Zoznam príkladov Matematika II

27.2.2003

1 Integrál

A) Neurčitý integrál

Vypočítajte nasledujúce neurčité integrály (za príkladom v zátvorke je uvedené: návod, výsledok):

A1. $I_1 = \int (3x-2)^2 dx$,

$(3x-2=t,\ I_1 = \frac{(3x-2)^3}{9} + c)$;

A2. $I_2 = \int cos(5x-2) dx$,

$(5x-2=t,\ I_2 = \frac{sin(5x-2)}{5} + c)$;

A3. $I_3 = \int tg(4x) dx$,

$(cos(4x)=t,\ I_3 = \frac{ln(cos(4x))}{4} + c)$;

A4. $I_4 = \int \frac{1}{xlnx} dx$;

$(lnx = t,\ I_4 = ln(lnx) + c)$;

A5. $I_5 = \int xe^{-x^2} dx$;

$(-x^2 = t,\ I_5 = -\frac{e^{-x^2}}{2} + c)$;

A6. $I_6 = \int \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} dx$,

$(x^2-4=t,\ I_6 = \sqrt{x^2-4} + c)$;

A7. $I_7 = \int 10x(x^2+7)^4 dx$,

$(x^2+7=t,\ I_7 = (x^2+7)^5 + c)$;

A8. $I_8 = \int \frac{cos(lnx)}{x} dx$,

$(lnx = t,\ I_8 = sin(lnx) + c)$;

Per partés:

A9. $I_9 = \int xcosxdx$,

$(u = x,\ I_9 = xsinx + cosx + c)$;

A10. $I_{10} = \int lnxdx$,

$(\ u = lnx,\ I_{10} = xlnx - x + c)$;

A11. $I_{11} = \int xsin3xdx$,

($u = x$, $I_{11} = -\frac{xcos3x}{3} + \frac{sin3x}{9} + c$);

A12. $I_{12} = \int \frac{lnx}{\sqrt{x}}dx$,

($u = lnx$, $I_{12} = 2\sqrt{x}lnx - 4\sqrt{x} + c$);

A13. $I_{13} = \int xe^{-2x}dx$;

($u = x$, $I_{13} = -\frac{2x+1}{4e^{2x}} + c$);

Rozklad na parcialne zlomky:

A14. $I_{14} = \int \frac{1}{x(x-1)}dx$;

($Ax + B(x-1) = 1$, $I_{14} = ln|\frac{x-1}{x}| + c$);

A15. $I_{15} = \int \frac{x}{x^2-4}dx$,

($A(x-2) + B(x+2) = x$, $I_{15} = ln\sqrt{x^2-4} = c$);

A16. $I_{16} = \int \frac{x}{(x^2+1)(x-1)}dx$,

($A(x^2+1) + (Bx+c)(x-1) = x$, $I_{16} = ln\sqrt{\frac{|x+1|}{\sqrt{x^2+1}}} + c$;

B) Určitý integrál

B1. $\int_1^4 (x-2)^2dx$; [3].

B2. $\int_0^\pi sinxdx$; [2].

B3. $\int_{-1}^1 ln(x+2)dx$; $[-2 + ln27]$.

B4. $\int_0^\pi xcosxdx$; $[-2]$.

B5. $\int_1^2 \frac{x}{(x+2)(x+1)}dx$; $[ln\frac{32}{27}]$.

C) Aplikácia určitého integrálu

Vypočítajte veľkosť plochy ohraničenej nasledujúcimi krivkami:

C1. $y = x^2$, $y = -x^2 + 8$; $[\frac{76}{3}]$.

C2. $y = xsinx$, $y = 0$, $x \in (0, \pi)$; $[\pi]$.

C3. $y = x^2 - 4$, $x + y = 2$, $y - x = 2$; $[\frac{44}{3}]$.0

2 Lineárna algebra

D) Sústava lineárnych rovníc

Zistite, či dané sústavy rovníc majú riešenie. Ak áno, tak ho nájdite. Ak sústava má viac ako jedno riešenie, tak nájdite tri rôzne riešenia. Použite gaussovú eliminačnú metódu.

D1.

$$\begin{aligned} 1 &= x + y \\ 2 &= x - y \\ 3 &= x + 2y. \end{aligned}$$

D2.

$$\begin{aligned} 1 &= x + y + z \\ 2 &= x - y - z \\ 0 &= x + 2y + 2z. \end{aligned}$$

D3.

$$\begin{aligned} 0 &= x + y + 3z - 2s \\ 1 &= x - y - z - s \\ 0 &= x + 2y + z + s. \end{aligned}$$

D4.

$$\begin{aligned} 0 &= x + y \\ 0 &= 2x + y \\ 0 &= 3x + 2y. \end{aligned}$$

D5.

$$\begin{aligned} 0 &= x + y - z \\ 0 &= x - y + z \\ 0 &= x + y + z. \end{aligned}$$

V nasledujúcich sústavach rovníc nájdite množinu všetkých riešení $(x,y,z)'$ s vlastnosťami:

a) $x+y+z<0$,

b) $|x+y|<1$,

c) $|2x-y|>1$,

d) $|x+y+z|<1$,

e) $x^2+y^2=1$.

D6.

$$\begin{aligned} 1 &= 2x + y + z \\ 0 &= x - y + z \\ 1 &= 3x + 0y + 2z. \end{aligned}$$

(a) $z>-1$; b) $z\in(-1,5)$; c) $z\in(-\infty,-0,4)\cup(0,8,\infty)$; d)$-2,5<z<0,5$; e) $z\in\{-1;1,4\}$).

D7.

$$\begin{array}{rcccc} 1 = & x & + & y & -z \\ 0 = & x & - & y & +z. \end{array}$$

(a) $z > -0,5$; b) $z \in (-2,0)$; c) $z < -2,5$, alebo $z > -0,5$; d) $z \in (-1,0)$; e) $z \in \{\frac{-1+\sqrt{2}}{2}, \frac{-1-\sqrt{2}}{2}\}$).

D8.

$$\begin{array}{rcccccc} 0 = & x & + & y & - & z \\ 0 = & x & - & y & + & z. \end{array}$$

(a)$z > 0$; b) $z \in (-1,1)$; c) $z > 1$, alebo $z < -1$; d) $-0,5 < z < 0,5$; e) $z \in \{-1,1\}$).

E) Práca s maticami

K matici $\mathbf{A}$ nájdite invernú maticu $\mathbf{A^{-1}}$ a urobte skúšku správnosti:

E1.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

E2.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

E3.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

E4.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

E5.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

E6.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

E7. Vypočítajte: $\mathbf{AB}+\mathbf{C}$, $\mathbf{B}^{'}\mathbf{A}^{'}+\mathbf{C}^{'}$, $\mathbf{2A}+\mathbf{3C}$, ak

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{B}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{C}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

V nasledujúcich príkladoch vypočítajte $\mathbf{A}^{'}\mathbf{A}$, $(\mathbf{A}^{'}\mathbf{A})^{-1}$, $(\mathbf{A}^{'}\mathbf{A})^{-\mathbf{1}}\mathbf{A}^{'}$.

E8.

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

E9.

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

E10.

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

E11.

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

E12.

$$\mathbf{A}=(1,0,1).$$

E13. Nasledujúcu sústavu rovníc riešte pomocou inverznej matice

$$\begin{array}{rrcrcr} p_1 = & 2x & + & y & + & z \\ p_2 = & x & - & y & + & z \\ p_3 = & x & - & y & - & 2z, \end{array}$$

ak a) $p_1=p_2$ a $p_3=0$; b)$p_1=p_2=p_3=1$; c)$p_1=2$, $p_2=1$, $p_3=p_1+2p_2$.

e-mail: olga@math.sk