# POLIA

Do tejto chvíle sme pod vektorovým priestorom rozumeli takúto štvoricu
$(V, +, \cdot, \vec{o})$

- $V$ je množina - prvky sú „vektory"
- $+ : V \times V \longrightarrow V$ - sčítanie
- $\cdot : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$ - násobenie skalárom
- $\vec{o} \in V$ - nulový vekto

To nestačilo, aby to bol vektorový priestor. Museli o týchto veciach platiť aj nejaké vlastnosti (axiómy).

Pomocou týchto axióm sme potom začali budovať teóriu vektorových priestorov.

Keďže sme pri budovaní teórie používali iba axiómy, všetky pojmy a tvrdenia o nich nám budú fungovať pre všetky vektorové priestory, ktoré spĺňajú axiómy.

Teraz ideme zaviesť do celej veci ďalšiu flexibilitu $\mathbb{R}$ ← toto rozhýbeme.

Pozorovanie: úplne všetky veci, ktoré sme dokazovali v prvom semestri by fungovali, ak by sme zamenili $\mathbb{R}$ za $\mathbb{Q}$ ← toto je niečo, čoho prvky vieme sčítať, odčítať, násobiť ...

↓

to sme nepochybne so skalármi robili

Čo ešte je nejaká množina, ktorej prvky vieme sčítať, odčítať, násobiť? Odpoveď: $\mathbb{Z}$ ← mohli by sme robiť lineárnu algebru s takýmito skalármi? Nie! Potrebujeme deliť! (napríklad keď riešime sústavy lineárnych rovníc)

Naproti tomu $\mathbb{R}$ má ešte celú kopu vlastností, ktoré sme nepoužili, aspoň zatiaľ. Napríklad máme v $\mathbb{R}$ odmocňovanie

[illegible]
kladných čísel, konvergenciu postupností a iné veci.

Otázka: Aké vlastnosti sčítania, násobenia, ... v $\mathbb{R}$ sme pre budovanie našej teórie potrebovali? Odpoveď je táto definícia.

Definícia: Pole je $(K, +, \cdot, 0, 1)$, kde:

- → $K$ je množina
- → $+ : K \times K \longrightarrow K$
- → $\cdot : K \times K \longrightarrow K$ } 2 binárne operácie
- → $0 \in K$
- → $1 \in K$ } 2 konštanty

Axiómy poľa

$\forall a, b, c \in K : (a+b)+c = a+(b+c)$

$\forall a, b \in K : a+b = b+a$

$\forall a \in K : 0+a = a$

$\forall a \, \exists b : a+b = 0$ (toto $b$ je nutne jediné a značí sa $-a$)

$\forall a, b, c \in K : (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

$\forall a, b \in K : a \cdot b = b \cdot a$

$\forall a \in K: \ 1 . a = a$

$\forall a \in K \setminus \{0\} \ \exists b: \ a . b = 1$ (toto $b$ je nutne jediné a značí sa $a^{-1}$

nenulové!

$\forall a, b, c \in K \quad a . (b + c) = (a . b) + (a . c)$

$0 \neq 1$

## PRÍKLADY POLÍ

Dva príklady sú nám dobre známe: reálne čísla $\mathbb{R}$ a racionálne čísla $\mathbb{Q}$. Väčšinu zostatku tejto prednášky strávime zavedením a skúmaním ďalšieho príkladu: komplexných čísel $\mathbb{C}$. Predtým ako sa do toho pustíme, spomeniem ešte jednu triedu príkladov: konečné polia $\mathbb{Z}_p$.

Nech $p$ je prvočíslo. Vybavme množinu $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, \dots, p-1\}$ operáciami sčítania $\oplus$ a násobenia $\odot$ takto:

$a \oplus b = (a + b) \bmod p$ → zvyšok po delení $p$

sčítanie ako v $\mathbb{N}$

$a \odot b = (a . b) \bmod p$ → podobne

Napríklad pre $p = 3$ dostaneme

| $\oplus$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 |
| 1 | 1 | 2 | 0 |
| 2 | 2 | 0 | 1 |

| $\odot$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 2 |
| 2 | 0 | 2 | 1 |

Potom $(\mathbb{Z}_p, \oplus, \odot, 0, 1)$ je pole (nedokazujem). Poznamenávam, že ak $p$ nie je prvočíslo, axiómy poľa splnené nie sú.

Polia $\mathbb{Z}_p$ sú veľmi užitočné objekty (teória kódovania, kryptografia, …). My sa nimi však príliš zaoberať nebudeme.

## KOMPLEXNÉ ČÍSLA

(Cardano 1545 $\rightarrow$ vzorec pre riešenie kubickej rovnice obsahuje $\sqrt{\text{záporné}}$, aj keď sú všetky riešenia reálne)

„Výpočet vzorca" ~~jeda~~ predpokladal

existenciu odmocniny ~~zo~~ záporného čísla!

- Vezmime reálne čísla
- predajme nový prvok $i \notin \mathbb{R}$
- zadefinujme $i^2 = -1$
- pridávajme nové prvky tak, aby sme pridali len to, čo je nutné a pritom dostali pole

Prirodzení postupne

$$b \cdot i \quad b \in \mathbb{R}$$

$$\underline{a + b i} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

to už stačí.

Definícia (?) Komplexné čísla ($\mathbb{C}$).

- ako množina: $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
- prvky ale nezapisujeme $(a, b)$ $a, b \in \mathbb{R}$

ale takto

ALGEBR. TVAR

„v skutočnosti"

$a + bi \quad \longleftrightarrow \quad (a, b$

$$bi \longleftrightarrow (0, b)$$
$$a \longleftrightarrow (a, 0)$$
$$i \longleftrightarrow (0, 1)$$

- sčítanie $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i$$

- násobenie $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2) i$$

uvedomiť si, že ~~toto~~ je predpis pre násobenie dvojíc

- $0 = (0 + 0i)$
- $1 = (1 + 0i)$

$(\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1)$ je potom pole.

Náznak dôkazu:

- axiomy pre + sú jasné

- ak $z = a + ib$ a $z \neq 0$, ako vyzerá $z^{-1}$?

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi}$$ „rozšírme zlomok" $a-bi$

$$\frac{a-bi}{a-bi} \cdot \frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{a^2 - abi + abi + b^2} =$$

$$= \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2} i$$

Teda

$$(a+bi)^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2} i$$

Treba overiť, že to vyjde:

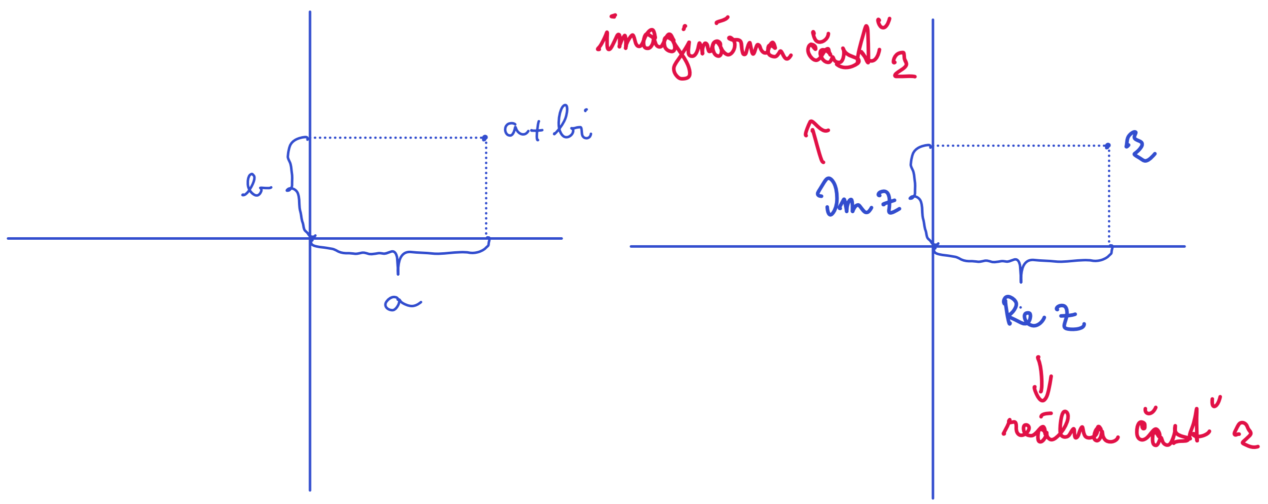
$$(a+bi) \cdot \left( \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2} i \right) =$$

DÚ

$$\dots = 1$$

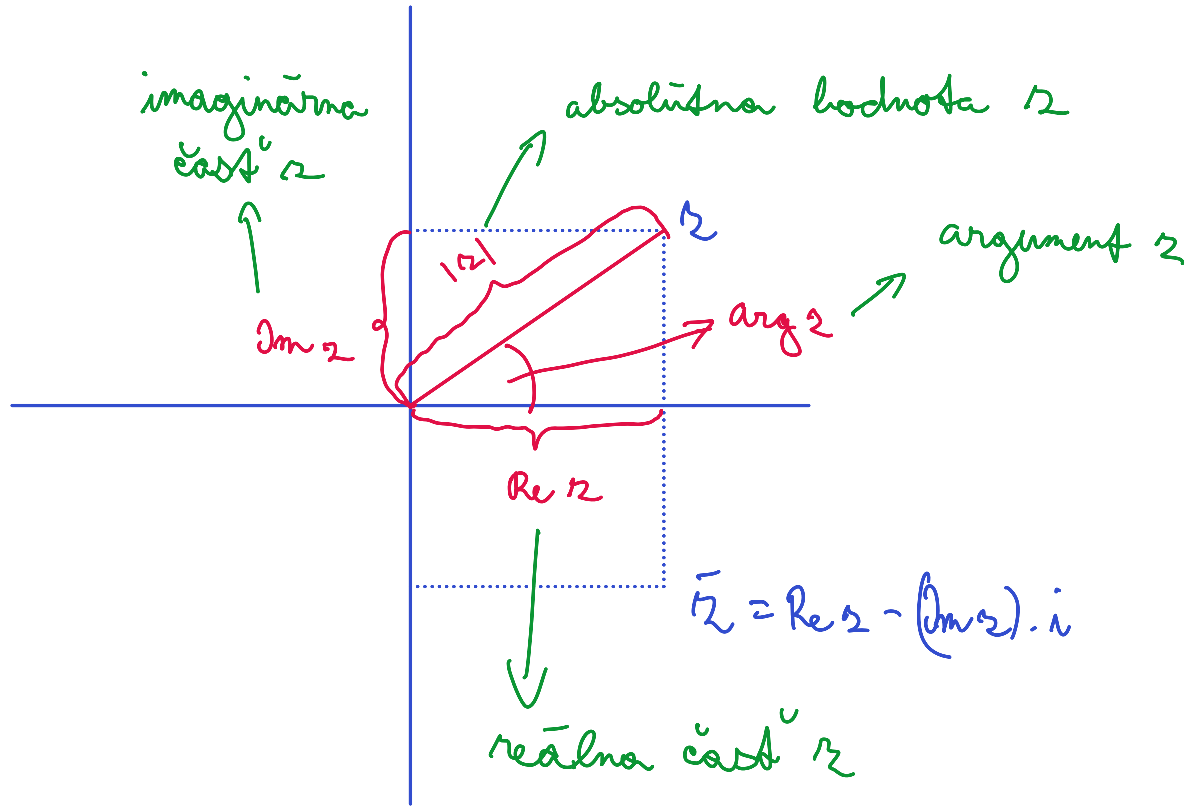
Pre horeuvedené operácie sčítania a násobenia komplexných čísel je možné jednoducho (ale trochu prácne) overiť. Nebudeme to robiť.

Keďže komplexné číslo $a+bi$ je stotožniteľné s dvojicou čísel $(a, b)$, ponúka sa možnosť ho reprezentovať ako bod v rovine vybavenej dvoma kolmými súradnicovými osami:




Sčítanie komplexných čísel potom dostáva zrejme geometrický význam analogicky ako sčítanie geometrických vektorov v rovine.

Násobenie komplexných čísel je ale tiež interpretovateľné geometricky:




- Absolútna hodnota $z = a + bi$ je $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(\mathrm{Re}\, z)^2 + (\mathrm{Im}\, z)^2}$

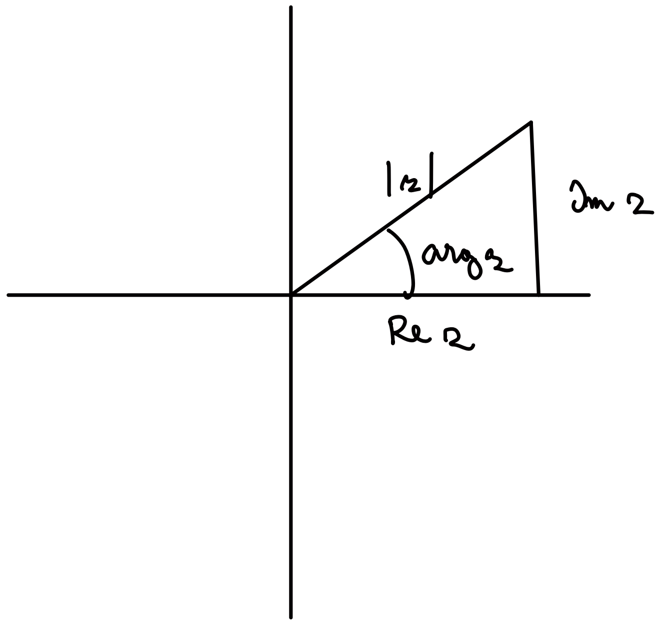
„z konjugované"

- Konjugácia : $z \longmapsto \bar z$ $\quad \bar z = a - bi = \mathrm{Re}\, z - (\mathrm{Im}\, z) i$
- Platí $z \cdot \bar z = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}$
- A teda $|z|^2 = z \cdot \bar z$ ; $|z| = \sqrt{z \cdot \bar z}$

Všimnime si, že hore je napísané, že

$$z^{-1} = \frac{\bar z}{|z|^2}$$

Nahliadnutím vzťahov v pravouhlom trojuholníku




vidíme, že $\operatorname{Im} z = |z| \cdot \sin(\arg z)$
$\operatorname{Re} z = |z| \cdot \cos(\arg z)$

a z toho dostaneme

$$z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z = |z| \cdot \sin(\arg z) + i|z| \cdot \cos(\arg z) =$$
$$= \underbrace{|z|\left(\sin(\arg z) + i \cdot \cos(\arg z)\right)}$$

polárny tvar z
(goniometrický tvar z)

Vypočítajme, aký vzťah majú polárne tvary komplexných čísel
$z, w$ a $z \cdot w$:

$$z = |z| \cdot (\cos(\arg z) + i \cdot \sin(\arg z))$$
$$w = |w| (\cos(\arg w) + i \sin(\arg w))$$

$$\begin{aligned} z \cdot w &= |z||w|(\cos(\arg z) + i \sin(\arg z))(\cos(\arg w) + i \sin(\arg w)) \\ &= |z||w|\big(\cos(\arg z)\cos(\arg w) - \sin(\arg z)\sin(\arg w) + \\ &\quad i(\cos(\arg z)\sin(\arg w) + \sin(\arg z)\cos(\arg w))\big) \end{aligned}$$

Vzorce: $\cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta = \cos(\alpha+\beta)$

$\cos\alpha \sin\beta + \sin\alpha \cos\beta = \sin(\alpha+\beta)$

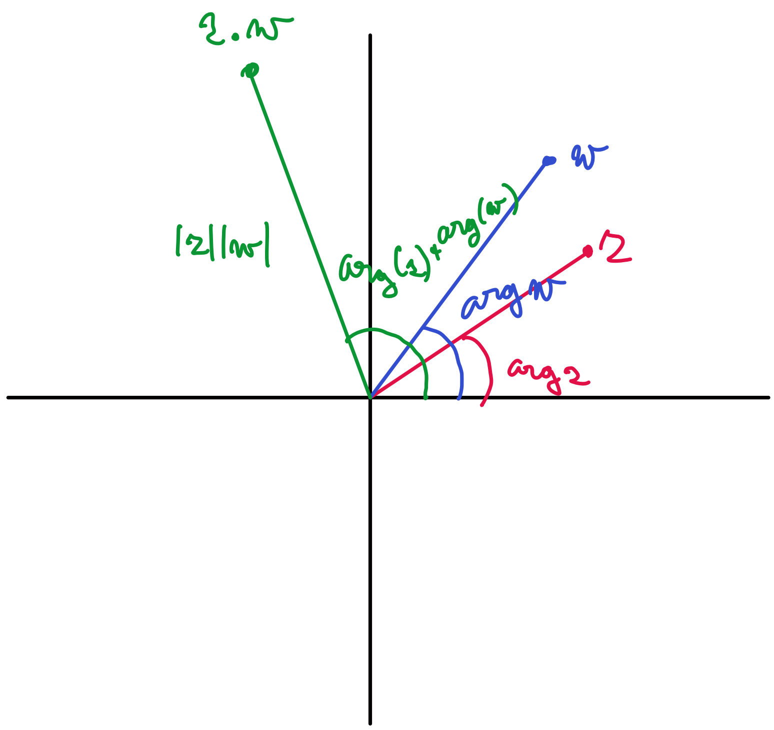
Pokračujeme s použitím vzorcov:

$$= \underbrace{|z||w|}_{\text{súčin absolútnych hodnôt}}(\cos(\underbrace{\arg z + \arg w}_{\text{súčet argumentov}}) + i \cdot \sin(\underbrace{\arg z + \arg w}_{\text{súčet argumentov}}))$$

Teda $|z w| = |z||w|$

$\arg(z w) = \arg z + \arg w$

## Čo tento vzorec značí geometricky?




- sčítame argumenty
- vynásobíme abs. hodnoty

## Príklad:

$z = 2 + 2i \qquad |z| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \qquad \arg z = \frac{\pi}{4}$

$w = -2 + 2i \qquad |w| = 2\sqrt{2} \qquad \arg w = \frac{3}{4}\pi$

$|z\,w| = 8$

$\arg(z\,w) = \frac{\pi}{4} + \frac{3}{4}\pi = \pi$

$z.w = 8.(\cos\pi + i\sin\pi) = 8.((-1) + 0) = \underline{\underline{-8}}$

Overme priamym výpočtom:

$$(2+2i).(-2+2i) = -4 \cancel{-4i} \cancel{+4i} + 4i^2 =$$
$$= -4 + (-4) = \underline{\underline{-8}}$$

## RIEŠENIE ROVNICE $z^n = c$

Rozvinutím vzorca pre násobenie dostaneme vzorec pre mocninu komplexného čísla $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$

$$z^n = |z|^n(\cos(n.\arg z) + i\sin(n.\arg z))$$

Predpokladajme teraz, že máme $n \in \mathbb{N}$ a $c \in \mathbb{C}$ a máme za úlohu riešiť rovnicu $z^n = c$ t.j. hľadať „n-té odmocniny z c".
Upravme obe strany $z^n = c$:

$$|z|^n(\cos(n.\arg z) + i.\sin(n.\arg z)) = |c|(\cos(\arg c) + i.\sin(\arg c))$$

Dostaneme $|z|^n = |c|$ ; teda $|z| = \sqrt[n]{|c|}$

$$\left.\begin{aligned} \cos(n.\arg z) &= \cos(\arg c) \\ \sin(n.\arg z) &= \sin(\arg c) \end{aligned}\right\}$$

aké sú možné hodnoty $\arg z$ spĺňajúce ~~toto~~

zrejme $\arg z = \frac{\arg c}{n}$ je jedným z riešení, ale čo ostatné?

Funkcie sin, cos majú periódu $2\pi$, z toho dostaneme jednotlivo

$$\arg z = \frac{\arg c}{n}$$

$$\arg z = \frac{\arg c + 2.1\pi}{n}$$

$$\vdots$$

$$\arg z = \frac{\arg c + 2.(n-1)\pi}{n}$$

$$\arg z \in \left\{ \frac{\arg c}{n} + \frac{2k\pi}{n} : k \in \{0, \dots, n-1\} \right\}$$

Geometricky:

- riešenia tvoria pravidelný $n$-uholník
- ležia na kružnici s polomerom $\sqrt[n]{|c|}$
- jedno z riešení má $\arg z = \frac{\arg c}{n}$

Príklad: Riešme rovnicu

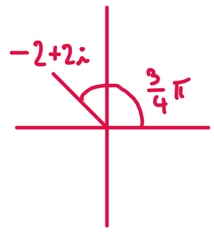
$$z^3 = -2 + 2i$$

Máme $|-2+2i| = \sqrt{8} = 8^{\frac{1}{2}}$, z toho $|z| = \sqrt[3]{|2+2i|} =$

$$= \left(8^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

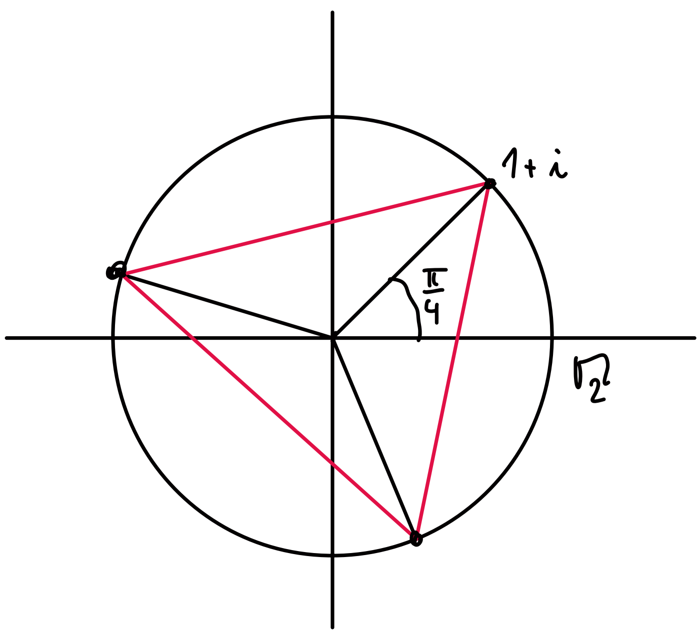
Riešenia teda ležia na kružnici so stredom v 0 a polomerom $\sqrt{2}$.

$\arg(-2+2i) = \frac{3}{4}\pi$




argumenty riešení

$$\frac{\frac{3}{4}\pi}{3} = \frac{\pi}{4} \qquad \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} = \frac{11}{12}\pi \qquad \frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{3} = \frac{19}{12}\pi$$




Jedno z riešení je „pekné", ostatné menej

# JADRO A OBRAZ LINEÁRNEHO ZOBRAZENIA

Odteraz budeme robiť algebru nad všeobecným poľom $K$. Pole $K$ nebudeme explicitne spomínať. Predstaviť si možno $K=\mathbb{R}$, $K=\mathbb{C}$

Najprv opakovanie
- podpriestor vektorového priestoru
- lineárne zobrazenie

Definícia 2.2.1: Nech $f: V \longrightarrow U$ je lineárne zobrazenie. Množina

- $Ker(f)=\{\vec{x} \in V : f(\vec{x})=\vec{0}\}$ sa volá jadro $f$

- $Im(f)=\{\vec{y} \in U : f(\vec{x})=\vec{y}$ pre nejaké $\vec{x} \in V\}$

sa volá obraz $f$ $\square$

Všimnime si, že $Im(f)$ je proste obor hodnôt $f$. Ďalej $Ker(f) \subseteq V$ a $Im(f) \subseteq U$. S lineárnym zobrazením sme teda asociovali dve množiny: jadro a obraz. Poďme ich skúmať.

Tvrdenie 2.2.2: Pre každé lineárne zobrazenie $f: V \longrightarrow U$

a) $Ker(f)$ je podpriestor $V$

b) $Im(f)$ je podpriestor $U$

Dôkaz

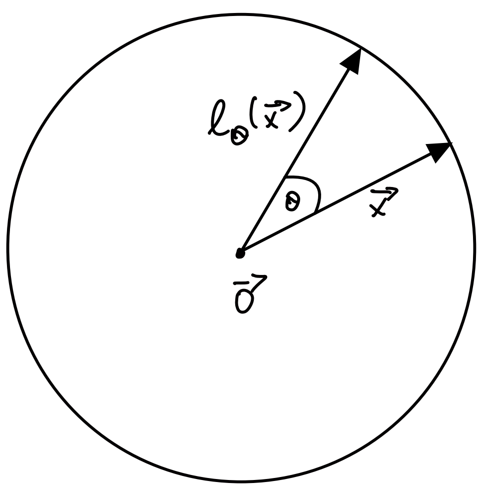
a) Máme dokázať, že $Ker(f) \subseteq V$ je uzavretá na sčítanie vektorov a aj na násobenie vektora skalárom:

- Ak $\vec{x}, \vec{y} \in Ker(f)$, potom $f(\vec{x}) = f(\vec{y}) = \vec{0}$, preto
$$\underbrace{f(\vec{x}+\vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})}_{\text{lebo } f \text{ je lineárne}} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$$
To ale znamená, že $\vec{x}+\vec{y} \in Ker(f)$.
- Ak $\vec{x} \in Ker(f)$ a zároveň $c \in K$, potom
$f(\vec{x}) = \vec{0}$, a ďalej
$$f(c\vec{x}) \underset{f \text{ je lineárne}}{=} c\,f(\vec{x}) = c.\vec{0} = \vec{0}$$
a preto $c\vec{x} \in Ker(f)$

b) Ak $\vec{z}, \vec{w} \in Im(f)$, znamená to, že existujú $\vec{x}, \vec{y} \in V$ také, že $f(\vec{x}) = \vec{z}$, $f(\vec{y}) = \vec{w}$. Preto
$$f(\vec{x}+\vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y}) = \vec{z} + \vec{w}$$
To znamená, že $\vec{z}+\vec{w} \in Im(f)$.

Uzavretosť $Im(f)$ na násobenie skalárom sa dokáže podobne, dôkaz vynechávame. $\square$

Príklad: Uvažujme lineárne zobrazenie „rovinná rotácia o uhol $\Theta$ vľavo", označovali sme ho $l_\Theta$.

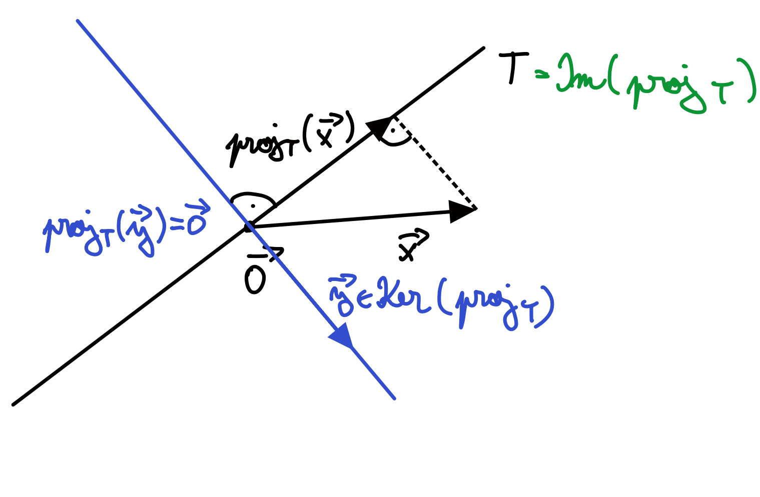



Ľahko vidno, že

$Ker(l_\Theta) = \{\vec{o}\}$

$Im(l_\Theta) =$ celá rovina

Príklad: Nech $T$ je priamka v rovine s počiatkom $\vec{o}$, pričom $\vec{o} \in T$. Zobrazenie „pravouhlá projekcia na $T$", ktoré budeme označovať $proj_T$, je lineárne.
Ako vyzerá $Ker(proj_T)$ a $Im(proj_T)$?

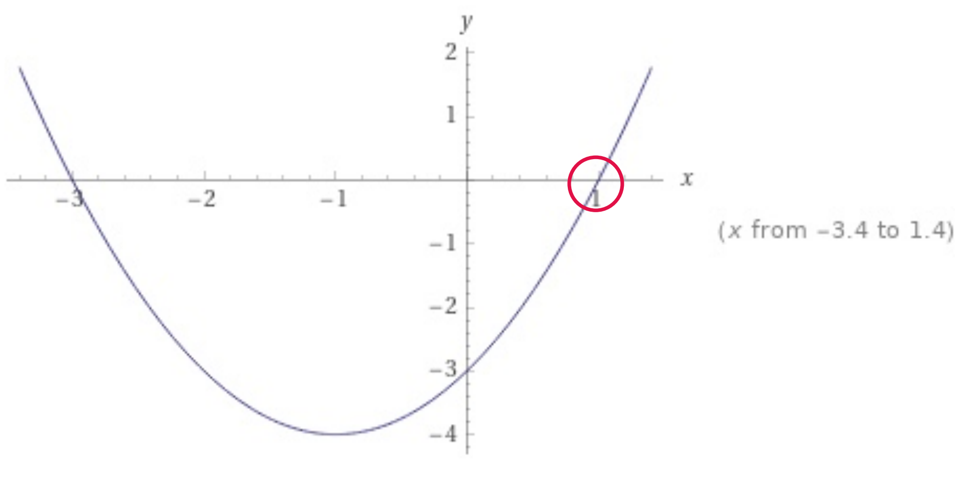


- Ker$(proj_T)$ sú všetky vektory ležiace na priamke kolmej na priamku $T$ prechádzajúcej počiatkom
- Im$(proj_T) = T$

Príklad: Uvažujme zobrazenie $D: \mathbb{R}^3[x] \longrightarrow \mathbb{R}^2[x]$ „derivácia polynómu", $D(p) = p'$. Ker$(D)$ sú tie prvky $\mathbb{R}^3[x]$, ktorých derivácia je $0$, t.j. konštantné funkcie; Im$(D) = \mathbb{R}^2[x]$, pretože každý polynóm stupňa nanajvýš $2$ je deriváciou nejakého polynómu stupňa nanajvýš $3$.

Príklad: Uvažujme zobrazenie $ev_1: \mathbb{R}^2[x] \to \mathbb{R}$ „evaluácia v bode 1", dané predpisom $ev_1(p) = p(1)$. Toto zobrazenie je lineárne. Máme

$$\mathrm{Ker}(ev_1) = \{p \in \mathbb{R}^2[x] \mid p(1) = 0\}$$



Čo je $Im(ev_1)$? Z Tvrdenia 2.2.2 vieme, že to je podpriestor $\mathbb{R}$, teda veľa možností nie je: buď je to $\{0\}$, alebo to je celé $\mathbb{R}$. Iste existuje polynóm $p \in \mathbb{R}^2[x]$, pre ktorý je $ev_1(p) = p(1) \neq 0$, teda $Im(ev_1) \neq \{0\}$, teda $Im(ev_1) = \mathbb{R}$.

Tvrdenie 2.2.3: Nech $f: V \longrightarrow U$ je lineárne zobrazenie vekt. priestorov nad $K$. Potom $Ker(f) = \{\vec{o}\}$ práve vtedy, keď $f$ je injektívne.

Dôkaz

$\Rightarrow$ Predpokladajme, že $Ker(f) = \{\vec{o}\}$

Máme dokázať, že ak $f(\vec{x}_1) = f(\vec{x}_2)$, potom $\vec{x}_1 = \vec{x}_2$.

$$\vec{o} = f(\vec{x}_1) - f(\vec{x}_2) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{linearita}}}{=} f(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)$$

teda $\vec{x}_1 - \vec{x}_2 \in Ker(f)$, teda
$\vec{x}_1 - \vec{x}_2 = \vec{0}$, teda $\vec{x}_1 = \vec{x}_2$.

$\Leftarrow$ Ľahké: Iste $f(\vec{0}) = \vec{0}$, teda
$\vec{0} \in Ker(f)$.

Ak $\vec{x} \in Ker(f)$, potom $f(\vec{x}) = f(\vec{0}) = \vec{0}$
a z injektivity $f$: $\vec{x} = \vec{0}$. $\square$

Veta 2.2.4 (O jadre a obraze)
Nech $f: V \to U$ je lineárne zobrazenie
konečnorozmerných (!) vektorových
priestorov nad poľom $K$.

Potom

$$\dim(V) = \dim(Ker(f)) + \dim(Im(f))$$

Dôkaz

Je to tvrdenie o dimenziách,
dimenzia je počet prvkov bázy.

Položme $n = \dim(Ker(F))$ $m = \dim(Im(F))$.
Máme dokázať, že $\dim(V) = m + n$.

Spravíme to takto: vezmeme bázu $Ker(F)$ a bázu $Im(F)$, vyrobíme z $n+m$ - ticu vektorov z $V$ a dokážeme, že to je báza.

Nech $X = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ je báza $Ker(F)$
$Y = (\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m)$ je báza $Im(F)$

Keďže $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m \in Im(F)$, na každý z nich sa v zobrazení $F$ zobrazí nejaký prvok $V$. Existuje teda (kresli)

$m$ - tica $Z = (\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_m)$ taká, že
$F(\vec{z}_1) = \vec{y}_1, \dots, F(\vec{z}_m) = \vec{y}_m$.

Uvažujme teraz ticu

$$W = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{z}_1, \dots, \vec{z}_m)$$

Tvrdíme, že toto je báza $V$.
Na to musím dokázať, že to je lineárne nezávislá ťica a že $Lo(W) = V$.

Lineárna nezávislosť (z definície)

$$a_1\vec{x}_1 + \dots + a_n\vec{x}_n + b_1\vec{z}_1 + \dots + b_m\vec{z}_m = \vec{0}$$

$$f(a_1\vec{x}_1 + \dots) = \vec{0}$$

$$a_1 f(\vec{x}_1) + \dots + a_n f(\vec{x}_n) + b_1 f(\vec{z}_1) + \dots + \dots = \vec{0}$$

i ATD

$W$ je teda LN.
Zostáva $Lo(W) = V$

Nech $\vec{v} \in V$. Potom $f(\vec{v}) \in Im(f) = Lo(Y)$ a teda

$$f(\vec{v}) = b_1\vec{y}_1 + \dots + b_m\vec{y}_m$$

TRIK

Vezmime $\vec{t} = \vec{v} - (b_1\vec{z}_1 + \dots + b_m\vec{z}_m)$

Tvrdíme, že $\vec{r} \in Ker(f)$. Fakt:

$$f(\vec{r}) = f(\vec{v}) - f(b_1 \vec{z}_1 + \dots + b_m \vec{z}_m) =$$
$$= \dots = f(\vec{v}) - f(\vec{v}) = \vec{0}$$

Ale $\vec{r} \in Ker(f) = Lo(X)$, kde

$$\vec{r} = a_1 \vec{x}_1 + \dots + a_n \vec{x}_n = \vec{v} - (b_1 \vec{y}_1 + \dots + b_m \vec{y}_m)$$
$$\Downarrow$$
$$\vec{v} = a_1 \vec{x}_1 + \dots + a_n \vec{x}_n + b_1 \vec{y}_1 + \dots b_m \vec{y}_m$$

$\square$

Dôsledok 2.2.5

Nech $f : V \longrightarrow U$ je lineárne zobrazenie konečnorozmerných vekt. priestorov, nech $\dim(V) = \dim(U)$.

Potom nasledujúce sú ekvivalentné

a) $f$ je injektívne

b) $f$ je surjektívne

c) $f$ je bijektívne (teda izomorfizmus)

Důkaz

Položme $n = \dim(V) = \dim(U)$.

Potom (vždy) $\dim(\mathrm{Ker}(A)) + \dim(\mathrm{Im}(A)) = n$

a) $\Rightarrow$ b)

a) znamená, že $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = 0$, tedy
$0 + \dim(\mathrm{Im}(A)) = n$, tedy
$\dim(\mathrm{Im}(A)) = n = \dim(U)$
$\mathrm{Im}(A) = U$, tedy
$A$ je surjektivne

b) $\Rightarrow$ a)

b) znamená, že $\mathrm{Im}(A) = U$,
tedy $\dim(\mathrm{Im}(A)) = n$
$\vdots$ DÚ

c $\Rightarrow$ b) zrejme
c $\Rightarrow$ a) zrejmo
a) & b) $\Rightarrow$ c) zrejme $\square$

# HODNOSŤ MATICE

Nech $A \in K^{m\times n}$ je matica:

$$A = \begin{pmatrix} s_1(A) & \dots & s_n(A) \end{pmatrix} \text{ - stĺpce}$$

$$A = \begin{pmatrix} r_1(A) \\ \vdots \\ r_m(A) \end{pmatrix} \text{ - riadky}$$

**Stĺpcová hodnosť A** je dimenzia vektorového priestoru $Lo(s_1(A), \dots, s_n(A))$. Značíme ju $h_S(A)$.

stĺpcový priestor A

**Riadková hodnosť A** je dimenzia vektorového priestoru $Lo(r_1(A)^T, \dots, r_m(A)^T)$. Značíme ju $h_R(A)$.

riadkový priestor A

Tvrdenie 2.02.1.1: Ak $f: V \to U$ je lineárne zobrazenie konečnorozmerných vektorových priestorov, $X$ je báza $V$ a $Y$ je báza $U$, potom

$$h_S([f]_{YX}) = \dim(\mathrm{Im}(f)).$$

Dôkaz: Nerobím.

Tvrdenie: Elementárne riadkové operácie nemenia riadkovú ani stĺpcovú hodnosť matice

Dôkaz: Nerobím.

Tvrdenie: Pre každú maticu $A$ platí $h_R(A)=h_S(A)$

Dôkaz

Upravme $A$ pomocou elementárnych riadkových operácií na stupňovitý tvar:

$$A \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 0 & \bullet & \cdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \bullet & \cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bullet & \cdots \\ 0 & \cdots & & & & & 0 \\ 0 & \cdots & & & & & 0 \end{pmatrix} = B$$

$\bullet$ – vedúce prvky

Vieme, že $h_R(A) = h_R(B)$ a $h_S(A) = h_S(B)$.

Zrejme: nenulové riadky sú báza riadkového priestoru $B$
: stĺpce s vedúcimi prvkami sú báza stĺpcového priestoru $B$.
Ale tieto dve čísla sú rovnaké, teda
$h_R(B) = h_S(B)$ $\square$

Teda riadková a stĺpcová hodnosť matice sú to isté číslo, ktoré sa volá hodnosť matice.

# DIAGONALIZÁCIA, MOTIVÁCIA

Najskôr istá zmena: lineárne zobrazenia budem značiť veľkým písmenom lebo „tak sa to robí". V skutočnosti tam nie je prevládajúca konvencia, mení sa to situačne.

Definícia 3.01 Lineárna transformácia je lineárne zobrazenie vektorového priestoru do seba:

$$A : V \longrightarrow V \qquad \square$$

lineárna transformácia priestoru $V$ / na priestore $V$.

Ak $V$ je konečnorozmerný, každá matica $A$ je štvorcová, samozrejme.

Cieľom tejto, aj ďalších prednášok je hľadať bázu $X$ tak, aby

$[A]_{XX}$ bola čo najjednoduchšia

podľa možnosti diagonálka.

Definícia 3.02: Lineárna transformácia $A: V \longrightarrow V$ na konečnorozmernom vektorovom priestore $V$ je diagonalizovateľná, ak existuje báza $X$ vektorového priestoru $V$ taká, že $[A]_{XX}$ je diagonálna matica.

Prirodzené otázky:

- Je každá lin. transformácia diagonalizovateľná? [nie]
- Ktoré sú? [uvidíme]
- Ak nejaká transformácia má dve diagonálne matice $[A]_{XX}$ $[A]_{YY}$ v dvoch rôznych bázach, musia byť rovnaké? [skoro]

Jedna z vecí, ktoré idú dobre robiť s diagonálnymi maticami: ľahko sa násobia medzi sebou, medziiným sa ľahko umocňujú: (iba príklad)

Motivácia: Fibonacciho postupnosť

$f_0 = 1 \quad f_1 = 1 \quad f_{n+2} = f_n + f_{n+1} \quad n \in \mathbb{N}$

1 1 2 3 5 8

0 1 2 3

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n + f_{n+1} \\ f_{n+1} \end{pmatrix}$$

$A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$A\begin{pmatrix} f_1 \\ f_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_2 \\ f_1 \end{pmatrix} \qquad A\begin{pmatrix} f_2 \\ f_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_3 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

$$A^2\begin{pmatrix} f_1 \\ f_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_3 \\ f_2 \end{pmatrix} \quad \dots \quad \underbrace{A^n}_{\text{toto je škaredá matica}}\begin{pmatrix} f_1 \\ f_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{[A]_{XX}^n}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]_X = \left[\begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix}\right]_X$$

ak nájdeme takú bázu $X$ vektorového priestoru $\mathbb{R}^2$, že $[A]_{XX}$ je diagonálna matica, vieme toto ľahko zrátať.

# ZMENA BÁZY, PODOBNOSŤ MATÍC

Povedzme, že máme danú lineárnu transformáciu $A: V \longrightarrow V$ na konečnorozmernom vektorovom priestore $V$, pomocou matice $[A]_{YY}$. Ak máme inú bázu $X$, ako nájdeme $[A]_{XX}$?

$$[A]_{XX} = [id_V \circ A \circ id_V]_{XX} =$$

$$= [id_V]_{XY} \circ [A]_{YY} \circ \underbrace{[id_V]_{YX}}$$

ako vyzerá táto matica?

Ak $X = (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$

$$[id_V]_{YX} = \begin{pmatrix} [id_V(\vec{x}_1)]_Y & \ldots & [id_V(\vec{x}_n)]_Y \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} [\vec{x}_1]_Y & \ldots & [\vec{x}_n]_Y \end{pmatrix}$$

ak $V = K^n$ a $Y$ je kanonická báza

$Y = E = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$

jednotkové vektory $K^n$

$[\vec{x}_i]_Y = \vec{x}_i$

ako stĺpec

Aký je súčin $[id_V]_{XY}$ $[id_V]_{YX}$?

$$[id_V]_{XY} [id_V]_{YX} = [id_V \circ id_V]_{XX} = I_n \text{ !}$$

Teda sú navzájom inverzné.

Pr.: Lin. transf: osová súmernosť dľa osi I. kvadrantu $A$:

$$[A]_{EE} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$ AKA „prehodenie složiek"

Vezmime $X = ((1,1), (-1,1))$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$[A]_{XX} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\text{diagonálna!}}$$

Toto motivuje nasledujúcu definíciu:

**Definícia 3,03** Dve štvorcové matice rovnakého rozmeru $A, B$ sú *podobné*, ak existuje regulárna matica $P$ taká, že

$$B = P^{-1} A P$$

Značíme $A \sim B$

Tvrdenie 3.04 Ak $A, B, C$ sú štvorcové matice $n \times n$

a) $A \approx A$

b) ak $A \approx B$, potom $B \approx A$

c) ak $A \approx B$ a $B \approx C$, potom $A \approx C$

Dôkaz

a) $A = I^{-1} A I$

b) ak $B = P^{-1} A P$, potom

$$PB = PP^{-1} AP = IAP = AP$$
$$PBP^{-1} = APP^{-1} = AI = A$$

$$(P^{-1})^{-1} B P^{-1} = A \Rightarrow B \approx A$$

c) $B = P^{-1} A P \qquad C = Q^{-1} B Q$

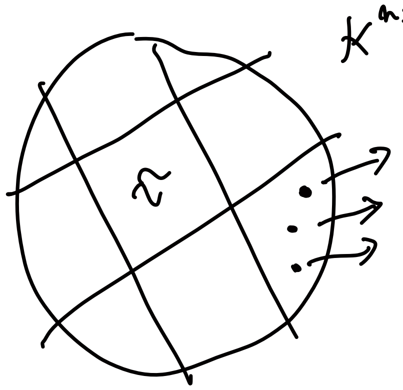
$$C = Q^{-1} P^{-1} A P Q =$$

$$= (PQ)^{-1} A (PQ)$$

$$\Downarrow$$

$A \approx C$ $\square$

Pohľad na vec ako „diagonalizáciu matice"



$K^{n\times n}$ matice $n\times n$

diagonálne

↓ rozklad $K^{n\times n}$ podľa podobnosti

Hľadáme podobnú, diagonálnu maticu.

# VLASTNÉ HODNOTY, VLASTNÉ VEKTORY

Nech $A : V \longrightarrow V$ je lineárna transformácia konečnorozmerného priestoru, $\dim(V)=n$

Hľadáme bázu $X = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ takú, že $[A]_{XX}$ je diagonálna matica.

Čo to znamená?

$$[A]_{XX} = \left( [A\vec{x}_1]_X \quad \dots \quad [A\vec{x}_n]_X \right)$$

toto má byť diagonálna matica

$$[A\vec{x}_1]_X = \begin{pmatrix}\lambda_1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} \qquad [A\vec{x}_2]_X = \begin{pmatrix}0\\\lambda_2\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} \dots$$

$$\dots \; [A\vec{x}_n]_X = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\0\\\lambda_n\end{pmatrix}$$

← toto sú súradnice v báze X

Teda

$$[A\vec{x}_i]_X = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda_i \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{array}{l} \updownarrow \text{ ostatné } 0 \\ \leftarrow \text{ v } i\text{-tom riadku} \\ \updownarrow \text{ aj tu} \end{array}$$

$$A\vec{x}_i = 0 \cdot \vec{x}_1 + \dots 0 + \lambda_i \vec{x}_i + 0 \dots 0 \vec{x}_n = \lambda_i \vec{x}_i$$

Teda každý vektor $\vec{x}$, ktorý sa vyskytuje v tej báze $X$ má vlastnosť

$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ pre nejaký skalár $\lambda \in K$.

Zároveň $\vec{x} \neq \vec{o}$ (lebo $\vec{o}$ nie je v žiadnej báze.

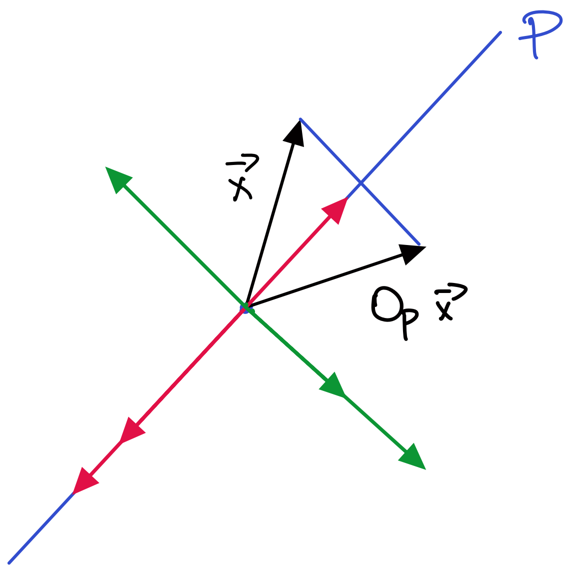
Definícia 2.4.1 Nech $A: V \longrightarrow V$ je lineárna transformácia.

Ak $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$, $\vec{x} \neq \vec{o}$, $\lambda \in K$ potom hovoríme, že $\lambda$ je vlastná hodnota $A$ a $\vec{x}$ je k nej prislúchajúci vlastnej vektor $\square$

Podľa horeuvedených úvah teda dostávame

**Tvrdenie 2.4.2:** Nech $A: V \longrightarrow V$ je lineárna transformácia konečno rozmerného vektorového priestoru $V$, $X$ je báza $V$. Potom $[A]_{XX}$ je diagonálna práve vtedy, keď $X$ pozostáva z vlastných vektorov $A$. $\square$

**Príklad:** Uvažujme lineárnu transformáciu „osová súmernosť" podľa fixnej priamky $p$ v rovine $\rho$ s počiatkom




Aké sú vlastné vektory tohto lineárneho zobrazenia $O_p$?

Sú dvoch druhov.

1) Tie, ktoré ležia na priamke $p$; platí pre ne $O_p(\vec{x}) = \vec{x} = 1\vec{x}$, teda prislúchajú ku vlastnej hodnote 1.

2) Tie, ktoré sú kolmé na P; platí pre ne
$O_P(\vec{x}) = (-1)\vec{x}$, teda prislúchajú vlastnej
hodnote $(-1)$.

Iné vlastné hodnoty ani vektory $O_P$ zrejme nemá.

Rozmýšľajme teraz o nejakej lineárnej transformácii $A: V \to V$. Ako nájsť vlastné hodnoty a vlastné vektory $A$?

Predpokladajme najprv, že o nejakom $\lambda \in K$ vieme, že je vlastnou hodnotou $A$, to znamená

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x} \quad , \vec{x} \neq \vec{0}$$

$$A\vec{x} - \lambda\vec{x} = \vec{0}$$
$$A\vec{x} - \lambda I\vec{x} = \vec{0}$$
$$(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$$
$$\vec{x} \in Ker(A - \lambda I)$$

navzájom ekvivalentné výroky o $\vec{x}$

toto vyzerá ako dobrý accept!

Ak teda vieme, že $\lambda$ je vlastná hodnota vlastné vektory prislúchajúce k $\lambda$ môžeme určiť ako prvky jadra akejsi lineárnej transformácie

Príklad: Uvažujme lineárnu transformáciu vektorového priestoru $\mathbb{R}^2$ danú maticou

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$ v kanonickej báze $\mathbb{R}^2$

Prezradím, že vlastné hodnoty tejto lineárnej transformácie sú

$$\lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = -2$$

Nájdime vlastný vektor prislúchajúci k $\lambda_1 = 2$.

$$A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Ker}(A-\lambda_1 I)$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$x_2 = s \qquad -x_1 + x_2 = 0$

$-x_1 + s = 0$

$s = x_1$

$$\mathrm{Ker}(A-\lambda_1 I) = \{(s,s) : s \in \mathbb{R}\}$$

Napríklad $(1,1)$ je vlastný vektor prislúchajúci k 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \underset{\lambda_1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Keď urobíme to isté pre tú druhú vlastnú hodnotu, dostaneme

$$A - \lambda_2 I = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$3x_1 + x_2 = 0$$

$$x_2 = t$$

$$3x_1 + t = 0$$

$$x_1 = -\frac{1}{3}t$$

$$\ker(A - \lambda_2 I) = \{(-\frac{1}{3}t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

Čiže jeden z vlastných vektorov prislúchajúcich k

$\lambda_2 = -2$ je $(t=1)$ $(-\frac{1}{3}t, t)$

# CHARAKTERISTICKÝ POLYNÓM

Minule: ak $A : V \longrightarrow V$ je lineárna transformácia a $X = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ je taká báza, že $[A]_{XX}$ je diagonálna, potom $\vec{x}_i$ musia byť vlastné vektory:

$$A\vec{x}_i = \lambda_i \vec{x}_i$$

vlastná hodnota

vlastný vektor

Ak poznáme nejakú vlastnú hodnotu $\lambda$ lineárnej transformácie $A$, vieme k nej prislúchajúce vlastné vektory určiť ako prvky množiny

$$\operatorname{Ker}(A - \lambda I)$$

Zmeňme uhol pohľadu:

$\lambda$ je vlastná hodnota

$$\Updownarrow$$

$\operatorname{Ker}(A - \lambda I) \neq \{0\} \iff A - \lambda I$ nie je injektívna

$A-\lambda I : V \longrightarrow V$ je lineárna transformácia

dimenzie týchto je rovnaká

môžeme použiť Dôsledok 2.2.5

$\Downarrow$

$A-\lambda I$ je injektívna
$A-\lambda I$ je surjektívna
$A-\lambda I$ je bijektívna

ekvivalentné

Z toho $A-\lambda I$ nie je injektívna

$\Updownarrow$

$A-\lambda I$ nie je bijektívna

$\Updownarrow$ ~~toto~~ vieme

$Y$ je hociaká báza $[A-\lambda I]_{YY}$ je singulárna matica

$\Updownarrow$ hurá, determinant

$\det([A-\lambda I]_{YY}) = 0$

Dokázali sme vetu.

Veta 2.5.1 Ak $A: V \to V$ je lineárna transformácia a $Y$ je báza $V$, potom $\lambda$ je vlastnou hodnotou $A$ práve vtedy, keď

$$\det([A-\lambda I]_{YY}) = 0 \quad \square$$

Ako vyzerá matica $[A-\lambda I]_{YY}$ ?

Keďže $[A-\lambda I]_{YY} = [A]_{YY} - [\lambda I]_{YY}$

toto je matica $A$ v báze $Y$

ako vyzerá toto?

$$[\lambda I]_{YY} = \lambda \underbrace{[I]_{YY}}_{\text{jednotková matica!}}$$

Teda ak

$$[A]_{YY} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

potom $[A-\lambda I]_{YY} = [A]_{YY} - \lambda [I]_{YY} =$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \lambda & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix}$$

„Vezmi maticu A a odčítaj $\lambda$ od diagonály"

Ale nás zaujímal det tejto matice!
Konkrétne sme chceli vedieť pre ktoré $\lambda \in K$ je $\det [A-\lambda I]_{YY} = 0$.

$$\det\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

rozvoj podľa riadku, stĺpca

POLYNÓM

označenie $\chi(A)$

- Charakteristický polynóm štvorcovej matice je ten determinant (premenná je $\lambda$)
- Vlastné hodnoty sú jeho korene !

Príklad: Vezmime tú maticu z predošlej prednášky

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

a vypočítajme vlastné hodnoty lineárnej transformácie, vekt. priestoru $\mathbb{R}^2$ ktorú reprezentuje táto matica v jednotkovej báze.

$$\det(A-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 3 & -1-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)(-1-\lambda) - 3 =$$

$$= -1 + \lambda - \lambda + \lambda^2 - 3 =$$

$$= \lambda^2 - 4$$

$\lambda^2 - 4 = 0$ má dve riešenia $\lambda_1 = 2$ $\lambda_2 = -2$

Vlastné vektory prislúchajúce k $\lambda_1$, resp. $\lambda_2$ môžeme vybrať z podpriestorov

$$Ker(A - \lambda_1 I) \text{ resp } Ker(A - \lambda_2 I)$$

$Ker(A - 2I) = \{(s, s) : s \in \mathbb{R}\} \leftarrow$ minule

$Ker(A - (-2)I) = ?$

$$\mathrm{Ker}(A-(-2)I) = \mathrm{Ker}(A+2I) =$$

$$= \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$x_2 = t$$
$$3x_1 + x_2 = 0$$
$$3x_1 + t = 0$$
$$3x_1 = -t$$
$$x_1 = -\frac{t}{3}$$

$$\mathrm{Ker}(A-(-2)I) = \left\{\left(-\frac{t}{3}, t\right) : t \in \mathbb{R}\right\}$$

Ale teda báza, v ktorej má A diagonálnu maticu existuje, pozostáva z nenulových vlastných vektorov.

$$X = ((1,1), (-1,3))$$

$$\in \mathrm{Ker}(A-2I) \qquad \in \mathrm{Ker}(A-(-2)I)$$

X je lineárne nezávislá tica, jej počet prvkov je 2, teda to je nutne báza $\mathbb{R}^2$. Preto

$$[A]_{XX} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \leftarrow$$

to síce vieme ale OVERTE TO, nech sa potešíte ako to celé funguje.

Tvrdenie 2.5.2 Každé dve podobné matice majú rovnaký charakteristický polynóm.

Dôkaz. Nech $A \approx B$, t. j.

$B = P^{-1}AP$ pre nejakú regulárnu maticu $P$.

Všimnime si najprv, že $P\underline{I} = \underline{I}P$ a teda

$$\lambda \underline{I} = \lambda \underline{I}\,\underline{I} = \lambda P^{-1}P\underline{I} =$$

$$= \lambda P^{-1} I P$$

Potom $\det(B-\lambda I) = \det(P^{-1}AP-\lambda I) =$

$= \det(P^{-1}AP - P\lambda^{-1}IP) =$

$= \det(P^{-1}(A-\lambda I)P) =$

$= \det(P^{-1}) \cdot \det(A-\lambda I) \cdot \det(P) =$

$= (\det(P))^{-1} \cdot \det(A-\lambda I) \cdot \det(P) =$

$= (\det(P))^{-1} \cdot \det(P) \cdot \det(A-\lambda I)$ $\square$

Dôsledok 2.5.3: Ak $A: V \longrightarrow V$ je lineárna transformácia konečnorozmerného vektorového priestoru a $X, Y$ sú rôzne bázy $V$, potom charakteristické polynómy matíc

$[A]_{XX}$ a $[A]_{YY}$ sú rovnaké.

Dôkaz:

$$[A]_{XX} \approx [A]_{YY} \quad \square$$

Z toho vidíme, že $\chi([A]_{XX})$ nezávisí na voľbe bázy $X$. Teda charakteristický polynóm je vlastnosťou lineárnej transformácie, i keď je formálne definovaný ako vlastnosť matice.

Definícia 2.5.4 Nech $A: V \longrightarrow V$ je lineárna transformácia. Potom spektrum $A$ je množina všetkých vlastných hodnôt $A$. Označenie: $sp(A)$.

Tvrdenie 2.5.5 Nech $A: V \longrightarrow V$ je lineárna transformácia. Potom $0 \in sp(A)$ práve vtedy, keď $A$ nie je bijekcia.

Dôkaz

$$0 \in sp(A) \iff Ker(A - 0I) \neq \{\vec{o}\}$$

$$\iff Ker(A) \neq \{\vec{o}\}$$

$\iff$ A nie je injektívna

$\iff$ A nie je bijekcia $\square$

# DIAGONALIZOVATEĽNÉ A NEDIAGONALIZOVATEĽNÉ LINEÁRNE TRANSFORMÁCIE

Uvažujme lineárnu transformáciu konečnorozmerného priestoru $A: V \to V$. Chceme nájsť bázu $X$ tak, aby $[A]_{XX}$ bola diagonálna. Vieme už, že $X$ musí pozostávať výlučne z vlastných vektorov $A$ a to už stačí: $[A]_{XX}$ je potom diagonálna.

Problém, ktorý môže nastať je ten, že vlastných vektorov $A$ „nie je dosť".

Príklad 2.6.1
Skúsme diagonalizovať $A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\chi(A) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -1 & 3-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$(1-\lambda).(3-\lambda) - 2.(-1) =$$

$$= 3 - 3\lambda - \lambda + \lambda^2 + 2 = \lambda^2 - 4\lambda + 5$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-20}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} = ?$$

Vidíme, že $\chi(A)$ nemá reálne korene, teda $A : V \to V$ nemá vlastné vektory - ale nad $\mathbb{R}$.

Môžeme situáciu vyriešiť tak, že budeme o $A$ uvažovať ako o lineárnej transformácii $A : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ a zmeníme pole z $\mathbb{R}$ na $\mathbb{C}$.

$$\lambda_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{4 \pm 2i}{2} = \begin{cases} 2+i \\ 2-i \end{cases}$$

Ďalej môžeme postupovať ako obvykle: určiť podpriestory $\mathbb{C}^2$

$$\mathrm{Ker}(A - (2+i)\underline{I})$$
$$\mathrm{Ker}(A - (2-i)\underline{I})$$

a vybrať z nich bázu $\mathbb{C}^2$.

$$\begin{pmatrix} 1-(2+i) & 2 \\ -1 & 3-(2+i) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1-i & 2 \\ -1 & 1-i \end{pmatrix}_{\cdot(1+i)} \sim$$

$$\begin{pmatrix} -1-i & 2 \\ -1-i & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1-i & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$x_2 = s$

$$(-1-i)x_1 + 2s = 0$$
$$(-1-i)x_1 = -2s \quad /\cdot(-1)$$
$$(1+i)x_1 = 2s$$
$$x_1 = \frac{2s}{1+i} = \frac{2\cdot(1-i)s}{(1+i)(1-i)} =$$
$$= \frac{(2-2i)s}{2} = (1-i)s$$

$$\mathrm{Ker}(A-(2+i)I) = \{((1-i)s, s) : s \in \mathbb{C}\}$$

a podobne pre tú druhú vlastnú hodnotu.

Definícia 2.6.2 Hovoríme, že pole $K$ je algebraicky úplné ak pre každý polynóm stupňa $n \geq 1$

$$p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \qquad a_0, \dots, a_n \in K, \quad a_n \neq 0$$

existuje $r \in K$ také, že $p(r) = 0$.

Veta 2.6.3 „Základná veta algebry"

Pole $\mathbb{C}$ je algebraicky úplné.

Dôkaz: netriviálny, nerobím. □

Veta 2.6.4 Ak $K$ je algebraicky úplné pole, potom pre každý polynóm $p(x)$ stupňa $n$ platí, že

$$p(x) = a \cdot (x - r_1)(x - r_2) \dots (x - r_n) \qquad r_1, \dots, r_n \in K, \quad a \in K$$

môžu sa opakovať !

nad $\mathbb{R}$ $\quad x^2 - 2x + 1 = (x-1)(x-1)$

Dôkaz: Cez delenie polynómov, nerobím. $\square$

Toto všetko dokopy znamená, že problém s neexistenciou reálnych koreňov charakteristického polynómu môžeme vyriešiť tak, že miesto nad poľom $\mathbb{R}$ budeme pracovať nad poľom $\mathbb{C}$. Toto funguje vždy, pretože každé pole sa dá vnoriť do akéhosi algebraicky úplného poľa.

Žiaľ, toto nie je jediný zdroj problémov s hľadaním bázy pozostávajúcej z vlastných vektorov.

Príklad 2.6.5 Pokúsme sa diagonalizovať lineárnu transformáciu „derivácia polynómu"

$$D: \mathbb{R}^2[x] \longrightarrow \mathbb{R}^2[x]$$
$$D(\vec{p}) = \vec{p}\,'$$

Nájdime maticu v báze $Y = (1, x, x^2)$

$D(1)=0 \quad D(x)=1 \quad D(x^2)=2x$

$[D(1)]_Y=(0,0,0)$
$[D(x)]_Y=(1,0,0)$
$[D(x^2)]_Y=(0,2,0)$

Teda

$$[D]_{YY}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\chi(D)=\det\begin{pmatrix}-\lambda&1&0\\0&-\lambda&2\\0&0&-\lambda\end{pmatrix}=-\lambda^3$$

$\chi(D)=0 \quad -\lambda^3=0 \Rightarrow \lambda=0$

$\downarrow$

jediná vlastná hodnota

Hľadajme jadro $Ker(D-0.I)=$

$=Ker(D)$

parameter sem

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

už stupňovitý tvar, nič netreba upravovať

$a_0 = s$

$0a_0 + 0a_1 + 2a_2 = 0 \Rightarrow 2a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = 0$

$0a_0 + a_1 + 0a_2 = 0 \Rightarrow a_1 = 0$

$$[Ker(D)]_\varphi = \{(s, 0, 0) : s \in \mathbb{R}\}$$

To znamená, že $Ker(D) =$ konštantné polynómy, čo sme vlastne už vedeli.

Teda vlastné vektory $D : \mathbb{R}^2[x] \to \mathbb{R}^2[x]$ sú iba konštantné polynómy.

ALE! Z týchto celkom zjavne nemôžeme vybrať bázu $\mathbb{R}^2[x]$.

Takže $D$ nie je diagonalizovateľná lineárna transformácia. $\square$

Teraz jeden pojem, s ktorým sme doteraz vlastne aj pracovali, ale nenazvali sme ho.

Definícia 2.6.6 Nech $A: V \longrightarrow V$ je lineárna transformácia konečnorozmerného vektorového priestoru, nech $\lambda \in sp(A)$. Podpriestor

$$Ker(A - \lambda I) \subseteq V$$

sa volá vlastný podpriestor prislúchajúci k $\lambda$. $\square$

Ak máme nájsť bázu pozostávajúcu z vlastných vektorov nejakej lineárnej transformácie $A$ ponúka sa tento postup:

# POSTUP PRE NÁJDENIE BÁZY POZOSTÁVAJÚCEJ Z VL. VEKTOROV

Krok 1) Určíme $sp(A)$ ako korene charakteristického polynómu $\chi(A)$.

Krok 2) Pre každú vlastnú hodnotu $\lambda \in sp(A)$ nájdeme bázu vlastného podpriestoru

$Ker(A - \lambda I)$, označme ju

$$X_\lambda = (\vec{x}_{(\lambda,1)}, \vec{x}_{(\lambda,2)}, \dots, \vec{x}_{(\lambda, n_\lambda)})$$

indexujeme dvojicou (vlastná hodnota, číslo)

Krok 3) Bázy $(X_\lambda)_{\lambda \in sp(A)}$ zreťazíme do jednej tice.

Dokážme teraz, že týmto postupom vždy dostaneme lineárne nezávislú ticu vektorov, pretože to nie je zrejmé.

Najprv pomocné tvrdenie:

Lema 2.6.7: Nech $A: V \longrightarrow V$ je lineárna transformácia konečnorozmerného vektorového priestoru $V$.

Nech $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ sú navzájom rôzne vlastné hodnoty $A$.

Nech $X = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m)$ je tica vlastných vektorov, $\vec{x}_i$ prislúcha k $\lambda_i$ pre $i = 1, \dots, m$.

Potom $X$ je lineárne nezávislá.

Dôkaz

Sporom: Predpokladajme, že $X$ je lineárne závislá. Potom sa nejaké $\vec{x}_k$ dá vyjadriť ako lineárna kombinácia predchádzajúcich.

$$(*) \quad \vec{x}_k = a_1 \vec{x}_1 + \dots + a_{k-1} \vec{x}_{k-1} \qquad a_1, \dots, a_{k-1} \in K$$

Iste vieme ale vybrať $\vec{x}_k$ tak aby bolo

čo najviac vľavo, t.j. tak aby
$(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{k-1})$ bola lineárne nezávislá.

Aplikujme teraz $A$ na rovnosť $(*)$ a využime linearitu $A$

$$A\vec{x}_k = A(a_1\vec{x}_1 + \dots + a_{k-1}\vec{x}_{k-1})$$

$$A\vec{x}_k = a_1 A\vec{x}_1 + \dots + a_{k-1} A\vec{x}_{k-1}$$

Pretože tie $\vec{x}_i$, $i = 1, \dots, k$ sú vlastné vektory, máme z toho

$$\lambda_k\vec{x}_k = a_1\lambda_1\vec{x}_1 + \dots + a_{k-1}\lambda_{k-1}\vec{x}_{k-1} \quad (**)$$

Spravme inú vec: vynásobme $(*)$ skalárom $\lambda_k$

$$\lambda_k\vec{x}_k = \lambda_k(a_1\vec{x}_1 + \dots + a_{k-1}\vec{x}_{k-1})$$
$$\lambda_k\vec{x}_k = a_1\lambda_k\vec{x}_1 + \dots + a_{k-1}\lambda_k\vec{x}_{k-1}) \quad (***)$$

Máme dve rovnosti, $(**)$ a $(***)$. Odčítajme ich od seba; $(**) - (***)$ dáva po úprave vľavo a vpravo

$$\vec{0} = a_1(\lambda_1 - \lambda_k)\vec{x_1} + \ldots + a_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)\vec{x_{k-1}}$$

Keďže $(\vec{x_1}, \ldots, \vec{x_{k-1}})$ je lineárne nezávislá tica, máme

$$a_1(\lambda_1 - \lambda_k) = \ldots = a_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k) = 0$$

Ale $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ boli navzájom rôzne, preto $(\lambda_i - \lambda_k) \neq 0$ pre $i = 1, \ldots, k-1$ a teda nutne

$$a_1 = \ldots = a_{k-1} = 0.$$

Ale potom

$$\vec{x_k} = a_1\vec{x_1} + \ldots + a_{k-1}\vec{x_{k-1}} = 0\vec{x_1} + \ldots + 0\vec{x_{k-1}} = \vec{0}$$

a to je spor s predpokladom, že $\vec{x_k}$ je vlastný vektor. $\square$

Ako dôsledok dostávame ihneď jednu postačujúcu podmienku diagonalizovateľnosti.

Dôsledok 2.6.8: Nech $A: V \longrightarrow V$ je lineárna transformácia vektorového priestoru $V$, $\dim(V) = n$.
Ak $\chi(A)$ má $n$ navzájom rôznych koreňov, $A$ je diagonalizovateľná.

Dôkaz Nech $sp(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$.

Vytvorme $X = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ tak, že $A\vec{x}_i = \lambda_i \vec{x}_i$, pre všetky $i = 1, \dots, n$.

Podľa Lemy 2.6.7 je $X$ lineárne nezávislá, a keďže $n = \dim(V)$, je to báza $V$ pozostávajúca z vlastných vektorov $A$, a teda $[A]_{XX}$ je diagonálna. □

Tvrdenie 2.6.9: Nech $A: V \longrightarrow V$ je lineárna transformácia konečnorozmerného vektorového priestoru $V$. Nech $sp(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ a nech $X_1, \dots, X_k$ sú nejaké bázy vlastných podpriestorov $V$ prislúchajúcich postupne k $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. Potom zreťazená tica vektorov

$$X = X_1 X_2 \dots X_k$$

je vždy lineárne nezávislá.

Dôkaz

Nebudem písať úplne formálny dôkaz, idea je takáto:

Napíšeme si lineárnu kombináciu vektorov z X rovnú 0 a rozštrukturujeme si ju po jednotlivých ticiach $X_i$:

$$\vec{0} = \underbrace{a_1\vec{x}_1 + \ldots}_{\vec{x}_i \in X_1} \underbrace{\ldots}_{\vec{x}_j \in X_2} \ldots \underbrace{\ldots + a_n\vec{x}_n}_{}$$

Táto LK nazveme $\vec{v}_1$ | Táto LK nazveme $\vec{v}_2$ | Táto LK nazveme $\vec{v}_k$

„malé lineárne kombinácie"

Každé $\vec{v}_i$, pre $i=1,\ldots,k$ padne do vlastného podpriestoru prislúchajúceho vlastnej hodnote $\lambda_i$ (lebo to je podpriestor)

Máme

$$\vec{0} = \vec{v}_1 + \ldots\ldots + \vec{v}_k .$$

Ak by boli niektoré z $\vec{v}_i$ nenulové, tento by znamenalo, že vieme nájsť netriviálnu lineárnu kombináciu vlastných vektorov prislúchajúcich navzájom rôznym vlastným číslam rovnú $\vec{0}$. To ale nie je pravda, lebo vieme, že platí Lema 2.6.7.

Takže všetky $\vec{v}_i = \vec{0}$, $i = 1, \ldots, k$.

Zostáva pozrieť sa na tie malé lin. kombinácie povedzme prvú:

$$\underbrace{a_1\vec{x}_1 + \ldots + a_m\vec{x}_m}_{\downarrow} = \vec{0}$$

$\vec{x}_i$ tu sú prvky bázy $X_1$ $\Rightarrow$ sú lineárne nezávislé $\Rightarrow$ všetky $a_i = 0$

a takisto pre tie ostatné malé lineárne kombinácie. $\square$

Veta 2.6.10 Lineárna transformácia $A: V \to V$ konečnorozmerného priestoru $V$ je diagonalizovateľná práve vtedy, keď

$$\sum_{\lambda \in sp(A)} \dim(Ker(A - \lambda I)) = \dim(V)$$

Dôkaz

Nech $sp(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$

Vezmime bázy $X_i$ priestorov $Ker(A - \lambda_i)$ a zreťazme ich

$$X = X_1 \dots X_m$$

V $X$ je $\dim(V)$ vektorov, podľa Tvrdenia 2.6.9 je $X$ lineárne nezávislá, teda to je báza pozostávajúca z vlastných vektorov $A$, teda $[A]_{XX}$ je diagonálna. $\square$