

KURZ DESKRIPTÍVNEJ GEOMETRIE

1 Rovnobežné premietanie

Mgr. Juliana Beganová, PhD.

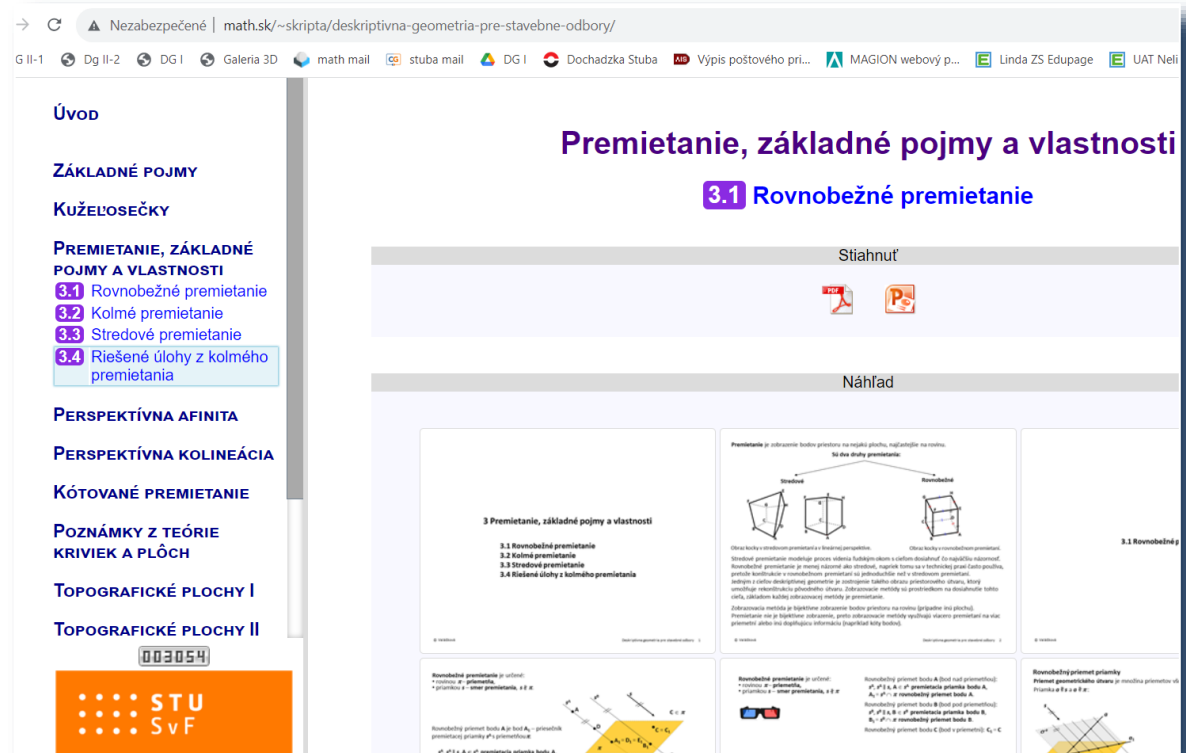
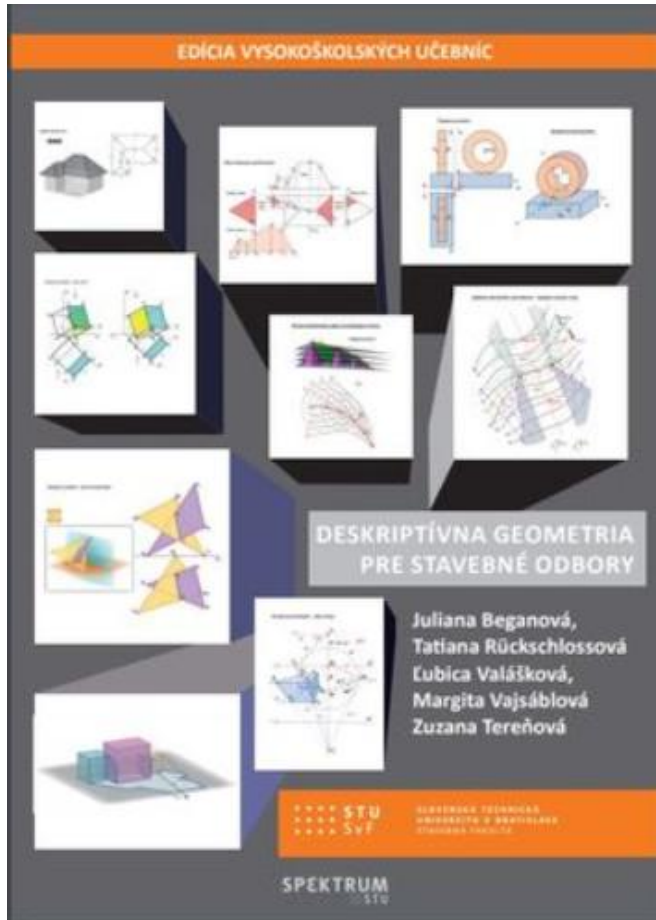
Na všetky lekcie kurzu budete potrebovať:

- *zošit alebo papiere A4 „čisté“*
- ***2 ceruzky: tvrdú** (ozn. H, 2H, ...) na konštrukcie a **mäkkú** (ozn. B, 2B, ...) na vytiahnutie výsledku,*
- *farebné ceruzky, gumu*
- *kružidlo*
- *dve pravítka, aspoň jedno s ryskou*

Študijné materiály

E- skriptá dostupné online: <http://math.sk/~skripta/deskriptivna-geometria-pre-stavebne-odbory/>
https://www.svf.stuba.sk/sk/dokumenty/edicna-cinnost/skripta.html?page_id=1801

- PowerPoint prezentácie
- Pdf súbory



Všetky základné pojmy, definície, postupy a konštrukcie sú uvedené tiež v skriptách: VALÁŠKOVÁ, Ľ. – TEREŇOVÁ, Z. – VAJSÁBLOVÁ, M. – MÉSZÁROSOVÁ, K.: *Úvod do predmetu deskriptívna geometria*.

Dostupné zadarmo na <https://www.math.sk/wiki/DeskriptivnaGeometria>

Úvod

- P** Predhovor
- S** Na stiahnutie
- T** Tiráž

OZNAČENIA A SYMBOLY

1 ZÁKLADNÉ POJMY

2 KUŽELOSEČKY

3 **PREMIETANIE, ZÁKLADNÉ
POJMY A VLASTNOSTI**

4 PERSPEKTÍVNA AFINITA

5 PERSPEKTÍVNA
KOLINEÁCIA

6 KÓTOVANÉ PREMIETANIE

7 POZNÁMKY Z TEÓRIE
KRIVIEK A PLÔCH

8 TOPOGRAFICKÉ PLOCHY I

9 TOPOGRAFICKÉ PLOCHY
II

CuterCounter.com



Juliana Beganová, Tatiana Rückschlossová, Ľubica Valášková, Margita Vajsáblová, Zuzana Tereňová

DESKRIPTÍVNA GEOMETRIA PRE STAVEBNÉ ODBORY

Vydala Slovenská technická univerzita v Bratislave v roku 2022.

1. lekcia

Všetky práva vyhradené. Žiadna časť textu nesmie byť použitá na ďalšie šírenie akoukoľvek formou bez predchádzajúceho súhlasu autorov alebo nakladateľstva.

© Mgr. Juliana Beganová, PhD., Mgr. Tatiana Rückschlossová, PhD., RNDr. Ľubica Valášková, PhD., doc. RNDr. Margita Vajsáblová, PhD., RNDr. Zuzana Tereňová, PhD.

Recenzenti: doc. RNDr. Daniela Velichová, CSc.
doc. RNDr. Mária Kmeťová, PhD.
RNDr. Tatiana Hýrošová, PhD.

Návrh webovej stránky: © Mgr. Roman Rückschloss

Schválila Edičná rada SvF STU. ISBN 978-80-227-5256-5

Geometria je všade okolo nás



Budova Národnej banky Slovenska, Bratislava



Budova Slovenského rozhlasu, Bratislava



Námestie slobody, Bratislava



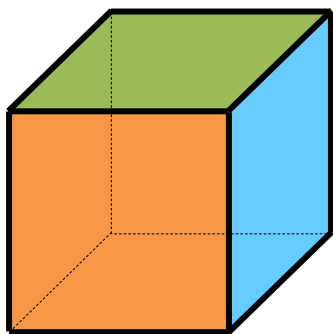
Aula maxima Strojníckej fakulty STU
Fotografia z budovy Stavebnej fakulty.
Strecha auly má tvar hyperbolického paraboloidu.

Premietanie a zobrazovacia metóda

Jedným z cieľov DG je zobrazenie rovinných a priestorových útvarov na rovinu alebo na inú plochu pomocou rôznych **zobrazovacích metód**.

Základnou vlastnosťou každej zobrazovacej metódy DG je **jednoznačný vzťah medzi zobrazovaným útvarom a jeho obrazom**.

3D útvar v priestore

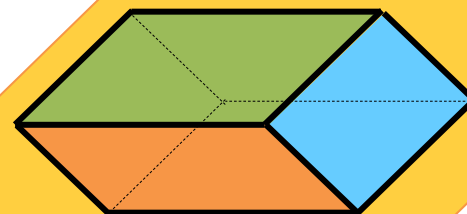


Premietanie

Transformácia 3D do 2D

?

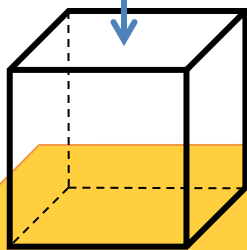
Priemetňa môže byť zošit, tabuľa, obrazovka monitora,...



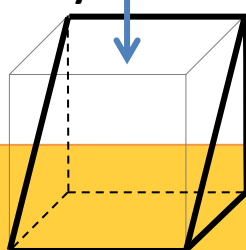
Priemetňa, nákresňa

Aký útvar je kolmým priemetom týchto troch telies do roviny dolnej podstavy?

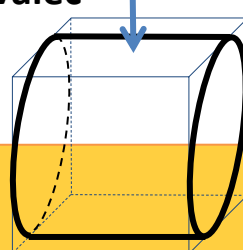
Kocka



3-boký hranol



Valec



Premietanie

štvorec



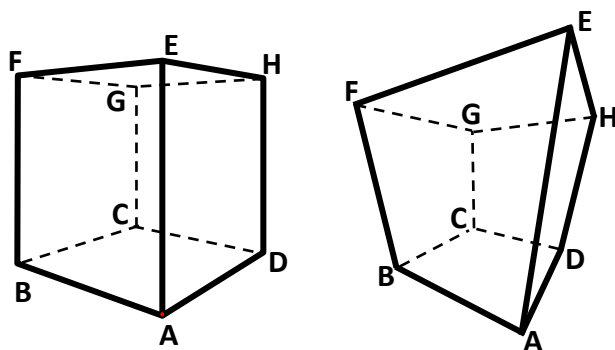
➡ **Premietanie nie je** jedno-jednoznačné (**bijektívne**) zobrazenie, preto **zobrazovacie metódy** používajú viacero premietaní na rôzne priemetne alebo inú doplňujúcu informáciu (napríklad kóty).

Premietanie

Premietanie je zobrazenie bodov priestoru na nejakú plochu, najčastejšie na rovinu.

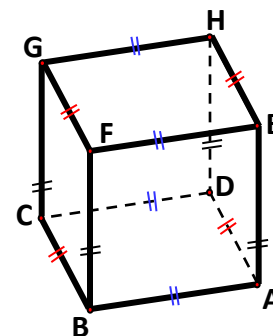
Sú dva druhy premietania:

Stredové



Obráz kocky v lineárnej perspektíve a v stredovom premietaní.

Rovnobežné



Obráz kocky v rovnobežnom premietaní.

Stredové premietanie modeluje proces videnia ľudským okom s cieľom dosiahnuť čo najväčšiu názornosť.

Rovnobežné premietanie je menej názorné ako stredové, napriek tomu sa v technickej praxi často používa. Konštrukcie v rovnobežnom premietaní sú jednoduchšie než v stredovom premietaní.

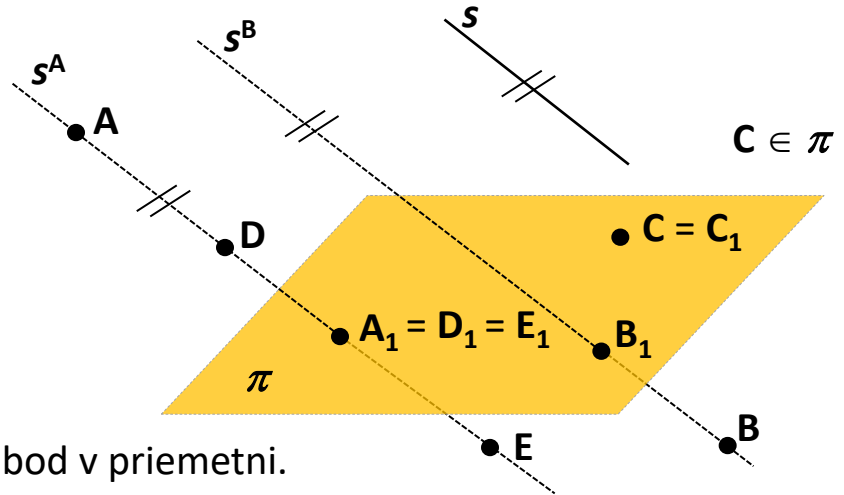
Rovnobežné premietanie

Rovnobežné premietanie je určené:

- rovinou π – priemetňa,
- priamkou s – smer premietania, $s \nparallel \pi$.

$s^A, s^A \parallel s, A \in s^A$ premietacia priamka bodu A ,

$A_1 = s^A \cap \pi$ rovnobežný priemet bodu A .



Rovnobežný priemet každého bodu priestoru je bod v priemetni.

Definícia: Rovnobežné premietanie (určené rovinou π a priamkou $s, s \nparallel \pi$) je zobrazenie všetkých bodov euklidovského priestoru E^3 do priemetne π , ktoré každému bodu $X \in E^3$ priradí bod $X_1 \in \pi$, tak že $XX_1 \parallel s$.

Rovnobežné premietanie nie je bijektívne zobrazenie. ($D \neq E$, ale $D_1 \neq E_1$)

Rovnobežné premietanie môže byť: **kolmé**, ak $s \perp \pi$,

šikmé, ak $s \nperp \pi$.

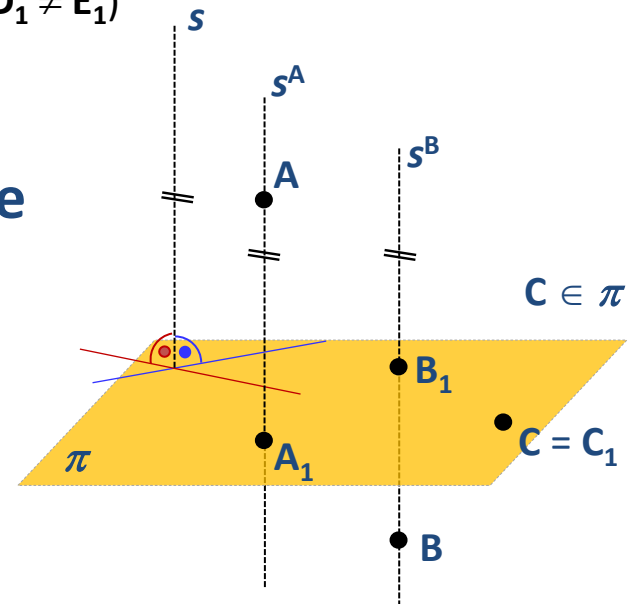
Kolmé premietanie

Kolmé premietanie je určené priemetňou π .

Pre smer premietania platí: $s \perp \pi$.

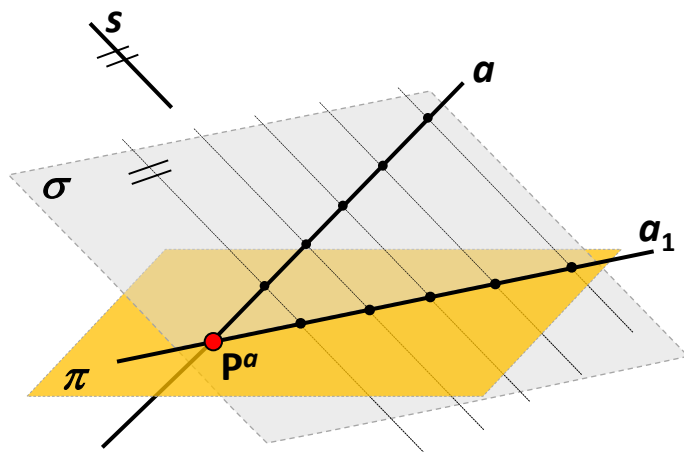
s^A premietacia priamka bodu A ,

A_1 – kolmý priemet bodu A .



Ravnobežný priemet priamky

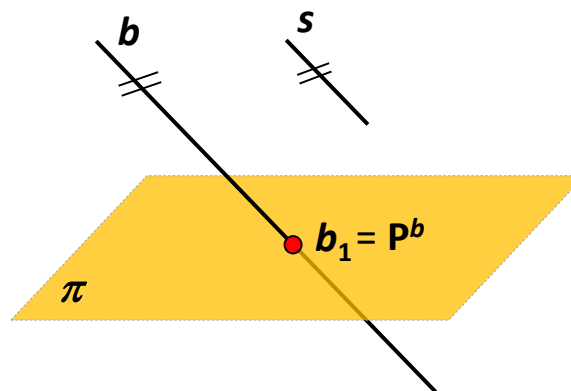
Priamka $a \nparallel s$:



σ premietacia rovina priamky a

$a_1 = \sigma \cap \pi$ ravnobežný priemet priamky a

Priamka $b \parallel s$:



$b_1 = b \cap \pi$ ravnobežný priemet priamky b

Ravnobežný priemet priamky je:

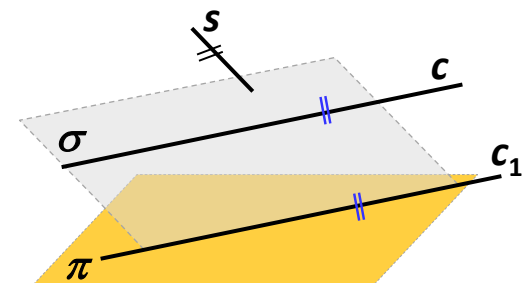
- priamka, ak priamka nie je ravnobežná so smerom premietania,
- bod, ak priamka je ravnobežná so smerom premietania.

Definícia: Priesečník priamky s priemetňou sa nazýva **stopník priamky**.

$P^a = a \cap \pi$ stopník priamky a

$P^b = b \cap \pi$ stopník priamky b

Priamka $c \parallel \pi$



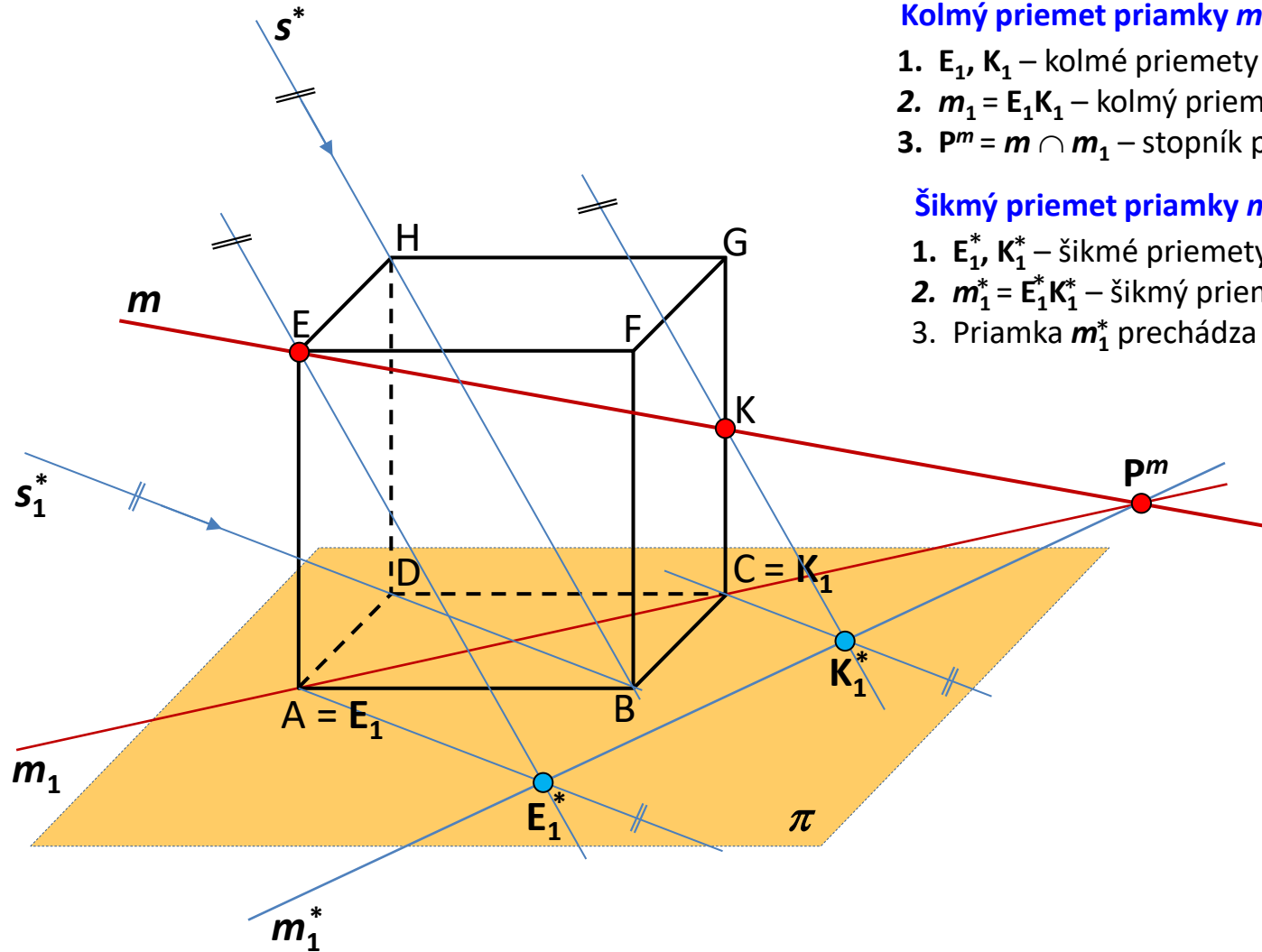
Priamka ravnobežná s priemetňou stopník nemá.

Príklad. Dolná podstava kocky leží v priemetni π . Bod K je stred strany CG .

a) Zobrazte kolmý priemet priamky $m = EK$ a zostrojte jej stopník.

b) Zobrazte rovnobežný priemet priamky $m = EK$ v smere $s^* = HB$.

R



Kolmý priemet priamky m :

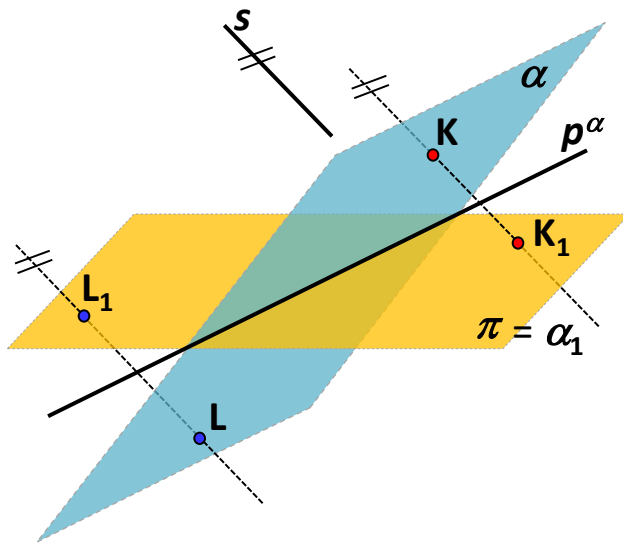
1. E_1, K_1 – kolmé priemety bodov E, K
2. $m_1 = E_1K_1$ – kolmý priemet priamky m
3. $P^m = m \cap m_1$ – stopník priamky m

Šikmý priemet priamky m :

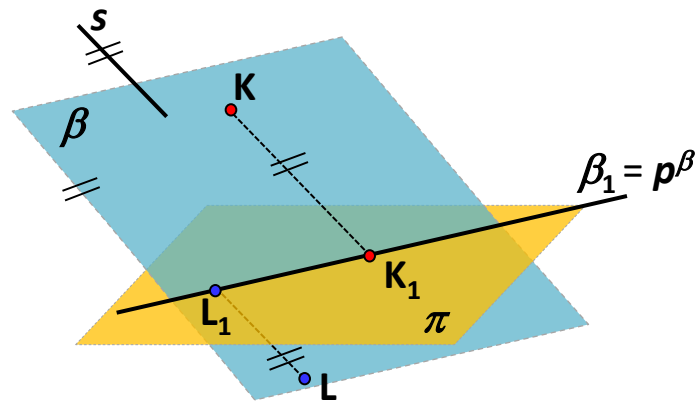
1. E_1^*, K_1^* – šikmé priemety bodov E, K
2. $m_1^* = E_1^*K_1^*$ – šikmý priemet priamky m
3. Priamka m_1^* prechádza bodom P^m

Rovnobežný priemet roviny

Rovina $\alpha \nparallel s$:



Rovina $\beta \parallel s$:



Rovnobežný priemet roviny je:

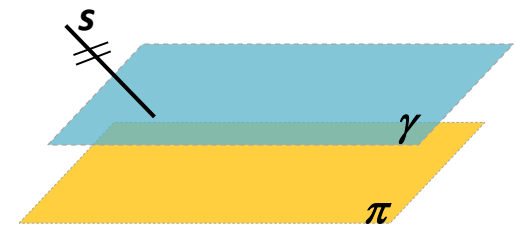
- celá priemetňa, ak rovina nie je rovnobežná so smerom premietania,
- priamka, ak rovina je rovnobežná so smerom premietania.

Definícia: Priesečnica roviny s priemetňou sa nazýva **stopa roviny**.

$p^\alpha = \alpha \cap \pi$ stopa roviny α

$p^\beta = \beta \cap \pi$ stopa roviny β

Rovina $\gamma \parallel \pi$:



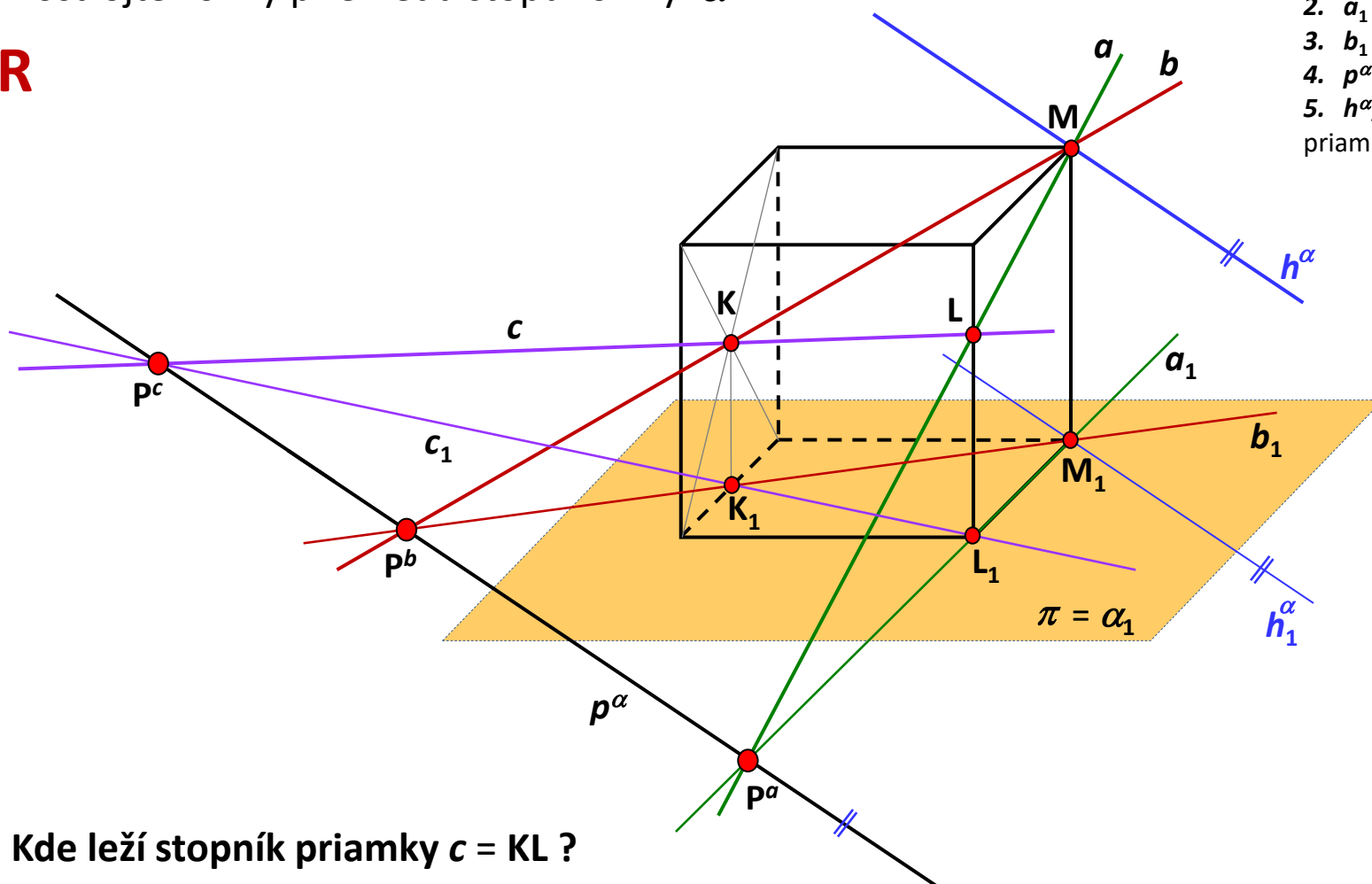
Rovina rovnobežná s priemetňou stopu nemá.

Príklad. Dolná podstava kocky leží v priemetni π . Bod **K** je stred ľavej bočnej steny, bod **L** leží na pravej prednej hrane, bod **M** je vrchol kocky. Zostrojte kolmý priemet a stopu roviny $\alpha = \text{KLM}$.

Postup:

1. $a = \text{ML}$, $b = \text{KM}$.
2. $a_1 = \text{M}_1\text{L}_1$, $\text{p}^a = a \cap a_1$.
3. $b_1 = \text{K}_1\text{M}_1$, $\text{p}^b = b \cap b_1$.
4. $\text{p}^\alpha = \text{p}^a \text{p}^b$ – stopa roviny α .
5. h^α , $\text{M} \in h^\alpha$, $h^\alpha \parallel \text{p}^\alpha$ – hlavná priamka roviny α .

R



Kde leží stopník priamky $c = \text{KL}$?

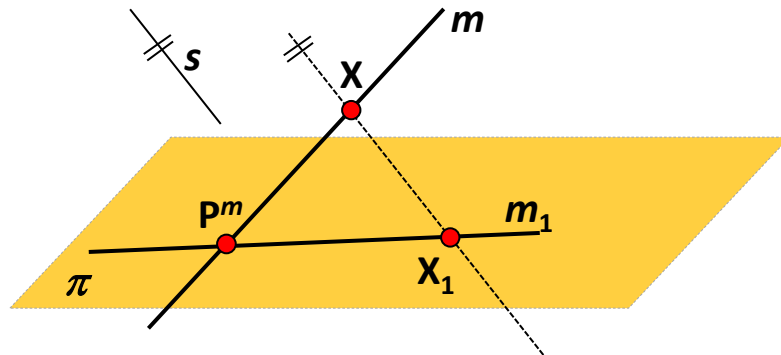
Platí: Priamka roviny rôznobežná s priemetňou má stopník na stope roviny.

Priamka roviny rovnobežná s priemetňou stopník nemá. Nazýva sa **hlavná priamka roviny**. Označenie: h^α . Platí: $h^\alpha \parallel \text{p}^\alpha$.

Vlastnosti rovnobežného premietania

V1: RP zachováva **incidenciu** geometrických útvarov.

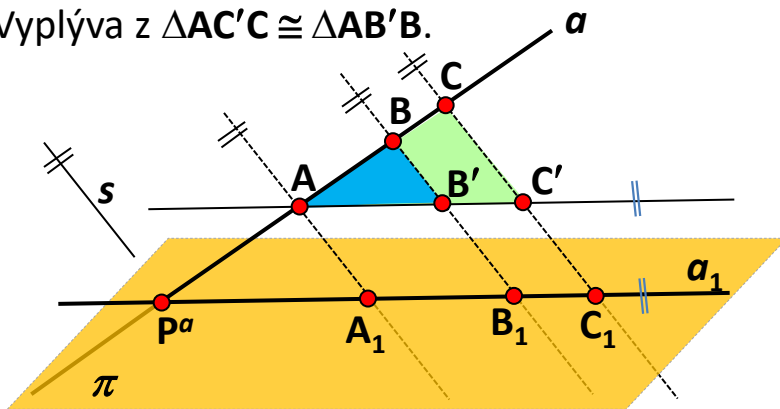
Ak $X \in m$, tak $X_1 \in m_1$.



V3: Rovnobežné premietanie zachováva **deliaci pomer troch bodov na priamke**:

$|A_1C_1| : |B_1C_1| = |AC| : |BC|$.

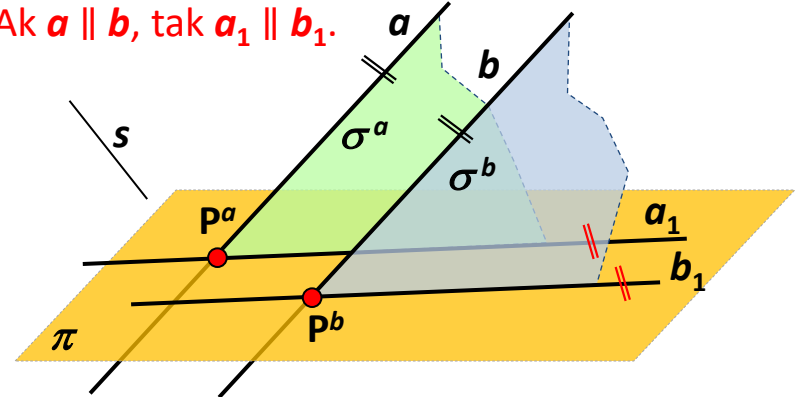
Vyplýva z $\triangle AC'C \cong \triangle AB'B$.



Rovnobežným priemetom **stredú úsečky** je stred priemetu úsečky.

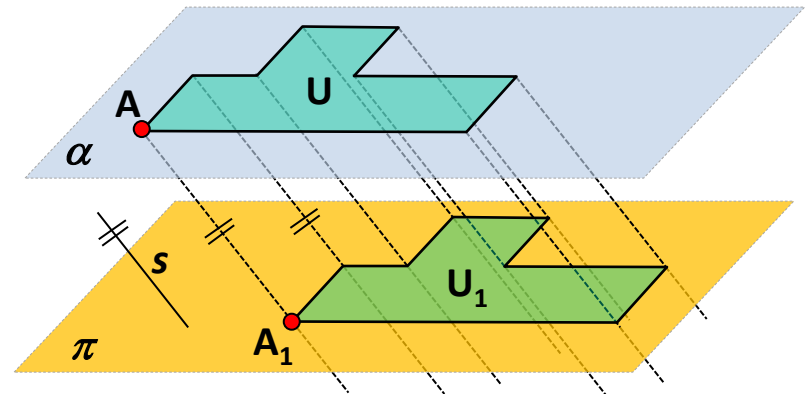
V2: RP zachováva **rovnobežnosť priamok**.

Ak $a \parallel b$, tak $a_1 \parallel b_1$.



V4: Rovnobežným priemetom **útvary**, ktorý leží v rovine rovnobežnej s priemetňou je **útvary zhodný s pôvodným útvarom**.

Útvary **U** a **U1** sú zhodné.

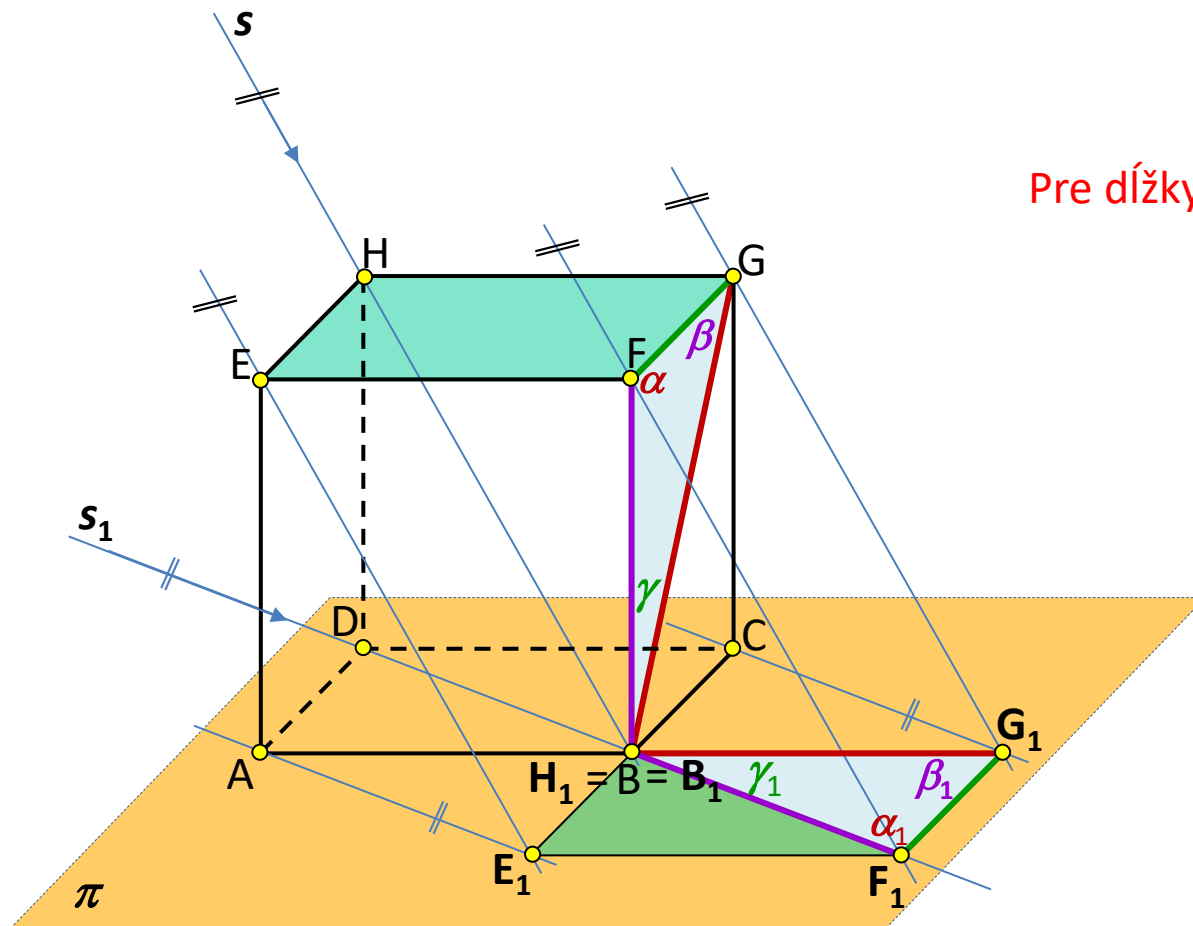


Vlastnosti kolmého premietania

Kolmé premietanie ako špeciálny prípad rovnobežného premietania má vlastnosti **V1 – V4** rovnobežného premietania a navyše má dve dôležité vlastnosti **V5, V6**.

Príklad. Dolná podstava kocky leží v priemetni π , dĺžka hrany kocky je a .

Zobrazte rovnobežný priemet $\triangle BGF$ v smere $s = \mathbf{HB}$ a porovnajte dĺžky strán a veľkosti uhlov $\triangle BGF$ a jeho rovnobežného priemetu $\triangle B_1G_1F_1$.



$$\triangle BGF \rightarrow \triangle B_1G_1F_1$$

Pre dĺžky strán v $\triangle BGF$ a $\triangle B_1G_1F_1$ platí:

$$|FG| = a = |F_1G_1| = a$$

$$|FB| = a < |F_1B_1| = \sqrt{2}a$$

$$|GB| = \sqrt{2}a > |G_1B_1| = a$$

Pre uhly platí:

$$\alpha = 90^\circ > \alpha_1 = 45^\circ$$

$$\beta = 45^\circ < \beta_1 = 90^\circ$$

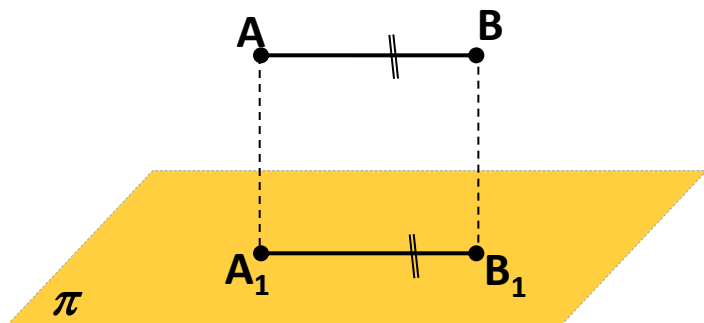
$$\gamma = 45^\circ = \gamma_1 = 45^\circ$$

Záver: Rovnobežné premietanie vo všeobecnosti nezachováva dĺžky ani uhly.

Ďalšie vlastnosti kolmého premietania

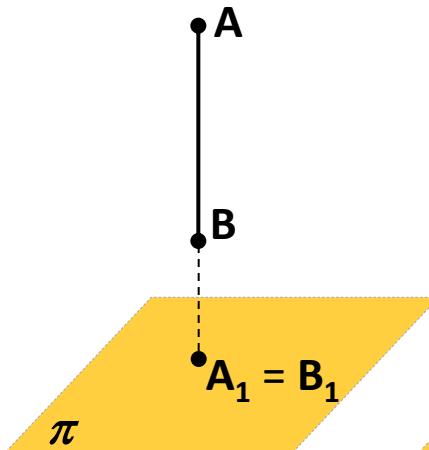
5. Zistite, čo platí pre dĺžku kolmého priemetu úsečky AB .

$AB \parallel \pi$



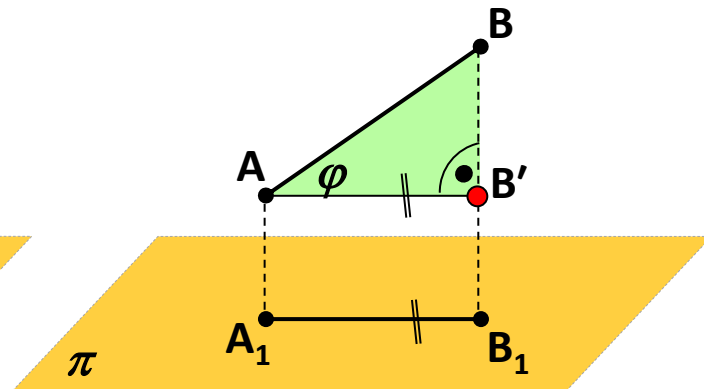
$$|A_1B_1| = |AB|$$

$AB \perp \pi$



Priemetom je bod.

$AB \nparallel \pi$ a $AB \not\perp \pi$



$$|A_1B_1| < |AB|$$

Z pravouhlého $\triangle ABB'$ vyplýva:

$$\cos \varphi = |AB'| : |AB| = |A_1B_1| : |AB|$$

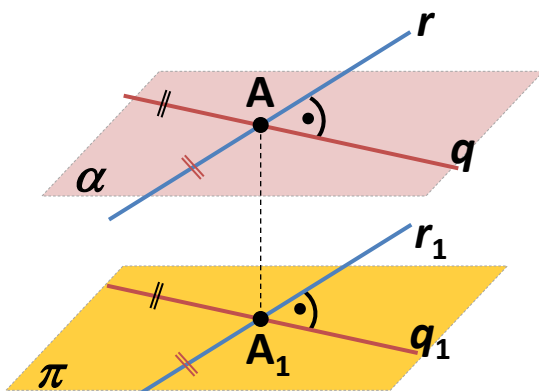
$$|A_1B_1| = |AB| \cdot \cos \varphi, \cos \varphi \in (0, 1)$$

V5: Pre dĺžku kolmého priemetu úsečky AB platí: $|A_1B_1| = |AB| \cdot \cos \varphi$, kde φ je odchýlka priamky AB od priemetne. Platí $|A_1B_1| \leq |AB|$, rovnosť nastane len vtedy, keď $AB \parallel \pi$.

Ďalšie vlastnosti kolmého premietania

6. V kolmom premietaní do priemetne π zobrazte priamky q, r, r' , pre ktoré platí $q \perp r, q \perp r'$.
Nájdite pravidlo, za akých podmienok sa pravý uhol zobrazí v kolmom premietaní opäť do pravého uhla.

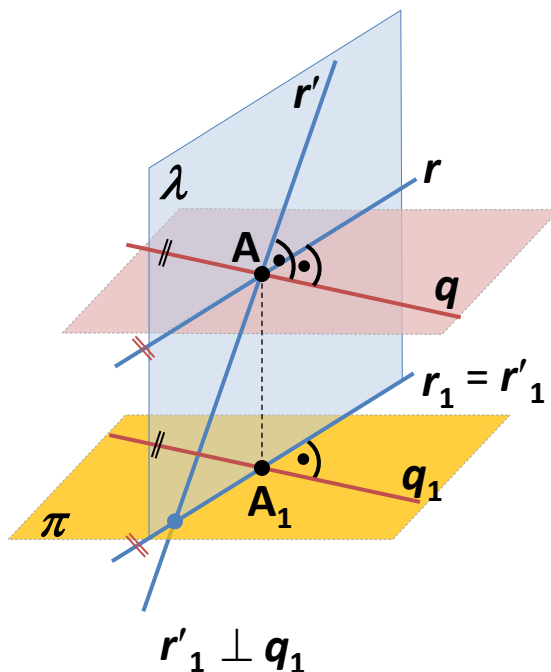
a) $q \parallel \pi, r \parallel \pi$



$r_1 \perp q_1$ (vyplýva z V4)

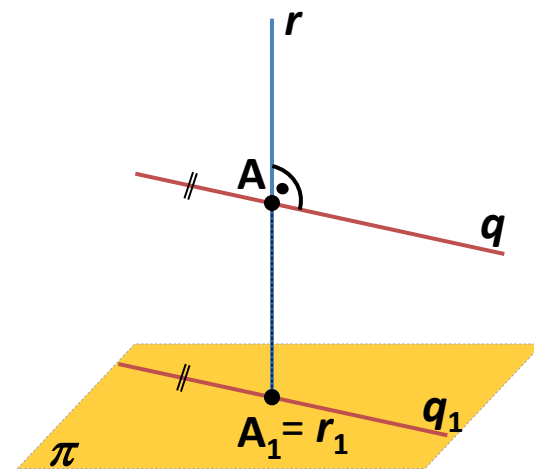
b) $q \parallel \pi, r \parallel \pi, r' \not\parallel \pi, r' \perp \pi$

$\lambda = (r, r_1), \lambda \perp q, r' \subset \lambda, r' \perp q$



$r'_1 \perp q_1$

c) $q \parallel \pi, r \perp \pi$



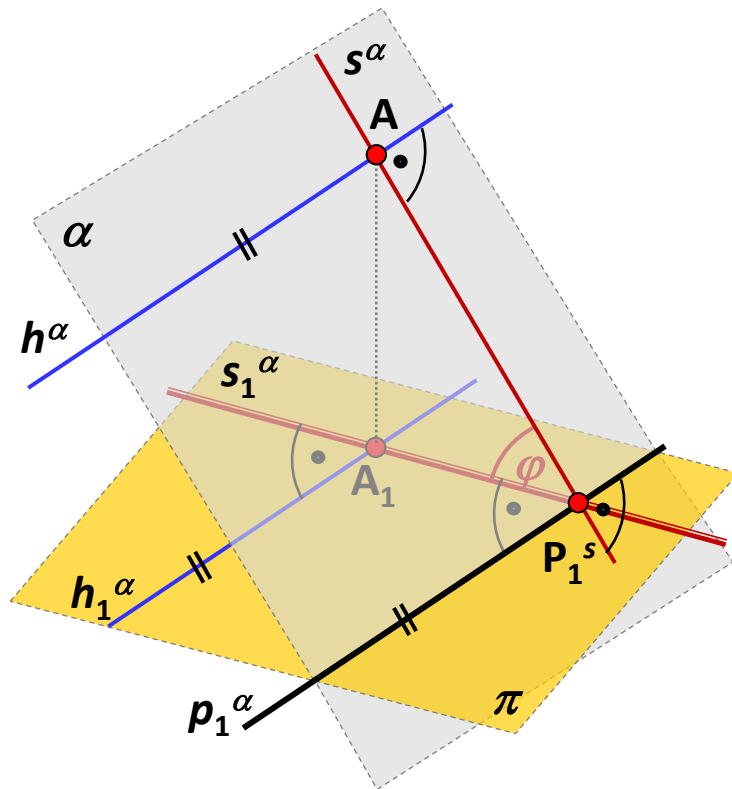
r_1 je bod

V6 (Veta o kolmom priemete pravého uhla): Kolmým priemetom pravého uhla je pravý uhol, ak jedno jeho rameno je rovnobežné s priemetňou a druhé nie je kolmé na priemetňu.

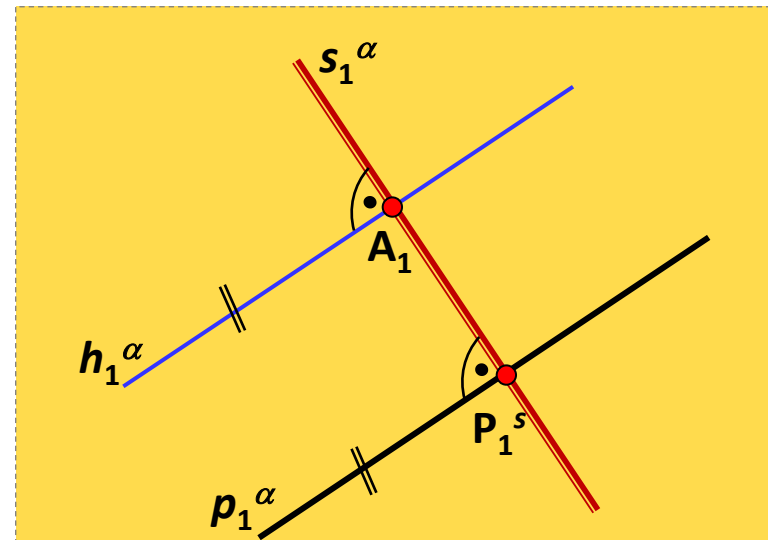
Hlavné a spádové priamky roviny a ich kolmý priemet

Definície:

- Priamka roviny rovnobežná s priemetňou sa nazýva **hlavná priamka roviny**, označenie: h^α .
- Priamka roviny kolmá na stopu roviny sa nazýva **spádová priamka roviny**, označenie: s^α .
- Uhol $\varphi = \angle(s^\alpha, s_1^\alpha) = \angle(s^\alpha, \pi)$ sa nazýva **spádový uhol roviny α** .



Situácia v nákresni:



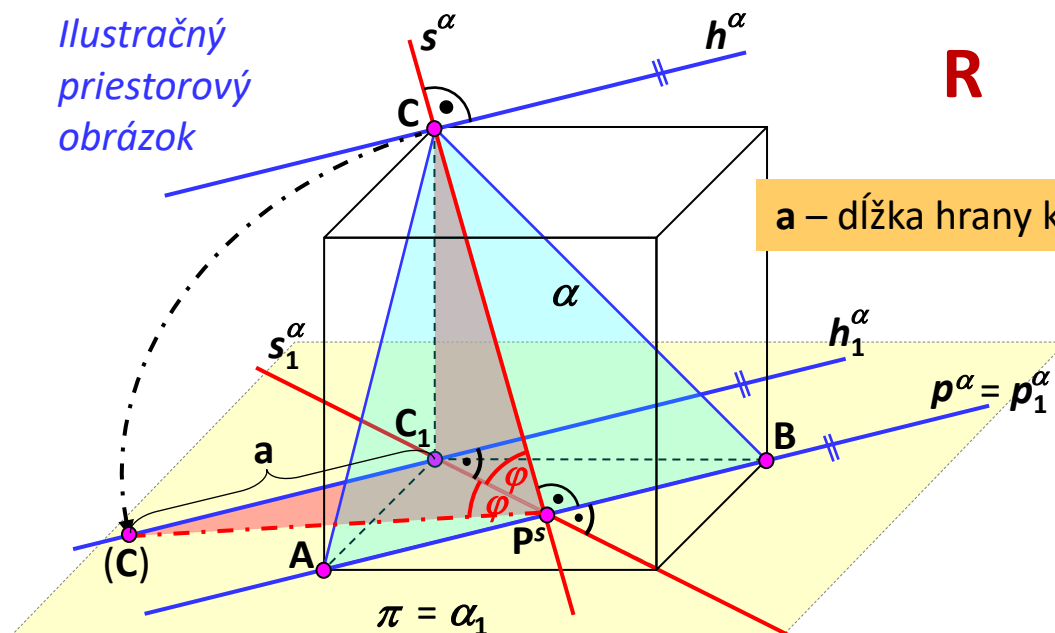
Platí: **1.** $h_1^\alpha \parallel p_1^\alpha$ Dôvod: $h^\alpha \parallel p^\alpha$ a rovnobežnosť sa zachováva.

Platí: **2.** $s_1^\alpha \perp h_1^\alpha$ Dôvod: hlavná a spádová priamka spĺňajú podmienky vety o kolmom priemete pravého uhla.

Príklad. Zobrazte kolmý priemet a stopu roviny $\alpha = \mathbf{ABC}$. Ďalej zostrojte

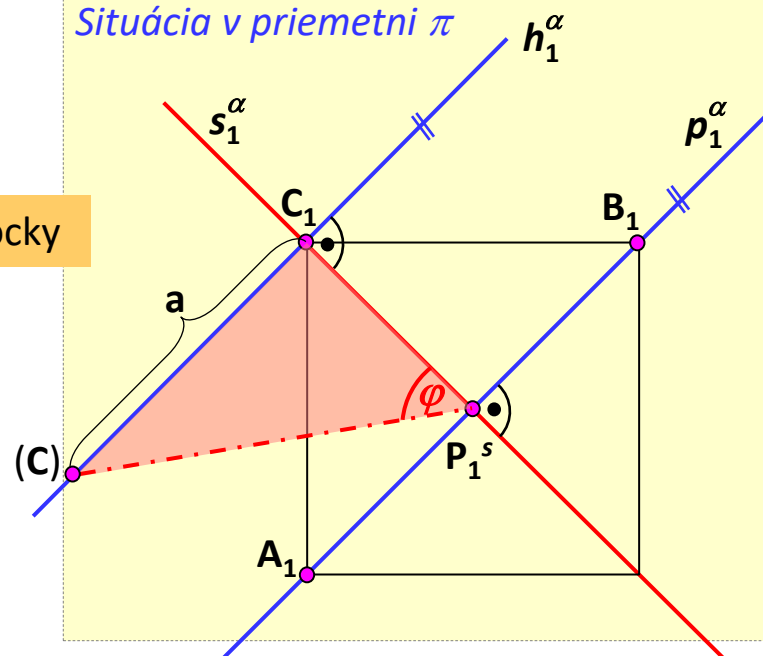
- hlavnú priamku roviny α prechádzajúcu bodom **C**, jej kolmý priemet a stopník,
- spádovú priamku roviny α prechádzajúcu bodom **C**, jej kolmý priemet a stopník,
- spádový uhol roviny α .
- určte (graficky) veľkosť spádového uhla φ .

*Ilustračný
priestorový
obrázok*



R

Situácia v priemetni π



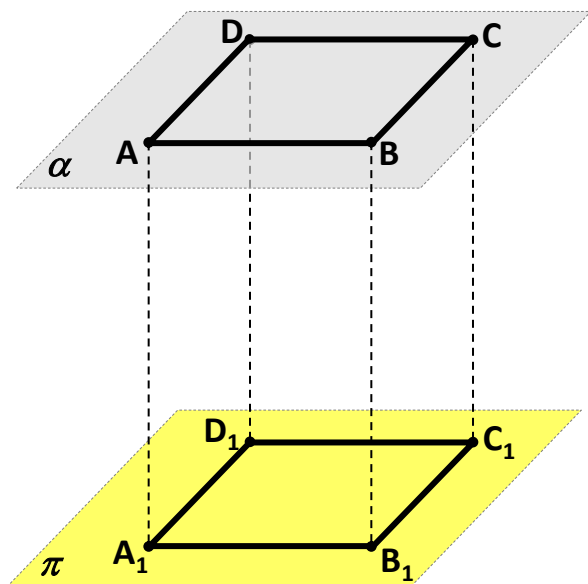
Platí:

- $h_1^\alpha \parallel p_1^\alpha$ (rovnobežné premietanie zachováva rovnobežnosť - vlastnosť **V2**).
- $s_1^\alpha \perp h_1^\alpha$ ($s_1^\alpha \perp p_1^\alpha$) (hlavná a spádová priamka roviny spĺňajú podmienky vety **V6**).
- Uhol $\varphi = \angle(s^\alpha, s_1^\alpha) = \angle(s^\alpha, \pi)$ je spádový uhol roviny α .
- Rovina $\triangle CC_1P^s \perp \pi$, riešime sklápaním (otáčanie o uhol 90°).

Kolmý priemet štvorca ABCD, $|AB| = a$.

a) rovina štvorca je rovnobežná s priemetňou

$A_1B_1C_1D_1$ je štvorec zhodný s pôvodným štvorcom.



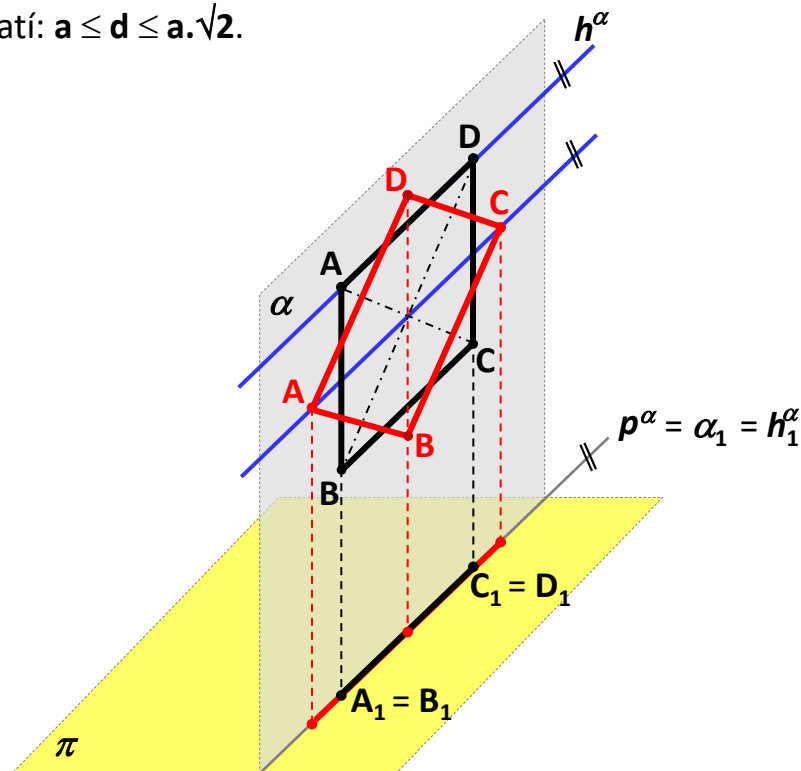
b) rovina štvorca je kolmá na priemetňu

$A_1B_1C_1D_1$ je úsečka, ktorá má s dĺžku d :

$d = a$ (strana štvorca leží na hlavnej priamke roviny),

$d = a\sqrt{2}$ (uhlopriečka štvorca leží na hlavnej priamke roviny),

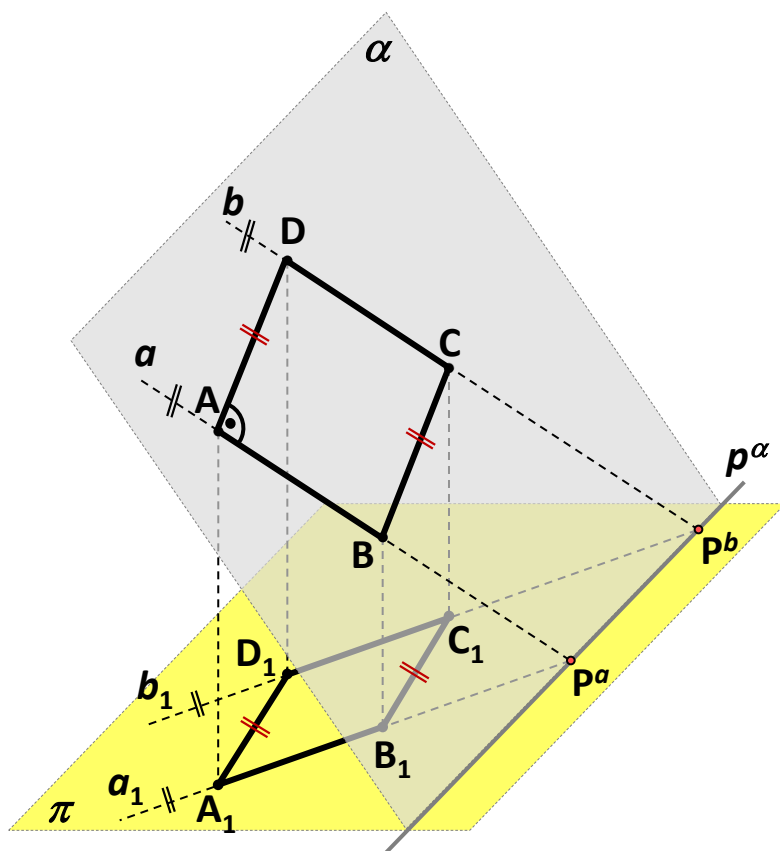
Pre d platí: $a \leq d \leq a\sqrt{2}$.



Kolmý priemet štvorca ABCD, $|AB| = a$.

c) rovina štvorca nie je rovnobežná s priemetňou ani kolmá na priemetňu

$A_1B_1C_1D_1$ je rovnobežník.



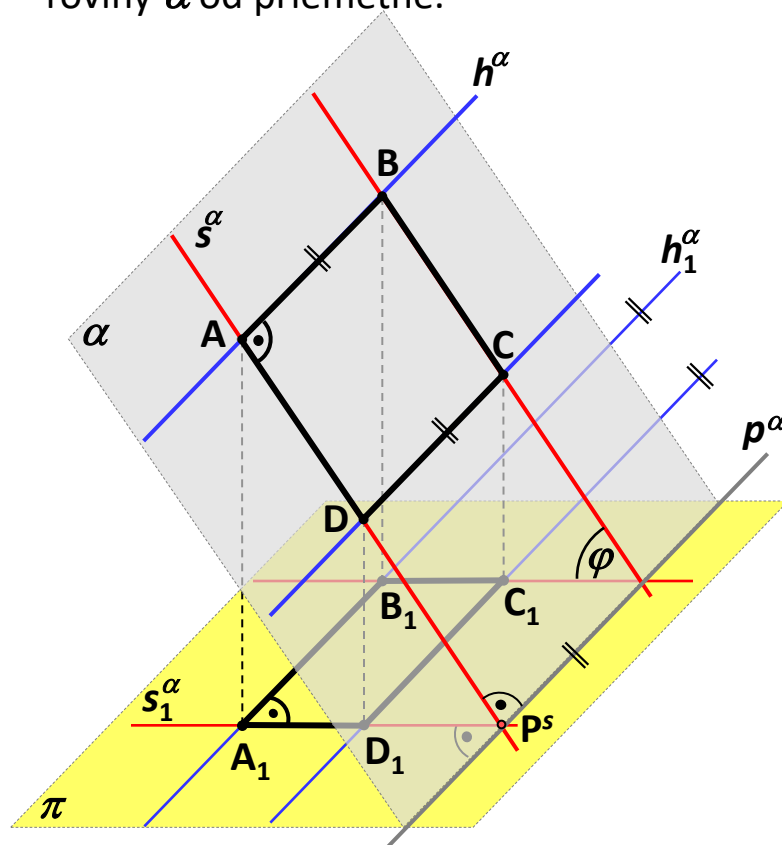
c') špeciálny prípad: strany štvorca ležia na hlavných a spádových priamkach roviny

$A_1B_1C_1D_1$ je obdĺžnik s dĺžkami strán:

$$|A_1B_1| = a,$$

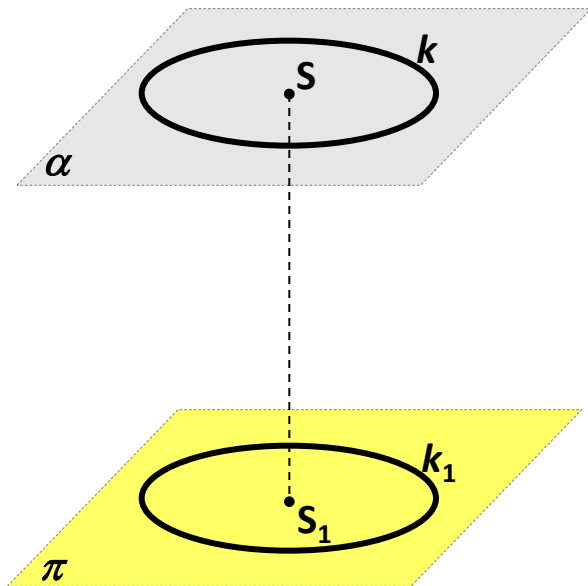
$$|B_1C_1| = a \cdot \cos \varphi, \varphi \text{ je odchýlka}$$

roviny α od priemetne.

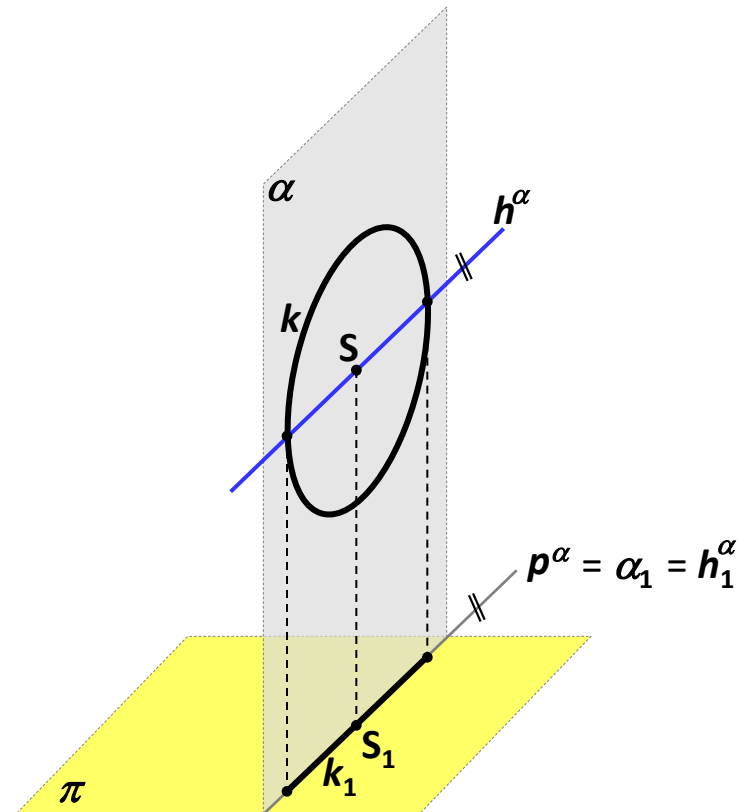


Kolmý priemet kružnice $k(S; r)$.

a) rovina kružnice je rovnobežná s priemetňou
 k_1 je kružnica zhodná s pôvodnou kružnicou.



b) rovina kružnice je kolmá na priemetňu
 k_1 je úsečka s dĺžkou $2 \cdot r$.



Kolmý priemet kružnice $k(S; r)$.

c) rovina kružnice nie je rovnobežná s priemetňou ani kolmá na priemetňu

- k_1 – kolmý priemet kružnice k je elipsa.
- **Priemer kružnice** je úsečka s krajnými bodmi na kružnici, ktorá prechádza stredom kružnice. Priemer kružnice sa premietne do **priemeru elipsy** - úsečka s krajnými bodmi na elipse, ktorá prechádza stredom elipsy.
- **Osi elipsy: najdlhší a najkratší priemer elipsy, osi zvierajú pravý uhol.**
- **Ktoré dva priemery (navzájom kolmé) kružnice k sa premietnu do hlavnej a vedľajšej osi elipsy k_1 ?**

A_1B_1 , $|A_1B_1| = 2 \cdot r$ - **hlavná os** elipsy (leží na priemete **hlavnej priamky** roviny α).

C_1D_1 , $|C_1D_1| = 2 \cdot r \cdot \cos \varphi$ - **vedľajšia os** elipsy (leží na priemete **spádovej priamky** roviny α).

