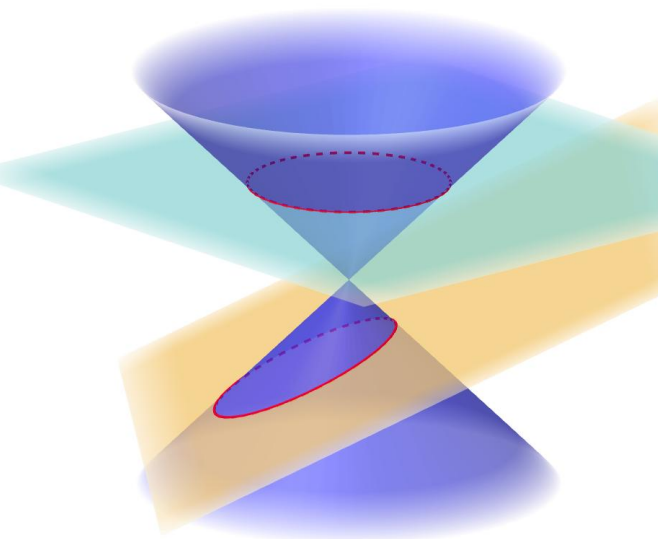


Dve rôznobežné priamky

Rovina rezu pretína rotačnú kužeľovú plochu v dvoch tvoriacich priamkach.

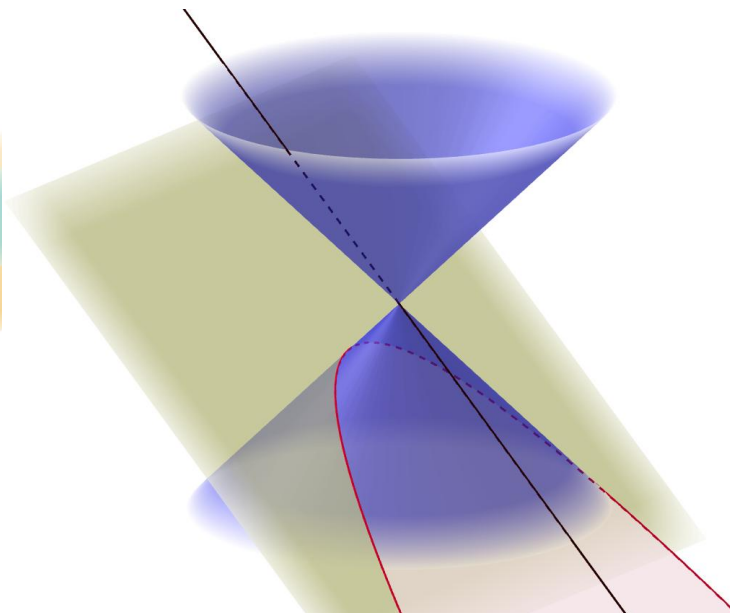
Definícia: Kužeľosečky sú rovinné rezy rotačnej kužeľovej plochy.

- Ak rovina rezu neobsahuje vrchol kužeľovej plochy, tak rezom je **regulárna kužeľosečka**:
 - kružnica,
 - elipsa,
 - parabola,
 - hyperbola.



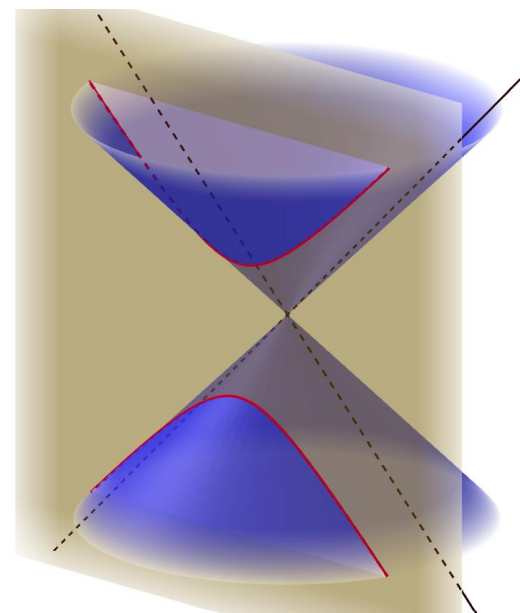
Kružnica, elipsa

Rovina rezu nie je rovnobežná so žiadnou tvoriacou priamkou rotačnej kužeľovej plochy.



Parabola

Rovina rezu je rovnobežná s jednou tvoriacou priamkou rotačnej kužeľovej plochy.



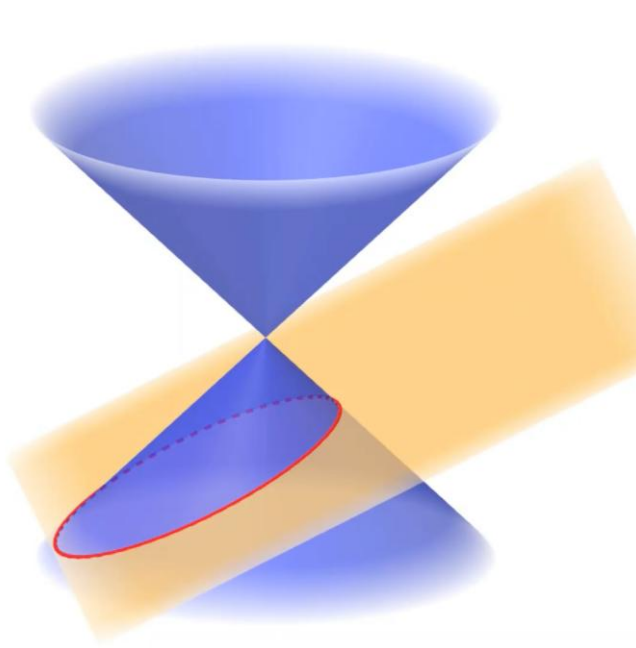
Hyperbola

Rovina rezu je rovnobežná s dvoma tvoriacimi priamkami rotačnej kužeľovej plochy.

Definícia: Kužeľosečky sú rovinné rezy rotačnej kužeľovej plochy.

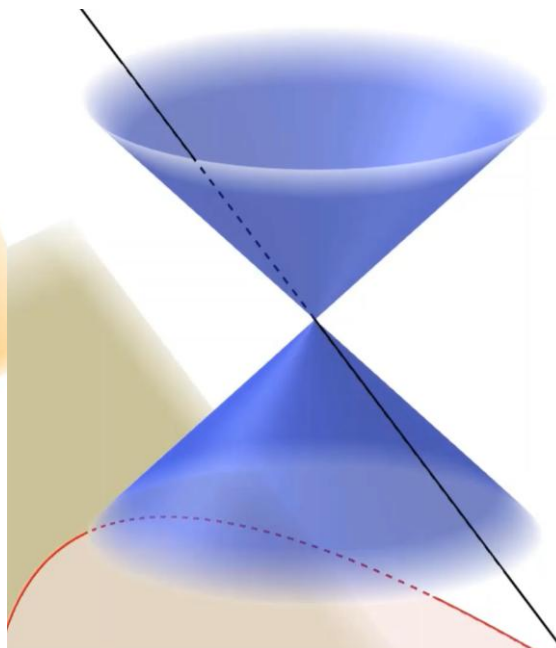
- Ak rovina rezu neobsahuje vrchol kužeľovej plochy, tak rezom je **regulárna kužeľosečka**:
 - kružnica,
 - elipsa,
 - parabola,
 - hyperbola.

Pre ďalšie spustenie
videa prejdite myšou
na obrázok a kliknite
na prehrávanie



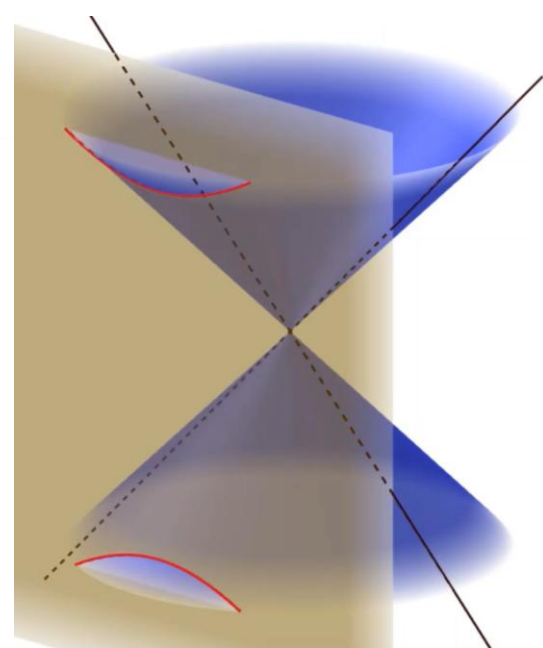
Elipsa

Rovina rezu nie je rovnobežná so žiadnou tvoriacou priamkou rotačnej kužeľovej plochy.



Parabola

Rovina rezu je rovnobežná s jednou tvoriacou priamkou rotačnej kužeľovej plochy.



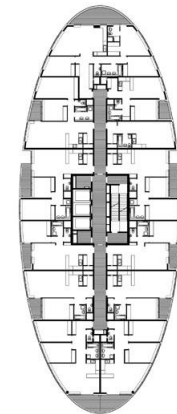
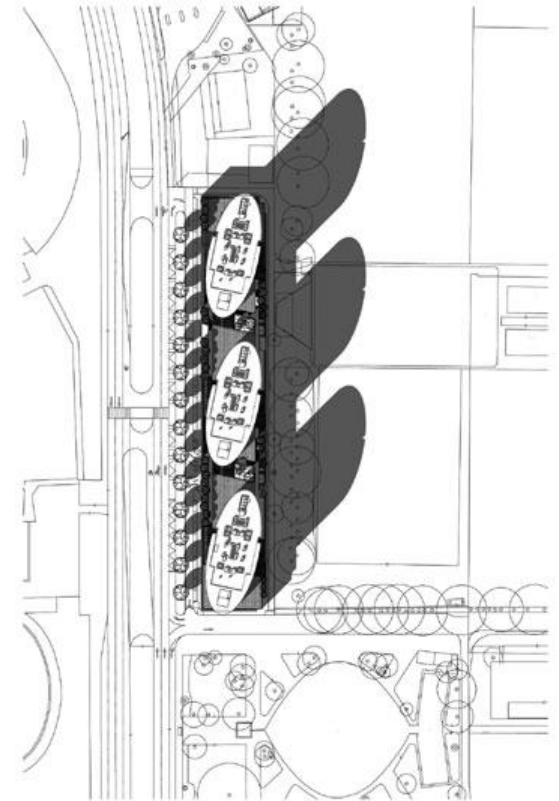
Hyperbola

Rovina rezu je rovnobežná s dvoma tvoriacimi priamkami rotačnej kužeľovej plochy.



Tri veže
Bratislava, Slovensko

<https://www.asb.sk/architektura/bytove-domy/iii-veze-naplňaju-viziu-dobreho-byvania>



Paraboly



Golden Gate Bridge
San Francisco, California, USA

<https://www.ck12.org/algebra/Graphs-of-Quadratic-Functions-in-Intercept-Form/rwa/Suspended-by-a-Cable/r7/>



Sydney Harbour Bridge
Sydney, Australia

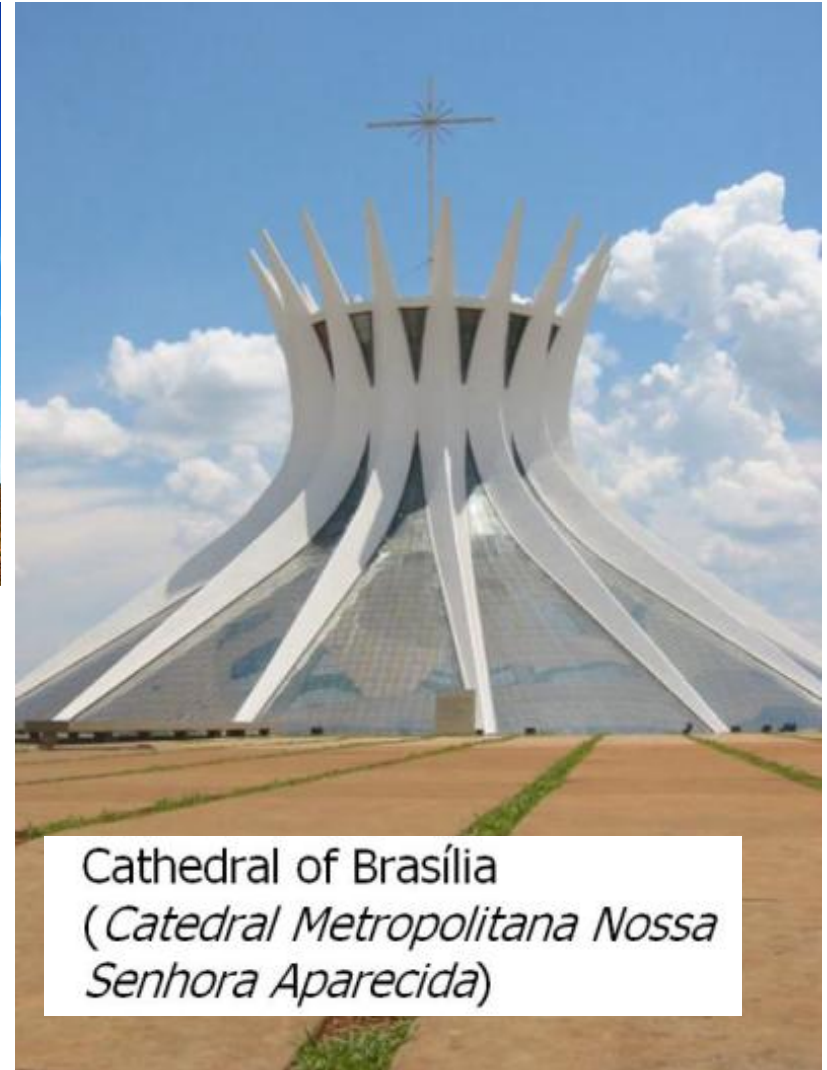
<https://www.futurelearn.com/info/courses/maths-linear-quadratic/0/steps/12131>

Hyperboly



Elektrárň Jaslovské Bohunice

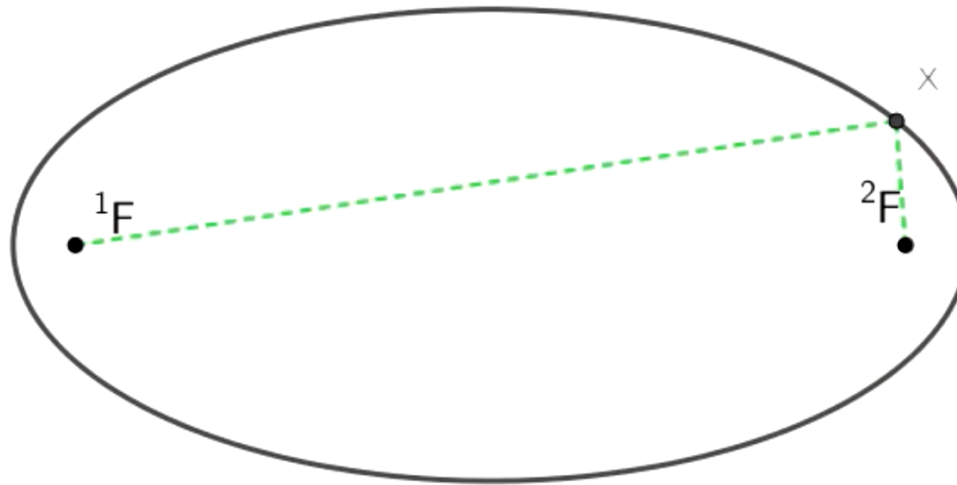
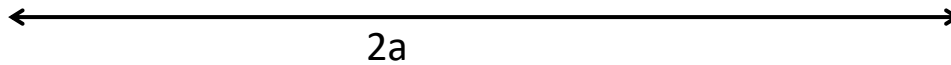
- **závod Atómové elektrárne Bohunice sa nachádza neďaleko mesta Trnava**



Cathedral of Brasília
(*Catedral Metropolitana Nossa Senhora Aparecida*)

Definícia: **Elipsa** je množina všetkých bodov v rovine E^2 , ktoré majú od dvoch daných bodov konštantný súčet vzdialeností väčší ako vzdialenosť týchto bodov.

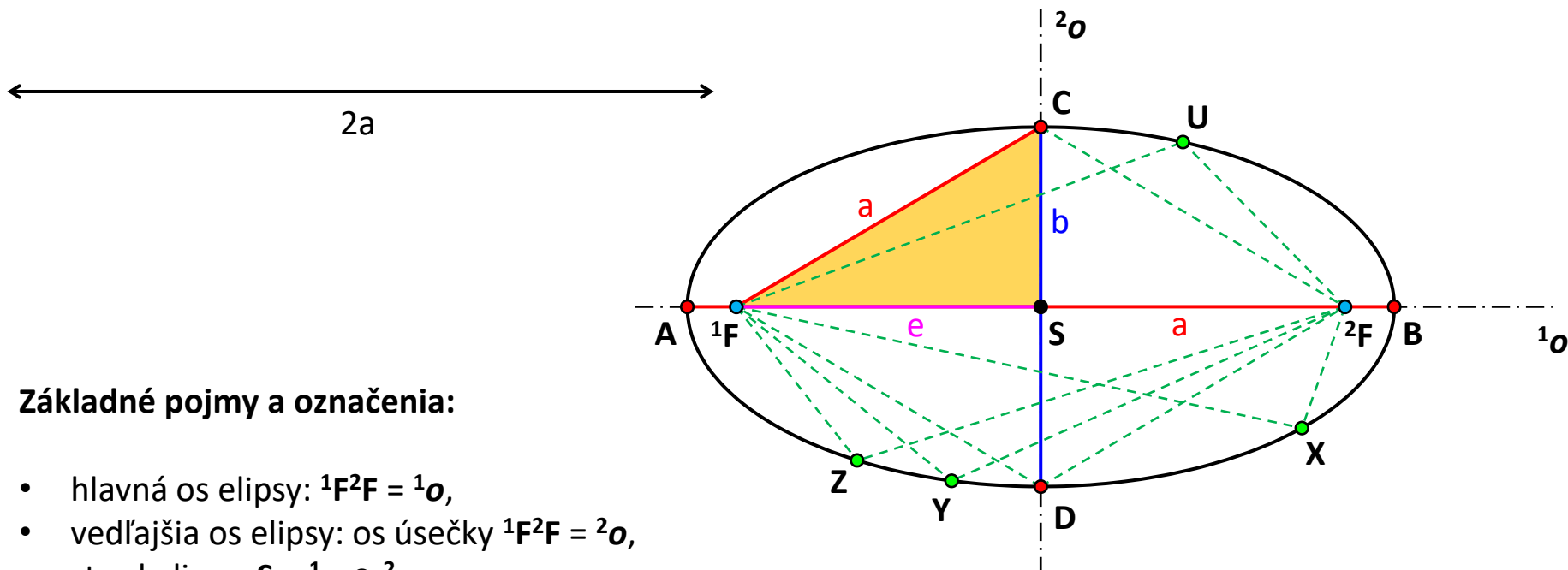
- Dva dané body sa nazývajú **ohniská elipsy** a označíme ich 1F , 2F .
- Súčet vzdialeností označíme $2a$.
- Symbolický zápis: $\text{Elipsa} = \{\forall X \in E^2; |X ^1F| + |X ^2F| = 2a, 2a > |^1F ^2F|\}$



Pre ďalšie spustenie
videa prejdite myšou
na obrázok a kliknite
na prehrávanie

Definícia: Elipsa je množina všetkých bodov v rovine E^2 , ktoré majú od dvoch daných bodov konštantný súčet vzdialeností väčší ako vzdialenosť týchto bodov.

$$\text{Elipsa} = \{\forall X \in E^2; |X {}^1F| + |X {}^2F| = 2a, 2a > |{}^1F {}^2F|\}$$



Základné pojmy a označenia:

- hlavná os elipsy: ${}^1F {}^2F = {}^1o$,
- vedľajšia os elipsy: os úsečky ${}^1F {}^2F = {}^2o$,
- stred elipsy: $S = {}^1o \cap {}^2o$,
- hlavné vrcholy **A, B** elipsy: $A, B \in {}^1o$, $|AS| = |BS| = a$,
- vedľajšie vrcholy **C, D** elipsy: $C, D \in {}^2o$, $|{}^1FC| = |{}^1FD| = a$,
- a – dĺžka hlavnej polosi elipsy, $a = |AS| = |BS|$,
- b – dĺžka vedľajšej polosi elipsy, $b = |CS| = |DS|$,
- e – excentricita elipsy, $e = |{}^1FS| = |{}^2FS|$,
- $\Delta {}^1FSC$ – charakteristický trojuholník elipsy, platí $a^2 = e^2 + b^2$.

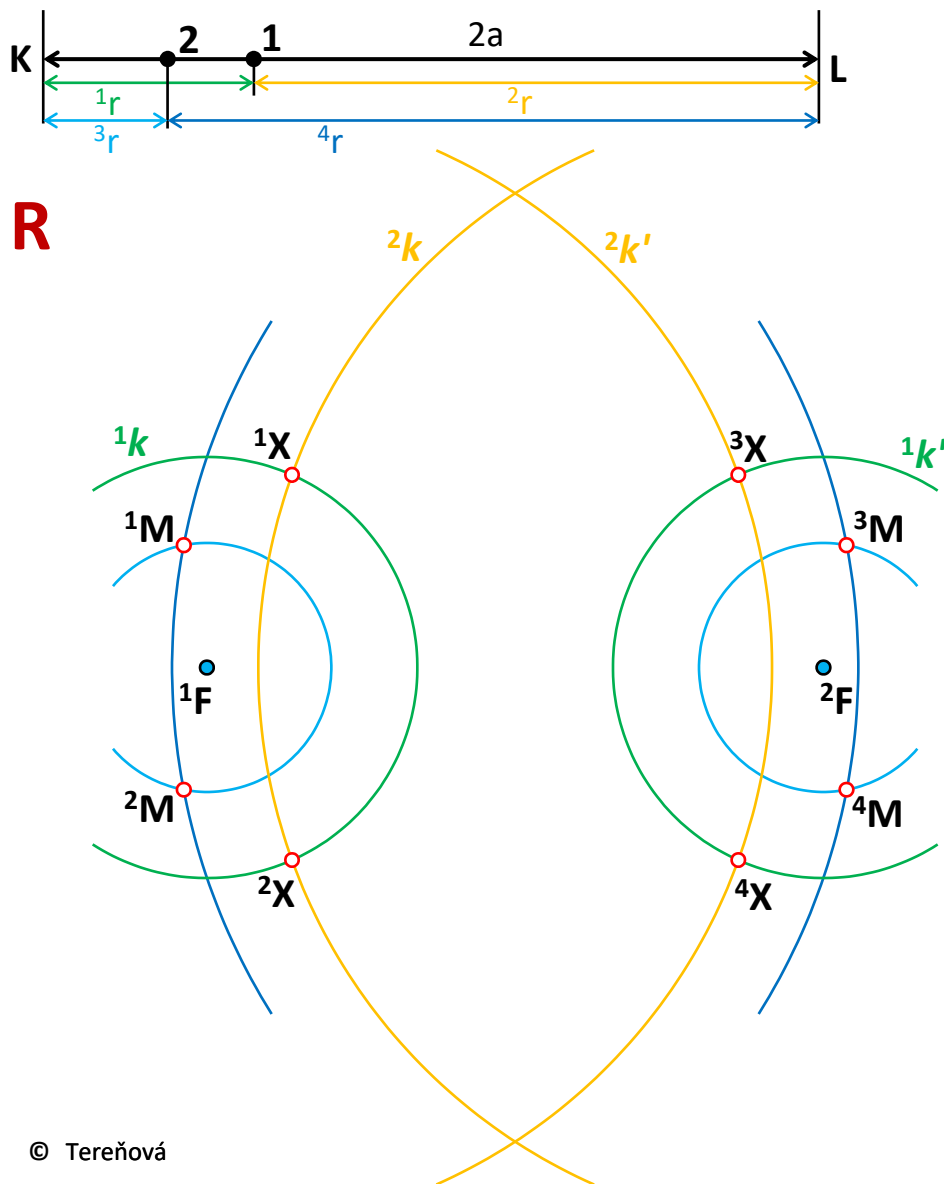
Súmernosť elipsy

Elipsa je súmerná:

- podľa svojej hlavnej osi,
- podľa svojej vedľajšej osi,
- podľa svojho stredu.

Ohnisková konštrukcia bodov elipsy (záhradnícka konštrukcia)

Príklad 2.1: Elipsa je daná ohniskami 1F , 2F a dĺžkou $2a$, $2a > |^1F ^2F|$. Zostrojte body elipsy.



$$|KL| = 2a$$

Postup:

1. Bod 1 ; $1 \in KL$, ľubovoľný bod úsečky KL , pre ktorý platí:
 $|K1| > \frac{1}{2} (2a - |^1F ^2F|)$,
 $|L1| > \frac{1}{2} (2a - |^1F ^2F|)$.
2. Dĺžky 1r , 2r ; $|K1| = ^1r$, $|L1| = ^2r$,
 platí: $^1r + ^2r = 2a$.
3. Kružnica 1k ; $^1k(^1F, ^1r)$.
4. Kružnica 2k ; $^2k(^2F, ^2r)$.
5. Body elipsy: $^1k \cap ^2k = \{^1X, ^2X\}$.

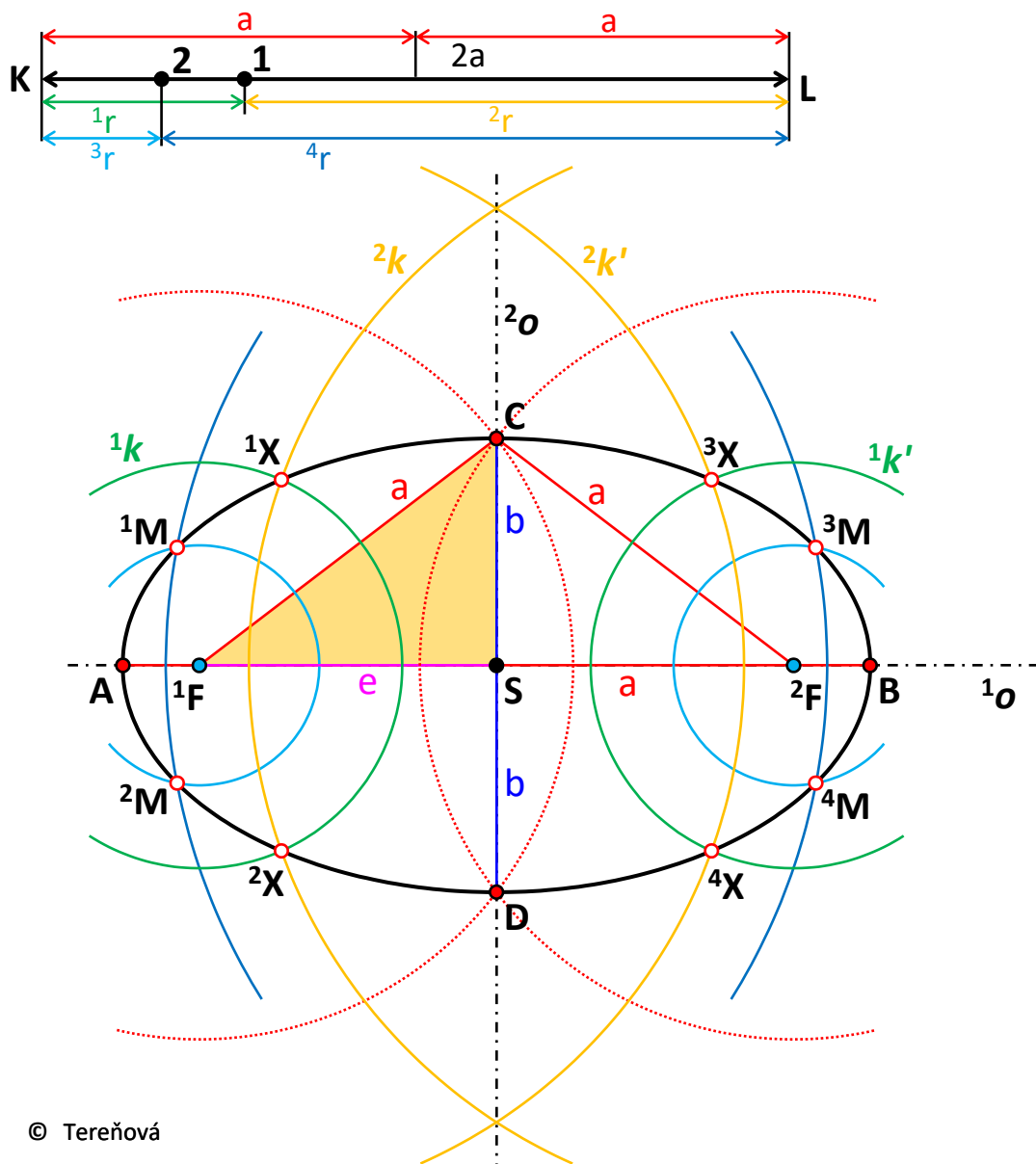
Pomocou dĺžok 1r , 2r môžeme zostrojiť ďalšie dva body elipsy:

5. Kružnica $^1k'$; $^1k'(^1F, ^1r)$.
6. Kružnica $^2k'$; $^2k'(^2F, ^2r)$.
7. Body elipsy: $^1k' \cap ^2k' = \{^3X, ^4X\}$.

Poznámka: Ďalšie body elipsy zostrojíme pomocou ľubovoľného bodu $2 \in KL$. Na obrázku sú zostrojené body 1M , 2M , 3M , 4M elipsy.

Ohnisková konštrukcia bodov elipsy (záhradnícka konštrukcia)

Príklad 2.1: Elipsa je daná ohniskami 1F , 2F a dĺžkou $2a$, $2a > |^1F ^2F|$. Zostrojte body elipsy.



$$|KL| = 2a$$

Zostrojíme osi elipsy a stred elipsy:

1. $^1F^2F = ^1o$ – hlavná os elipsy.
2. Os úsečky $^1F^2F = ^2o$ – vedľajšia os elipsy.
3. $S = ^1o \cap ^2o$ – stred elipsy.

Zostrojíme vrcholy elipsy:

1. Body A, B – hlavné vrcholy elipsy;
 $A, B \in ^1o$, $|AS| = |BS| = a$.
2. Body C, D – vedľajšie vrcholy elipsy;
 $C, D \in ^2o$, $|^1FC| = |^1FD| = a$.

Poznámka: Body A, B, C a D sú body elipsy, lebo spĺňajú definíciu elipsy.

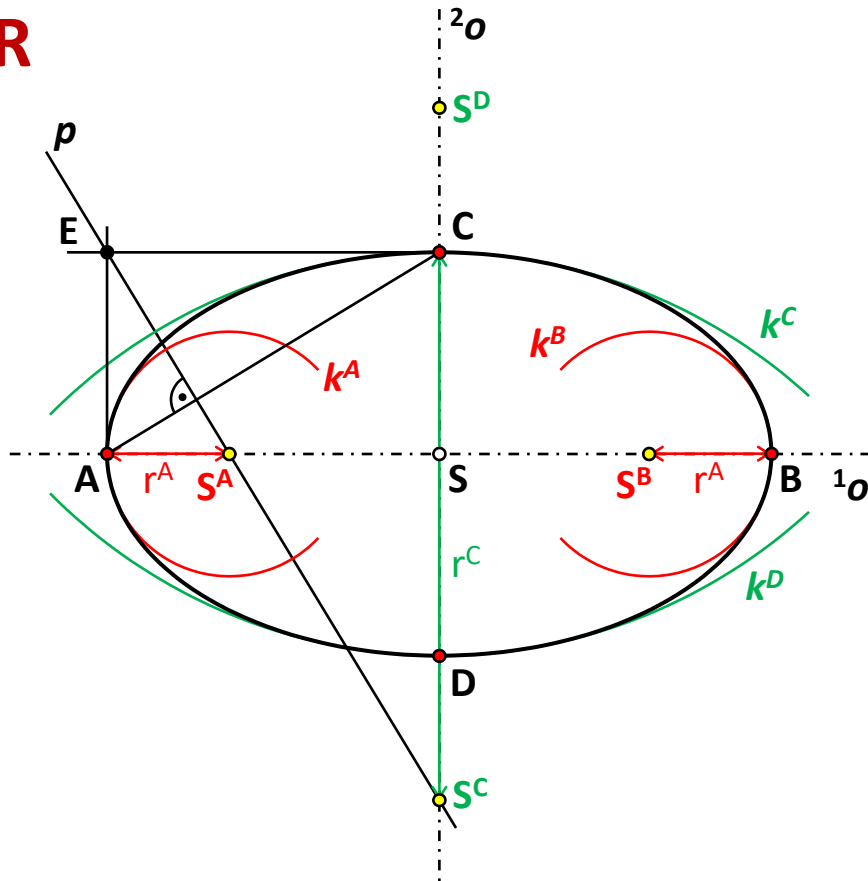
Poznámka: Na iné zobrazenie elipsy môžeme použiť oskulačné kružnice (pozri nasledujúci príklad).

Oskulačná kružnica

Oskulačná kružnica v bode X krivky sa dotýka krivky v tomto bode. Oskulačná kružnica a krivka majú v bode X spoločnú dotyčnicu a rovnakú prvú krivosť.

Príklad 2.2: Dané sú vrcholy A, B, C a D elipsy. Zostrojte oskulačné kružnice vo vrcholoch elipsy.

R



Postup:

1. Bod E ; $ASCE$ je obdĺžnik.
2. Priamka p ; $E \in p, p \perp AC$.
3. Stredy oskulačných kružníc:
 $p \cap 1o = S^A$ – stred oskulačnej kružnice vo vrchole A ,
 $p \cap 2o = S^C$ – stred oskulačnej kružnice vo vrchole C .
4. Oskulačné kružnice:
 $k^A(S^A, r^A = |S^AA|)$ – oskulačná kružnica vo vrchole A ,
 $k^C(S^C, r^C = |S^CC|)$ – oskulačná kružnica vo vrchole C .
5. Oskulačné kružnice vo vrcholoch B a D zostrojíme využitím súmernosti elipsy podľa jej stredu S .

Poznámka: Elipsa sa dotýka oskulačných kružníc k^A, k^B zvonku a oskulačných kružníc k^C, k^D zvnútra.

Poznámka: Priamku p , ktorá je potrebná na konštrukciu stredov oskulačných kružníc, môžeme zostrojiť aj inak, pozri nasledujúcu stranu.

02-2. časť Mongeova projekcia

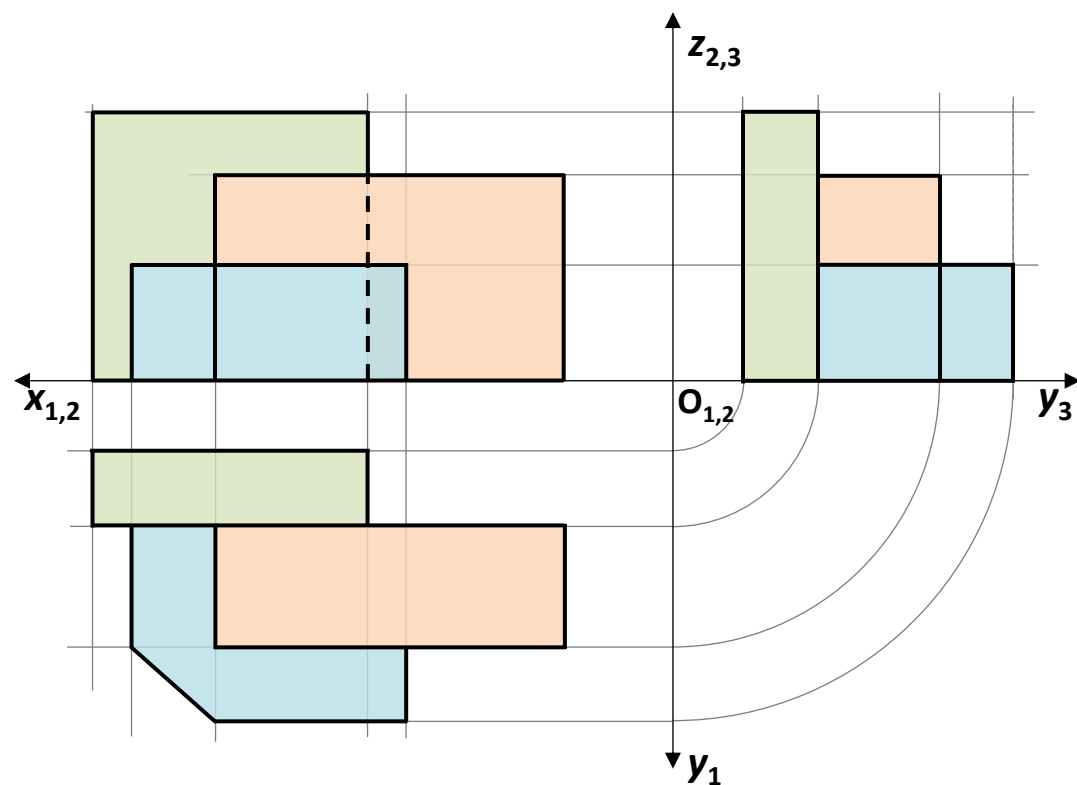
Mgr. Juliana Beganová, PhD.

STU
SvF

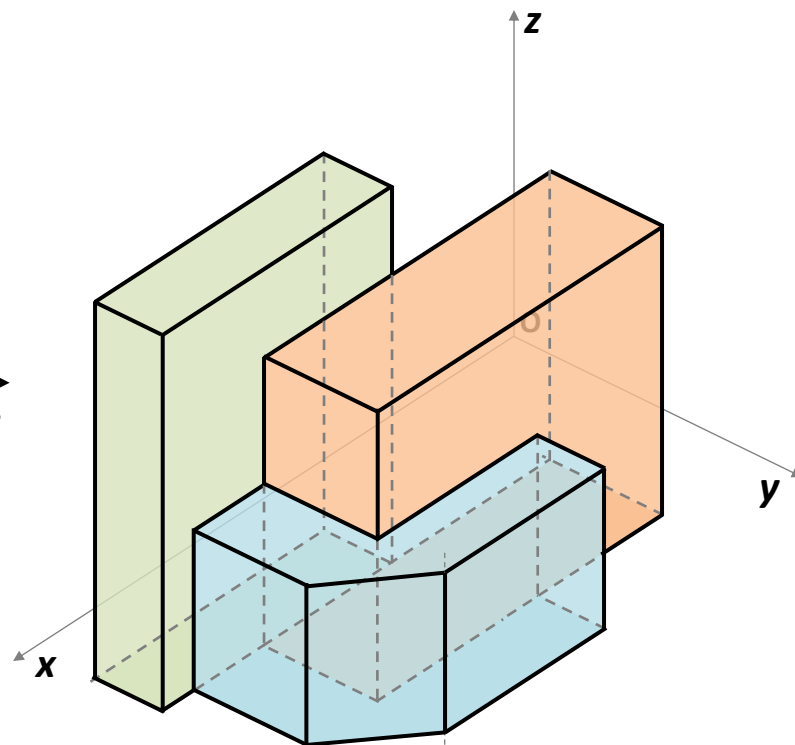
Deskriptívna geometria pre stavebné odbory 17

Obráz telies v Mongeovej projekcii

(pôdorys, nárys, bokorys telies v združenej polohe)



Obráz telies v axonometrii

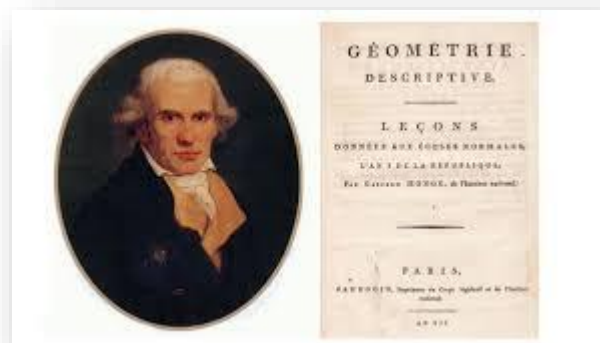




Gaspard Monge

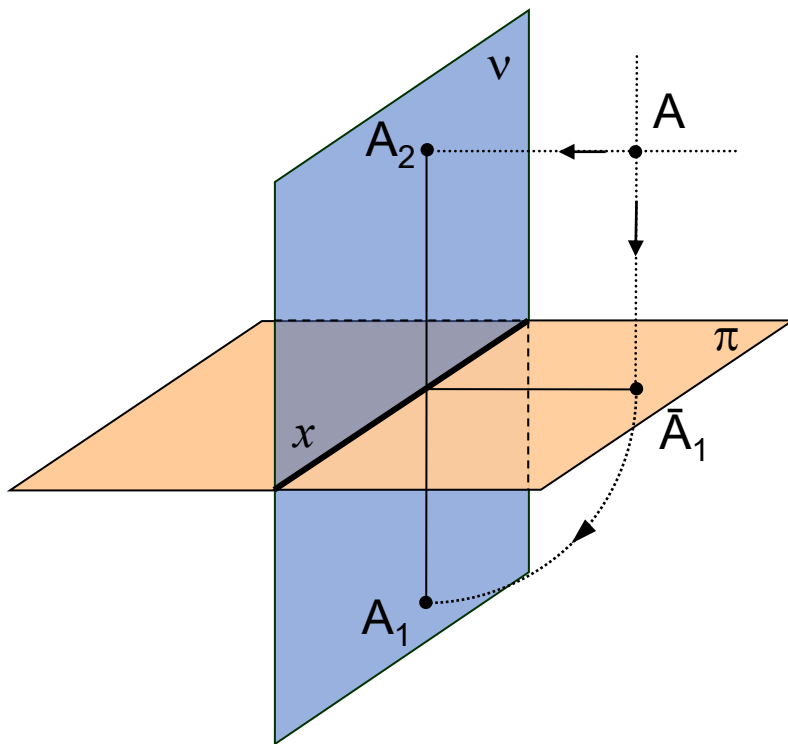
(* 10. Máj 1746 ,† 28. Júl 1818)

- zakladateľ deskriptívnej geometrie
- francúzsky architekt, matematik a fyzik
- počas Francúzskej revolúcie pôsobil aj ako politik, od roku 1792 bol ministrom námorníctva, jeho meno sa nachádza medzi 72 menami vedcov na Eiffelovej veži.
- zjednotil v minulosti používané a na skúsenostiach založené spôsoby zobrazovania a založil novú premietaciu metódu, tzv. **Mongeovo premietanie**.
- túto metódu, ktorá využíva dve (3) kolmé premietania na dve (3) navzájom kolmé priemetne, popísal v diele ***Géometrie descriptive*** (1799).



PRINCÍP ZOBRAZENIA

Preložíme dve na seba kolmé priemetne. Budeme ich označovať π – **pôdorysňa** a v – **nárysňa**, $\pi \perp v$. Ich priesečnicu označíme $\pi \cap v = x$ – **základnica**.



V priestore zvolíme bod A .

Použijeme kolmé premietanie na pôdorysňu π a nájdeme **pôdorys** bodu A , označíme ho $\bar{A}_1$.

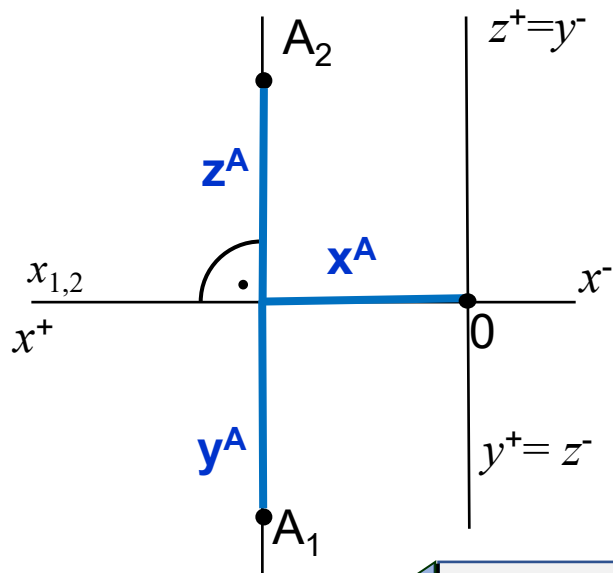
Použijeme kolmé premietanie na nárysňu v a nájdeme **nárys** bodu A , označíme ho A_2 .

Združíme priemetne - pôdorysňu π otočíme do nárysne v okolo ich priesečnice (osi x) a obe roviny umiestnime do nákresne. Nákresňou bude nárysňa.

$\bar{A}_1 \rightarrow A_1$ – pôdorys bodu A budeme v nákresni značiť A_1

Spojnicu A_1A_2 budeme nazývať **ordinála** bodu A .

V NÁKRESNI



Definícia: Mongeova projekcia je kolmé premietanie $E_3 \rightarrow \{\pi, v\}$, ktoré každému bodu $A \in E_3$ jednoznačne priradí usporiadanú dvojicu združených priemetov $[A_1, A_2]$, tak, že $A_1A_2 \perp x$.

SÚRADNICE BODU

Zvolíme bod 0 na osi x , 0 bude počiatok súradnicovej sústavy. V bode 0 zvolíme tretiu priemetňu μ kolmú na π a v . Doplníme osi y a z .

$x = \pi \cap v$, $y = \pi \cap \mu$, $z = v \cap \mu$ – *súradnicové osi*

Doplníme tretí priemet bodu A. Označíme ho A_3 – **bokorys**, vznikol súradnicový kváder bodu A, ktorého hrany sú rovnobežné so súradnicovými osami, rozmery sú x^A, y^A, z^A – súradnice bodu A.

V nákresni zobrazíme súradnice. Zvolíme počiatok súradnicovej sústavy 0, zobrazíme osi y a z kolmo na os x v bode 0.

Dvojica združených priemetov $A_1(x, y)$ a $A_2(x, z)$ ktoré ležia na kolmici na os x , určuje práve jeden bod A trojrozmerného priestoru E_3 .

Kolmé premietanie do pôdorysne, do nárysne a do bokorysne

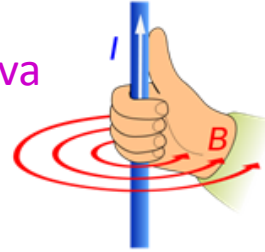
kolmý priemet
do pôdorysne

Súradnicové osi: $x, y, z, x \perp y \perp z$

$O = x \cap y \cap z$

Súradnicové roviny: $\pi, \nu, \mu, \pi \perp \nu \perp \mu \perp \pi$

Pravotočivá súradnicová sústava
(pravidlo pravej ruky)



$\pi = (x, y)$ - pôdorysňa

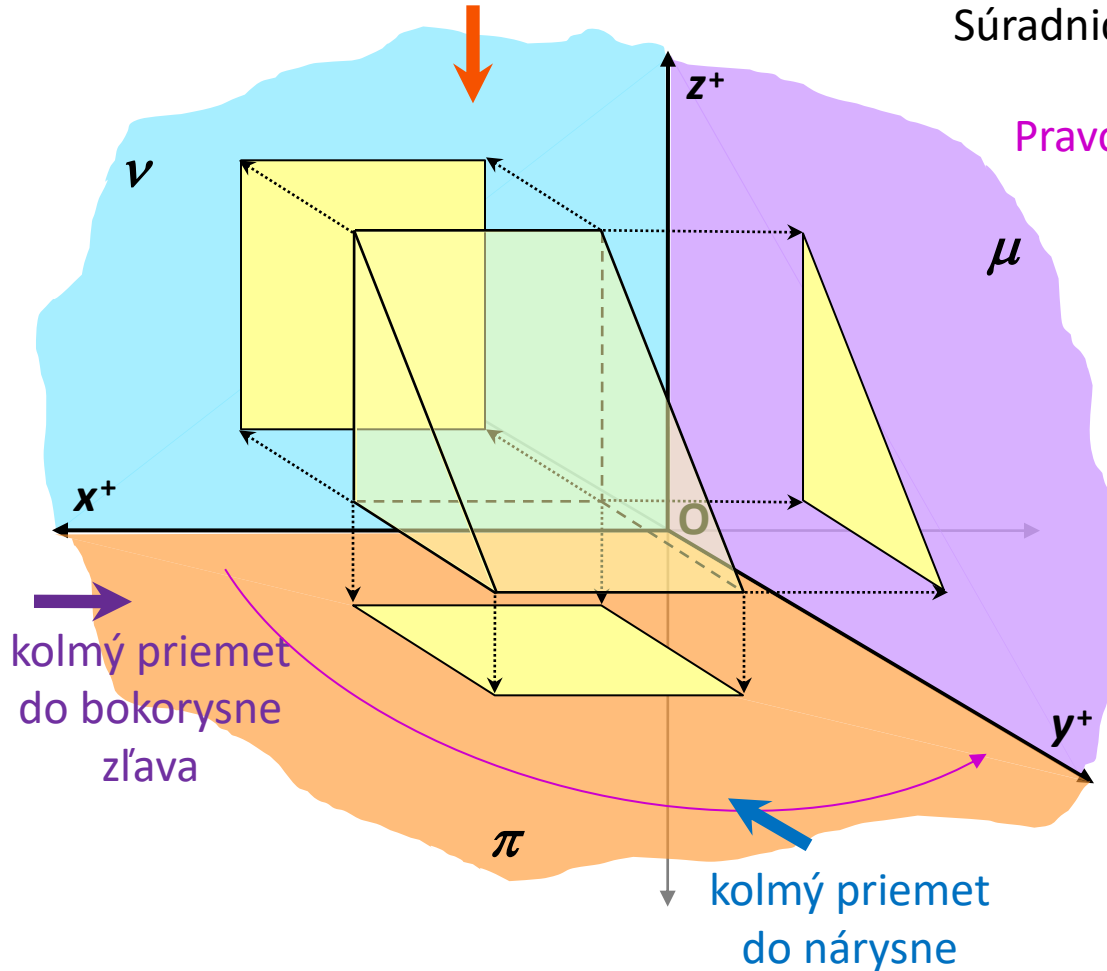
$\nu = (x, z)$ - nárysňa

$\mu = (y, z)$ - bokorysňa

Znamienko „+“ označuje časti súradnicových osí x, y, z s kladnými súradnicami.

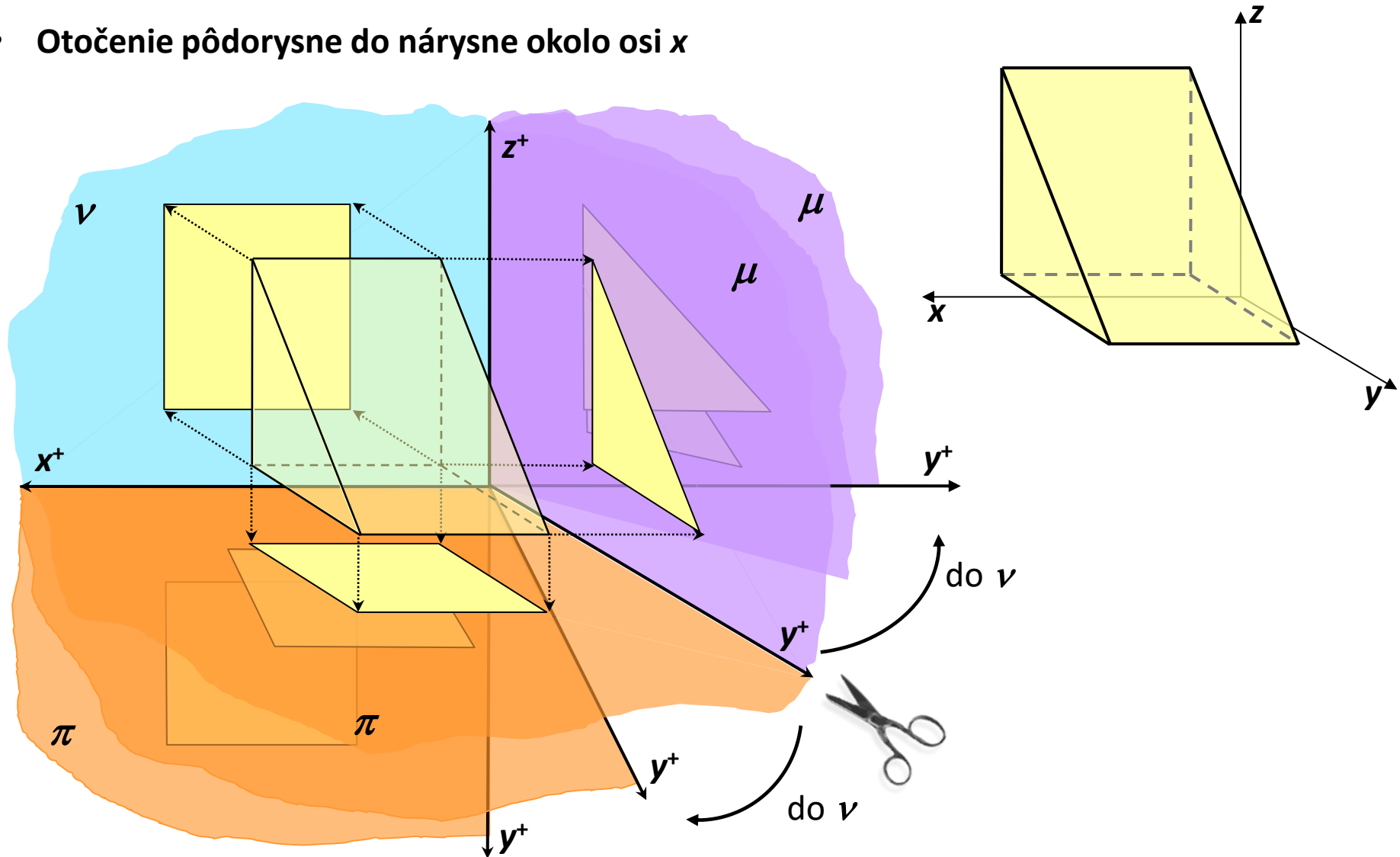
3-boký hranol v časti priestoru s kladnými súradnicami.

Podľa potreby môžeme použiť viac priemetov, napr. pohľad sprava, zdola, zozadu...



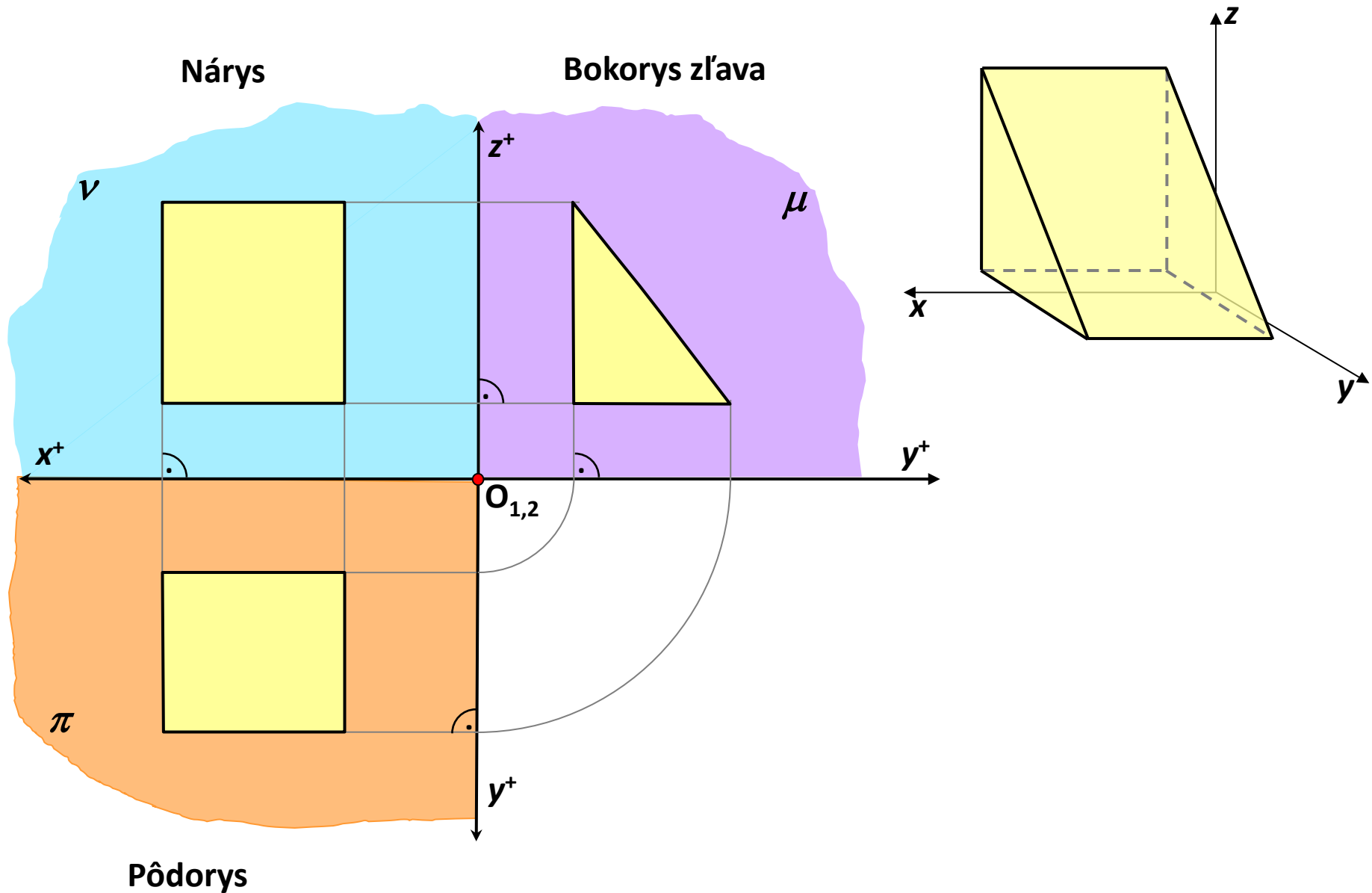
Združenie priemetní (spôsob ako dostaneme priemety do jednej roviny – **nákresne**)

- Otočenie bokorysne do nárysne okolo osi z
- Otočenie pôdorysne do nárysne okolo osi x



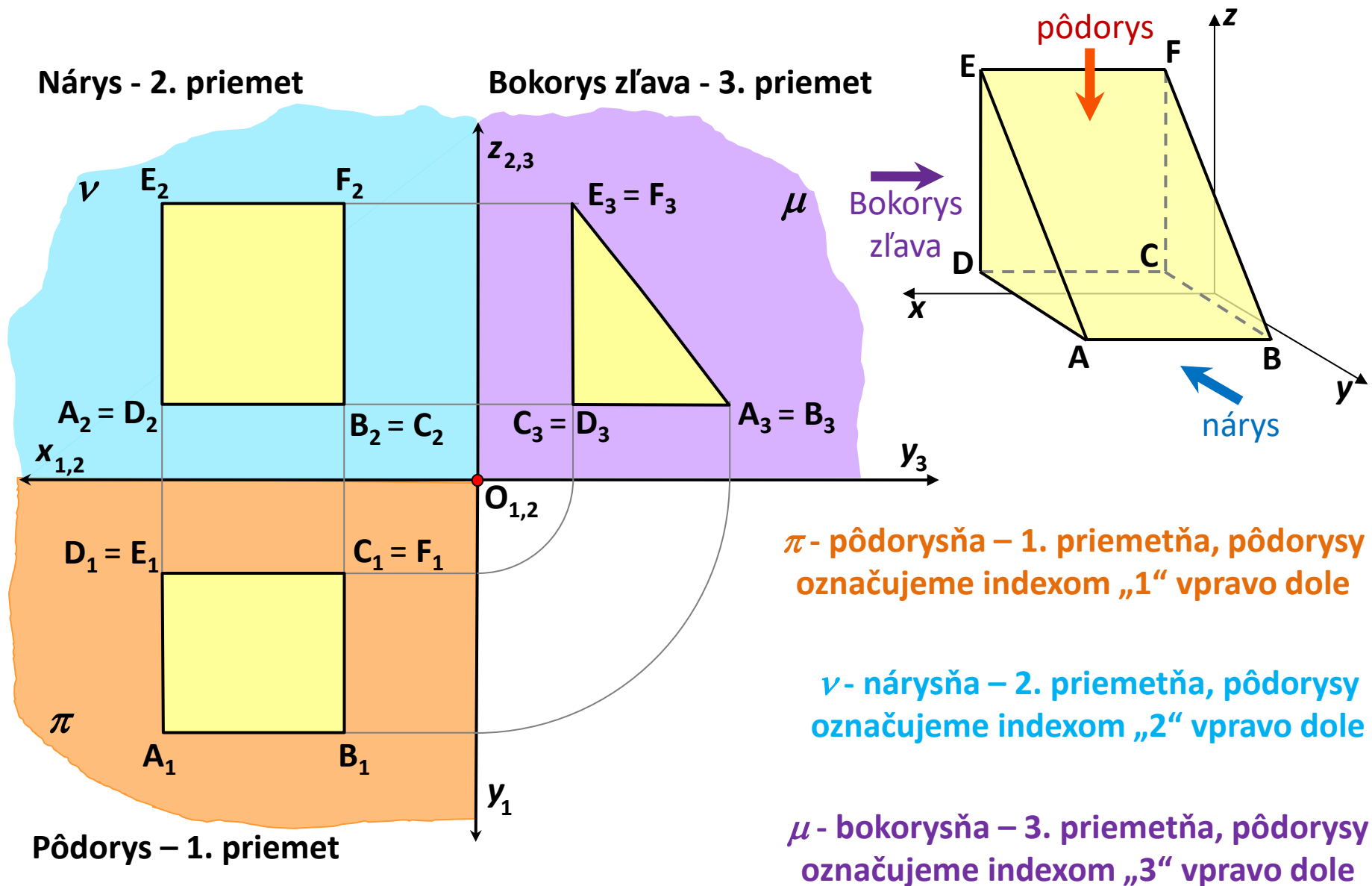
Združené priemety telesa

pôdorys, nárys, bokorys zľava v združenej polohe



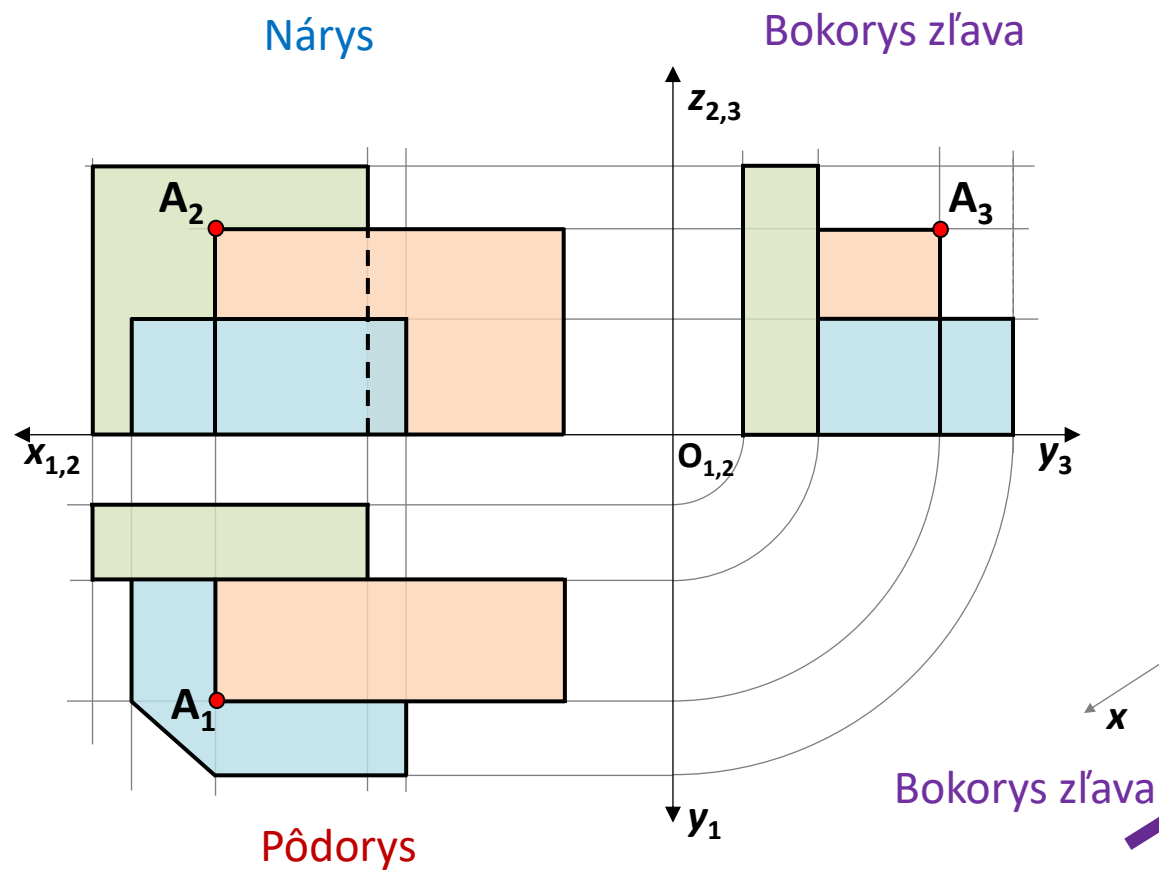
Označenia

každý priemet musí mať označenie „1“ alebo „2“ alebo „3“.

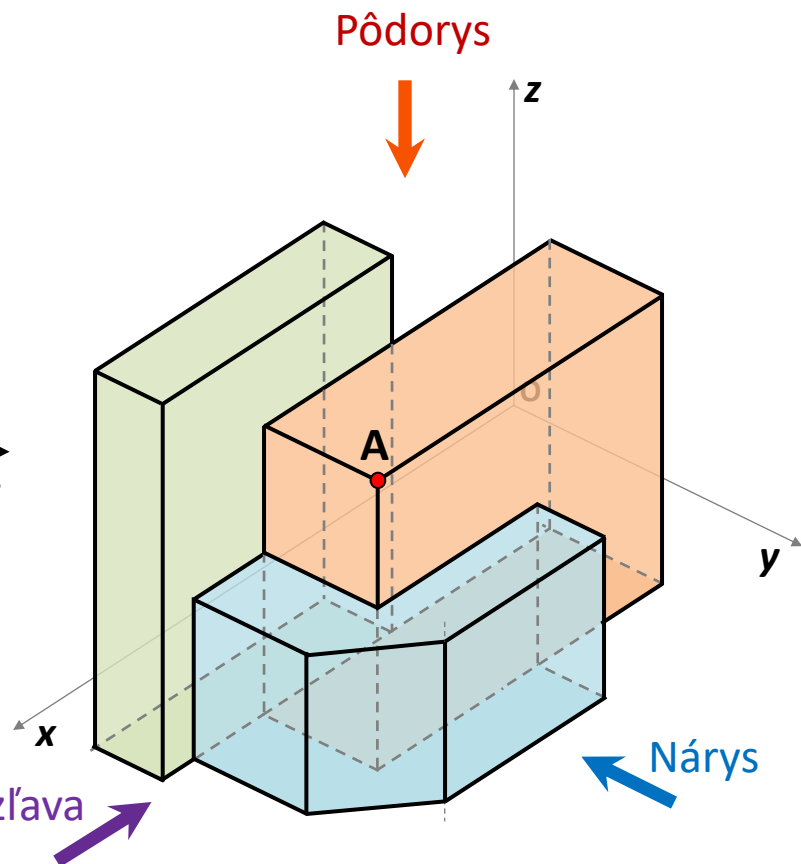


Obráz telies v Mongeovej projekcii

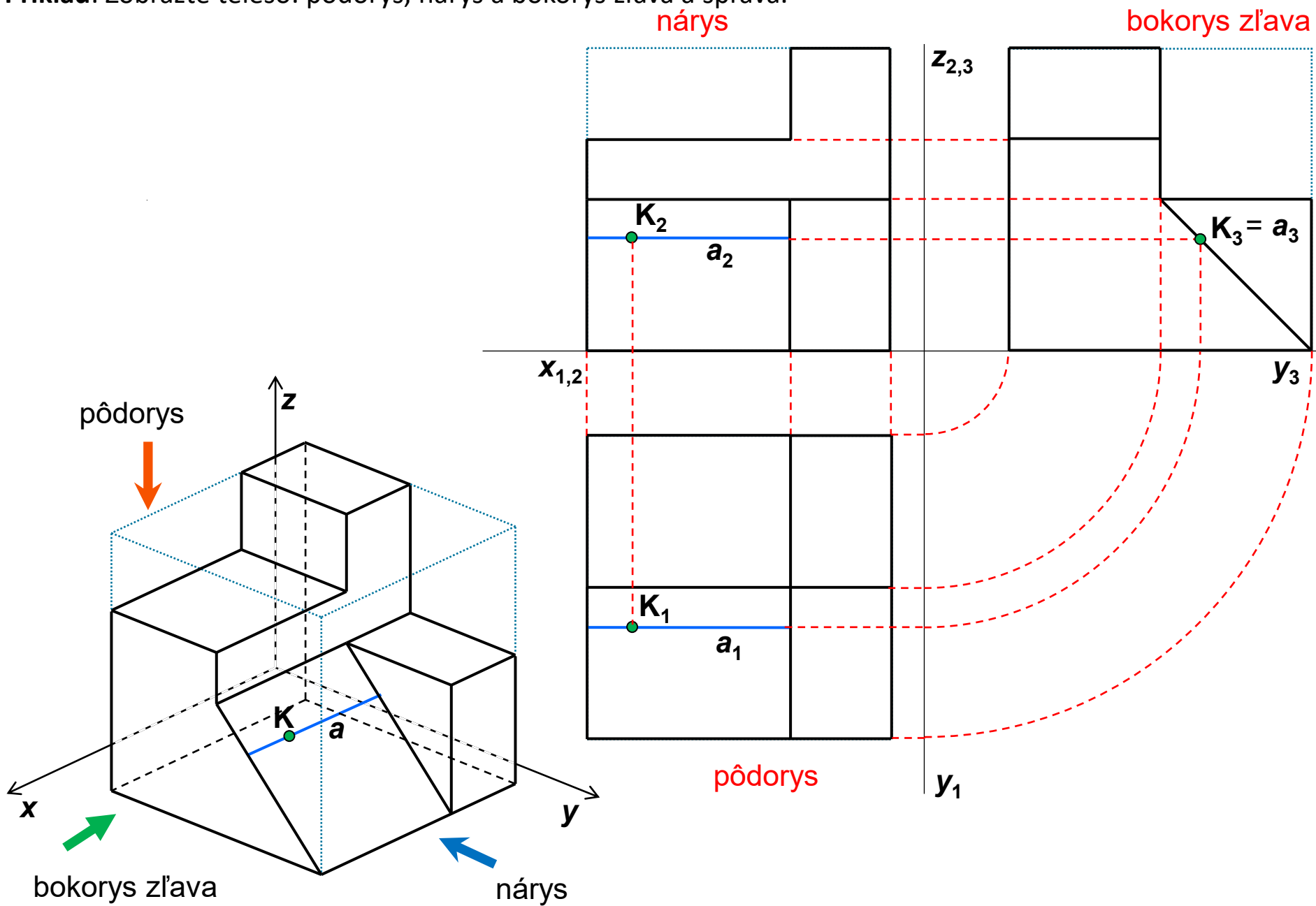
(pôdorys, nárys, bokorys telies v združenej polohe)



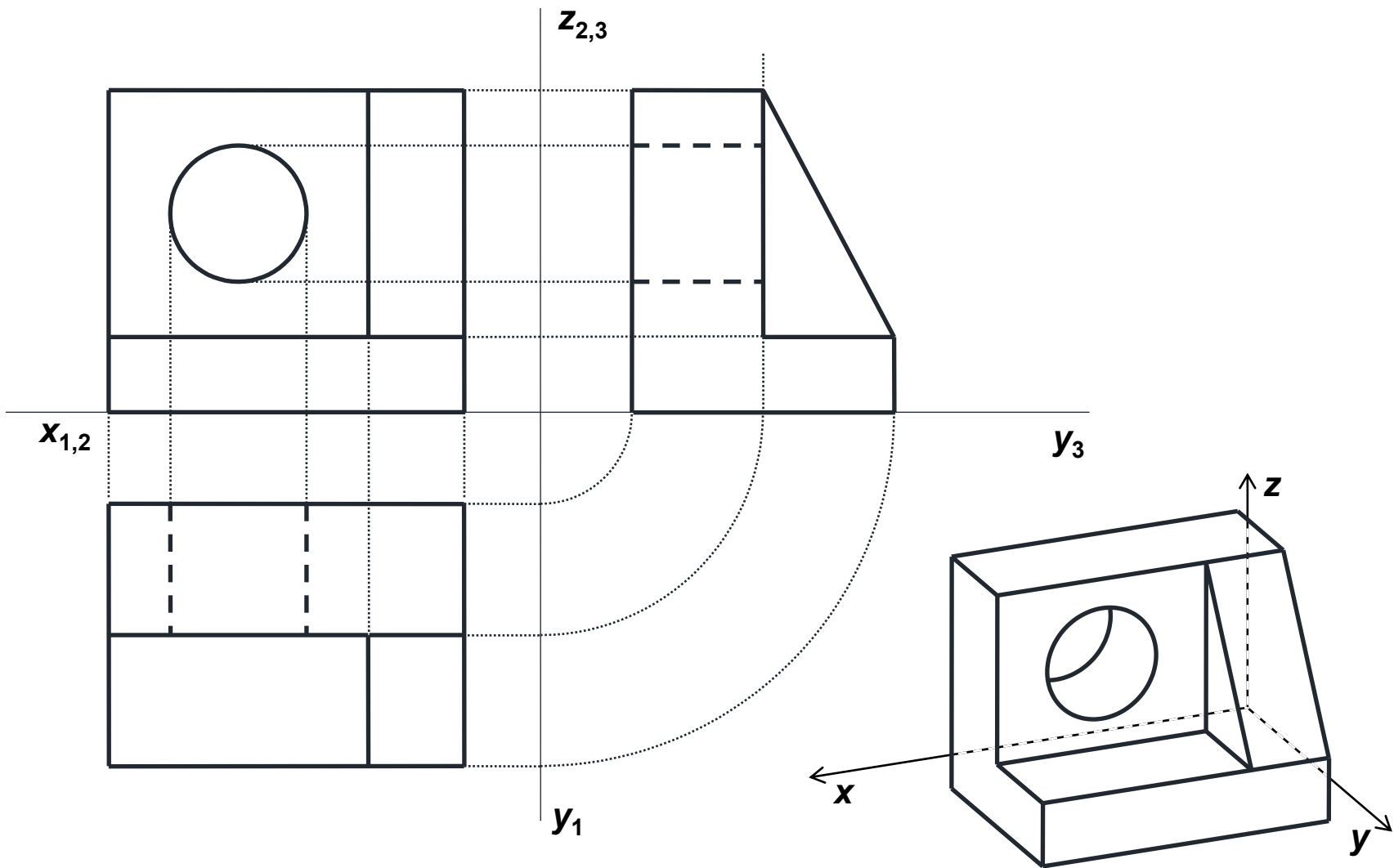
Obráz telies v axonometrii



Príklad: Zobrazte teleso: pôdorys, nárys a bokorys zľava a sprava.

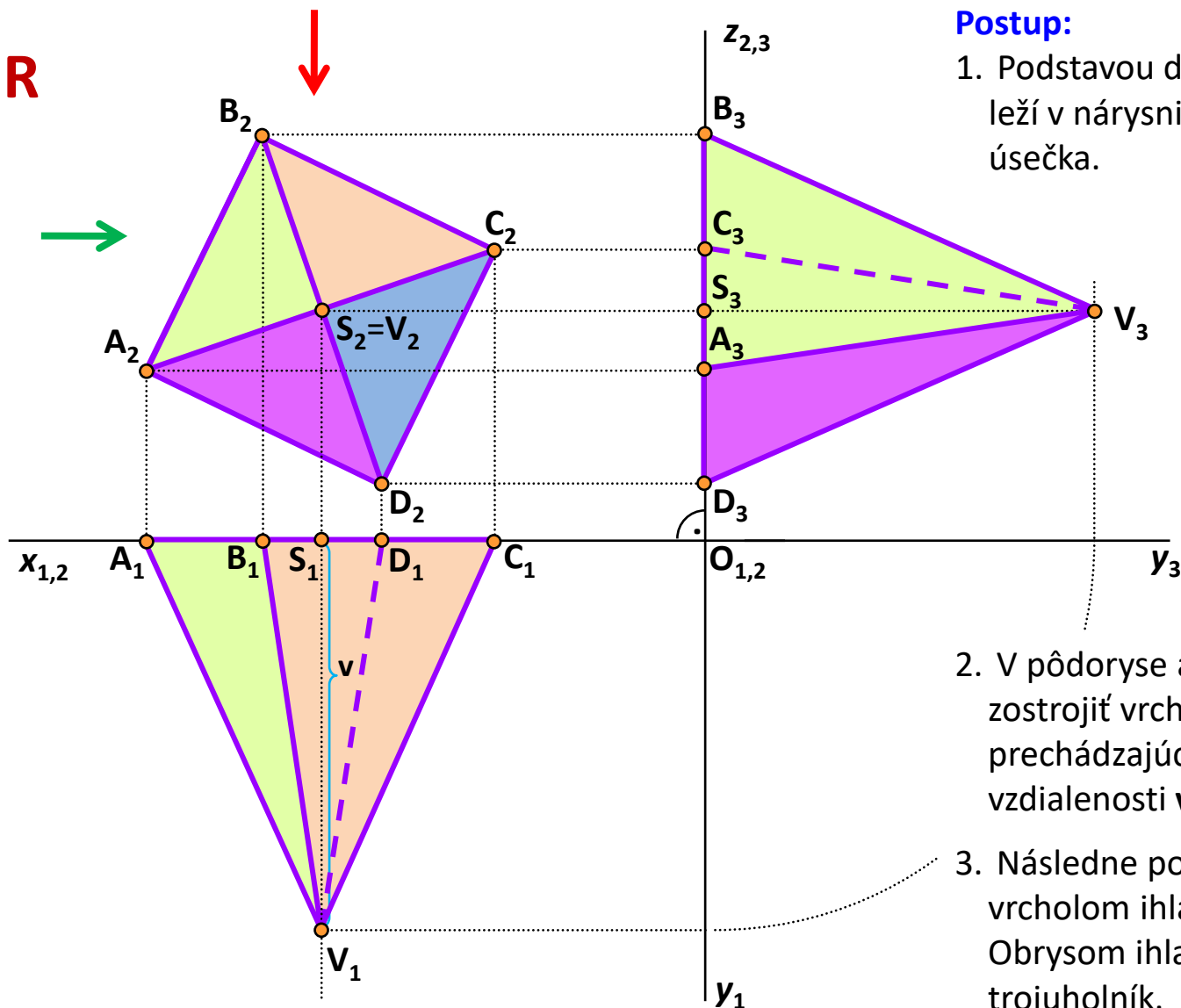


Príklad: Zobrazte teleso: pôdorys, nárys a bokorys zľava a sprava.



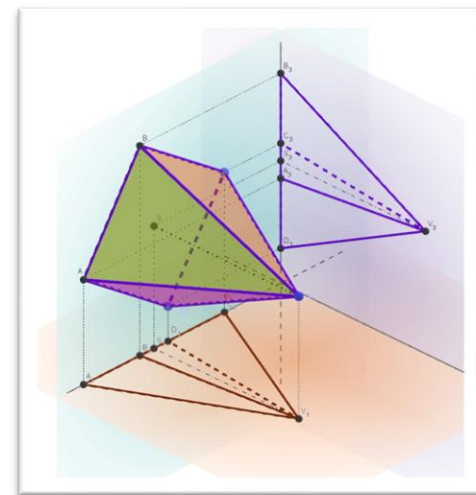
Príklad 10.2: Zostrojte pôdorys, nárys a bokorys zľava pravidelného 4-bokého ihlana **ABCDV**, ktorého podstava **ABCD** leží v nárysi. Daná je strana **AB**(**A₂**,**B₂**) podstavy a výška **v** = 5 cm.

R



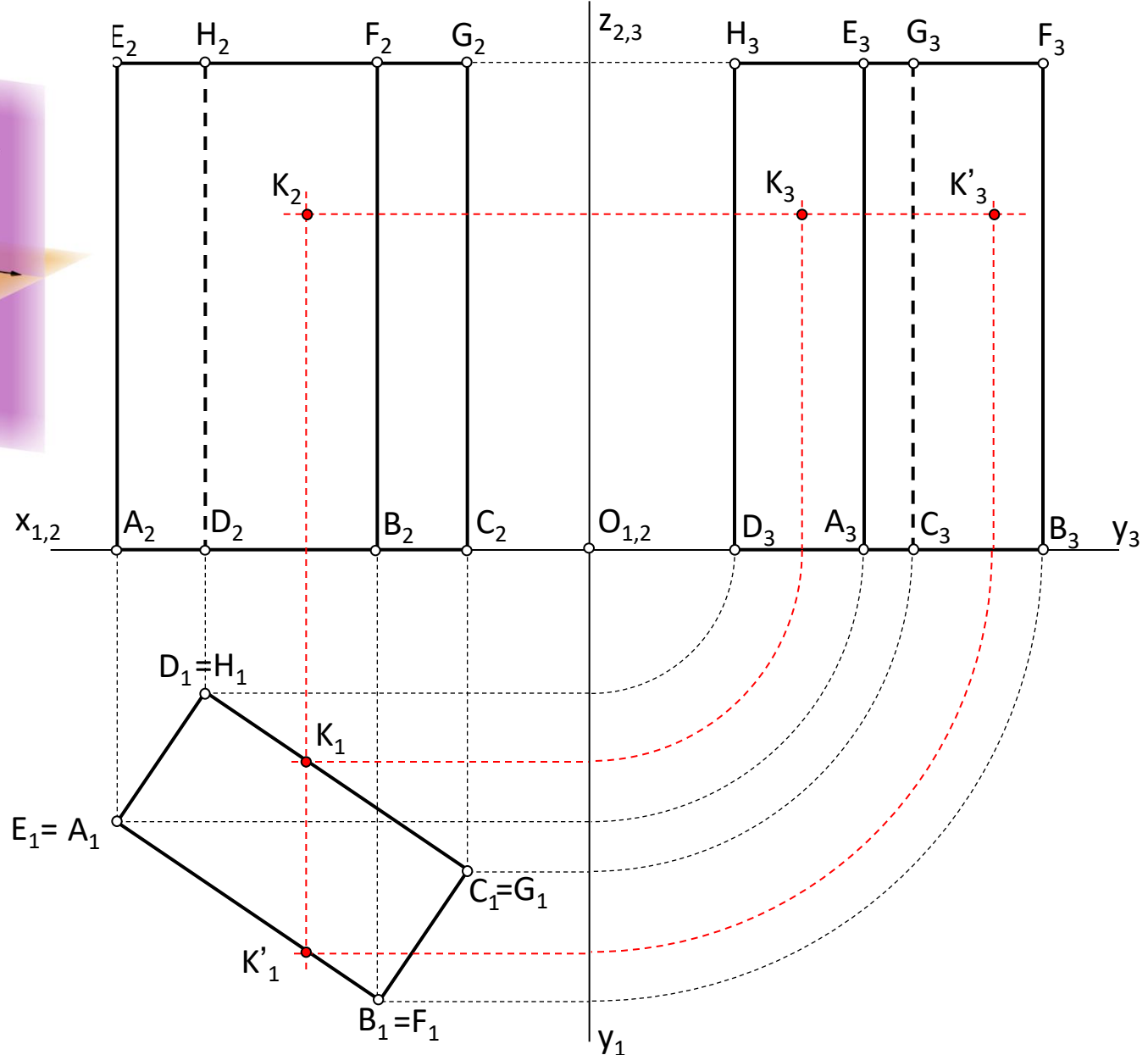
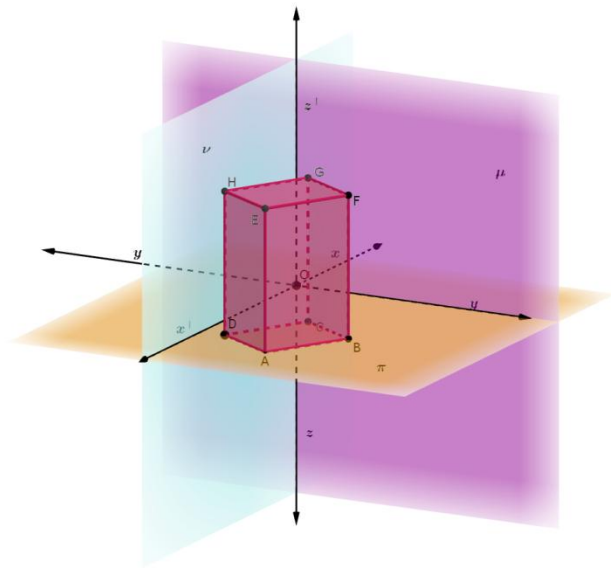
Postup:

1. Podstavou daného ihlana je štvorec, ktorý leží v nárysi. Jeho pôdorys a bokorys je úsečka.
2. V pôdoryse alebo bokoryse môžeme zostrojiť vrchol **V** ihlana na kolmici prechádzajúcej stredom štvorca **S**, v danej vzdialenosti **v** = 5 cm od stredu štvorca.
3. Následne pospájame vrcholy podstavy s vrcholom ihlana a zohľadníme viditeľnosť. Obrysom ihlana v pôdoryse a bokoryse je trojuholník.



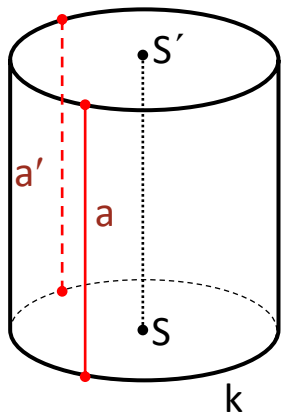
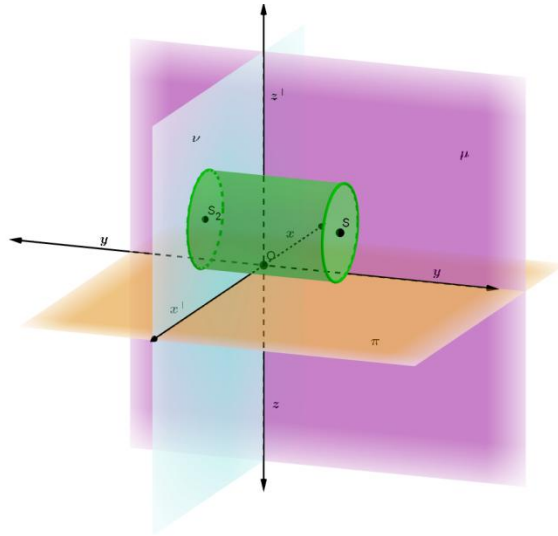
Jednoduché tělesa s podstavou v priemetni v Mongeovej projekcii

Príklad. Zobrazte kváder ABCDEFGH s obdĺžnikovou podstavou ABCD v pôdorysni a výškou v (zvoľte podľa obrázku). Daný je nárys bodu K, ktorý leží na plášti telesa. Zostrojte pôdorys a bokorys bodu K (všetky riešenia).

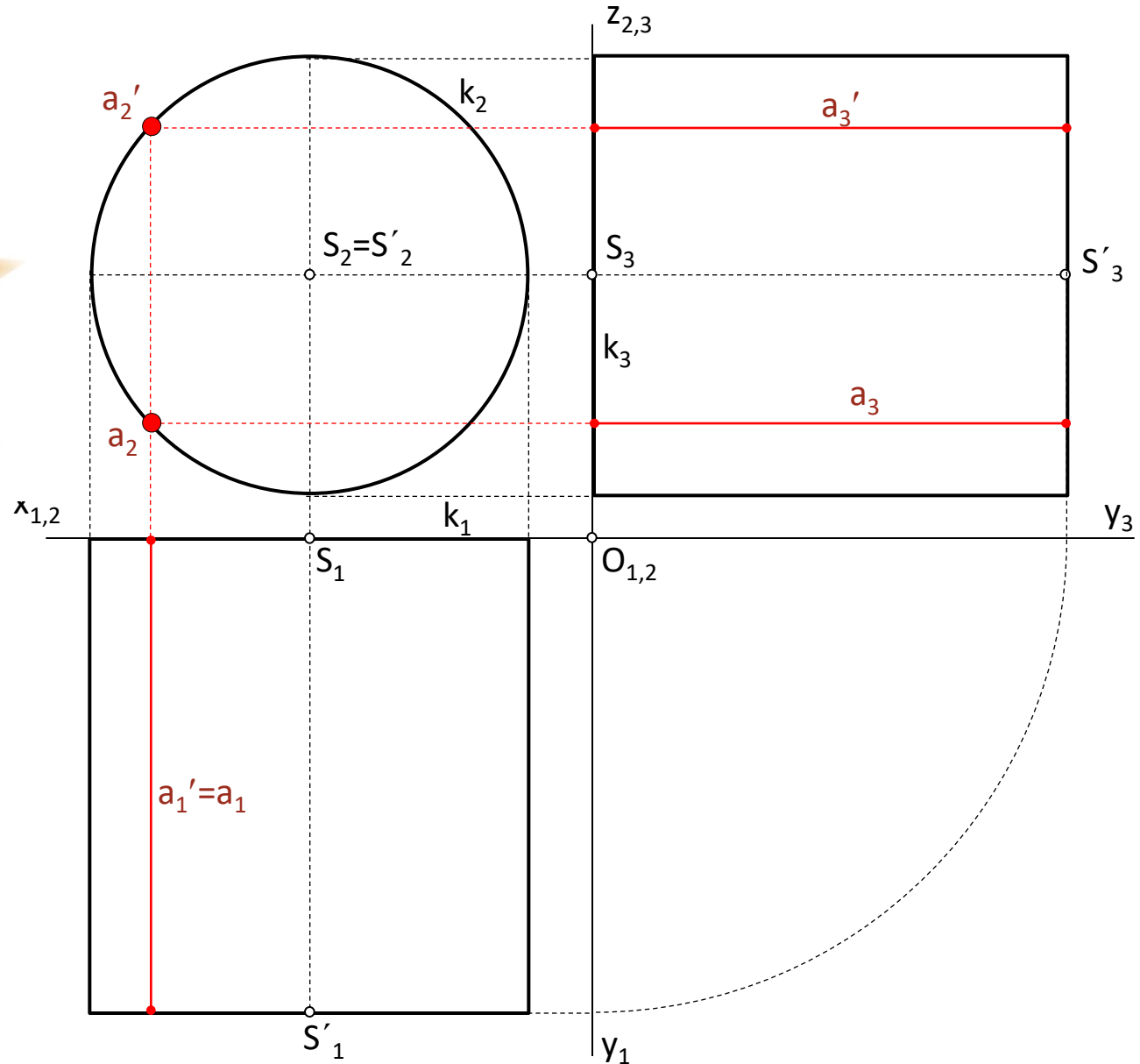


Jednoduché tělesa s podstavou v priemetni v Mongeovej projekcii

Príklad. Zobrazte rotačný valec s podstavou v nárysní (zvoľte podľa obrázku) a výškou v . Daný je pôdorys a_1 tvoriacej priamky plochy. Zostrojte nárys a bokorys priamky a (všetky riešenia).

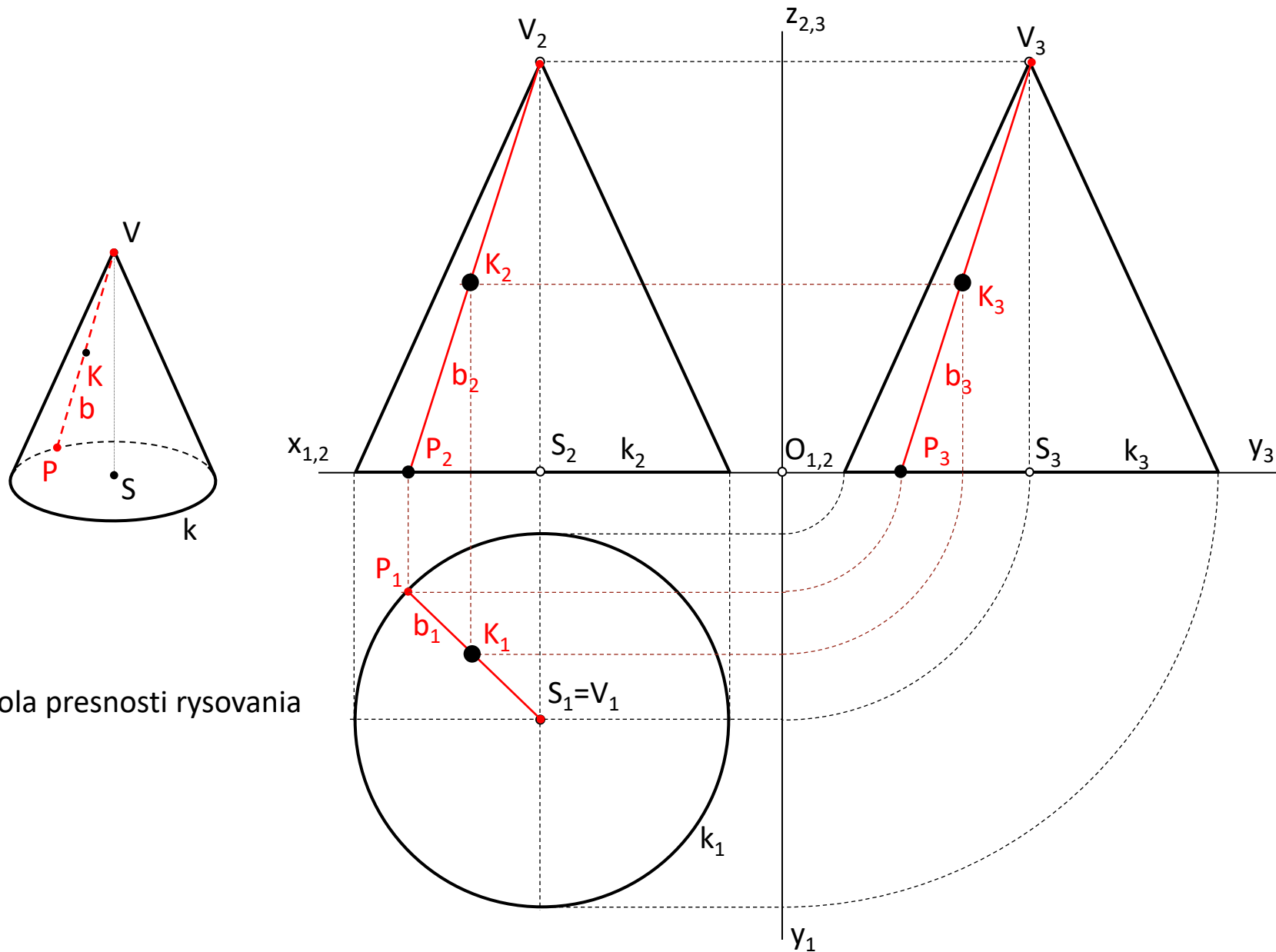


Valášková



Jednoduché tělesa s podstavou v priemetni v Mongeovej projekcii

Príklad. Zobrazte rotačný kužeľ s podstavou v pôdosni (zvoľte podľa obrázku) a výškou v . Daný je pôdorys bodu K , ktorý leží na plášti telesa. Zostrojte nárys a bokorys bodu K (všetky riešenia).



Kontrola presnosti rysovania