

1. (10 bodov)

(a) Ako súvisia pojmy dimenzie a izomorfizmu lineárnych priestorov?

Konečnorozmerné lineárne priestory sú izomorfné práve vtedy, keď majú rovnakú dimenziu.

(b) Uvažujme tieto podpriestory $\mathbb{R}^3$:

$$L_1 = \text{span}\{(1, 2, 3), (2, 3, 0)\} \quad L_2 = \text{span}\{(1, 1, s), (2, 2, t)\}.$$

Pre ktoré $s, t \in \mathbb{R}$ platí, že L_1, L_2 sú izomorfné?

$L_1 \simeq L_2$ práve vtedy, keď L_2 má dimenziu 2. To je práve vtedy, keď $\{(1, 1, s), (2, 2, t)\}$ sú lineárne nezávislé, to znamená $t \neq 2s$.

Pre ktoré $s, t \in \mathbb{R}$ platí, že L_2 je podpriestor L_1 ?

L_2 je podpriestor L_1 práve vtedy, keď $(1, 1, s), (2, 2, t) \in L_1$. Zrejme platí, že $(1, 1, s) \in L_1$ práve vtedy, keď sústava

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & s \end{array} \right)$$

má riešenie. Z toho na 2 ľahké kroky vyjde $s = -3$. Podobne vyjde $t = -6$.

Pre ktoré $s, t \in \mathbb{R}$ sú L_1, L_2 rovné?

Zrejme ak $L_1 = L_2$, tak $L_2 \subseteq L_1$. Z predošlého ale vieme, že potom $L_2 = \text{span}(\{(1, 1, -3), (2, 2, -6)\}) = \text{span}(\{(1, 1, -3)\})$, pričom posledná rovnosť vyplýva z toho že v $2 \cdot (1, 1, -3) = (2, 2, -6)$. Ale potom $\dim(L_2) = 1 \neq 2 = \dim(L_1)$. Teda nie sú nikdy rovné.

2. (10 bodov)

(a) Ako súvisí determinant s regularitou matice?

Matica je regulárna práve vtedy, keď má nenulový determinant.

(b) Pre ktoré $a \in \mathbb{R}$ je matica

$$A = \begin{pmatrix} (a-1) & (a-2) & (a-3) & \dots & (a-n) \\ 0 & 2(a-2) & 2(a-3) & \dots & 2(a-n) \\ 0 & 0 & 3(a-3) & \dots & 3(a-n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n(a-n) \end{pmatrix}$$

regulárna? Nájdite inverznú maticu k A pre $n = 3$.

Je to trojuholníková matica, teda jej determinant je rovný súčinu diagonálnych prvkov. Ten je nenulový práve vtedy, keď $a \notin \{1, 2, \dots, n\}$. Pre $n = 3$ vyjde inverzná matica

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{a-1} & -\frac{1}{2(a-1)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2(a-2)} & -\frac{1}{3(a-2)} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3(a-3)} \end{pmatrix}$$

3. (10 bodov)

- (a) Definujte lineárne zobrazenie. Ako súvisí skladanie lineárnych zobrazení a násobenie matic?
 (b) Dokážte, že zobrazenie $A : \mathcal{P}^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}^2(\mathbb{R})$ dané predpisom

$$A(p) = (x \cdot p(x+1))'$$

je lineárne.

Máme dokázať, že pre všetky $p, q \in \mathcal{P}^3(\mathbb{R})$ a všetky $a \in \mathbb{R}$ platí, že

$$A(p+q) = A(p) + A(q)$$

$$A(a \cdot p) = a \cdot A(p)$$

Dokážeme prvú rovnosť. Na oboch stranách sú funkcie $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Dve funkcie s rovnakým definičným oborom sú rovné, ak majú rovnakú hodnotu pre každý prvok definičného oboru.

Pre $x \in \mathbb{R}$ máme

$$\begin{aligned} A(p+q)(x) &= (x \cdot (p+q)(x+1))' = (x \cdot (p(x+1) + q(x+1)))' = \\ &= (x \cdot p(x+1) + x \cdot q(x+1))' = (x \cdot p(x+1))' + (x \cdot q(x+1))' = A(p)(x) + A(q)(x), \end{aligned}$$

využívame definíciu súčtu dvoch funkcií, roznásobíme x , použijeme fakt, že derivácia súčtu je súčet derivácií.

Ešte treba dokázať, druhú rovnosť, t.j. že $A(a \cdot p)(x) = a \cdot (A(p)(x))$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$, to sa dá urobiť podobne.

- (c) Nájdite maticu φ v nejakej usporiadanej báze $\mathcal{P}^2(\mathbb{R})$.

Vezmime usporiadanú bázu $(1, x, x^2)$. Postupne máme

$$A(1) = (x \cdot 1)' = x' = 1$$

$$A(x) = (x \cdot (x+1))' = (x^2 + x)' = 2x + 1$$

$$A(x^2) = (x \cdot (x+1)^2)' = (x \cdot (x^2 + 2x + 1))' = (x^3 + 2x^2 + x)' = 3x^2 + 4x + 1$$

Matica teda vyjde

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- (d) Nájdite maticu $A \circ A \circ A \circ A$ v nejakej usporiadanej báze $\mathcal{P}^2(\mathbb{R})$.

Treba umocniť maticu na štvrtú. Najrýchlejšie sa to dá spraviť tak, že ju dvakrát umocníte na druhú.

4. (10 bodov)

- (a) Nech A, B sú regulárne štvorcové matice rovnakého rádu, predpokladajme, že poznáme $\det(A)$ a $\det(B)$. Čomu je rovný $\det(AB)$? Čomu je rovný $\det(A^{-1})$?

$\det(AB) = \det(A)\det(B)$; $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$ (samozrejme, A musí byť regulárna aby to dávalo zmysel).

- (b) Uvažujme matice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Určte (ak existujú) $\det(A)$, $\det(A^{-1})$, $\det(B)$, $\det(B^{-1})$, $h(A)$, $h(A^{-1})$, $h(B)$, $h(B^{-1})$, $\det(A.B)$, $\det(A.A)$. Pozn. $h(A)$ označuje hodnotu matice A .

Vyjde $\det(A) = -14$, $\det(B) = 0$. Z toho vidíme, že B je singulárna, teda výrazy s B^{-1} nemajú zmysel. Ďalej (bez násobenia matic a invertovania!) $\det(AB) = \det(A)\det(B) = 0$, $\det(A^{-1}) = -\frac{1}{14}$. Keďže A je regulárna, $h(A) = h(A^{-1}) = 4$. No a $h(B) = 3$ vyjde úpravou matice.

5. (10 bodov)

- (a) Definujte podpriestor lineárneho priestoru.
(b) Overte, že množina polynómov

$$L = \{p \in \mathcal{P}^3(\mathbb{R}) : p(1) = 0\}$$

je podpriestor $\mathcal{P}^3(\mathbb{R})$.

Ak $p(1) = 0$ a $q(1) = 0$, potom $(p+q)(1) = p(1) + q(1) = 0 + 0 = 0$. Podobne pre násobenie skalárom.

- (c) Nájdite nejakú bázu L . Dokážte, že to je báza L . Určte dimenziu L .

Prvý spôsob Vezmeme napríklad $X = \{(x-1), x(x-1), x^2(x-1)\}$ ale sú, samozrejme aj iné bázy L , napríklad $\{(x-1), (x-1)^2, (x-1)^3\}$. Lineárnu nezávislosť dokážeme napríklad tak, že skonštatujeme, že zrejme žiadny z tých polynómov nie je lineárnou kombináciou predchádzajúcich. Treba ešte dokázať, že $\text{span}(X) = L$. Zrejme $\text{span}(X) \subseteq L \subseteq \mathcal{P}^3(\mathbb{R})$. Z toho

$$3 = \dim(\text{span}(X)) \leq \dim(L) \leq \dim(\mathcal{P}^3(\mathbb{R})) = 4.$$

Teda buď $\dim(L) = 3$ alebo $\dim(L) = 4$. Ale ak $\dim(L) = 4$, potom L je celý priestor, čo zrejme nie je pravda. Takže $\dim(L) = 3$ a teda $L = \text{span}(X)$.

Druhý spôsob Uvažujme, pre ktoré polynómy $p \in \mathcal{P}^3(\mathbb{R})$ platí, že $p(1) = 0$. Sú to práve tie, ktoré sa dajú *jednoznačne* vyjadriť v tvare $p(x) = (x - 1) \cdot q(x)$, kde $q(x) \in \mathcal{P}^2(\mathbb{R})$. Teda existuje bijekcia $A : \mathcal{P}^2(\mathbb{R}) \rightarrow L$ daná predpisom $A(q) = (x - 1) \cdot q$. Ale A je lineárne zobrazenie (skontrolujte sami). Bijektívne lineárne zobrazenie je izomorfizmus. Priestory L a $\mathcal{P}^2(\mathbb{R})$ sú teda izomorfné, a majú teda rovnakú dimenziu. Bázu L dostaneme ako obraz nejakej bázy $\mathcal{P}^2(\mathbb{R})$. Navyše každá báza L vzniká týmto spôsobom.