MNOŽINY

Definícia 1.1

Množina je súbor objektov, nazývaných **prvky množiny**. Fakt, že objekt x je prvkom množiny A značíme takto:

$$x \in A$$

ak objekt x nepatrí do množiny A, značíme to takto:

$$x \notin A$$

Množiny môžu byť konečné alebo nekonečné. Konečnú množinu môžeme špecifikovať prostým vymenovaním jej prvkov takto

$A = \{1$, slon, , $\{2\}\}$

Platí $1 \in A$, slon $\in A$. Zrejme $4 \notin A$, mačka $\notin A$.

Otázka: platí $2 \in A$? Odpoveď: nie.

Ak si niekto myslí, že áno, musí si myslieť, že objekt 2 je rovný niektorému z objektov, ktoré patria do množiny A. Pravdepodobne si myslí, že

$$2 = \{2\}$$

To však nie je pravda: 2 nie je množina, $\{2\}$ je množina a teda tieto dva objekty nemôžu byť rovné, pretože rovnaké objekty majú rovnaké vlastnosti.

Príkladom nekonečnej množiny je množina všetkých prirodzených čísel

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

Všimnime si, že $0 \in \mathbb{N}$; je možné, že na iných prednáškach to bude konvencia $0 \notin \mathbb{N}$.

Ďalšie množiny čísel, ktoré poznáte zo strednej školy, sú

- množina všetkých celých čísel $\mathbb{Z}$
- množina všetkých racionálnych čísel $\mathbb{Q}$
- množina všetkých reálnych čísel $\mathbb{R}$.

Definícia 1.2. Prázdna množina je množina, ktorá neobsahuje žiadny objekt. Prázdnu množinu značíme $\emptyset$.

Definícia 1.3. Hovoríme, že množina B je *podmnožinou množiny* A, ak pre každý prvok x množiny B platí, že $x \in A$.
Fakt, že B je podmnožinou A značíme $B \subseteq A$. Ak B nie je podmnožinou A, značíme to $B \nsubseteq A$. $\square$

Vzťah $\subseteq$ sa volá „inklúzia".

Príklady:

- Ak $A = \{1, \text{slon}$, , $\{2\}\}$, potom

  $\{1, \text{slon}\} \subseteq A$

  $\{$$\} \subseteq A$

  $\{1, 3\} \nsubseteq A$, lebo $3 \in \{1,3\}$ a zároveň $3 \notin A$

  ! $\{2\} \nsubseteq A$, lebo $2 \in \{2\}$ a zároveň $2 \notin A$

V jazyku formálnej logiky $B \subseteq A$ zapisujeme takto:

$$\overbrace{\underbrace{(\forall x)}_{\text{Pre všetky } x \text{ platí, že}}}^{\text{všeobecný kvantifikátor}} \overbrace{\underbrace{x \in B}_{\text{ak } x \text{ patrí do } B} \Rightarrow \underbrace{x \in A}_{\text{potom } x \text{ patrí do } A.}}^{\text{implikácia}}$$

$$\underbrace{(\forall x)}_{\text{Pre všetky } x \text{ platí, že}} \underbrace{x \in B \Rightarrow x \in A}_{\text{z } x \text{ patrí do } B \text{ vyplýva, že } x \text{ patrí do } A}$$

Iný spôsob zápisu je tento

$$\underbrace{(\forall x \in B)}_{\text{Pre všetky } x \text{ z množiny } B \text{ platí, že}} \underbrace{x \in A}_{x \text{ patrí do } A.}$$

Tieto tri symbolické zápisy sú logicky ekvivalentné, teda vyjadrujú rovnaký vzťah medzi množinami B a A.

V tejto chvíli je dobré uvedomiť si, že prázdna množina je podmnožinou každej množiny. Naozaj, ak by pre nejakú množinu A platilo $\emptyset \nsubseteq A$, musel by existovať prvok x množiny $\emptyset$ taký, že x nepatrí do A. Inak povedané, má platiť

$$x \in \emptyset \text{ a zároveň } x \notin A\,;$$

to však nie je možné, pretože $x \in \emptyset$ neplatí pre žiadny objekt x.

Pri úvahách o vzťahu „byť podmnožinou" sme vlastne používali ~~toto~~ tvrdenie:

Tvrdenie 1.4: Nech A, B sú množiny. Potom $B \nsubseteq A$ práve vtedy, keď existuje $x \in B$ také, že $x \notin A$.

V jazyku formálnej logiky:

$$\underbrace{(\exists x)}_{\text{Existuje také } x,}\ \underbrace{x \in B \wedge x \notin A}$$

Existuje také x, že x patrí do B a zároveň x nepatrí do A.

Kedy sú dve množiny rovné? Keďže množina je súbor objektov do nej patriacich, dve množiny sú rovné, ak obsahujú rovnaké prvky:

$A = B$ práve vtedy, keď pre všetky objekty x platí, že $x \in A$ práve vtedy, keď $x \in B$.

Táto vlastnosť množín sa volá extenzionalita.

Z toho vyplýva nasledujúce tvrdenie

Tvrdenie 1.4: Nech A, B sú množiny. Potom $A = B$ práve vtedy, keď $A \subseteq B$ a zároveň $B \subseteq A$.

Jeden zo spôsobov ako môžeme špecifikovať množinu je vydelenie z nejakej množiny pomocou výroku o prvkoch:

$$\{ x \in A \mid \text{výrok o } x \}$$

Príklady

$$\{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2 \} = \langle 2, \infty)$$

$$\{ x \in \mathbb{R} \mid x > 3 \} = (3, \infty)$$

$$\{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq 4 \text{ a zároveň } x < 100 \} = \langle 4, 100)$$

$$\{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3 \text{ a zároveň } x < 2 \} = \emptyset$$

$$\{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 2 \} = \{ \sqrt{2}, -\sqrt{2} \}$$

$$\{ x \in \mathbb{N} \mid x^2 = 2 \} = \emptyset$$

$$\{ n \in \mathbb{N} \mid (n+1) \text{ je prvočíslo} \} = \{ 1, 2, 4, 6, \dots \}$$

Podobný (ale významovo odlišný) zápis je

$$\{ \text{výraz závislý od } x \mid x \in A \}$$

Príklady:

$$\{ n^2 \mid n \in \mathbb{N} \} = \{0, 1, 4, 9, 16, \dots\}$$

$$\{ \sin(x) \mid x \in \mathbb{R} \} = \langle -1, 1 \rangle$$

KARDINALITA MNOŽINY

Počet prvkov konečnej množiny A sa volá „kardinalita A"

označujeme $|A|$.

Príklady

- $|\{1, 7, 8\}| = 3$
- $|\emptyset| = 0$
- $|\{\{1, 2, 3\}\}| = 1$
- $|\{\emptyset\}| = 1$

OPERÁCIE NA MNOŽINÁCH

Ak A, B sú množiny môžeme z nich vytvoriť inú množinu pomocou množinových operácií.

$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ alebo } x \in B\}$

$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ a zároveň } x \in B\}$

$A \cup B$ sa volá zjednotenie množín A, B

$A \cap B$ sa volá prienik množín A, B

Príklady:

- $\{1,2,3\} \cup \{2,3,4\} = \{1,2,3,4\}$
- $\{1,2,3\} \cap \{2,3,4\} = \{2,3\}$
- $\langle 2,4) \cap \langle 3,5 \rangle = \langle 3,4)$
- $\langle 2,3) \cap \langle 3,5 \rangle = \emptyset$
- $\langle 2,4) \cup \langle 3,5 \rangle = \langle 2,5 \rangle$

- $A \cap A = A \cup A = A$, pre všetky množiny A

$A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$ – rozdiel množín

- $\{1,2,3\} \setminus \{2,3,4\} = \{1\}$

- $\langle 2,4\rangle \cap \langle 3,5) = \langle 2,3)$
- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ = iracionálne čísla
- $A \setminus A = \emptyset$, pre všetky množiny A

KARTÉZSKY / PRIAMY SÚČIN MNOŽÍN

Usporiadané dvojice.
Ak a, b sú nejaké objekty, môžeme z nich vytvoriť objekt zvaný usporiadaná dvojica (a,b).

Dôležité je, že $(a,b) \neq (b,a)$.

$$(a,b)$$

prvá zložka   druhá zložka

Definícia 1.5: Nech A, B sú množiny. Kartézsky súčin $A \times B$ je množina všetkých usporiadaných dvojíc (a,b), kde $a \in A$ a $b \in B$.

Symbolicky: $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$

Príklad: • $\{1,2\} \times \{3,4\} =$
$= \{(1,3), (1,4), (2,3), (2,4)\}$

• $\{1\} \times \{\square, \oplus\} = \{(1,\square), (1,\oplus)\}$

• $\{3,4\} \times \{1,2\} = \{(3,1), (3,2), (4,1), (4,2)\}$

Vidíme, že vo všeobecnosti nie je pravda, že $A \times B = B \times A$.

Otázka: čo je $A \times \emptyset$?

$$A \times \emptyset = \{(a,b) \mid a \in A, \underbrace{b \in \emptyset}_{\text{taký objekt neexistuje!}}\}$$

Teda $A \times \emptyset = \emptyset$ pre každú množinu A.

Nič nám nebráni vytvoriť kartézsky súčin $A \times A$:

Ak $A=\{1,2\}$, potom

$$\underbrace{A\times A}_{\text{druhá kartézska mocnina}}=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$$

Analogicky ako pojem usporiadanej dvojice môžeme vytvoriť pojem usporiadanej trojice, štvorice, n-tice, $n\in\mathbb{N}$.

Pojem kartézskeho súčinu množín môžeme rozšíriť analogicky:

$$A\times B\times C= \qquad A\times B\times C\times D=\{(a,b,c,d): a\in A,\ b\in B,\ c\in C,\ d\in D\}$$

Na tomto predmete nás budú najmä zaujímať tieto množiny

$$\mathbb{R}^1=\mathbb{R}$$
$$\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$$
$$\mathbb{R}^3=\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}.$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$\mathbb{R}^n=\underbrace{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\dots\times\mathbb{R}}_{\text{všetky usporiadané } n\text{-tice reálnych čísel}}$$

Pr.

$(1, \sqrt{2}, -\pi, 17) \in \mathbb{R}^4$

ZOBRAZENIA

Zobrazenia poznáte pravdepodobne pod menom „funkcia"

Definícia: 1.6 Nech A, B sú množiny. Zobrazenie f z A do B je predpis, ktorý každému prvku A priradí nejaký prvok B.

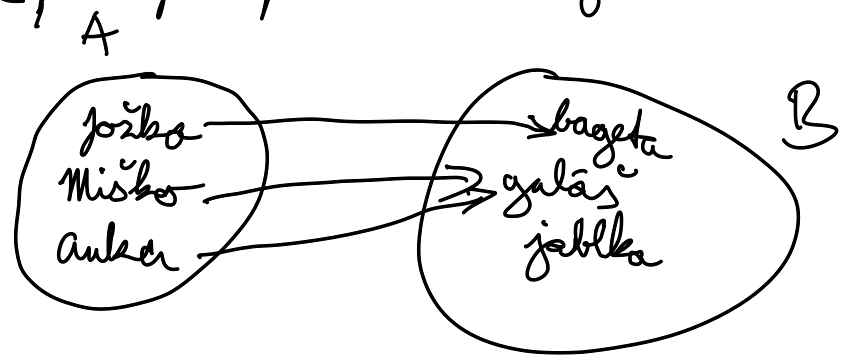
Zapisujeme $f : A \longrightarrow B$

definičný obor (A) koobor (B)

Predpis môže byť daný rôzne. Napríklad ak $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ môžeme predpis niekedy zaznamenať pomocou vzorca, napr.

$$f(x) = x^2 + 1$$

Ale A, B vôbec nemusia byť množiny čísel, a predpis nemusí byť vzorec!



$f : A \longrightarrow B$ „najobľúbenejšie jedlo"

Niekedy A nemá číselnú povahu, B áno

A = všetky adresy v meste
$B = \mathbb{R}$

$d : A \longrightarrow B$ $d(a)$ = najkratšia vzdialenosť pri ceste peši medzi adresou a a SvF STU, v minútach.

d(moje bydlisko) = 80

ZOBRAZENIA (FUNKCIE)

Definícia: 1.6 Nech A, B sú množiny. Zobrazenie f z A do B je predpis, ktorý každému prvku A priradí nejaký prvok B.

Zapisujeme $f: A \longrightarrow B$

A – definičný obor, B – koobor

To znamená, že ak chceme špecifikovať nejaké zobrazenie f, musíme špecifikovať tri veci

1) z ktorej množiny f zobrazuje (definičný obor)
2) do ktorej množiny f zobrazuje (koobor)
3) predpis, ktorý nám určí, pre každý prvok definičného oboru, na ktorý prvok sa ten prvok má zobraziť

Terminológia: Zobrazenia sa často nazývajú funkcie. Obe slová znamenajú to isté, obvykle však funkcia zobrazuje do čísel ($\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$ ...). Ktoré slovo sa použije je otázkou konvencie v danej časti matematiky.

Príklad

$\boxed{g: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}}$ → tato nám hovorí, že g zobrazuje z množiny všetkých prirodzených čísel do množiny všetkých prirodzených čísel

dané predpisom

$\boxed{g(n)} = \boxed{n^2+1}$

- obraz prvku $n \in \mathbb{N}$
  alebo
- hodnota zobrazenia g v (bode) n
  alebo
- g v (bode) n
  alebo
- g n „gé en"

je rovný n^2+1

Predpis je teda v tomto prípade daný vzorcom, ktorý nám počítať hodnoty zobrazenia pre konkrétne prvky definičného oboru g (t. j. prirodzené čísla) dosadením a výpočtom

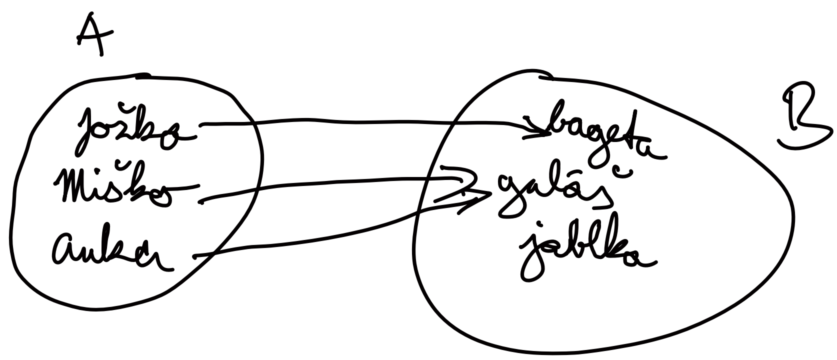
$$g(2) = 2^2 + 1 = 5$$

$g(7) = 7^2 + 1 = 50$

$\underbrace{g(-1)}_{\downarrow} = ?$

toto neexistuje, pretože $-1 \notin \mathbb{N}$ a nie je to teda prvok definičného oboru g.

Príklad:



$j : A \longrightarrow B$ „najobľúbenejšie jedlo"

V tomto prípade je definičný obor aj koobor konečná množina.
Predpis je daný obrázkom, ten nám hovorí o hodnotách j pre jednotlivé A:

z obrázka vidíme, že $j(\text{Miško}) = \text{guláš}$

Iný spôsob špecifikácie predpisu zobrazenia j je napríklad tabuľkou

x	Jožko	Miško	Anka
$j(x)$	bageta	guláš	guláš

tu sa, samozrejme, nesmú prvky opakovať

$\square$

Príklad: Nech H je množina všetkých ľudí (aj z minulosti).

$$\sigma : H \longrightarrow H$$

je zobrazenie dané predpisom

$$\sigma(x) = \text{otec človeka } x \qquad \square$$

Príklad: S - množina všetkých občanov SR.

$$r : S \longrightarrow \mathbb{N}$$

$r(x) =$ rodné číslo

Príklad: $B = \{$bageta, guláš, jablko$\}$

$k: B \to \mathbb{R}$ koľko kalórií

Keďže B je konečná, stačí nám napísať
k(guláš) $= 677$; k(bageta) $= 1114{,}8$;
k(jablko) $= 301{,}4$ $\square$

<u>Formalistická odbočka</u>:

Voči Definícii 1.6 by bolo možné vzniesť (z istého hľadiska oprávnenú) námietku o nepresnosti; používa nejasné slová ako „priradiť" a „predpis". Námietku je možné vyriešiť takto:

Definícia 1.7 (formálna definícia zobrazenia)
Nech A, B sú množiny. Zobrazenie z A do B je množina $f \subseteq A \times B$ taká, že pre každé $a \in A$ existuje práve jedno $b \in B$ také, že $(a, b) \in f$ $\square$

$(a, b) \in f$ v zmysle Definície 1.7 potom znamená $f(a) = b$ v zmysle Definície 1.6.

Aj keď je Definícia 1.7 „presnejšia", v skutočnosti ju bežne nikto nepoužíva, ani nikto bežne nerozmýšľa o zobrazeniach ako o množinách usporiadaných dvojíc. Niekedy sa však 1.7 zíde a preto je dobré vedieť o existencii tohto pohľadu na pojem zobrazenia.

<u>Koniec formalistickej odbočky</u>

Definícia: Nech $f: A \to B$ je zobrazenie. Obor hodnôt f je množina

$$\mathcal{H}(f) = \{f(a) \mid a \in A\} \quad \square$$

Čiže máme $b \in \mathcal{H}(f)$ práve vtedy, keď existuje $a \in A$ také, že $f(a) = b$.

Je dôležité si uvedomiť rozdiel medzi oborom hodnôt a kooborom. Ak napíšeme napríklad

tototo je koobor

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \boxed{\mathbb{R}}$$
$$f(x) = x^2 - x + 1$$

Koobor je $\mathbb{R}$, ale $\mathcal{H}(f) = \langle \frac{3}{4}, \infty)$.

Určiť obor hodnôt zobrazenia môže byť ťažké; na druhej strane keď sa pred naším duševným zrakom zjaví nejaké zobrazenie, vždy je vybavené koroborom. Trochu mätúce môže byť, že koobor sa často neuvádza explicitne a funkcia sa stotožnuje s predpisom.

IDENTICKÉ ZOBRAZENIE

Definícia 1.8: Nech A je množina. Identické zobrazenie (na A) je zobrazenie

$$id_A : A \longrightarrow A$$

dané predpisom $id_A(a) = a$, pre každý prvok $a \in A$ □

ROVNOSŤ DVOCH ZOBRAZENÍ

Definícia 1.9: Nech A, B, C, D sú množiny, nech $f: A \longrightarrow B$, $g: C \longrightarrow D$.

Hovoríme, že f je rovné g, ak $A = C$, $B = D$ a pre všetky $x \in A = C$ platí, že $f(x) = g(x)$ $\square$

Príklad

A) $f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$ dané predpisom $f(k) = \sqrt{k^2}$
$g: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$ dané predpisom $g(k) = |k|$

platí $f = g$

B) $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ dané predpisom $f(k) = \sqrt{k^2}$
$g: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ dané predpisom $g(k) = |k|$

platí $f = g$

C) $f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ dané $f(x) = |x|$
$g: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ dané $g(x) = x$

platí $f \neq g$ (prečo?)

D) $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ dané $f(x) = x+1$
$g: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ dané $g(x) = x+1$

platí $f \neq g$ (prečo?)

uveď $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$

SKLADANIE ZOBRAZENÍ

Definícia: Nech A, B, C sú množiny.
Nech $f: A \longrightarrow B$, $g: B \longrightarrow C$
Potom zložené zobrazenie $g \circ f$ je zobrazenie

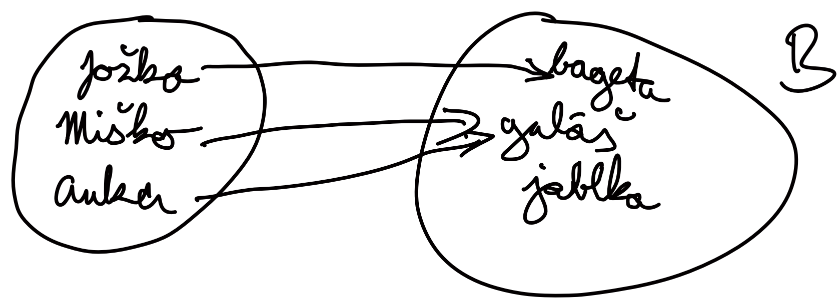
$$g \circ f : A \longrightarrow C$$

upozorniť na to, že cod f = dom B!

dané predpisom

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Príklad zobrazenie j



$k: B \to \mathbb{R}$ koľko kalórií

Keďže B je konečná, stačí nám napísať
$k(\text{guláš}) = 677$; $k(\text{bageta}) = 1114{,}8$;
$k(\text{jablko}) = 301{,}4$ $\square$

Zobrazenie $k \circ j$ „počet kalórií najobľúbenejšieho jedla"

$$k \circ j : A \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(k \circ j)(\text{Miško}) = k(j(\text{Miško})) =$$
$$= k(\text{guláš}) = 677 \quad \square$$

Príklad:

$f: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ $\quad f(k) = |k|$
$g: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ $\quad g(n) = n^2 + 1$
$h: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\quad h(m) = 2m$

$g \circ f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$ $\quad g(f(k)) = g(|k|) =$

$= |k|^2 + 1$

$f \circ g$: neexistuje, tieto funkcie nemôžeme skladať

$g \circ h : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$

$(g \circ h)(x) = g(h(x)) = g(2x) =$

$= (2x)^2 + 1 = 4x^2 + 1$

$h \circ g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$

$h(g(x)) = h(x^2+1) = 2(x^2+1) = 2x^2 + 2$

$g \circ h \neq h \circ g$, ~~lebo~~

$(g \circ h)(0) = 1 \quad (h \circ g)(0) = 1$ $\square$

Cvičenie: Čo je zobrazenie $\sigma \circ \sigma : H \to H$?

Identické zobrazenia sa vzhľadom na skladanie správajú špeciálne:

Tvrdenie 1.10: Nech A, B sú množiny, nech $f: A \to B$ je zobrazenie. Potom platia rovnosti

$$f \circ id_A = f \qquad id_B \circ f = f$$

Dôkaz Máme dokázať, že dve zobrazenia sú rovné. Čo je rovnosť dvoch zobrazení nám hovorí Definícia 1.9

$$f \circ id_A = f \quad id_A : A \to A \quad f : A \to B$$

Teda $f \circ id_A$ existuje a je typu

$$f \circ id_A : A \to B$$

Pre všetky $x \in A$ platí

$$(f \circ id_A)(x) = f(id_A(x)) = f(x).$$

Teda $f \circ id_A = f$ v zmysle Definície 1.9

Dôkaz rovnosti $id_B \circ f = f$ prenechávame čitateľovi ako cvičenie. $\square$

Tvrdenie 1.11: Nech A, B, C, D sú množiny nech

$$f: A \longrightarrow B$$
$$g: B \longrightarrow C$$
$$h: C \longrightarrow D$$

sú zobrazenia.

Potom $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Dôkaz

Obe zobrazenia majú definičný obor A a koobor D.

Pre všetky $x \in A$

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) =$$
$$= h(g(f(x)))$$

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))) \square$$

OBOR HODNÔT ZOBRAZENIA

Definícia: Nech A, B sú množiny, nech $f: A \to B$ je zobrazenie.

Obor hodnôt f je množina

$$\{b \in B : \text{existuje } a \in A \text{ také, že } b = f(a)\}$$

$$\| $$

$$\{f(a) : a \in A\}$$

Obor hodnôt značíme $\mathcal{H}(f)$

Pr.: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = x^2$

$$\mathcal{H}(f) = \langle 0, \infty)$$

Pr: $\sigma: H \to H$

$\sigma(x) =$ otec človeka x

$\mathcal{H}(\sigma)$ - všetci muži, ktorí majú deti.

INJEKCIE, SURJEKCIE, BIJEKCIE

Definícia 1.12 Nech A, B sú množiny, nech $f: A \longrightarrow B$ je zobrazenie. Hovoríme, že

- f je surjekcia (surjektívne, zobrazenie na B) ak pre všetky $z \in B$ platí, že existuje také $x \in A$, že $f(x) = z$
- f je injekcia (injektívne, prosté) ak pre všetky $x, y \in A$ platí, že ak $f(x) = f(y)$, potom $x = y$
- f je bijektívne, ak je injektívne a surjektívne súčasne.

Príklady: $A=\{1,2\}$ $B=\{3,4,5\}$

$f: A \longrightarrow B$

$f(1)=5$ $f(2)=3$

- nie je surjektívna, pretože žiadny prvok A sa nezobrazí na $4 \in B$
- je injektívna

$g: A \longrightarrow B$

$g(1)=4$
$g(2)=4$

- nie je injektívna

$g(1)=g(2)$, ale $1 \neq 2$

Zobrazenie $o : H \longrightarrow H$ z minulej prednášky:

H – množina všetkých ľudí
$o(x)$ – otec človeka x

- Je surjektívne? (nie) prečo?
- Je injektívne (nie) prečo?

Zobrazenie $s : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad s(x) = x^2$
- je injektívne? (nie) prečo?
- je surjektívne? (nie) prečo?

Zobrazenie $s' : \mathbb{R} \longrightarrow \langle 0, \infty)$ $\quad s'(x) = x^2$

- je injektívne? (nie) prečo?
- je surjektívne? (áno) prečo?

Všimnime si, že zobrazenie je surjekcia práve keď je jeho koobor rovný jeho oboru hodnôt.

INVERZNÉ ZOBRAZENIE

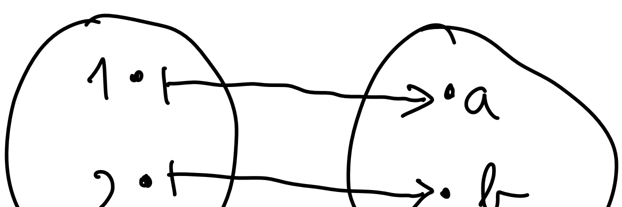
Definícia 1.14: Nech A, B sú množiny, nech $f: A \to B$ je zobrazenie. Potom $g: B \to A$ je inverzné zobrazenie k f, ak platí

$$g \circ f = id_A \qquad f \circ g = id_B \qquad \square$$

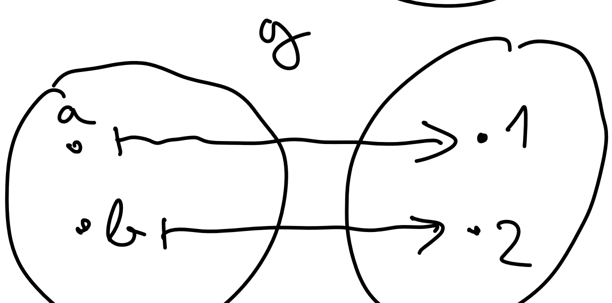
Tvrdenie 1.15: Nech A, B sú množiny $f: A \to B$. f má inverzné zobrazenie práve vtedy, keď f je bijekcia.

Dôkaz: Porozmýšľajte sami. $\square$

Pr $\qquad f: \{1,2\} \to \{a,b\}$



g



g je inverzné zobrazenie k f

Pr: $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ $f(k) = k+1$

Inverzné zobrazenie k f:
$g: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ $g(l) = l - 1$

$$(g \circ f)(k) = g(f(k)) = g(k+1) = (k+1) - 1 = k$$
$$(f \circ g)(l) = f(g(l)) = f(l-1) = (l-1)+1 = l$$

Pr: $s: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $s(n) = n+1$
nemá inverzné zobrazenie, pretože s nie je surjekcia: neexistuje $n \in \mathbb{N}$ také, že $s(n) = n+1 = 0$.

Preskúmajme to bližšie: problém je v tom, že pre inverzné zobrazenie $t: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$s(t(0)) = 0$; ale také $t(0)$ neexistuje.

Tvrdenie 1.16: Každá bijekcia má práve jedno inverzné zobrazenie.

Dôkaz: Nech $f: A \longrightarrow B$ je bijekcia. Podľa Tvrdenia 1.14 má f aspoň jedno inverzné zobrazenie. Nech

$$g_1, g_2 : B \longrightarrow A$$

sú obe inverzné k f. Máme dokázať, že $g_1 = g_2$, to jest, že $g_1(b) = g_2(b)$ pre všetky $b \in B$.

Vieme pritom $(*)\ f \circ g_1 = f \circ g_2 = id_B$
$(**)\ g_1 \circ f = g_2 \circ f = id_A$

$(*)$ znamená, že
pre všetky $b \in B$ $f(g_1(b)) = f(g_2(b)) = b$

$(**)$ znamená, že

pre všetky $a \in A$ $g_1(f(a)) = g_2(f(a)) = a$

$f(g_2(b)) = b$ ← aplikujme g_1 na obe strany

$$g_1(f(\underbrace{g_2(b)}_{\text{toto je nejaký prvok } A})) = g_1(b) \quad (+)$$

ale pre všetky $a \in A$ $\quad g_1(f(a)) = a$

ak pre všetky, tak aj pre $a = g_2(b)$

teda $g_1(f(g_2(b))) = g_2(b) \quad (++)$

Ak dáme $(+)$ a $(++)$ dokopy, dostaneme

$$g_1(b) = g_2(b) \quad \square$$

Ak teda $f: A \longrightarrow B$ je bijekcia, existuje jediná $\underbrace{f^{-1}}_{\text{toto je novozavedené označenie}}: B \longrightarrow A$ inverzná k f.

LINEÁRNE ROVNICE

Definícia 2.3 Lineárna rovnica nad $\mathbb{R}$ o n neznámych je rovnica tvaru

$$(*) \quad a_1x_1 + \dots + a_nx_n = c \qquad n \geq 1, n \in \mathbb{N}$$

Kde $a_1, \dots, a_n, c$ sú dané prvky $\mathbb{R}$ (fixné); riešenie tejto rovnice je taká n-tica $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, že po dosadení do $(*)$ je vzniknutý výrok pravdivý. $\square$

Pr.

$$3x_1 + 2x_2 + (-1)x_3 = 7$$

toto, samozrejme, zapisujeme ako

$$3x_1 + 2x_2 - x_3 = 7$$

Niektoré riešenia: $(x_1, x_2, x_3) = (1, 2, 0)$
$(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, -7)$

Je ich, samozrejme, nekonečne veľa

Definícia 2.4: Sústava k lineárnych rovníc o n neznámych nad $\mathbb{R}$ je usporiadaná k-tica rovníc o n neznámych nad $\mathbb{R}$.

$k, n \geq 1$

Neznáme sú rovnaké pre všetky rovnice.

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= c_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= c_2 \\
&\ \vdots \\
a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n &= c_k
\end{aligned}
$$

Riešenie sústavy je taká usp. n-tica

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

ktorá je riešením každej rovnice v sústave. □

Pr.: $3x_1 + x_2 = 1$ $\quad x_1 = -1$ $\quad$ jediné riešenie

$\quad\ \ x_1 - x_2 = \cancel{1}\ -5$ $\quad x_2 = 4$

pri riešení použi znak $\sim$!

- Čo sme robili? Menili sme sústavu tak, aby zmenená sústava mala rovnakú množinu riešení.

- „Transformujeme problém na iný tak, aby sa riešenia nezmenili“

- „Ekvivalentný problém“

Aké úpravy môžeme robiť so sústavou lineárnych rovníc tak, aby sa nezmenila množina všetkých riešení?

Môžeme napríklad:

(1) vymeniť dve rovnice v sústave medzi sebou
(2) vynásobiť rovnicu nenulovou konštantou (prečo nenulovou?)
(3) pripočítať ľubovoľný násobok jednej rovnice k druhej

ZÁPIS SÚSTAVY ROVNÍC MATICOU

Opisovať premenné je otravné a zbytočné, zapíšeme zo sústavy len to podstatné.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & c_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} & c_k \end{pmatrix}$$

rozšírená matica sústavy

pravá strana

matica sústavy

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - 7x_3 &= 14 \\ -x_1 \qquad + 4x_3 &= -7 \\ x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

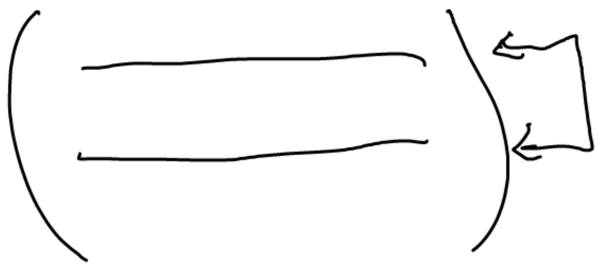
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -7 & 14 \\ -1 & 0 & 4 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

sem sa pri maticiach sústav dáva čiara

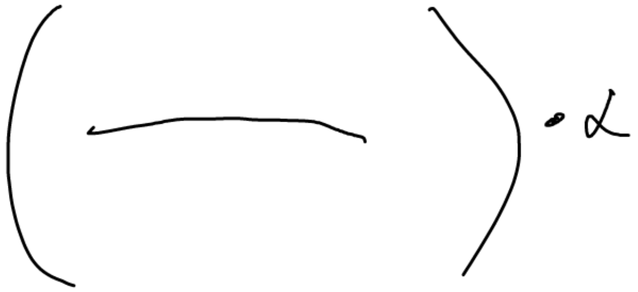
Vrátime sa späť k sústavám:

Elementárne riadkové operácie (ERO)

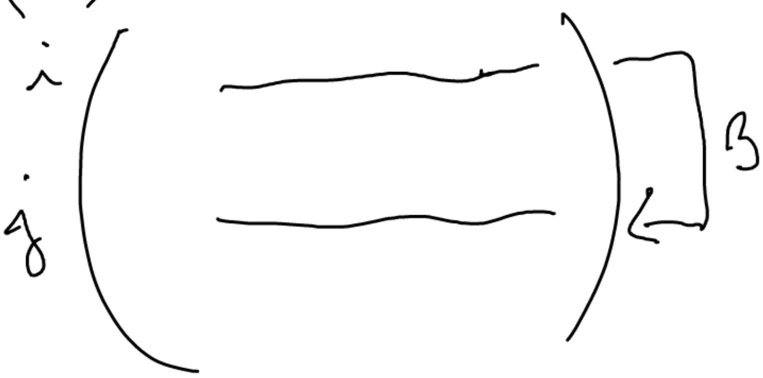
(1) výmena riadkov



(2) vynásobenie riadku konštantou $\alpha \neq 0$
$\alpha \in \mathbb{R}$



(3)



pripočítame
β-násobok riadku i
k riadku j

Ekvivalencia sústav lineárnych rovníc

Definícia Dve sústavy k lineárnych rovníc o n neznámych nad $\mathbb{R}$ sú ekvivalentné, ak majú rovnakú množinu riešení. Označenie: $\sim$ □

Veta 2.5 Dve sústavy lineárnych rovníc sú ekvivalentné ak existuje postupnosť ERO, ktorou sa dá jednu upraviť na druhú. □

Dôkaz neuvádzam

Z toho vyplýva, že pri hľadaní riešenia sústavy lineárnych rovníc môžeme postupovať tak, že postupnosťou ERO upravíme maticu na „krajší" tvar tak, že výslednej matici už vieme nájsť riešenie ľahko.

Definícia 2.6 Ak A je matica typu $m \times n$, potom vedúci prvok i-teho riadku matice je najľavejší nenulový prvok toho riadku:

$$a_{ij} \neq 0 \text{ a zároveň } a_{il} = 0 \text{ pre všetky } 1 \leq l < j$$

$$r_i(A) = (0 \dots 0 \ a_{ij} \dots \dots)$$

Definícia 2.7. Hovoríme, že matica A typu $\mathbb{R}^{m \times n}$ je v stupňovitom tvare, ak

a) ak $r_i(A) \neq (0 \ldots 0)$ a zároveň $r_k(A) = (0 \ldots 0)$, potom $i < k$

Každý nenulový riadok je nad každým nulovým riadkom.

b) Ak a_{ij} je vedúci prvok i-tého riadku
a_{kl} je vedúci prvok k-tého riadku

$i < k$

potom aj $j < l$.

Vedúci prvok vyššieho riadku leží viac vľavo ako vedúci prvok nižšieho riadku.

Pr.

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & -11 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$ nie je (prečo?)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ nie je (prečo?)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ nie je (prečo?)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{je} \quad \checkmark$$

GAUSSOVA ELIMINAČNÁ METÓDA

riešenia sústavy lineárnych rovníc

POSTUP

1) Úpravami nájsť maticu v stupňovitom tvare, ktorá je ekvivalentná rozšírenej matici sústavy

2) Metódou spätného dosadzania nájsť riešenie

* Namiesto popisu algoritmu predvediem na príkladoch. 1)

* Treba 1 sústavu s jediným riešením,
  1 sústava s nekonečne veľa riešeniami (2 parametre)
  1 sústavu, ktorá nemá riešenie

A) Sústava s jediným riešením

$$\begin{aligned} 2x_2 + x_3 &= -8 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 &= 0 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 &= 3 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & -8 \\ 1 & -2 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -8 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{+1} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -8 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

- 2 možnosti (obe, samozrejme, vedú k tomu istému riešeniu)

I) - pripočítaj $\frac{1}{2}$ násobok r_2 k r_3

II) - vymeň r_2 a r_3
(aby bola na diagonále -1),
~~potom~~ pripočítaj 2 násobok r_2 k r_3

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -8 \end{array}\right) \xrightarrow{+2} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

stupňovitý tvar

$$x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0$$
$$-x_2 - x_3 = 3$$
$$-x_3 = -2$$

$$x_3 = 2$$

$$-x_2 - 2 = 3 \quad /+2$$
$$-x_2 = 5$$
$$x_2 = -5$$

$$x_1 - 2\cdot(-5) - 3\cdot 2 = 0$$
$$x_1 + 10 - 6 = 0$$
$$x_1 + 4 = 0$$
$$x_1 = -4$$

Riešenie

$$(x_1, x_2, x_3) \in \{(-4, -5, 2)\}$$

množina všetkých riešení je jednoprvková

B) Sústava s nekonečne veľa riešeniami (2 parametre) (napísať ju ako rovnice aj)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 0 \\ 6 & -3 & -3 & 18 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \leftarrow \cdot(-1) \\ \\ \leftarrow \cdot(-3) \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 6 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \cdot(-2) \\ \leftarrow \cdot(+3) \end{array}$$

$$
\begin{array}{cccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\
\end{array}
$$

$$
\left(\begin{array}{cccc|c}
2 & -1 & 0 & 4 & 2 \\
0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
$$

- Riešení bude nekonečne veľa; je veľa spôsobov ako ich vyjadriť.
- Naučíme sa 1 z nich.

stĺpce bez vedúceho prvku budú parametre

- Snažíme sa nájsť vyjadrenie množiny všetkých riešení v tvare

$$\{(\ \ ,\ \ ,\ \ ,\ \ ) : s, t \in \mathbb{R}\}$$

tu budú výrazy závislé na s, t

$$x_4 = s$$
$$x_3 - 2x_4 = 0$$
$$x_3 - 2s = 0$$
$$x_3 = 2s$$
$$x_2 = t$$

chyba

$$2x_1 - x_2 + 4x_4 = 2$$
$$2x_1 - t + 4s = 2$$
$$2x_1 = 2 + t - 4s \quad / \cdot \tfrac{1}{2}$$
$$x_1 = 1 + \tfrac{1}{2}t - \cancel{\tfrac{1}{2}s}\ 2s$$

Množina všetkých riešení

$\{(1+\frac{1}{2}t-\cancel{\frac{1}{2}}^{2}s, t, 2s, s) : s,t\in\mathbb{R}\}$

Príklady riešení $s,t=0$ $(1,0,0,0)$

$s=1$ $t=-1$ $(0,-1,2,1)$

$(0,0,0,0)$ nie je riešením! prečo? ako to vidno?

c) Sústava bez riešenia

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -6 & 12 \\ 2 & 4 & 12 & -17 \\ 1 & -4 & -12 & 22 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot(-2) \\ \cdot(-1) \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -6 & 12 \\ 0 & 8 & 24 & -41 \\ 0 & -2 & -6 & 10 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -6 & 12 \\ 0 & -2 & -6 & 10 \\ 0 & 8 & 24 & -41 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ +4 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -6 & 12 \\ 0 & -2 & -6 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

→ ako vyzerá toto ako rovnica?

Množina všetkých riešení: $\emptyset$

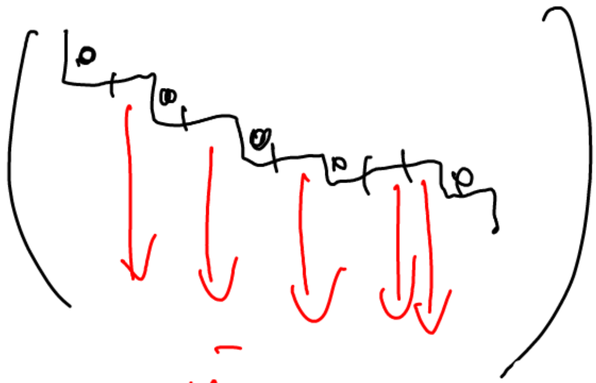
Zopakovať (nabudúce?)

1) stupňovitý tvar

2) spätné dosadzanie

A) riadok typu $(0\ 0\ \dots\ 0 \mid a)$

znamená, že nemá riešenie $a \neq 0$

B) 

- indexy stĺpcov bez vedúcich prvkov sú indexy, v ktorých dávame parametre.
- ak nie sú, máme jedné riešenie

- Záver: spomenúť GEJM (úprava na redukovaný stupňovitý tvar matice)
- Bude určite, keď budeme rátať inverzné matice; viac roboty s elimináciou, menej so spätným dosádzaním

VEKTORY A OPERÁCIE S NIMI

Sila lineárnej algebry spočíva v tom, že umožňuje viac pohľadov na rovnaký pojem. Tieto pohľady sú veľmi silne prepojené - niekedy sa medzi nimi ani nerozlišuje a plynule sa prechádza z jedného do druhého.

<u>Vektor</u> môže byť:

(*) množina všetkých orientovaných úsečiek v rovine / priestore, ktoré majú rovnakú veľkosť a smer.

(**) Zvoľme bod O v rovine / priestore. Vektor je orientovaná úsečka s počiatkom v tomto bode (môžeme ju stotožniť s jej druhým krajným bodom; potom vektor = bod)

(***) Usporiadaná n-tica reálnych čísel; $n=2$ pre rovinu a $n=3$ pre priestor.

(****) Prvok vektorového priestoru.

Zostaneme pri výklade pojmov v rovine; zovšeobecnenie do priestoru je priamočiare.

Typografické pravidlo:

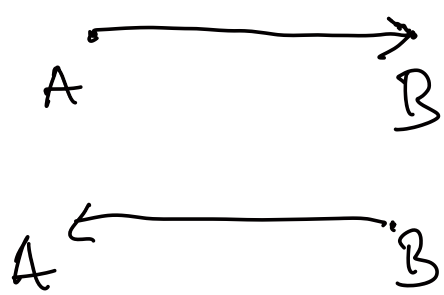
- vektory budeme písať so šípkou: $\vec{x}, \vec{y}, \vec{u}$.

Teraz:

Vysvetliť/nakresliť prechody medzi

$$(*) \xrightarrow{\text{výber počiatku}} (**) \xrightarrow{\text{voľba súradnicových osí}} (**)$$

Všetci asi vieme, čo je úsečka; orientovaná úsečka je úsečka s vybratým krajným bodom. Keďže úsečka nenulovej dĺžky má dva krajné body, každej úsečke nenulovej dĺžky zodpovedajú dve orientované úsečky:



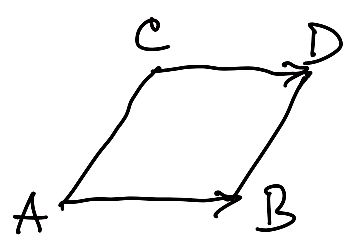
Vybratý bod je ten bez šípky; je to počiatok toho vektora.

Podľa (*) je (jeden!) vektor množina všetkých (!) orientovaných úsečiek, ktoré majú rovnakú veľkosť a smer.

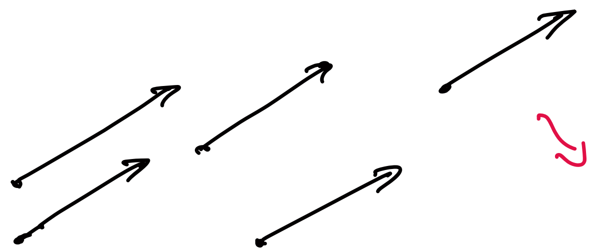
- veľkosť orientovanej úsečky je jej dĺžka
- čo je smer je akosi tiež jasné

Asi najčistejší spôsob, ako na úrovni geometrie popísať veľkosť a smer je, že dve orientované úsečky AB a CD s vybratými bodmi A, resp. C majú rovnakú veľkosť a smer práve vtedy, keď platí jedna z týchto možností

- $|AB| = |CD| = 0$ - nulový vektor
- $AB = CD$
- ABDC je rovnobežník s uhlopriečkami AD, BC.



Teda vektor v zmysle (*) si môžeme predstaviť takto:

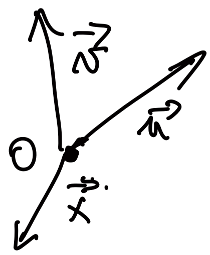


všetky takéto šípky

(*) je úplne v poriadku, ale manipuluje sa s tým pojmom zle, pretože každý vektor je potom nekonečná množina.

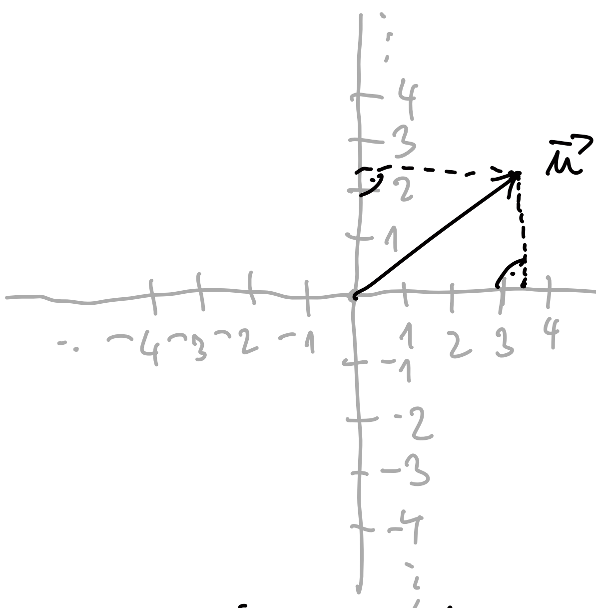
Poradíme si takto: vyberieme v rovine jeden ľubovoľný bod, nazveme ho „počiatok" a budeme ho označovať O.

V každej množine orientovaných úsečiek, ktorá je vektorom v zmysle (*) máme práve jednu orientovanú úsečku, ktorá má počiatok v O. Túto vyberieme z vektora v zmysle (*) a máme vektor v zmysle (**).



Všimnime si, že jeden z vektorov zodpovedá orientovanej úsečke OO; hovoríme mu **nulový vektor** a značíme ho $\vec{O}$.

Umiestnime teraz v rovine dve kópie číselnej osi: vodorovnú a zvislú tak, aby sa pretínali v bode O



$\vec{u} \longmapsto \left(3\tfrac{1}{2}, 2\tfrac{1}{2}\right) \in \mathbb{R}^2$

→ „súradnicové osi"

Priemet koncového bodu orientovanej úsečky reprezentujúcej vektor $\vec{u}$ v pravom uhle na osi nám určuje usporiadanú dvojicu reálnych čísel a naopak,

z usporiadanej dvojice reálnych
čísel vieme zrejmým spôsobom dostať
vektor ako orientovanú úsečku s počiatkom
v bode O.
Pritom nulový vektor $\vec{O}$ zodpovedá dvojici
$(0,0)$.

Voľba osí v rovine nám určuje bijekciu

vektory v rovine $\rightleftarrows$ $\mathbb{R}^2$
(body)

To, že sa body v rovine dajú jednoducho
(a užitočne) vyjadrovať ako dvojice
čísel je prekvapujúco mladý objav:
pochádza z roku 1637, vymyslel
to René Descartes.

Zaujímavé je, že v tom čase sa
už vyše tisíc rokov používali sférické
súradnice pre určovanie polohy na
Zemi pomocou rovnobežiek a poludníkov.

Zavedme teraz terminológiu týkajúcu sa $\mathbb{R}^n$, ktorú budeme používať:

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

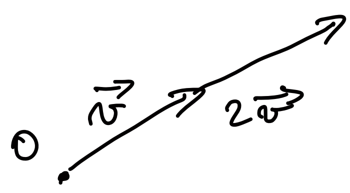
x_i - i-ta zložka vektora $\vec{x}$

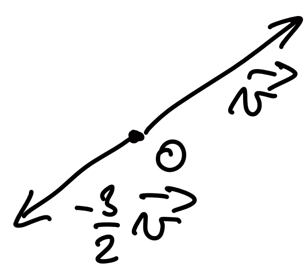
OPERÁCIE S VEKTORMI

- "Škálovanie" = Násobenie vektora „skalárom"
  ↓
  číslo z $\mathbb{R}$

Ak $a \in \mathbb{R}$ a $\vec{v}$ je vektor, potom $a.\vec{v}$ je vektor $|a|$-krát predĺžený / skrátený.

Ak $a > 0$, $(a\vec{v})$ a $\vec{v}$ sú orientované rovnako; ak $a < 0$ $(a\vec{v})$ a $\vec{v}$ sú orientované opačne



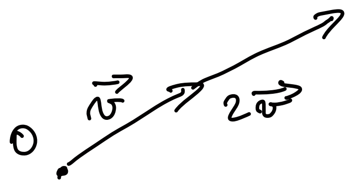


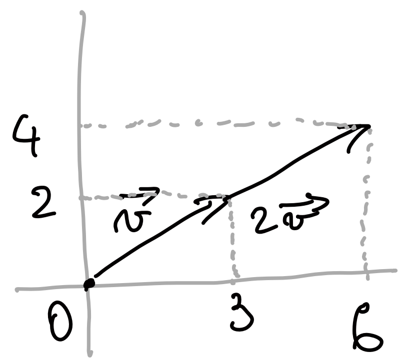
Ak $a = 0$, $\vec{v} = \vec{0}$.

voľba súradnicových osí

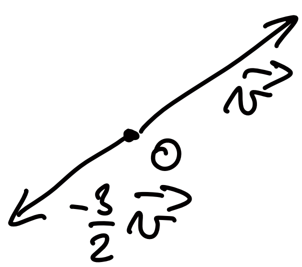
$\downarrow$

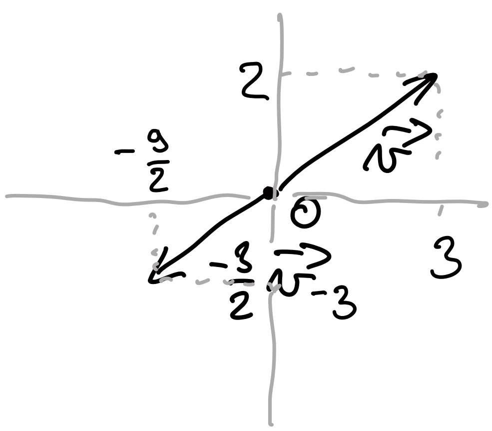
GEOMETRIA $\rightleftarrows$ ALGEBRA





$$2\vec{v} = 2(3,2) = (2\cdot 3, 2\cdot 2) = (6,4)$$



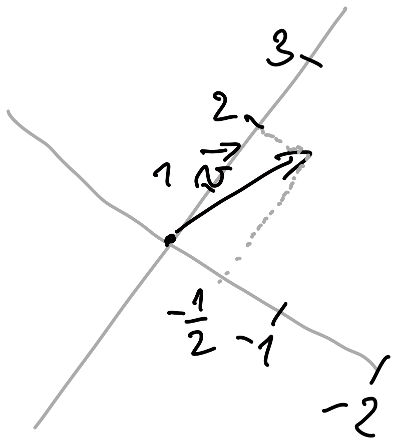


$$-\frac{3}{2}\vec{v} = -\frac{3}{2}(3,2) = \left(-\frac{3}{2}\cdot 3, -\frac{3}{2}\cdot 2\right) = \left(-\frac{9}{2}, -3\right)$$

a funguje to aj v priestore, kde samozrejme použijeme tri osi.

Vidíme, že operácii škálovania (násobenie $\alpha \in \mathbb{R}$) (geometrická operácia) zodpovedá vynásobenie usporiadanej n-tice skalárom α vo všetkých zložkách n-tice.

Je dôležité si teraz uvedomiť, že korešpondencia medzi vektormi v geometrickom zmysle a usporiadanými n-ticami závisí na voľbe osí. Môžeme napríklad obe osi otočiť a na jednej z nich zväčšiť vzdialenosti medzi číslami dvojnásobne:



$$\vec{v} = \left(-\frac{1}{2}, 2\right)$$

Tým sa bijekcia (vektory v rovine) $\rightleftarrows \mathbb{R}^2$ zmení.

Ale to, že škálovanie zodpovedá násobeniu skalárom po zložkách bude stále platiť.

Definícia 3.1 (násobenie vektora skalárom v $\mathbb{R}^n$)
Nech $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, nech $a \in \mathbb{R}$. Potom
$$a \cdot \vec{x} = a\vec{x} = (ax_1, \dots, x_n) \quad \square$$

Príklad: $5.(7,-\pi,4,0)=(35,-5\pi,20,0)$

Vlastnosti násobenia vektora skalárom

- Pre všetky vektory $\vec{x}\in\mathbb{R}^n$, $a,b\in\mathbb{R}$ platí

$$(a.b).\vec{x} = a.(b.\vec{x})$$

násobenie dvoch reálnych čísel

násobenie vektora skalárom

Prečo? ak $\vec{x}=(x_1,\dots,x_n)$

$$(a.b).\vec{x}=(a.b).(x_1,\dots,x_n)=(\underbrace{(ab)x_1}_{\text{toto sú už všetko násobenia čísel}},\dots,(ab)x_n)=$$

$$=(a(bx_1),\dots,a(bx_n))=a(bx_1,\dots,x_n)=$$
$$=a(b(x_1,\dots,x_n))=a(b\vec{x})$$

- Pre všetky $\vec{x}\in\mathbb{R}^n$ platí $0\vec{x}=\vec{0}$, $1\vec{x}=\vec{x}$.

Ako vyzerá $(-1)\vec{x}$ geometricky?

$$(-1).\vec{x} = (-1)(x_1, \dots, x_n) = (-x_1, \dots, -x_n)$$

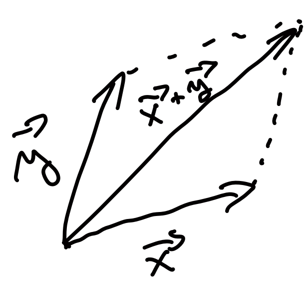
Preto zavádzame $-\vec{x}$ ako skratku pre $(-1)\vec{x}$. Táto notácia sa chová tak, ako očakávame, napríklad platí $-(-\vec{x}) = \vec{x}$:

lebo $a(b\vec{x}) = (ab)\vec{x}$

$$-(-\vec{x}) = (-1).((-1)\vec{x}) = ((-1).(-1))\vec{x} =$$
$$= 1.\vec{x} = \vec{x}$$

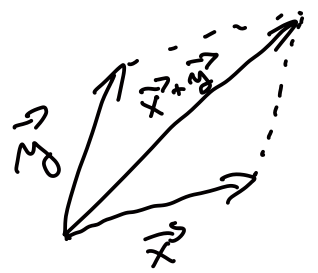
Sčítanie vektorov

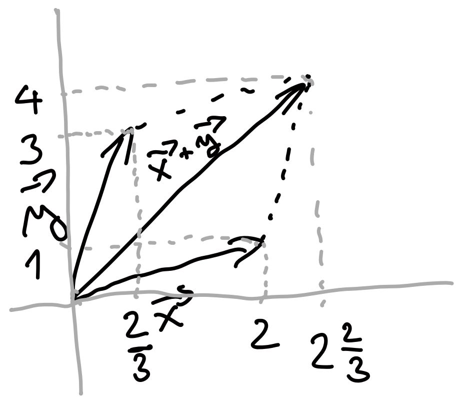
Geometricky sa operácia sčítania vektorov zavádza rovnobežníkovým pravidlom:



Ak je jeden z vektorov $\vec{0}$, definujeme (prirodzene)
$$\vec{x} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{x} = \vec{x}$$

Na alebraickej strane tejto geometrickej operácii zodpovedá „sčítanie po zložkách":





$\vec{x}+\vec{y} = (2,1)+(\frac{2}{3},3) =$

$= (2\frac{2}{3}, 4)$

Opäť, ako v prípade násobenia skalárom, tento vzťah medzi geometrickou operáciou sčítania vektorov a algebraickou operáciou sčítania po zložkách nezávisí na voľbe osí.

Definícia 3.2 (Sčítanie vektorov v $\mathbb{R}^n$)
Nech $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{x}=(x_1,\dots,x_n)$ $\vec{y}=(y_1,\dots,y_n)$.
Potom

$$\vec{x}+\vec{y} = (x_1,\dots,x_n)+(y_1,\dots,y_n) =$$

$$= (x_1+y_1,\dots,x_n+y_n).$$

Pr.: $(1,3,-2,0)+(0,\sqrt{2},1,4) = (1,3+\sqrt{2},-1,4)$

Vlastnosti sčítania vektorov v $\mathbb{R}^n$

Pre všetky vektory $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n$ platia rovnosti

- $(\vec{x}+\vec{y})+\vec{z} = \vec{x}+(\vec{y}+\vec{z})$ (asociativita)
- $\vec{x}+\vec{y} = \vec{y}+\vec{x}$ (komutativita)
- $\vec{x}+\vec{0} = \vec{0}+\vec{x} = \vec{x}$
- $\vec{x}+(-\vec{x}) = (-\vec{x})+\vec{x} = \vec{0}$

Dôkazy sú priamočiaro, napr.:

sčítanie vektorov

$$
\begin{aligned}
\vec{x}+\vec{y} &= (x_1,\dots,x_n)+(y_1,\dots,y_n) = \\
&(x_1+y_1,\dots,x_n+y_n) = \\
&(y_1+x_1,\dots,y_n+x_n) = \\
&(y_1,\dots,y_n)+(x_1,\dots,x_n) = \vec{y}+\vec{x}
\end{aligned}
$$

sčítanie čísel

a podobne pre ostatné rovnosti.

Násobenie skalárom a sčítanie vektorov sú navzájom prepojené pomocou distributivity:

- Pre všetky $a \in \mathbb{R}$ a $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ platí

$$a(\vec{x} + \vec{y}) = \underbrace{a\bar{x} + b\vec{y}}$$

násobenie skalárom má prednosť pred sčítaním vektorov

- Pre všetky $a, b \in \mathbb{R}$ a $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ platí

$$(a+b)\vec{x} = a\vec{x} + b\vec{x}$$

POZOR! Neexistuje nič také ako „násobenie" vektorov medzi sebou.

Avšak nič nám nebráni zaviesť odčítanie vektorov: $\vec{x} - \vec{y}$ definujeme ako

$$\vec{x} - \vec{y} = \vec{x} + (-\vec{y}) = \vec{x} + (-1)\vec{y}$$

– je teda „odvodená operácia", zavedená pomocou vyskladania zo sčítania a násobenia (−1).

Samozrejme (ako ľahko vidno), odčítanie vektorov prebieha tiež „po zložkách":

$$(x_1, \dots, x_n) - (y_1, \dots, y_n) = (x_1 - y_1, \dots, x_n - y_n)$$

VEKTORY Z $\mathbb{R}^n$ SÚ STĹPCE

Odteraz až do konca letného semestra budeme na tomto predmete stotožňovať

čiarky!

$$(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

toto je vektor „v skutočnosti"

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \to \text{„matica } n \times 1\text{"}$$

tieto dve veci sa rovnajú, len sú inak zapísané.

Teda

$$(-1,2,4) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Budeme úplne plynule prechádzať medzi týmito dvoma zápismi usporiadaných n-tíc.

LINEÁRNE KOMBINÁCIE

Definícia 3.3:

m-tica vektorov

Nech $\vec{v_1}, \dots, \vec{v_m} \in \mathbb{R}^n$
$a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$

Potom lineárna kombinácia vektorov $\vec{v_1}, \dots, \vec{v_m}$ s koeficientami $a_1, \dots, a_m$ je vektor

$$a_1 \vec{v_1} + \dots + a_m \vec{v_m} \quad \square$$

Príklad:

$$\vec{v_1} = (-1,3,4) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

$$\vec{v_2} = \left(\frac{1}{2}, 0, 1\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

$a_1 = 3 \quad a_2 = 2$

$$a_1\vec{v_1} + a_2\vec{v_2} = 3(-1,3,4) + 2\cdot\left(\frac{1}{2}, 0, 1\right) =$$

$$= (-3, 9, 12) + (1, 0, 2) =$$

$$= (-2, 9, 14) \in \mathbb{R}^3$$

Príklad: Zistite, či je $(1,2) \in \mathbb{R}^2$ lineárnou kombináciou vektorov $(-1,1)$, $(-2,5)$ a určte koeficienty tej lineárnej kombinácie.

Zapíšeme problém

$$a_1(-1,1) + a_2(-2,5) = (1,2)$$

vektory sú stĺpce

$$a_1\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

ako je definované násobenie skalárom?

$$\begin{pmatrix}a_1\cdot(-1)\\a_1\cdot 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}a_2\cdot(-2)\\a_2\cdot 5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

ako je definované sčítanie vektorov?

$$\begin{pmatrix}a_1\cdot(-1) + a_2\cdot(-2)\\a_1\cdot 1 + a_2\cdot 5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

dva vektory z $\mathbb{R}^2$ sú rovné, ak sú rovné po zložkách!

má teda naraz platiť

$$\left.\begin{aligned} -a_1 + (-2)a_2 &= 1 \\ a_1 + 5a_2 &= 2 \end{aligned}\right\}$$

aha, sústava lineárnych rovníc

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \end{array}\right) \underset{+1}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} -a_1 - 2a_2 &= 1 \\ 3a_2 &= 3 \end{aligned}$$

$$3a_2 = 3 \Rightarrow \underline{\underline{a_2 = 1}}$$

$$\begin{aligned} -a_1 - 2 \cdot 1 &= 1 \\ -a_1 - 2 &= 1 \\ -a_1 &= 3 \\ \underline{\underline{a_1}} &\underline{\underline{= -3}} \end{aligned}$$

$$(-3) \cdot (-1, 1) + 1 \cdot (-2, 5) = (1, 2)$$

ZÁKLADY MATICOVÉHO POČTU

Pripomenutie: matica typu $m \times n$ je obdĺžniková tabuľka s n riadka-mi a m stĺpcami; inak povedané: šírka je n a výška je m:

prvky matice

$$\begin{array}{cc} m \text{ riadkov} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = A \\ & n \text{ stĺpcov} \end{array}$$

Pozície v matici typu $m \times n$ sú usporiadané dvojice kladných prirodzených čísel (i, j), kde $1 \leq i \leq m$ a $1 \leq j \leq n$. Inými slovami: pozície v matici sú $\{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}$.

Číslo v matici na pozícii (i, j) referencujeme pomocou dvojitého indexu, napr. a_{ij}, b_{ij}.

Množina všetkých (reálnych) matíc typu $m \times n$ sa značí $\mathbb{R}^{m \times n}$. Podľa pravidla „vektory sú stĺpce" stotožňujeme

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n \times 1}$$

...je to isté ako...

Zápis matice pomocou predpisu je tvaru

$$\begin{pmatrix} \text{predpis} \\ \text{pre prvok} \\ \text{na pozícii } i,j \end{pmatrix}_{m \times n}$$

$m \times n$ – dve prirodzené čísla

Pr:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} i+j \end{pmatrix}_{2\times 3}}_{} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$i+j$ – predpis je teraz výraz závislý na i,j

Pr:

$$\begin{pmatrix} i \cdot j \end{pmatrix}_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Tento zápis budeme používať mnoho razy na vyjadrenie maticových operácií.

Podobne môžeme napísať napríklad

$$\ldots \text{ nech } A = (a_{ij})_{m \times n} \ldots$$

čím špecifikujeme typ matice A a aj to, že jej prvky označujeme a_{ij}.

Riadky a stĺpce matice

Ak $A = (a_{ij})_{m \times n}$, potom

$$r_i(A) = (a_{i1} a_{i2} \ldots a_{in})$$

je i-ty riadok matice A

$$s_j(A) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

je j-ty stĺpec matice A.

Pár druhov matíc:

Štvorcové matice sú matice typu $n \times n$.
Ak $A = (a_{ij})_{n \times n}$ je štvorcová matica, potom **(hlavná) diagonála** matice je tvorená prvkami $(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$

diagonála

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Diagonálna matica je štvorcová matica, ktorá má všetky prvky okrem diagonálnych rovné 0.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Nulová matica je matica, ktorá má všetky prvky rovné 0. Značíme ju O. Nemusí byť nutne štvorcová.

Jednotková matica je diagonálna matica, ktorá má na diagonále všade 1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

Jednotkovú maticu typu $n \times n$ značíme I_n; ak n je nešpecifikované, značíme I.

Súčet matíc

Nech $A = (a_{ij})_{m \times n}$
$B = (b_{ij})_{m \times n}$

sú dve matice rovnakého typu $m \times n$. Potom súčet matíc A, B je matica

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}$$

Pr:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \sqrt{2} \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A+B = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & \sqrt{2} \\ -1 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Sčítať môžeme iba dvojice matíc rovnakého typu.

Násobenie matice skalárom

Nech $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $c \in \mathbb{R}$. Potom

$$c.A = (c.a_{ij})_{m\times n}$$

bodka sa nepíše vždy

Pr.

$$-2\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -6 \\ 0 & -2 & 14 \end{pmatrix}$$

Zrejme doteraz zavedené operácie na maticiach manipulujú s maticami ako s „vektormi" z $\mathbb{R}^{n.m}$; v tomto zmysle nie sú pre nás ničím novým. Samozrejme, platia pre sčítanie a násobenie skalárom rovnaké pravidlá ako pre vektory.

Vlastnosti súčtu matíc a násobenia matice skalárom

Pre každú trojicu matíc A, B, C rovnakého typu a každú dvojicu $a, b \in \mathbb{R}$ platí

$A + B = B + A$ (komutativita $+$)

$(A+B)+C = A + (B+C)$ (asociativita $+$)

$A + 0 = 0 + A = A$ (0 je neutrálna vzhľadom na $+$)

nulová matica, jej typ je nutne rovnaký ako typ A

$1A = A$

$(ab)A = a(bA)$

$(a+b)A = aA + bA$

$a(A+B) = aA + aB$

Transpozícia matice

Nech $A = (a_{ij})_{m \times n}$. Potom A transponovaná (alebo transpozícia A) je matica

$$A^T = (a_{ji})_{n \times m}$$

Pr.:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Vlastnosti transpozície matice

Pre každú dvojicu matíc A, B rovnakého typu a $c \in \mathbb{R}$ platí

$$(A^T)^T = A$$
$$(A+B)^T = A^T + B^T$$
$$(aA)^T = a(A^T)$$

Symetrická matica je taká matica, že

$$A = A^T$$

Každá symetrická matica je štvorcová (prečo?).

Pr.:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 4 & 2 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$ je symetrická matica

Každá diagonálna matica je (zrejme) symetrická.

Teraz ideme definovať súčin matíc; najskôr to urobíme pre špeciálny prípad matíc $1\times n$ a $n\times 1$. To nám umožní definovať všeobecný súčin matíc.

Súčin riadku a stĺpca

Uvažujme teraz dve matice, jedna typu $1\times n$ (riadok) a druhá typu $n\times 1$ (stĺpec). Ich súčin je <u>skalár</u> daný predpisom

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \end{pmatrix}}_{\text{typ } 1\times n} \overbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}^{\text{typ } n\times 1} = y_1x_1 + \dots + y_nx_n = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i$$

Pr.:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 1.2 + (-1).4 + 0.3 = 2 - 4 + 0 = -2$$

Súčin matíc

Nech A je typu $m \times n$
B je typu $n \times k$

počet stĺpcov A
$\parallel$
n
$\parallel$
počet riadkov B

Potom súčin matíc A, B je matica

$$A.B = AB = \left(r_i(A)\, s_j(B) \right)_{m \times k}$$

m: počet riadkov A

k: počet stĺpcov B

Pr.:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 4 & 8 \\ 1 & 7 & -2 & 4 \\ 1 & 4 & -11 & -2 \end{pmatrix}$$

typ 3x2 typ 2x4 typ 3x4

- Prechádzame postupne cez všetky usporiadané dvojice
  (riadok ľavej, stĺpec pravej)
  $r_i(A)$ $s_j(B)$
- Pre každú dvojicu vyrobíme ich súčin a umiestnime to číslo do výslednej matice na pozíciu (i, j).

Vlastnosti násobenia matíc

$A.(B.C) = (A.B).C$ (asociativita)

DÚ: porozmýšľajte či sedia typy

Toto nie je zrejmé, ale priamy dôkaz je prácny a neposkytuje žiadny vhľad do veci, preto ho neurobím.

$$A.(B+C) = AB + AC$$
$$(A+B).C = AC + BC$$

} distributivita zľava, sprava

$$(AB)^T = B^T A^T$$

$$a.(A.B) = (aA).B$$

násobenie skalárom

násobenie matíc

Ak A je matica typu $m \times n$, potom

$$I_m A = A I_n = A$$

jednotkové matice typu $m \times m$, resp. $n \times n$

$$0A = A0 = 0$$

← nulová matica „správneho typu"

<u>POZOR!</u> Operácia násobenia matíc <u>nie je</u> komutatívna.

Teda <u>nie je</u> pravda, že pre matice platí $AB = BA$.

V prvom rade, ak existuje AB musí byť počet stĺpcov A rovný počtu riadkov B:

A je typu $m \times n$
B je typu $n \times k$

Aby súčin $B \cdot A$ vôbec existoval, musí byť $m = k$, ale to nie je vo všeobecnosti pravda.

Ale čo ak sú A, B štvorcové matice rovnakého typu? Potom AB aj BA existujú a majú aj rovnaký typ.

Skúsme:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Ničmenej, pre niektoré dvojice matíc platí, že $AB = BA$, napríklad $AO = OA = O$

Prirodzená otázka „pre ktoré dvojice matíc platí $AB = BA$" je obtiažna, hlboká, dôležitá.

MATICE AKO ZOBRAZENIA VEKTOROV

Uvažujme maticu $A = (a_{ij})_{m\times n}$; sprava ju môžeme vynásobiť vektorom (t.j. stĺpcom) typu $n \times 1$; výsledok je opäť stĺpec typu $m\times 1$ (t.j. vektor)

Pr.

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & \frac{1}{2} \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -2 \end{pmatrix}$$

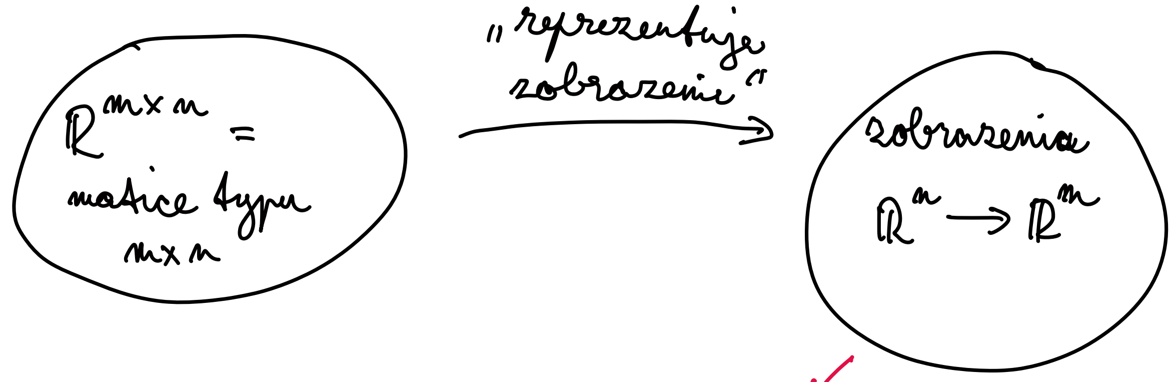
Týmto spôsobom máme s každou maticou A typu $m\times n$ asociované zobrazenie

$$[\![A]\!] : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

maticu a s ňou asociované zobrazenie stotožníme

dané predpisom $[\![A]\!](\vec{x}) = A\vec{x}$, alebo (slovne) „vynásob vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ maticou A zľava".

Máme teda nejaký typ matematického objektu (zobrazenie z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$) reprezentovaný iným objektom (matica typu $m\times n$).



POZOR! nie všetky zobrazenia sú reprezentovateľné maticami.

Témou tohto textu je preskúmať väzbu medzi maticami a zobrazeniami, ktoré reprezentujú.

Teraz uvedieme niekoľko matíc a popíšeme zobrazenia, ktoré reprezentujú. Ak to budeme vedieť, sformulujeme aj „význam" toho zobrazenia – geometrický alebo iný.

Nulové matice: Uvažujme nulovú maticu typu $m\times n$. Aké zobrazenie $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ táto matica reprezentuje?

Počítajme:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}}_{0 \in \mathbb{R}^{m \times n}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^n} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^m}$$

Vidíme teda, že nulová matica reprezentuje zobrazenie z $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, ktoré zobrazí každý vektor z $\mathbb{R}^n$ na prvok $\vec{0} = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^m$, t.j. konštantné zobrazenie s hodnotou $\vec{0}$. Asi nikoho neprekvapí, že toto zobrazenie sa značí 0.

Jednotkové matice a ich skalárne násobky

Spomeňme si, že jednotková matica I_n je diagonálna matica typu $n \times n$, ktorá má na diagonále samé 1. Preskúmajme, aké zobrazenie reprezentuje:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}}_{I_n \in \mathbb{R}^{n \times n}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^n} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^n}$$

Vidíme teda, že $I_n \vec{x} = \vec{x}$ pre všetky vektory $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, a teda I_n reprezentuje identické zobrazenie $id_{\mathbb{R}^n}$; $[\![I_n]\!] = id_{\mathbb{R}^n}$

Pozrime sa teraz na trochu všeobecnejší prípad: nech D_α je diagonálna matica typu $n \times n$, ktorá má na diagonále tú istú konštantu $\alpha \in \mathbb{R}$ a určme, aké zobrazenie takáto matica reprezentuje.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha \end{pmatrix}}_{D_\alpha \in \mathbb{R}^{n \times n}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^n} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \alpha x_3 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^n} = \underbrace{\alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\text{násobenie vektora skalárom}}$$

Teda (symbolicky) $D_\alpha \vec{x} = \alpha \vec{x}$, pre všetky $\alpha \in \mathbb{R}$ a $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

Všimnime si, že (keďže $D_0 = 0$ a $D_1 = I_n$) z toho dostávame spätne ako špeciálne prípady $\alpha = 0$, $\alpha = 1$

$D_0 = O$ $\quad D_\alpha \vec{x} = \alpha\vec{x}$ $\quad O\vec{x} = \vec{o}$

nulová matica

$$O\vec{x} = D_0\vec{x} = 0\vec{x} = \vec{o}$$

$$I_n\vec{x} = D_1\vec{x} = 1\vec{x} = \vec{x} = id_{\mathbb{R}^n}(\vec{x}).$$

$D_1 = I_n$ $\quad D_\alpha\vec{x} = \alpha\vec{x}$

D. Ú.: Popíšte zobrazenia reprezentované diagonálnymi maticami.

Súčty a priemery

Každá matica $A \in \mathbb{R}^{1\times n}$ (riadok) reprezentuje zobrazenie $[\![A]\!] : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^1$.

prvky $\mathbb{R}^1$ sú usporiadané 1-ice; $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$

Uvažujme špeciálne maticu z $\mathbb{R}^{1\times n}$ obsahujúcu iba 1; máme

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

Zobrazenie z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$ reprezentované touto maticou je teda dané jednoducho ako „súčet zložiek vektora"

Podobne $\left(\frac{1}{n} \cdots \frac{1}{n}\right)$ reprezentuje zobrazenie „priemer zložiek vektora"

$$\left(\frac{1}{n} \cdots \frac{1}{n}\right)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{x_1}{n} + \ldots + \frac{x_n}{n} = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$$

Pravouhlá projekcia na priamku

Vezmime si teraz maticu $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Táto reprezentuje zobrazenie $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Predpis tohto zobrazenia rozpísaný do zložiek nájdeme ľahko:

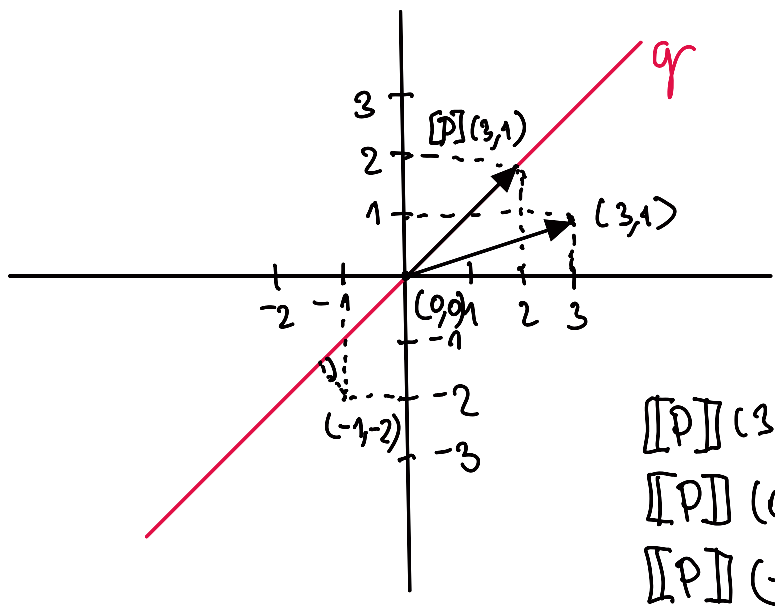
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \end{pmatrix}$$

obe zložky sú vždy rovnaké

Pokúsme sa interpretovať toto zobrazenie geometricky; stotožnime vektory z $\mathbb{R}^2$ s vektormi v rovine prostredníctvom nejakých dvoch navzájom kolmých súradnicových osí.

Pre každý vektor $\vec{x}$ má $P\vec{x}$ obe složky rovnaké. Geometricky ~~toto~~ znamená, že $P\vec{x}$ leží na priamke q prechádzajúcej počiatkom:

$$q = \{(t,t) : t \in \mathbb{R}\}$$



$[\![P]\!](3,1) = (2,2)$

$[\![P]\!](0,0) = (0,0)$

$[\![P]\!](-1,-2) = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$

Po vyskúšaní pár bodov dospejeme k hypotéze, že $[\![P]\!](\vec{x})$ je „priemet $\vec{x}$ na q v pravom uhle". Táto hypotéza je naozaj pravdivá. Je možné ju dokázať „holými rukami", ale rozumnejšie je odložiť jej dôkaz naneskôr, do druhého semestra, keď budeme mať k dispozícii mocnejšie nástroje.

Rovinná rotácia

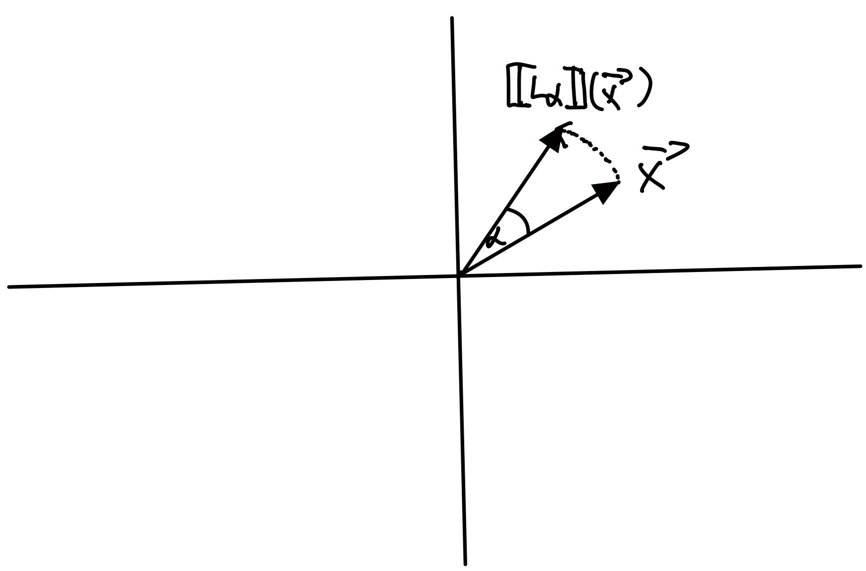
Uvažujme, pre $\alpha \in \langle 0, 2\pi)$ maticu

$$L_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Máme

$$[\![L_\alpha]\!](x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1\cos\alpha - x_2 \sin\alpha \\ x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Geometrický význam tohto zobrazenia je „rotácia proti smeru hodinových ručičiek o uhol α vľavo okolo počiatku"



Toto nebudeme dokazovať teraz, ale dokážeme to neskôr.

Osová súmernosť dľa priamky

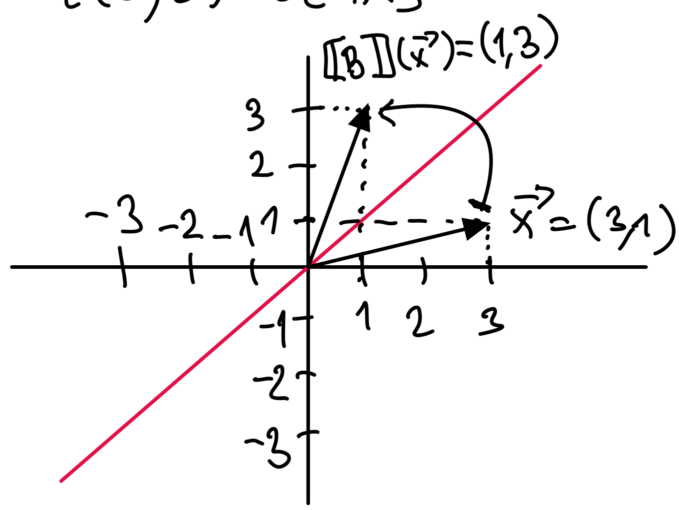
Uvažujme maticu $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ a počítajme:

pre $\vec{x} = (x_1, x_2)$ máme

$$[\![B]\!](\vec{x}) = B\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

Toto zobrazenie teda vymieňa zložky. Geometricky sa toto dá vyjadriť ako osová súmernosť podľa priamky, ktorú už poznáme

$$q = \{(t,t) : t \in \mathbb{R}\}$$



Ktoré zobrazenia sú reprezentovateľné maticami?

V tomto momente vzniká prirodzená otázka, ktoré zobrazenia $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ sú reprezentovateľné maticami $\mathbb{R}^{m\times n}$; väčšina toho, čo sa budeme učiť vo zvyšku tohto semestra sa bude týkať hľadania systematickej odpovede na túto otázku.

Zatiaľ sa obmedzíme na konštatovanie, že nie všetky zobrazenia $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ sú reprezentovateľné maticou.

Napríklad iste platí, že $A\vec{0} = \vec{0}$ pre každú maticu A. Teda ľubovoľné zobrazenie, ktoré zobrazí vektor $\vec{0}$ na nenulový vektor iste reprezentovateľné maticou nebude.

Súčin matíc je reprezentáciou zloženého zobrazenia

Veta 7.1. Nech $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{k\times m}$. Uvažujme zobrazenia reprezentované maticami A, B

$$[\![A]\!] : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$
$$[\![B]\!] : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$$

Potom zložené zobrazenie $[\![B]\!] \circ [\![A]\!]$ je reprezentované súčinom matíc BA.

Dôkaz

Máme dokázať, že $[\![B]\!] \circ [\![A]\!] = [\![BA]\!]$

obe tieto zobrazenia sú typu $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$,

nech $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

$$\left([\![B]\!] \circ [\![A]\!]\right)(\vec{x}) = [\![B]\!]\left([\![A]\!](\vec{x})\right) =$$

definícia zloženého zobrazenia

súčin matíc

súčin matíc

$$= [\![B]\!]\left(\underbrace{A\vec{x}}\right) = \underbrace{B\left(A\vec{x}\right)} = (BA)\vec{x} =$$

predpis pre $[A] : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

predpis pre $[B] : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$

asociativita súčinu matíc

$= [\![BA]\!](\vec{x})$

predpis pre $[\![BA]\!] : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$

Zobrazenia $[\![BA]\!]$ a $[\![B]\!] \circ [\![A]\!]$ majú rovnaký definičný obor aj koobor, a každý vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ zobrazia na rovnaký vektor v $\mathbb{R}^k$.

To znamená, že $[\![B]\!] \circ [\![A]\!] = [\![BA]\!]$ $\square$

Príklady

Ak vezmeme maticu rovinnej rotácie o $\frac{\pi}{4}$

$$L_{\frac{\pi}{4}} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$L_{\frac{\pi}{4}} L_{\frac{\pi}{4}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Táto matica by mala reprezentovať zložené zobrazenie $L_{\frac{\pi}{4}} \circ L_{\frac{\pi}{4}}$. Ale $L_{\frac{\pi}{4}} \circ L_{\frac{\pi}{4}} = L_{\frac{\pi}{2}}$;

skontrolujme:

$$L_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} \\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \text{ sedí!}$$

Pokračujme ďalej a zrátajme $L_{\frac{\pi}{2}} L_{\frac{\pi}{2}}$

$$L_{\frac{\pi}{2}} L_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = D_{-1}$$

D_{-1} reprezentuje zobrazenie „násobenie skalárom -1". Ale vynásobiť rovinný vektor skalárom -1 je to isté ako otočiť ho o π vľavo (alebo vpravo, že?), teda

$$D_{-1} = L_{\pi}$$

V ďalšom kroku by sme mali dostať jednotkovú maticu I_2; porozmýšľajte prečo a presvedčte sa, že to vyjde.

Ak vezmeme pravouhlú projekciu P na priamku q (viď vyššie), očakávame, že $PP = P$, pretože obrazom vektorov/bodov ležiacich na q sú oni sami; toto vyjde:

$$P^2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

DÚ: Nájdite geometrickú interpretáciu zobrazenia $P \circ D_2$, kreslite si obrázky. V akom vzťahu sú zobrazenia

$$P \circ D_2 \quad a \quad D_2 \circ P \; ?$$

Čo z toho vyplýva pre súčiny PD_2, DP_2?

DÚ: Ukážte, že $L_{\frac{\pi}{2}} \circ P \neq P \circ L_{\frac{\pi}{2}}$ a vypočítajte aj príslušné matice zložených zobrazení.

INVERZNÁ MATICA

Definícia 7.2 Nech A je štvorcová matica typu $n \times n$. Inverzná matica k A je taká matica A^{-1}, že

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n \quad \square$$

POZOR! Inverzná matica k štvorcovej matici nemusí existovať. Napríklad nulová matica iste nemá inverznú - prečo?

Definícia 7.3 Nech A je štvorcová matica. Ak A má inverznú, hovoríme, že A je <u>regulárna</u>. V opačnom prípade hovoríme, že A je <u>singulárna</u>. $\square$

Príklad:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Čo znamená inverzná matica

Keďže A, A^{-1} sú štvorcové rovnakého typu, povedzme $A, A^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, reprezentujú nejaké zobrazenia:

$$[\![A]\!] : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$[\![A^{-1}]\!] : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

Definícia inverznej matice hovorí, že

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

Keďže tieto tri matice sú rovnaké, aj nimi representované zobrazenia sú rovnaké:

$$[\![AA^{-1}]\!] = [\![A^{-1}A]\!] = [\![I_n]\!]$$

Podľa Vety 7.1 ale

$$[\![AA^{-1}]\!] = [\![A]\!] \circ [\![A^{-1}]\!]$$
$$[\![A^{-1}A]\!] = [\![A^{-1}]\!] \circ [\![A]\!]$$

a vieme, že

$$[\![I_n]\!] = id_{\mathbb{R}^n}$$

Z toho dostávame rovnosť zobrazení

$$[\![A]\!] \circ [\![A^{-1}]\!] = [\![A^{-1}]\!] \circ [\![A]\!] = id_{\mathbb{R}^3}$$

Niečo sme dokázali, ale čo to je? Podľa Definície 1.14 z LinAlg 1.3 sme dokázali presne toto:

Veta 7.4 Nech $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je regulárna matica. Potom $[\![A^{-1}]\!]$ je inverzné zobrazenie k zobrazeniu $[\![A]\!]$ $\square$

Kompaktne to môžeme zapísať ako

$$[\![A^{-1}]\!] = [\![A]\!]^{-1}$$

Počítanie inverznej matice

Postup: napíšeme si vedľa seba maticu, ktorú chceme invertovať a jednotkovú maticu, oddelíme čiarou:

$$\left(\begin{array}{c|c} \underset{\text{typu } n\times n}{A} & I_n \end{array}\right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{c|c} I_n & A^{-1} \end{array}\right)$$

potom používame na obe matice súbežne rovnaké elementárne riadkové operácie, ktorými sa snažíme upraviť maticu naľavo od čiary tak, aby sme tam dostali I_n. Ak sa nám to podarí, napravo od čiary máme A^{-1}.

Príklad Nechávam na cvičenie.

SÚSTAVY LINEÁRNYCH ROVNÍC - NOVÝ POHĽAD

Prizrime sa na sústavy lineárnych rovníc v kontexte minulej prednášky. Každá matica $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ nám určuje zobrazenie $[\![A]\!]: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ s predpisom $[\![A]\!](\vec{x}) = A\vec{x}$. Ak si predpis pre $[\![A]\!]$ rozpíšeme do zložiek, dostaneme, pre $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ a $A = (a_{ij})_{m\times n} \in \mathbb{R}^{m\times n}$

$$[\![A]\!](\vec{x}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

To je ale presne a doslova to, čo poznáme pod menom „ľavá strana sústavy lineárnych rovníc"; ak teraz vezmeme nejaký vektor $\vec{b} = (b_1, \ldots, b_m)$, tak $[\![A]\!](\vec{x}) = \vec{b}$ presne znamená

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

čo je doslova sústava lineárnych rovníc. Vidíme teda, že (pre danú maticu A a vektor $\vec{b}$)

vyriešiť sústavu lineárnych rovníc $(A \mid \vec{b})$ $\xleftrightarrow{\text{to isté}}$ nájsť množinu všetkých vektorov takých, že $[\![A]\!](\vec{x}) = \vec{b}$, resp. $A\vec{x} = \vec{b}$

JEDNOTKOVÉ VEKTORY V $\mathbb{R}^n$

Zaveďme novú notáciu: v $\mathbb{R}^n$ budeme označovať $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ vektory

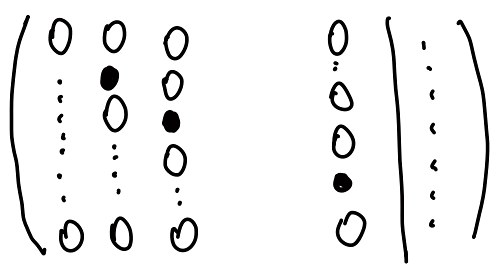
$$\vec{e}_1 = (1, 0, \dots, 0, 0)$$
$$\vec{e}_2 = (0, 1, \dots, 0, 0)$$
$$\vdots$$
$$\vec{e}_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$$

Všimnime si, že sú to presne stĺpce jednotkovej matice I_n; $s_i(I_n) = \vec{e}_i$ a môžeme teda písať

$$I_n = (\vec{e}_1\ \vec{e}_2 \dots \vec{e}_n)$$

PREČO FUNGUJE ALGORITMUS POČÍTANIA INVERZNEJ MATICE

Spomeňme si, ako sme počítali sústavy lineárnych rovníc: pomocou elementárnych riadkových operácií sme upravovali ľavú stranu na stupňovitý tvar. Potom sme robili „spätné dosádzanie". Mohli sme ale postupovať aj trochu inak: pred fázou spätného dosádzania vynulovať aj prvky nad diagonálou:



To by nám spätné dosádzanie výrazne zjednodušilo.
„Najlepší" prípad je ten, keď máme
n rovníc o n neznámych a na ľavej strane
nám vyjde diagonálna matica. Vtedy
môžeme postupovať ďalej a podeliť každý riadok
diagonálnym prvkom. Vtedy nám na pravej strane
vyjde priamo riešenie sústavy, a na ľavej strane
máme jednotkovú maticu.

$$\left(A \,\middle|\, \vec{b}\right) \sim \dots \sim \left(I \,\middle|\, \vec{x}\right)$$

Ak sa nám toto teda podarí, našli sme (jediný)
vektor taký, že $A\vec{x} = \vec{b}$ a je to presne pravá strana
po eliminácii matice sústavy na jednotkovú.
Pozrime sa teraz z novej perspektívy na algoritmus
počítania inverznej matice

$$\left(A \mid I_n\right) \sim \dots \sim \left(I_n \mid Y\right)$$

na tento postup môžeme nahliadať ako na súbežné riešenie n sústav lineárnych rovníc

$$\left(A \mid \vec{e_1}\right) \dots \left(A \mid \vec{e_n}\right)$$

o tejto matici tvrdíme, že je inverzná k A; označme jej stĺpce $\vec{y_1}, \dots, \vec{y_n}$

$$Y = \left(\vec{y_1} \dots \vec{y_n}\right)$$

$\vec{y_i}$ je riešenie sústavy

$\left(A \mid \vec{e_i}\right)$, pre $i \in \{1, \dots, n\}$

to znamená, že $A\vec{y_i} = \vec{e_i}$, pre $i \in \{1, \dots, n\}$

Ak si teraz uvedomíme, ako sa násobia matice (napravo postupujeme po stĺpcoch) môžeme nahliadnuť, že toto znamená

$$A \cdot \underbrace{\left(\vec{y_1} \dots \vec{y_n}\right)}_{\text{toto je } Y} = \underbrace{\left(\vec{e_1} \dots \vec{e_n}\right)}_{\text{toto je } I_n} \xrightarrow{\text{teda}} AY = I_n$$

V poriadku, ale prečo platí aj $YA = I_n$?

Aby sme to dokázali, je vhodné zaviesť pojem „elementárnej matice":

E je elementárna matica, ak vznikla z jednotkovej matice I vykonaním jednej elementárnej riadkovej operácie.

Napríklad pre pripočítanie $\frac{1}{2}$-násobku prvého riadku I_3 k druhému dostaneme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

→ elementárna matica

Elementárne matice majú túto peknú vlastnosť: pre každú maticu A

$$A \sim \underbrace{EA}$$

toto je presne tá matica, ktorá vznikne z A vykonaním elementárnej riadkovej operácie „zakódovanej" v E.

Pri počítaní inverznej matice sa naľavo dialo toto

$$\underbrace{A \sim \dots \sim I}_{\text{elementárne riadkové operácie}}$$

Pomocou elementárnych matíc to môžeme zapísať takto:

$$A \sim E_1 A \sim E_2 E_1 A \sim \dots \sim E_k \cdots E_2 E_1 A \overset{(*)}{=} I$$

Napravo sa zase dialo toto:

$$I \sim E_1 I \sim E_2 E_1 I \sim \dots \sim E_k \cdots E_2 E_1 I = E_k \cdots E_2 E_1 \overset{(**)}{=} Y$$

Z (*) a (**) zrejme dostávame $YA = I$.

Teda platí $AY = YA = I$ a preto $Y = A^{-1}$, viď definícia inverznej matice.

INVERZIA SÚČINU MATÍC rovnakého typu

Veta 8.1: Nech A, B sú regulárne matice. Potom aj AB je regulárna matica a platí $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

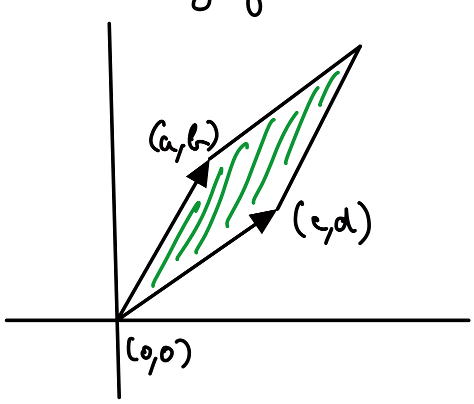
Dôkaz

$$AB \cdot B^{-1}A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$
$$B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}IB = B^{-1}B = I \quad \square$$

POZOR: Nič podobné neplatí pre súčet matíc.

DETERMINANT MATICE

Determinant je reálne číslo, ktoré priradujeme každej štvorcovej matici typu $n \times n$. Jeho skutočný význam je nemožné vysvetliť v tejto fáze, ničmenej intuitívne sa dá pochopiť ako (až na znamienko) objem rovnobežnostena vytýčeného stĺpcami matice.



$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

plocha rovnobežníka je

$$ad - b \cdot c$$

Toto funguje aj v troch rozmeroch, ale nebudem to kresliť.
Skôr ako zadefinujeme determinant, potrebujeme pomocný pojem.

Definícia 8.2: Nech A je matica typu $n \times n$. Minor A_{ij} je matica typu $(n-1)\times(n-1)$, ktorá vznikne z A vynechaním i-teho riadku a j-teho stĺpca.

Pár príkladov:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & -4 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \qquad A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 8 \end{pmatrix} \qquad A_{42} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 7 & -4 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Definícia 8.3. Determinant matice A typu $n \times n$ definujeme induktívne dľa n.

1) $\det((a)) = a$

matica 1×1

2) Nech $n>1$ $A=(a_{ij})_{n\times n}$. Nech $i\in\{1,\dots,n\}$ je index nejakého riadku. Potom

$$\det(A)=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det(A_{ij}) \quad \square$$

V bode 2) môžeme pritom spraviť rozvoj podľa ľubovoľného riadku i, $\det(A)$ vyjde rovnako nezávisle na voľbe i. Toto dokazovať nebudeme.

Podobne môžeme v bode 2) spraviť rozvoj podľa ľubovoľného stĺpca:

$j\in\{1,\dots,n\}$

$$\det(A)=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det(A_{ij})$$

Notácia: $\det(A)$ sa zvykne niekedy označovať ako $|A|$.

DETERMINANT MATICE 2x2

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$$

rozvoj podľa riadku 1 nám dáva

$$\det(A) = (-1)^{1+1} a_{11} a_{22} + (-1)^{1+2} a_{12} \cdot a_{21} =$$

$$= a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

DETERMINANT MATICE 3x3

Môžeme počítať rozvojom podľa riadku/stĺpca alebo použiť Sarrusovo pravidlo; $A = (a_{ij})_{3\times 3}$

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{array}{l} a_{11} a_{22} a_{33} \\ + a_{21} a_{32} a_{13} \\ + a_{31} a_{12} a_{23} \\ - a_{13} a_{22} a_{31} \\ - a_{23} a_{32} a_{11} \\ - a_{33} a_{12} a_{21} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{array}$$

JV = +

JZ = -

Príklady: $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = 3 - 4 = \underline{\underline{-1}}$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 1 + 0 + (-3) - 2 - (-2) - 0 =$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}$$

$$= \underline{\underline{-2}}$$

POZOR! SARUSOVO PRAVIDLO NEFUNGUJE NA MATICE 4x4 A VÄČŠIE!

VLASTNOSTI DETERMINANTU

Dôležitá vlastnosť determinantu je to, že deteku-je singulárnosť matice.

Veta 8.4: Štvorcová matica A je singulárna práve vtedy, keď $\det(A) = 0$ $\square$
(nedokazujeme)

Veta 8.5: Nech A, B sú štvorcové matice rovnakého typu. Potom

a) $\det(A.B) = \det(A)\det(B)$
b) $\det(A^T) = \det(A)$
c) $\det(I) = 1$
d) Ak A je regulárna, $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$

ELEMENTÁRNE RIADKOVÉ OPERÁCIE A DETERMINANT

Nie je pravda, že elementárne riadkové operácie vždy zachovajú determinant.
Je však pravda, že vieme presne povedať, ako menia determinant:

Veta 8.6: Nech A je štvorcová matica.

a) Ak A' je matica, ktorá vznikla z A pripočítaním skalárneho násobku niektorého riadku k inému (!) riadku, potom $\det(A') = \det(A)$

b) Ak A' je matica, ktorá vznikla z matice A vynásobením niektorého riadku skalárom $c \in \mathbb{R}$, $\det(A') = c \cdot \det(A)$

c) Ak A' je matica, ktorá vznikla z A výmenou riadkov,

$$\det(A') = -\det(A) \quad \square$$

Analogické tvrdenie platí pre stĺpce a elementárne stĺpcové operácie.

DETERMINANTY TROJUHOLNÍKOVÝCH MATÍC

Horná trojuholníková matica je taká štvorcová matica, ktorá má pod diagonalou nuly.
Analogicky definujeme dolnú trojuholníkovú maticu

Všimnime si, že matica je diagonálna práve vtedy, keď je zároveň horná aj dolná trojuholníková.

Veta 8.7: Determinant trojuholníkovej matice (hornej či dolnej) je súčin diagonálnych prvkov. □

Príklad

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 7 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 1.2.7.(-2)$$

CRAMEROVO PRAVIDLO

Nech A je regulárna matica typu $n\times n$.
Uvažujme sústavu n lineárnych rovníc o n neznámych

$$A\vec{x}=\vec{b}$$

Označme A_i maticu, ktorá vznikne nahradením stĺpca i matice A pravou stranou $\vec{b}$.

Potom sústava má jediné riešenie

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \det(A_1)/\det(A) \\ \vdots \\ \det(A_n)/\det(A) \end{pmatrix}$$

INVERTOVANIE MATÍC POMOCOU DETERMINANTOV

Nech A je matica typu $n \times n$.
Kofaktorová matica je matica typu $n \times n$ obsahujúca determinanty minorov vynásobené $(-1)^{i+j}$, kde (i,j) je index riadku a stĺpca

$$C = \left((-1)^{i+j} \det(A_{ij})\right)_{n \times n}$$

Veta 8.8: Nech A je regulárna. Potom

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} C^T, \text{ kde } C \text{ je kofaktorová matica } A \quad \square$$

Příklad

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}$$

$$C^T = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} C^T$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

VEKTOROVÉ PRIESTORY

Na začiatku tejto kapitolky si skúsme uvedomiť, aké objekty nazývame v tejto chvíli „vektory".

- n-tice z $\mathbb{R}^n$
- orientované úsečky so spoločným počiatkom v rovine (označme množinu všetkých týchto úsečiek $\mathcal{S}$)

S oboma typmi „vektorov" môžeme robiť isté operácie:

- sčítať
- násobiť skalárom

Teraz ideme spraviť toto: pokúsime sa zachytiť vlastnosti sčítania a násobenia skalárom pre oba typy „vektorov" do abstraktného pojmu. Skôr, ako to urobíme, musíme si vyjasniť aké majú operácie sčítania a násobenia skalárom „dátový typ"

Sčítanie vektorov je toto: predpis, ktorý nám hovorí, ako z dvoch vektorov vyrobiť vektor. V jazyku matematiky je sčítanie teda zobrazenie:

$$+ : V \times V \longrightarrow V$$

kde V je množina všetkých vektorov o ktorých uvažujeme. Napríklad ak $V=\mathbb{R}^2$, máme $+:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$

$$+\Big(\underbrace{(\overbrace{1,2}^{\substack{\text{vektor}\\ \in\mathbb{R}^2}}),(\overbrace{-2,3}^{\substack{\text{vektor}\\ \in\mathbb{R}^2}})}_{\substack{\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\\ \text{usporiadaná dvojica}\\ \text{vektorov}}}\Big)=\underbrace{(-1,5)}_{\substack{\in\mathbb{R}^2\\ \text{vektor}}}$$

Samozrejme, súčet vektorov $\vec{u},\vec{v}$ nezapisujeme bežne ako $+(\vec{u},\vec{v})$, ale $\vec{u}+\vec{v}$.

Podobne násobenie vektora skalárom je zobrazenie typu

$$\cdot : \mathbb{R}\times V\longrightarrow V$$

kde V je množina všetkých vektorov.

Základná idea definície vektorového priestoru spočíva v tom, že na vyjadrenie podstaty pojmu vektora nám stačí to, aby sme zachytili to, ako sa tieto operácie správajú.

Teda definícia vektorového priestoru nehovorí nič o tom, <u>čo</u> je vektor, ale vyjadruje len vlastnosti operácií $+, \cdot$.

Definícia 9.1: Nech V je neprázdna množina, vybavená

- operáciou $+ : V \times V \longrightarrow V$ (sčítanie vektorov)
- operáciou $\cdot : \mathbb{R} \times V \rightarrow V$ (násobenie vektora skalárom)
- fixným vybratým prvkom $\vec{0} \in V$

pričom platia tieto rovnosti, pre všetky $a, b \in R$ a pre všetky $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V$

- asociativita sčítania vektorov
  $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$
- komutativita sčítania vektorov
  $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$
- nulový vektor je neutrálny vzhľadom na sčítanie
  $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$
- opačný vektor
  existuje $-\vec{x}$ také, že $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$
- kompatibilita s násobením skalárom
  $(a . b) . \vec{x} = a (b \vec{x})$
- distributivita násobenia skalárom vzhľadom na sčítanie vektorov
  $a . (\vec{x} + \vec{y}) = a \vec{x} + a \vec{y}$

- distributivita násobenia skalárom vzhľadom na sčítanie skalárov

  $(a+b)\vec{x} = a\vec{x} + b\vec{x}$

- jednotkový zákon

  $1.\vec{x} = \vec{x}$

Potom hovoríme, že V je vektorový priestor alebo (čo je to isté) lineárny priestor. Prvky množiny V sa nazývajú vektory. □

Rovnosti z Definície 9.1 sa volajú axiómy vektorového priestoru.

Príklad 9.2: Množina $\mathbb{R}^n$, vybavená sčítaním a násobením „po zložkách". □

Príklad 9.3: Množina všetkých orientovaných úsečiek v rovine s fixným počiatkom, sčítanie je dané rovnobežníkovým pravidlom, násobenie skalárom je škálovanie úsečky.

Príklad 9.4 (nový): Množina všetkých funkcií z $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sčítanie je súčet funkcií, násobenie skalárom je násobenie funkcie číslom.

Príklad 9.5 (nový): Jednoprvková množina, povedzme $\{*\}$; uvedomme si, že nutne $\vec{0} = *$ a že sčítanie a násobenie skalárom sú jediné možné:

$$+ : \{*\} \times \{*\} \longrightarrow \{*\}$$

$$\cdot : \mathbb{R} \times \{*\} \longrightarrow \{*\}$$

Odčítanie vektorov: Na každom vektorovom priestore V môžeme zaviesť odvodenú operáciu rozdielu vektorov

$$- : V \times V \longrightarrow V$$

danú predpisom

$$\vec{x} - \vec{y} := \vec{x} + (-1)\vec{y}$$

Tvrdenie 9.6: Nech V je vektorový priestor. Potom pre všetky $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V$ a pre všetky $a \in \mathbb{R}$ platí

a) Ak $\vec{x} + \vec{y} = \vec{x} + \vec{z}$, potom $\vec{y} = \vec{z}$

b) ak $a\vec{x} = a\vec{y}$ a $a \neq 0$, potom $\vec{x} = \vec{y}$

c) $a . \vec{0} = \vec{0} = 0 . \vec{x}$

d) Ak $a\vec{x} = \vec{0}$, potom $a = 0$, alebo $\vec{x} = \vec{0}$

e) $-\vec{x} = (-1)\vec{x}$

f) $a(\vec{x} - \vec{y}) = a\vec{x} - a\vec{y}$

Dôkaz

a) $\vec{x} + \vec{y} = \vec{x} + \vec{z}$, potom zrejme $-\vec{x} + (\vec{x} + \vec{y}) = -\vec{x} + (\vec{x} + \vec{z})$.
Asociativita sčítania aplikovaná na oboch stranách nám dá rovnosť

$$(*) \quad (-\vec{x} + \vec{x}) + \vec{y} = (-\vec{x} + \vec{x}) + \vec{z}$$

Keďže sčítanie vektorov je komutatívne,
$-\vec{x}+\vec{x}=\vec{x}+(-\vec{x})$ a z toho a z $(*)$ dostávame

$$(**)\quad (\vec{x}+(-\vec{x}))+\vec{y}=(\vec{x}+(-\vec{x}))+\vec{z}$$

Podľa axiómy o opačnom vektore $\vec{x}+(-\vec{x})=\vec{0}$
a z $(**)$ dostaneme

$$\vec{0}+\vec{y}=\vec{0}+\vec{z}$$

Aplikujeme na oboch stranách komutativitu sčítania

$$\vec{y}+\vec{0}=\vec{z}+\vec{0}$$

a teraz už stačí iba na oboch stranách aplikovať axiómu o nulovom vektore, čím dostaneme $\vec{y}=\vec{z}$

b) (menej podrobne)

$$a\vec{x}=a\vec{y}$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{1}{a}(a\vec{x})=\frac{1}{a}(a\vec{y})$$
$$\Downarrow \text{ kompatibilita.}$$
$$\left(\frac{1}{a}\cdot a\right)\vec{x}=\left(\frac{1}{a}\cdot a\right)\vec{y}$$

$$\Downarrow \quad \frac{1}{a}\cdot a = 1$$

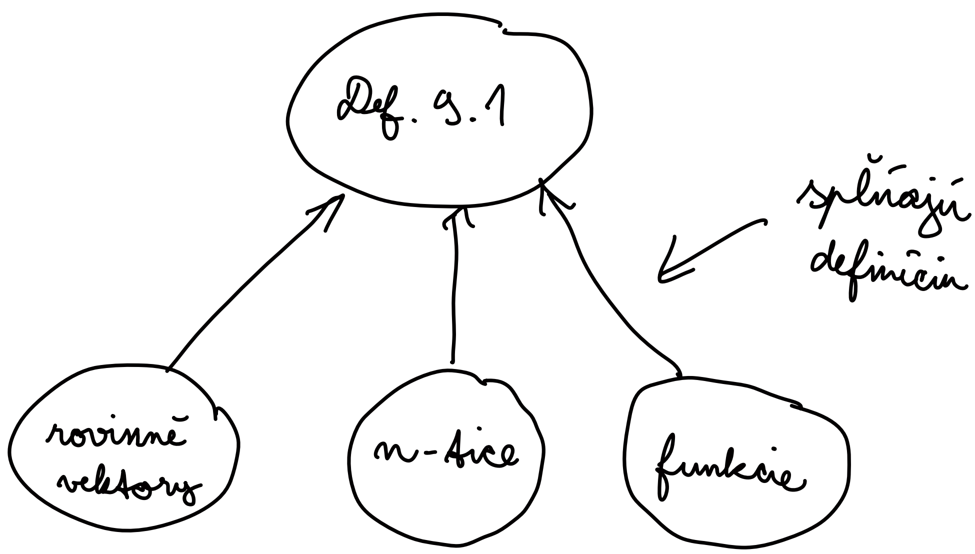
$$1\vec{x} = 1\vec{y}$$

$$\Downarrow \quad \text{jednotkový zákon}$$

$$\vec{x} = \vec{y}$$

c) ... f) dôkazy vynechávame. $\square$

Pointa tohto prístupu k veci je v tom, že keďže dôkaz tvrdenia používa iba definíciu vektorového priestoru, tvrdenie platí pre všetky vektorové priestory



Všetko, čo dokážeme pre vektorové priestory bude platiť pre každý partikulárny prípad vektorového priestoru.

Preto budeme odteraz postupovať tak, že budeme formulovať pojmy a tvrdenia/vety v jazyku určenom definíciou 9.1.

Začnime pojmom podpriestoru vektorového priestoru.

Definícia 9.7 Nech V je vektorový priestor. Množina $U \subseteq V$ je <u>podpriestor V</u>, ak platí

uzavretosť na sčítanie

1) $\vec{0} \in U$
2) Pre všetky dvojice $\vec{x}, \vec{y} \in U$ platí, že $\vec{x}+\vec{y} \in U$
3) Pre všetky $\vec{x} \in U$, $a \in \mathbb{R}$ platí, že $a\vec{x} \in U$

uzavretosť na násobenie skalárom

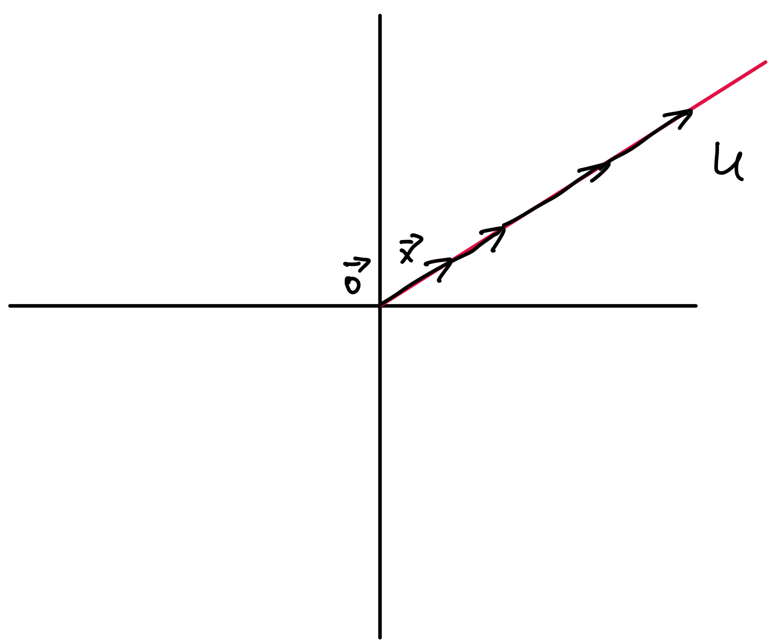
Tvrdenie 9.8: Ak U je podpriestor vektorového priestoru V, potom množina U vybavená operáciami „zdedenými" z V je tiež vektorový priestor. □

POZOR! Neexistuje nič také ako „U je podpriestor" samé osebe, to slovné spojenie nemá žiaden zmysel; podobne ako „7 je menšie". Má zmysel slovné spojenie U je podpriestor $\mathbb{R}^3$, napríklad.

Príklad 9.8. Uvažujme podmnožinu $U = \{(1,2), (0,0)\}$ vektorového priestoru $\mathbb{R}^2$
Je U podpriestor $\mathbb{R}^2$. Nie, pretože (medziiným)

$$(1,2) + (1,2) = (2,4) \notin U$$

Príklad 9.9 Uvažujme podmnožinu U vektorového priestoru „vektory v rovine s počiatkom" S takú, že U obsahuje všetky vektory, ktorých koncový bod leží na nejakej polpriamke k počiatkom v $\vec{O}$:



Je U podpriestor S? Nie, pretože ak $\vec{x} \neq \vec{O}$, potom $(-1).\vec{x} \notin U$, čo odporuje bodu 3) Def. 9.7

Všimnite si, že U splňa obidve vyššie podmienky Definície 9.7 $\square$

Príklad 9.10 Ak nahradíme polpriamku z predošlého príkladu priamkou, taká množina vektorov už podpriestorom bude.

Otázka: „priamky prechádzajúce počiatkom" sú teda podpriestory $\mathcal{S}$. Aké ďalšie podpriestory $\mathcal{S}$ existujú? Sú presne dva: $\{\vec{o}\}$ a $\mathcal{S}$.

Príklad 9.11 Nech $U \subseteq \mathbb{R}^3$ je množina

$$U = \{(s+2t, -t, 2s+t) : s,t \in \mathbb{R}\}$$

1) $\vec{o} \in U$: ak $s=t=0$, potom $(s+2t, -t, 2s+t) =$
$(0+2.0, -0, 2.0+0) = (0,0,0) \in U$

2) Nech $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in U$.

$\vec{x}_1 \in U$ znamená, že $\vec{x}_1 = (s_1+2t_1, -t_1, 2s_1+t_1)$ pre nejaké $s_1, t_1 \in \mathbb{R}$

$\vec{x}_2 \in U$ znamená, že $\vec{x}_2 = (s_2 + 2t_2, -t_2, 2s_2 + t_2)$

pre nejaké $s_2, t_2 \in \mathbb{R}$

Počítajme:

$$\vec{x}_1 + \vec{x}_2 = (s_1 + 2t_1, -t_1, 2s_1 + t_1) + (s_2 + 2t_2, -t_2, 2s_2 + t_2) =$$

$$= (s_1 + s_2 + 2(t_1 + t_2), -(t_1 + t_2), 2(s_1 + s_2) + t_1 + t_2)$$

ak položíme $s = s_1 + s_2$, $t = t_1 + t_2$

$$U \ni (s + 2t, -t, 2s + t) = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$$

Teda $\vec{x}_1 + \vec{x}_2 \in U$.

3) Ak $\vec{x} = (s' + 2t', -t', 2s' + t')$ $a \in \mathbb{R}$,

potom $a\vec{x} = a(s' + 2t', -t', 2s' + t') =$

$(as' + 2at', -at', 2as' + at') \in U$

položme $s = as'$

$t = at'$

a hotovo

LINEÁRNY OBAL

Definícia 10.1 Nech V je vektorový priestor, nech $X = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ je tica vektorov z V. Potom lineárny obal X je množina vektorov

$$\mathcal{L}o(X) = \{a_1\vec{x}_1 + \dots + a_n\vec{x}_n \mid a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}\} \quad \square$$

Vidíme, že predpis pre vytvorenie lineárneho obalu tice X sa dá vyjadriť slovne ako „všetky lineárne kombinácie vektorov z X"; analogicky môžeme definovať lineárny obal množiny vektorov.

Cvičenie : Ak $X = (\vec{v}, \vec{u})$ je dvojica vektorov v rovine, ako môže vyzerať $\mathcal{L}o(X)$? Uvažujte aj prípady ako $\vec{u} = \vec{o}$; $\vec{u} = c\vec{v}$, $\vec{u} = \vec{v} = \vec{o}$.

Príklad: Skúsme si napísať ako vyzerá lineárny obal dvojice vektorov $((-1,2,3),(2,0,2))$ v $\mathbb{R}^3$

$$\{a_1(-1,2,3) + a_2(2,0,2) \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R}\} =$$
$$\{(-a_1, 2a_1, 3a_1) + (2a_2, 0, 2a_2) \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R}\} =$$
$$\{(-a_1 + 2a_2, 2a_1, 3a_1 + 2a_2) \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$$

Označme vektorový priestor všetkých funkcií $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ako $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Príklad: Ako vyzerá lineárny obal n-tice funkcií $(\underbrace{1, x, x^2, \dots, x^n}_{})$?

tuto (trochu lajdácky) stotožňujeme funkciu z $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ s jej predpisom.

$$\mathcal{L}o(1, x, x^2, \dots, x^n) = \{a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \mid a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}\};$$

To je množina všetkých polynómov stupňa najviac n, označujeme ju $\mathbb{R}^n[x]$.

Veta 10.2: Nech V je vektorový priestor, nech $X = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ je n-tica vektorov z V. Potom $\mathcal{L}o(X)$ je podpriestor V.

Dôkaz

1) $\vec{0} \in \mathcal{L}o(X)$, lebo $\vec{0} = 0\vec{x}_1 + \dots + 0\vec{x}_n \in \mathcal{L}o(X)$

2) Nech $\vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{L}o(X)$. Potom

$\vec{u} = a_1\vec{x}_1 + \dots + a_n\vec{x}_n$ pre nejaké $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$

$\vec{v} = b_1\vec{x}_1 + \dots + b_n\vec{x}_n$ pre nejaké $\underbrace{b_1, \dots, b_n}_{}$ $\in \mathbb{R}$

nie $a_1, \dots, a_n$!

Máme dokázať, že $\vec{u}+\vec{v} \in \mathcal{L}_o(X)$. Počítajme:

$$\vec{u}+\vec{v} = a_1\vec{x}_1 + \ldots + a_n\vec{x}_n + b_1\vec{x}_1 + \ldots + b_n\vec{x}_n =$$
$$= (a_1+b_1)\vec{x}_1 + \ldots + (a_n+b_n)\vec{x}_n \in \mathcal{L}_o(X)$$

3) Nech $\vec{u}$ je ako v bode 2), $c \in \mathbb{R}$. Potom

$$c\vec{u} = c(a_1\vec{x}_1 + \ldots + a_n\vec{x}_n) = (c_1 a_1)\vec{x}_1 + \ldots + (c_n a_n)\vec{x}_n \in \mathcal{L}_o(X)$$

□

Vidíme teda, že každý lineárny obal tice je podpries- podpriestorom priestoru, z ktorého vyberáme, teda medziiným je $\mathbb{R}^n[x] = \mathcal{L}_o(1, x, \ldots, x^n)$ podpriestorom $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Definícia 10.3: Hovoríme, že vektorový priestor V je konečnorozmerný, ak existuje tica $X = (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ vektorov z V taká, že $\mathcal{L}_o(X) = V$. Ak V nie je konečnorozmerný, je nekonečnorozmerný. □

Veta 10.4: Vektorový priestor $\mathbb{R}^n$ je konečnorozmerný, pre každé $n \geq 1$.

Dôkaz

Vezmime vektory

$$\vec{e}_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0)$$

$$\vec{e_2} = (0,1,0,\dots,0)$$
$$\vdots$$
$$\vec{e_n} = (0,0,0,\dots,1)$$

Tvrdíme, že $\mathbb{R}^n = \mathcal{L}o(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_n})$. Nech $\vec{v} = (a_1, \dots, a_n)$ je nejaký vektor z $\mathbb{R}^n$. Máme

$$a_1\vec{e_1} + \dots + a_n\vec{e_n} = a_1(1,0,\dots,0) + \dots + a_n(0,0,\dots,1) =$$
$$(a_1, 0, \dots, 0) + \dots + (0,0,\dots,a_n) =$$
$$(a_1, \dots, a_n) = \vec{v}, \text{ teda}$$
$$\vec{v} \in \mathcal{L}o(\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n}) \ \square$$

Uvedomme si, že $\mathbb{R}^n[x]$ je tiež konečnorozmerný (lebo sme ho definovali ako lineárny obal nejakej tice vektorov.)

V tomto momente vzniká prirodzená otázka: existuje nejaký priestor, ktorý nie je konečnorozmerný? Odpoveď je, samozrejme, „Áno.": napríklad vektorový priestor $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ nie je konečnorozmerný; dôkaz presahuje zamýšľaný rámec prednášky, preto ho nespravíme.

Skoro všetky vektorové priestory na tejto prednáške budú však konečnorozmerné.

Z dôkazu Vety 10.4 vieme, že $\mathbb{R}^2 = \mathcal{L}o((1,0),(0,1))$. Aké sú iné n-tice X také, že $\mathbb{R}^2 = \mathcal{L}o(X)$. Môžeme napríklad vziať $X = ((1,0),(0,1),(-2,1))$, zrejme $\mathcal{L}o(X) = \mathbb{R}^2$, vektor $(-2,1)$ je v X „zbytočný"; ale môžeme napríklad vyhodiť z X iný vektor a položiť si otázku, či $\mathcal{L}o((1,0),(-2,1)) = \mathbb{R}^2$ [áno]. Napríklad ale $\mathcal{L}o((1,0),(2,0)) \neq \mathbb{R}^2$: prečo?

Pri rozmýšľaní o podobných otázkach vzniká prirodzene pojem z nasledujúcej definície.

Veta: $\mathcal{L}o(X)$ sa nezmení, ak lineárne kombinujem X

Definícia 10.5: Nech V je vektorový priestor, nech $X = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ je n-tica vektorov z V. Hovoríme, že X je lineárne závislá, ak existujú $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, nie všetky rovné 0 také, že

$$a_1\vec{x}_1 + a_2\vec{x}_2 + \dots + a_n\vec{x}_n = \vec{0}.$$

Ak X nie je lineárne závislá, hovoríme, že X je lineárne nezávislá. $\square$

Inými slovami: n-tica vektorov $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ je lineárne závislá, ak má rovnica

$$a_1\vec{x}_1 + \dots + a_n\vec{x}_n = \vec{0}$$

iné riešenie ako $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$.

Príklady

- Je $(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = ((1,0),(0,1))$ lineárne závislá v $\mathbb{R}^2$?

$$a_1(1,0) + a_2(0,1) = (0,0)$$
$$(a_1,0) + (0,a_2) = (0,0)$$
$$(a_1,a_2) = (0,0)$$

Teda $a_1 = a_2 = 0$ a $((1,0),(0,1))$ je lineárne nezávislá.

- Veľmi podobne sa môžeme presvedčiť, že $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ je lineárne nezávislá v $\mathbb{R}^n$

- Je $((-1,3),(2,-6))$ lineárne závislá v $\mathbb{R}^2$?

$$a_1(-1,3) + a_2(2,-6) = (0,0)$$
$$(-a_1, 3a_1) + (2a_2, -6a_2) = (0,0)$$
$$(-a_1 + 2a_2, 3a_1 - 6a_2) = (0,0)$$
$$\Updownarrow$$
$$\left.\begin{aligned} -a_1 + 2a_2 &= 0 \\ 3a_1 - 6a_2 &= 0 \end{aligned}\right] \rightarrow \text{sústava lineárnych rovníc}$$
$$\Updownarrow$$
$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -6 & 0 \end{array}\right)$$

priama väzba

Riešme sústavu: $\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -6 & 0 \end{array}\right) \cdot 3 \sim \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Vieme, že takáto sústava má nekonečne veľa riešení, teda iste aj aspoň jedno iné, než $a_1 = a_2 = 0$. Teda tá dvojica vektorov je lineárne závislá. Napriek tomu, skúsme nájsť nejaké riešenie $(a_1, a_2) \neq (0,0)$.

$$-a_1 + 2a_2 = 0$$

$$a_2 = 1 \Rightarrow -a_1 + 2 = 0 \Rightarrow a_1 = 2$$

$$2 \cdot (-1, 3) + 1 \cdot (2, -6) = (0,0) \ \Box$$

Teraz (na záver) pojem, ku ktorému smerujeme.

Definícia 10.6: Nech V je vektorový priestor. **Báza** V je taká tica X vektorov z V, že platí

- X je lineárne nezávislá a zároveň
- $Lo(X) = V$ $\Box$

Z horeuvedeného dostávame aspoň jeden príklad bázy vektorového priestoru: $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ je bázou $\mathbb{R}^n$.

LINEÁRNA NEZÁVISLOSŤ, BÁZY, DIMENZIA

Nasledujúca veta by sa dala nazvať „načo sú dobré bázy".

Veta 11.1 Nech $X=(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ je usporiadaná n-tica vektorov z vektorového priestoru V. Nasledujúce dve tvrdenia sú ekvivalentné.

a) X je báza V

b) Pre každý vektor $\vec{v} \in V$ existuje jediná n-tica skalárov $(a_1, \dots, a_n)$ taká, že

$$\vec{v} = a_1\vec{x}_1 + \dots + a_n\vec{x}_n$$

Dôkaz

b) $\Rightarrow$ a)

Zrejme b) znamená, že každý vektor $\vec{v} \in V$ sa dá vyjadriť ako lineárna kombinácia vektorov z X, teda pre každý vektor $\vec{v} \in V$ platí $\vec{v} \in \mathcal{L}_o(X)$, teda $\mathcal{L}_o(X) = V$.

Zostáva dokázať, že X je lineárne nezávislá. To znamená, že ak $a_1\vec{x}_1 + \dots + a_n\vec{x}_n = \vec{0}$, potom $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$.

$$\vec{0} = a_1\vec{x}_1 + \dots + a_n\vec{x}_n = 0\vec{x}_1 + \dots + 0\vec{x}_n$$

Ale podľa b) platí, že také $(a_1, \dots, a_n)$ sú jediné, teda nutne $a_1 = 0, \dots, a_n = 0$.

a) $\Rightarrow$ b) Nech

$$\vec{v} = a_1\vec{x}_1 + a_2\vec{x}_2 + \ldots + a_n\vec{x}_n \quad \text{a zároveň}$$
$$\vec{v} = b_1\vec{x}_1 + b_2\vec{x}_2 + \ldots + b_n\vec{x}_n .$$

Odčítajme druhú rovnosť od prvej a dostaneme po úprave

$$(*) \ \vec{0} = \vec{v} - \vec{v} = (a_1 - b_1)\vec{x}_1 + \ldots + (a_n - b_n)\vec{x}_n$$

Ale X je lineárne nezávislá, preto $(*)$ implikuje

$$a_1 - b_1 = \ldots = a_n - b_n = 0$$

a teda $a_1 = b_1, \ldots, a_n = b_n$ $\square$

Definícia 11.2 Nech V je konečnorozmerný vektorový priestor s bázou $X = (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$, nech $\vec{v} \in V$. Potom n-ticu skalárov $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, ktorá je jednoznačne určená vlastnosťou

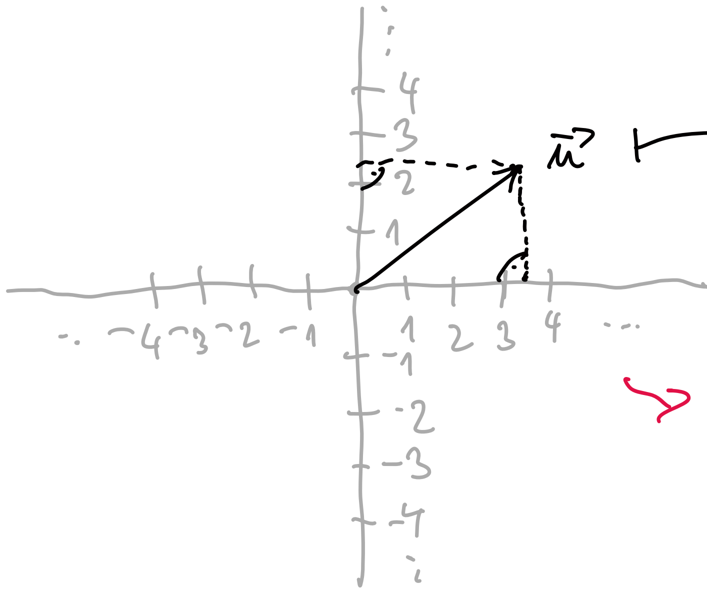
$$\vec{v} = a_1\vec{x}_1 + \ldots + a_n\vec{x}_n$$

hovoríme súradnice vektora $\vec{v}$ v báze X a značíme

$$[\vec{v}]_X = (a_1, \ldots, a_n) \quad \square$$

Pojem súradníc v báze nám umožňuje pozrieť sa inými očami na to, čo sme robili v Linalg 1.5:

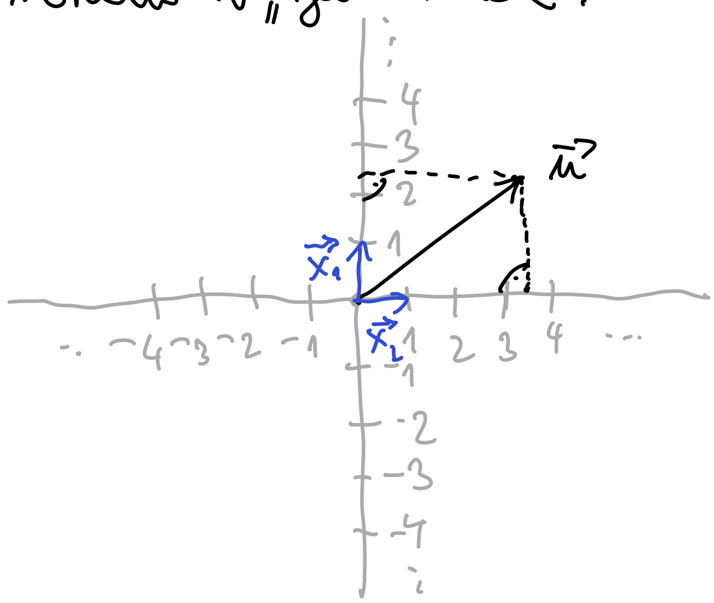
Príklad: Uvažujme geometrické vektory v rovine. Vieme, že ak určíme súradnicové osi, môžeme geometrické vektory reprezentovať ako usporiadané dvojice skalárov.



$\vec{u} \longmapsto (3\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}) \in \mathbb{R}^2$

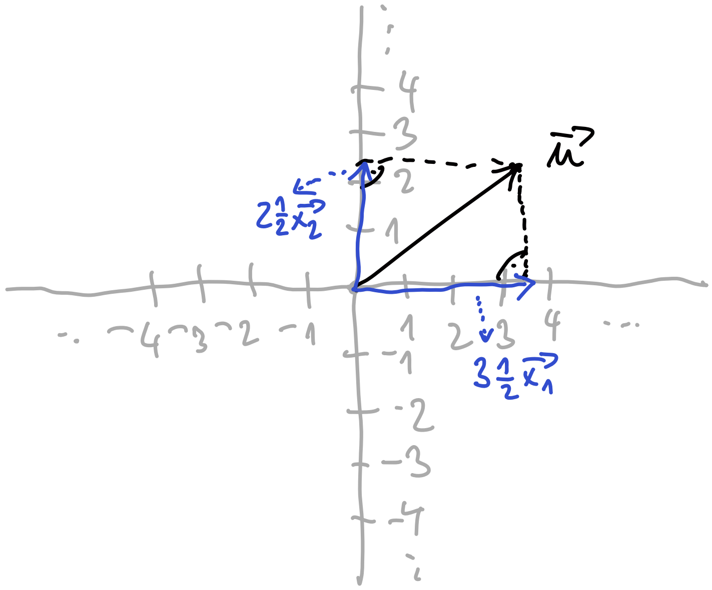
→ „súradnicové osi"

Prikreslime na obrázok dva vektory $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, ktoré končia v „jednotkách":

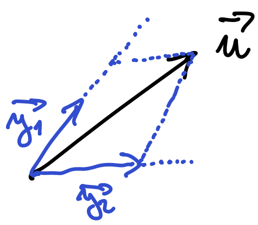


Položme $X = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$.

Teraz si uvedomme, že $3\frac{1}{2}\vec{x}_1$ a $2\frac{1}{2}\vec{x}_2$ sú pravouhlé priemety $\vec{u}$ na osi a teda (podľa rovnobežníkového pravidla) $3\frac{1}{2}\vec{x}_1 + 2\frac{1}{2}\vec{x}_2 = \vec{u}$; $[\vec{u}]_X = (3\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2})$:



Ak by sme vzali inú bázu, dostali by sme inú dvojicu skalárov reprezentujúcu $\vec{u}$:



$$Y = (\vec{y}_1, \vec{y}_2)$$

$$[\vec{u}]_Y = (2, 1) \qquad \square$$

Príklad: Uvažujme vektorový priestor polynómov stupňa nanajvýš 2 $\mathbb{R}^2[x]$. Polynóm $p: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ daný predpisom $p(x) = 3x^2 - 6$ je vektor v $\mathbb{R}^2[x]$; jeho súradnice v báze $X = (1, x, x^2)$ sú $(-6, 0, 3)$. Ale môžeme uvažovať aj inú bázu $\mathbb{R}^2[x]$, povedzme
$Y = (x^2-1, x+1, x-2)$ → zatiaľ nevieme, že toto je báza, ale na chvíľu tomu uveríme...

Máme $3(x^2-1) + (-1)(x+1) + (1).(x-2) = 3x^2 - 6$, teda

$[p]_Y = (3,-1,1)$. $\square$

Vidíme teda teraz, že s každou bázou $X=(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n)$ vektorového priestoru V máme spojené zobrazenie

$$[\_]_X : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

dané predpisom $\vec{v} \longmapsto [\vec{v}]_X$

- Veta 11.1 nám hovorí, že toto zobrazenie je bijektívne.

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, bend left, "{[\,-\,]_X}"] & \mathbb{R}^n \arrow[l, bend left, "\text{„lineárne kombinuj prvky } X \text{ s týmito koeficientami“}"]
\end{tikzcd}$$

navzájom inverzné zobrazenia

Toto je primárny účel zavedenia pojmu bázy: umožňuje prevádzať vektory na ich súradnice a späť.

- Pozor, pre rôzne bázy dostávame rôzne súradnice!

Teraz si napíšeme zopár postačujúcich podmienok pre rozpoznanie lineárnej závislosti tice vektorov.

Fakt 11.3: Ak X obsahuje $\vec{0}$, X je lineárne závislá. Naozaj, nech $\vec{x}_j = \vec{0}$ pre nejaké j. Potom zrejme

$$\underbrace{0\cdot\vec{x}_1 + 0\cdot\vec{x}_2 + \dots + 1\overset{\vec{0}}{\overset{\parallel}{\vec{x}_j}} + \dots + 0\vec{x}_{n-1} + 0\vec{x}_n} = \vec{0} \qquad \square$$

lineárna kombinácia, nie všetky koeficienty nulové

a teda X je lineárne závislá.

Fakt 11.4: Ak X obsahuje aspoň dvakrát ten istý vektor, potom X je lineárne závislá. Naozaj, ak $\vec{x}_i = \vec{x}_j$, $i < j$, potom

$$\underbrace{0\vec{x}_1 + 0\vec{x}_2 + \dots + 1\vec{x}_i + \dots + (-1)\vec{x}_j + \dots + 0\vec{x}_n} = 1x_i + (-1)x_j =$$

lineárna kombinácia, i-ty koeficient je 1, j-ty je (-1) (teda nie všetky sú 0)

$$= 1\vec{x}_i + (-1)\underset{\vec{x}_j}{\underset{\parallel}{\vec{x}_i}} = (1+(-1))\vec{x}_1 = 0\vec{x}_i = \vec{0} \qquad \square$$

Pozor! Tieto podmienky sú postačujúce, ale nie nutné. Nutnú a postačujúcu podmienku nám dá Veta 11.5, ale predtým, ako ju sformulujeme, musíme sa vysporiadať s problémom, ktorý sa v tejto fáze zvykne študentom zatajiť: čo je bázou jednoprvkového vektorového priestoru $\{\vec{0}\}$? Nemôže to byť $(\vec{0})$, lebo to je lineárne závislá ťica, a iné vektory ako $\vec{o}$ nemáme. Takže buď $\{\vec{o}\}$ nemá bázu, alebo to je „usporiadaná 0-ica" - prázdny zoznam vektorov (); ak „dodefinujeme" $\mathcal{L}o(()) = \{\vec{o}\}$, zistíme, že veci fungujú uspokojivo, nenastane problém a formulácia nasledujúcej vety sa výrazne zjednoduší. („predchádzajúce vektory" môže byť (), potom $\vec{x}_1 = \vec{o}$ v b))

Veta 11.5: Nech $X = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ je ťica vektorov vo vektorovom priestore V. Potom nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné:

a) X je lineárne závislá

b) Jeden z vektorov $\vec{x}_i$ v X je lineárnou kombináciou predchádzajúcich vektorov v X; po vymazaní vektora $\vec{x}_i$ z X sa lineárny obal nezmení

c) Jeden z vektorov $\vec{x}_i$ v X je lineárnou kombináciou ostatných vektorov v X; po vymazaní $\vec{x}_i$ z X sa lineárny obal X nezmení.

Dôkaz vynechávam, je technický a nezaujímavý. $\square$

Dôsledok 11.6. Nech V je vektorový priestor, nech $X = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$, nech $\mathcal{L}o(X) = V$. Potom existuje báza V, ktorá vznikne z X vymazaním nula a viac vektorov.

Dôkaz:

Ak X je lineárne nezávislá, X je báza V. Ak X je lineárne závislá, podľa Vety 11.5 z nej môžeme vymazať jeden vektor, pričom lineárny obal zostane stále rovnaký, t.j. V; toto môžeme opakovať, až kým nedostaneme bázu. $\square$

Dôsledok 11.7: Každý konečnorozmerný vektorový priestor má bázu.

Dôkaz: Zjavné z Dôsledku 11.6 $\square$

Veta 11.8: Nech V je konečnorozmerný vektorový priestor. Potom dĺžka každej lineárne nezávislej tice vektorov z V je menšia alebo rovná ako dĺžka každej tice, ktorej lineárnym obalom je V.

Dôkaz

Nech $X = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m)$ je lineárne nezávislá tica vektorov z V, nech $Y = (\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n)$ je taká, že $Lo(Y) = V$. Máme dokázať, že $m \leq n$.

Predpokladajme, opak: že $m > n$. Ak dokážeme, že z toho vyplýva nejaká nepravda, budeme vedieť, že $m \leq n$.

KROK:

$(n+1)$-tica $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_n)$ je lineárne závislá podľa ekvivalencie a) $\Leftrightarrow$ c) z Vety 11.5, pretože $\vec{x}_1 \in V = \mathcal{L}o(\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_n)$ a teda $\vec{x}_1$ je lineárnou kombináciou $(\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_n)$. Opäť podľa Vety 11.5. je jeden z vektorov v tej $(n+1)$-tici lineárnou kombináciou predchádzajúcich vektorov, ale nemôže to byť $\vec{x}_1$, lebo potom by $\vec{x}_1 \in \mathcal{L}o(()) = \{\vec{0}\}$, teda $\vec{x}_1 = \vec{0}$, ale to nie je pravda, lebo $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_m)$ je lineárne nezávislá a teda neobsahuje $\vec{0}$. Teda to musí byť jeden $\vec{y}_i$, a podľa Vety 11.5 ho môžeme z tej $(n+1)$-tice vymazať bez zmeny jej lineárneho obalu. Dostaneme n-ticu vektorov

$$Y' = (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \ldots, \cancel{\vec{y}_i}, \ldots, \vec{y}_n)$$

tento sme vymazali

Ak teraz vezmeme $X' = (\vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_m)$ a Y', môžeme KROK zopakovať, až kým sa $\vec{y}_i$ neminú a nejaké $\vec{x}_i$ nám zostanú, lebo $n < m$. Ale to sa nemôže stať, lebo potom by sme mali $\mathcal{L}o(\vec{x}_n, \vec{x}_{n-1}, \ldots, \vec{x}_1) = V \ni \vec{x}_m$, teda X by bola (Veta 11.5) lineárne závislá. Teda $m > n$ vedie ke sporu, a z toho vyplýva, že $m \leq n$.

Veta 11.9: Každá báza konečnorozmerného vektorového priestoru má rovnako veľa prvkov.

Dôkaz Označme náš priestor V.

Nech $X = (\vec{x_1}, \dots, \vec{x_k})$, $Y = (\vec{y_1}, \dots, \vec{y_\ell})$ sú dve bázy konečnorozmerného vektorového priestoru. Potom podľa Vety 11.8

- X je lineárne nezávislá, $\mathcal{L}o(Y) = V \Rightarrow k \leq \ell$
- Y je lineárne nezávislá, $\mathcal{L}o(X) = V \Rightarrow \ell \leq k$

Takže $\ell = k$. □

Keďže všetky bázy konečnorozmerného vektorového priestoru majú rovnako veľa prvkov, nasledujúca definícia je zmysluplná:

Definícia 11.10: Nech V je konečnorozmerný vektorový priestor. Dimenzia V (značíme $\dim(V)$) je počet prvkov niektorej (každej) bázy V. Ak $\dim(V) = n$, hovoríme, že V je n-rozmerný. □

Príklad: $\mathbb{R}^n$ je n-rozmerný priestor, lebo $(\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n})$ je báza $\mathbb{R}^n$.

Príklad: Všetky vektory v rovine tvoria dvojrozmerný vektorový priestor.

Príklad: Všetky vektory v priestore tvoria vektorový priestor dimenzie 3.

Príklad: $\mathbb{R}^n[x]$ je $(n+1)$-rozmerný vektorový priestor, lebo $(1, x, x^2, \dots, x^n)$ je báza $\mathbb{R}^n[x]$.

Veta 11.11: Nech V je vektorový priestor, nech $\dim(V) = n$, nech $X = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k)$ je lineárne nezávislá tica vektorov z V. Potom buď X je báza a $k = n$, alebo $k < n$ a X sa dá doplniť na bázu.

Dôkaz

Ak $\mathcal{L}o(X) = V$, potom X je báza a teda $k = n$.

Ak $\mathcal{L}o(X) \neq V$, vyberme ľubovoľný vektor $\vec{y} \in V$ taký, že $\vec{y} \notin \mathcal{L}o(X)$.

Potom $(k+1)$-tica $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k, \vec{y})$ je lineárne nezávislá. Naozaj, ak by bola lineárne závislá, podľa Vety 11.5 by musel jeden z vektorov v nej byť lineárnou kombináciou predchádzajúcich. Nemôže to byť žiaden z $\vec{x}_i$, lebo potom by X bola lineárne závislá. Nemôže to ale byť ani $\vec{y}$, lebo potom by $\vec{y} \in \mathcal{L}o(X)$.

Keďže $(k+1)$-tica je lineárne nezávislá, iste $k+1 \leq n$ (podľa Vety 11.8), a teda $k < n$.

Teraz buď $(k+1) = n$ a máme bázu V, alebo môžeme proces opakovať až kým nedostaneme bázu. $\square$

Dôsledok 11.12: Ak V je vektorový priestor, $\dim(V) = n$ a X je lineárne nezávislá tica s n prvkami, X je báza V.

Toto je dôležité, pretože nám to umožňuje ušetriť si robotu: ak vieme, že $\dim(V) = n$ (pretože V má nejakú bázu s n prvkami), a chceme dokázať, že X je báza stačí nám dokázať, že X je lineárne nezávislá a má n prvkov. Nemusíme dokazovať, že $Lo(X)$ je V.

Na záver ukážeme, ako sa teória z dnešnej prednášky dá použiť na riešenie príkladov.

Príklad: Zistite, či sú nasledujúce výroky pravdivé, s použitím tvrdení z dnešnej prednášky.

- $((1,2,3),(3,2,1))$ je báza $\mathbb{R}^3$.

  NIE, pretože má dva prvky a $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ $\square$

- $((1,2,3),(3,2,1),(1,1,1))$ NIE je $\checkmark$ báza $\mathbb{R}^3$, lebo sú lineárne závislé – toto môžeme dokázať buď tak, že začneme riešiť sústavu

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

a zistíme, že má nekonečne veľa riešení, alebo uhádneme, že

$$\frac{1}{4}(1,2,3)+\frac{1}{4}(3,2,1)=(1,1,1)$$

a použijeme Vetu 11.5 $\square$

- $((0,0,1),(0,1,1),(1,1,1))$ JE báza $\mathbb{R}^3$; vieme, že $\dim(\mathbb{R}^3)=3$, takže podľa Dôsledku 11.12 nám stačí ukázať, že tie vektory sú lineárne nezávislé.

Toto môžeme urobiť buď priamo, alebo ukázať, že žiadny z nich nie je lineárnou kombináciou predchádzajúcich. Zjavne $(0,1,1)$ nie je skalárnym násobkom $(0,0,1)$, a každá lineárna kombinácia $((0,0,1),(0,1,1))$ má v prvej zložke 0, teda nie je rovná $(1,1,1)$. $\square$

- $Y = (x^2-1, x+1, x-2)$ je báza $\mathbb{R}^2[x]$, lebo $\dim(\mathbb{R}^2[x]) = 3$ a Y je lineárne nezávislá. Opäť stačí dokázať, že jediná trojica $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ taká, že

$$a_1(x^2-1) + a_2(x+1) + a_3(x-2) = 0$$

je $(0,0,0)$, pretože platí Dôsledok 11.12.

Ale tento typ problémov poznáme z rátania príkladov na Matematickej analýze 1: „neurčité koeficienty".

Iná možnosť je povrazovať a ukázať, že žiadny z vektorov v Y nie je vyjadriteľný ako lineárna kombinácia predchádzajúcich. $\square$

LINEÁRNE ZOBRAZENIA

Definícia 12.1: Nech V, U sú vektorové priestory. Hovoríme, že zobrazenie $f: V \longrightarrow U$ je lineárne, ak platia nasledujúce podmienky:

(f zachováva súčet)

Pre všetky $\vec{v}, \vec{w} \in V$ platí

$$f(\vec{v}+\vec{w}) = f(\vec{v}) + f(\vec{w})$$

najprv sčítam $\vec{v}, \vec{w}$ vo V, potom

zobrazím súčet do U

najprv zobrazím každý z $\vec{v}, \vec{w}$ do U

obrazy potom sčítam v U

„obraz súčtu" = „súčet obrazov"

(f zachováva násobenie skalárom)

Pre všetky $a \in \mathbb{R}$, $\vec{v} \in V$ platí

$$f(a\vec{v}) = a\,f(\vec{v})$$

najprv vynásobím a

zobrazím výsledok do U

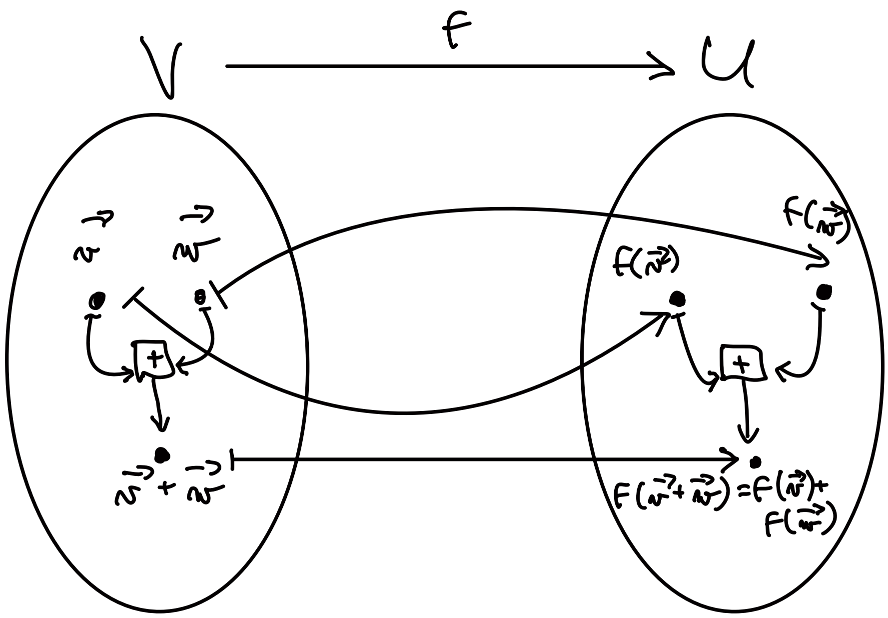
najprv zobrazím do U

potom vynásobím a

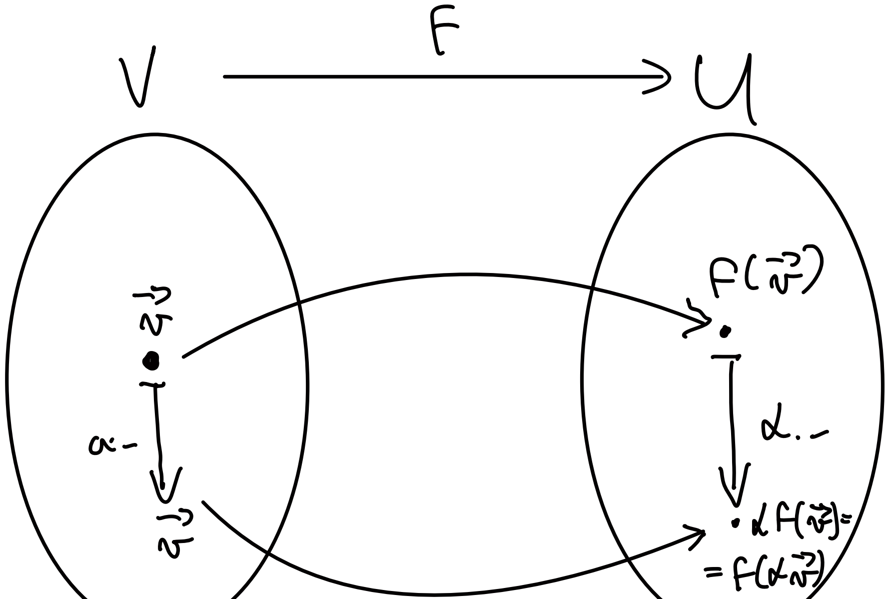
$\square$.

„obraz škálovania" = „škálovanie obrazu"

Zachovávanie súčtu



Zachovávanie násobenia skalárom



Príklady lineárnych zobrazení

- Pre každú dvojicu vektorových priestorov V, U je zobrazenie $z: V \longrightarrow U$ dané predpisom $z(\vec{v}) = \vec{0}$ lineárne:

Pre všetky $\vec{v}, \vec{w} \in V$ platí

$$z(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{0} = \vec{0} + \vec{0} = z(\vec{v}) + z(\vec{w})$$

$$z(\vec{v}) = z(\vec{w}) = \vec{0}$$

Pre všetky $a \in \mathbb{R}$, $\vec{v} \in V$ platí

$$z(a\vec{v}) = \vec{0} = a.\vec{0} = a\,z(\vec{0})$$

- Pre každý vektorový priestor V je zobrazenie $id: V \longrightarrow V$ dané predpisom $id(\vec{v}) = \vec{v}$ lineárne:

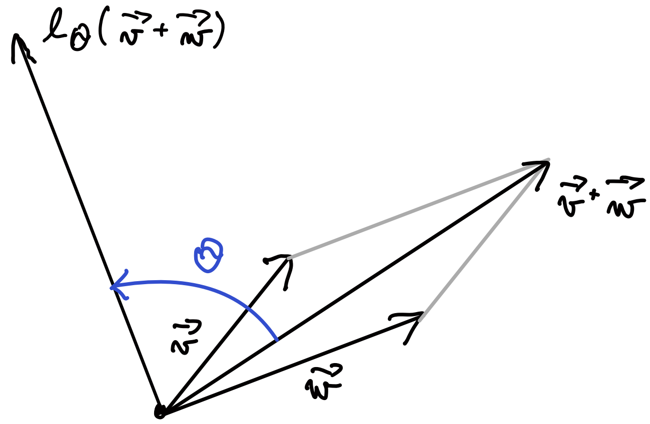
$$id(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{v}+\vec{w} = id(\vec{v}) + id(\vec{w})$$

$$id(a\vec{v}) = a\vec{v} = a.\,id(\vec{v})$$

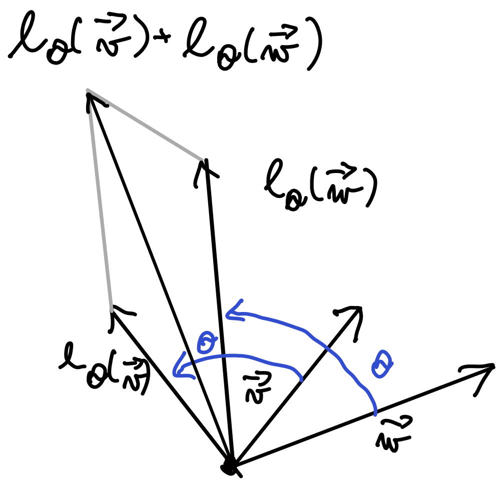
- S: vektorový priestor geometrických vektorov v rovine, $\theta \in \langle 0, 2\pi)$

$l_\theta : S \longrightarrow S$ rotácia vektora okolo počiatku doľava o uhol θ.

Máme sa presvedčiť o zachovávaní $+$ a násobenia skalárom; ale to je ľahké, ak si poriadne uvedomime, čo tieto veci znamenajú a použijeme geometrický náhľad:



„najprv sčítame, potom rotujeme"



„najprv rotujeme, potom sčítame"

V oboch prípadoch dostaneme ten istý vektor (pretože rovnobežník na dolnom obrázku je zrotovaný rovnobežník z horného obrázku)

Podobne sa môžeme dôkazom presvedčiť o tom, že
$$l_\Theta(a\vec{v}) = a\, l_\Theta(\vec{v})$$

- Zobrazenie polynómov
$d: \mathbb{R}^n[x] \longrightarrow \mathbb{R}^{n-1}[x]$ $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 0$
dané predpisom $d(\underbrace{p}_{\text{polynóm}}) = \underbrace{p'}_{\text{jeho derivácia}}$

$$n=3: \ d(x^3-3x^2+x+7) = (x^3-3x^2+x+7)' =$$
$$= 3x^2-6x+1$$

To, že derivácia je lineárne zobrazenie ste sa naučili na Matematickej analýze, sú to presne dobre známe vzorce

$$(p+q)' = p'+q'$$
$$(cp)' = c(p')$$

p, q sú funkcie (napr. polynómy) $c \in \mathbb{R}$ je konštanta.

ktoré ste neustále používali na počítanie derivácií

- $ev_2: \mathbb{R}^n[x] \longrightarrow \mathbb{R}$ „evaluácia v bode 1"
dané predpisom $ev_2(\underbrace{p}_{\text{polynóm}}) = \underbrace{p(2)}_{\text{jeho hodnota v bode 2}}$

$$n=3: \ ev_2(x^3-3x^2+x+7) = 2^3-3.2^2+2+7 = 8-12+2+7 = 5$$

$p, q \in \mathbb{R}^n[x]$:

$ev_2(p+q) = (p+q)(2) = p(2) + q(2) = ev_2(p) + ev_2(q)$

toto je iba použitie toho, ako definujeme $p+q$

$p \in \mathbb{R}^n[x]$, $a \in \mathbb{R}$:

$ev_2(ap) = (ap)(2) = a(p(2)) = a \cdot ev_2(p)$

- Nech $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ je matica; potom A reprezentuje zobrazenie $[\![A]\!]: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ „násobenie maticou zľava" (text Linalg 1.7)

$$[\![A]\!](\vec{v}) = A\vec{v}$$

Toto zobrazenie je lineárne:

$\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$: $[\![A]\!](\vec{v} + \vec{w}) = A(\vec{v} + \vec{w}) \underset{\text{Linalg 1.6}}{=} A\vec{v} + A\vec{w} = [\![A]\!](\vec{v}) + [\![A]\!](\vec{w})$

$\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}$: $[\![A]\!](a\vec{v}) = A(a\vec{v}) \underset{\text{Linalg 1.6}}{=} a(A\vec{v}) = a([\![A]\!](\vec{v}))$

- Nech V je konečnorozmerný vektorový priestor, $\dim(V) = n$, nech $X = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ je báza V

Potom zobrazenie $V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dané predpisom

$$\vec{v} \longmapsto [\vec{v}]_X$$

„zobraz vektor na jeho súradnice v báze X"

je lineárne.

Vlastnosti lineárnych zobrazení

Veta 12.1 Nech V, U sú vektorové priestory, nech $f: V \to U$ je lineárne zobrazenie. Potom

a) $f(\vec{o}) = \vec{o}$

b) Pre každú ticu skalárov $(a_1, \dots, a_n)$ a vektory $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \in V$ platí

$$\underbrace{f(a_1\vec{x}_1 + \dots + a_n\vec{x}_n)}_{\substack{\text{lineárna kombinácia } (\vec{x}_i) \\ \text{s koeficientami} \\ a_1, \dots, a_n}} = \underbrace{a_1 f_1(\vec{x}_1) + \dots + a_n f(\vec{x}_n)}_{\substack{\text{lineárna kombinácia } (f(\vec{x}_i)) \\ \text{s rovnakými koeficientami}}}$$

Dôkaz

a) $$f(\vec{o}) \underset{0.\vec{o}=\vec{o}}{=} f(0.\vec{o}) \underset{\text{linearita } f}{=} 0.f(\vec{o}) = \vec{o}$$

b) $$f(a_1\vec{x}_1 + \dots + a_n\vec{x}_n) \overset{f \text{ zachováva } +}{=} f(a_1\vec{x}_1) + f(a_2\vec{x}_2 + \dots + a_n\vec{x}_n) = \dots =$$
$$= f(a_1\vec{x}_1) + \dots + f(a_n\vec{x}_n) \underset{f \text{ zachováva škálovanie}}{=} a_1 f(\vec{x}_1) + \dots + a_n f(\vec{x}_n)$$

$\square$

Veta 12.2 Nech V, U, W sú vektorové priestory, nech $f: V \to U$, $g: U \to W$ sú lineárne zobrazenia. Potom $g \circ f: V \to W$ je lineárne zobrazenie

Dôkaz

Nech $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$, počítajme

$$(g \circ f)(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \underset{\text{definícia složeného zobrazenia}}{=} g(f(\vec{v}_1 + \vec{v}_2)) \underset{f \text{ je lineárne}}{=} g(f(\vec{v}_1) + f(\vec{v}_2)) \underset{g \text{ je lineárne}}{=} g(f(\vec{v}_1)) + g(f(\vec{v}_2))$$

$$\underset{\text{definícia složeného zobrazenia}}{=} (g \circ f)(\vec{v}_1) + (g \circ f)(\vec{v}_2)$$

Teda $g \circ f$ zachováva súčet.

Podobne, pre $\vec{v} \in V$, $a \in \mathbb{R}$ dostávame

$$(g \circ f)(a\vec{v}) = g(f(a\vec{v})) = g(a f(\vec{v})) = a\, g(f(v)) = a((g \circ f)(\vec{v})) \quad \square.$$

Definícia 12.3: Bijektívne lineárne zobrazenie sa volá <u>izomorfizmus</u>. Vektorové priestory sú navzájom <u>izomorfné</u>, ak medzi nimi existuje nejaký izomorfizmus. $\square$

Veta 12.4 (základná veta o lineárnych zobrazeniach)
Nech V, U sú konečnorozmerné vektorové priestory, nech $X = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ je báza V. Potom

- pre každú usporiadanú n-ticu vektorov $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n) \in U$
- existuje jediné lineárne zobrazenie $f: V \longrightarrow U$ také, že $f(\vec{x}_1) = \vec{u}_1, \dots, f(\vec{x}_n) = \vec{u}_n$

Skôr, ako si túto vetu dokážeme, pozrime sa na jej význam. Ak chceme určiť nejaké zobrazenie (nie nutne lineárne) $f: V \longrightarrow U$ medzi dvoma vektorovými priestormi, musíme určiť $f(\vec{v})$ pre každé $\vec{v} \in V$. Veta 12.4 nám hovorí, že ak V je konečnorozmerný a <u>f je lineárne</u>, potom nám f jednoznačne špecifikujú tieto dáta

- nejaká báza $X = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ vektorového priestoru V
- hodnoty f v prvkoch tej bázy X.

Dôkaz Vety 12.4

Nech $\vec{v} \in V$, nech $(a_1, \dots, a_n)$ sú súradnice $\vec{v}$ v báze X

$$[\vec{v}]_X = (a_1, \dots, a_n)$$

to znamená $\vec{v} = a_1\vec{x}_1 + \dots + a_n\vec{x}_n$.

Potom musí platiť

$$f(\vec{u}) = f(a_1\vec{x}_1 + \ldots + a_n\vec{x}_n) = a_1 f(\vec{x}_1) + \ldots + a_n f(\vec{x}_n) =$$
$$= a_1\vec{u}_1 + \ldots + a_n\vec{u}_n.$$

To nám ale presne určuje predpis f v každom $\vec{v} \in V$:

- nájdi súradnice $\vec{v}$ v báze X
- použi ich ako koeficienty lineárnej kombinácie vektorov $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$

Je však toto f vždy lineárne? Nech $\vec{v}, \vec{w} \in V$, máme dokázať, že $f(\vec{v}+\vec{w}) = f(\vec{v}) + f(\vec{w})$.
To vyžaduje zistiť vzťah medzi súradnicami vektorov $\vec{v}, \vec{w}, \vec{v}+\vec{w}$ v báze X. Označme súradnice $\vec{v}, \vec{w}$ v báze X

$$[\vec{v}]_X = (a_1, \ldots, a_n)$$
$$[\vec{w}]_X = (b_1, \ldots, b_n)$$

Aké sú súradnice $\vec{v}+\vec{w}$ v báze X?

$$\vec{v}+\vec{w} = (a_1\vec{x}_1 + \ldots + a_n\vec{x}_n) + (b_1\vec{x}_1 + \ldots + b_n\vec{x}_n) = \quad \text{(po úprave)}$$
$$(a_1+b_1)\vec{x}_1 + \ldots + (a_n+b_n)\vec{x}_n,$$

Teda $[\vec{v}+\vec{w}]_X = (a_1+b_1, \ldots, a_n+b_n)$.

Počítajme:

$$f(\vec{v}+\vec{w}) = f((a_1+b_1)\vec{x_1}+\ldots+(a_n+b_n)\vec{x_n}) = (a_1+b_1)\vec{u_1}+\ldots+(a_n+b_n)\vec{u_n} =$$
$$= a_1\vec{u_1}+\ldots+a_n\vec{u_n}+b_1\vec{u_1}+\ldots+b_n\vec{u_n} =$$
$$= f(\vec{v})+f(\vec{w}).$$

To, že $f(a\vec{v}) = a f(\vec{v})$ sa dokáže podobne $\square$.

V nasledujúcej prednáške využijeme Vetu 12.4 na to, aby sme ukázali že každé lineárne zobrazenie medzi dvoma konečnorozmernými vektorovými priestormi sa dá popísať pomocou matice.

MATICA LINEÁRNEHO ZOBRAZENIA

Uvažujme teraz tieto dáta:

- Konečnorozmerné vektorové priestory V, U
- $X = (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ je báza V (teda $\dim(V) = n$)
- $Y = (\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_m)$ je báza U (teda $\dim(U) = m$)
- $f : V \longrightarrow U$ je lineárne zobrazenie

Vieme z Vety 12.4, že f je jednoznačne určené n-ticou vektorov $(f(\vec{x}_1), \ldots, f(\vec{x}_n))$.

<u>Ale!</u>

Každý z týchto vektorov $f(\vec{x}_1), \ldots, f(\vec{x}_n)$ je vektor z U, a teda každý z nich má nejaké súradnice v báze Y, ktoré ho určujú.

Vzniká nám táto definícia:

Definícia 13.1: Nech V, U sú konečnorozmerné vektorové priestory, nech $X = (\vec{x_1}, \dots, \vec{x_n})$ je báza V, nech $Y = (\vec{y_1}, \dots, \vec{y_m})$ je báza U, nech $f: V \to U$ je lineárne zobrazenie.

Potom matica f v bázach X, Y je matica typu $m \times n$

$$[f]_{YX} = \left([f(\vec{x_1})]_Y \dots [f(\vec{x_n})]_Y \right)$$

stĺpcov je $\dim(V) = n$

$f: V \to U$
X je báza V
Y je báza U

každý stĺpec má dĺžku $m = \dim(U)$, teda máme $\dim(U)$ riadkov

$\square$.

Príklady:

1) Nulové lineárne zobrazenie

$f: V \to U \quad f(\vec{v}) = \vec{o}$

$$[f]_{XY} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \\ 0 & \cdots & \\ \vdots & & \end{pmatrix}$$ = nulová matica, bez ohľadu na bázy X, Y

2) Identické lineárne zobrazenie

$id: V \to V \qquad X = (\vec{x_1}, \dots, \vec{x_n})$ je ľubovoľná báza

$$[id]_{XX} = \begin{pmatrix} [id(\vec{x_1})]_X & \cdots & [id(\vec{x_n})]_X \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} [\vec{x_1}]_X & \cdots & [\vec{x_n}]_X \end{pmatrix} = *$$

$\vec{x_1} = 1\vec{x_1} + 0\vec{x_2} + \ldots + 0\vec{x_n}$ $\quad [\vec{x_1}]_X = (1, 0, \ldots, 0) = \vec{e_1}$

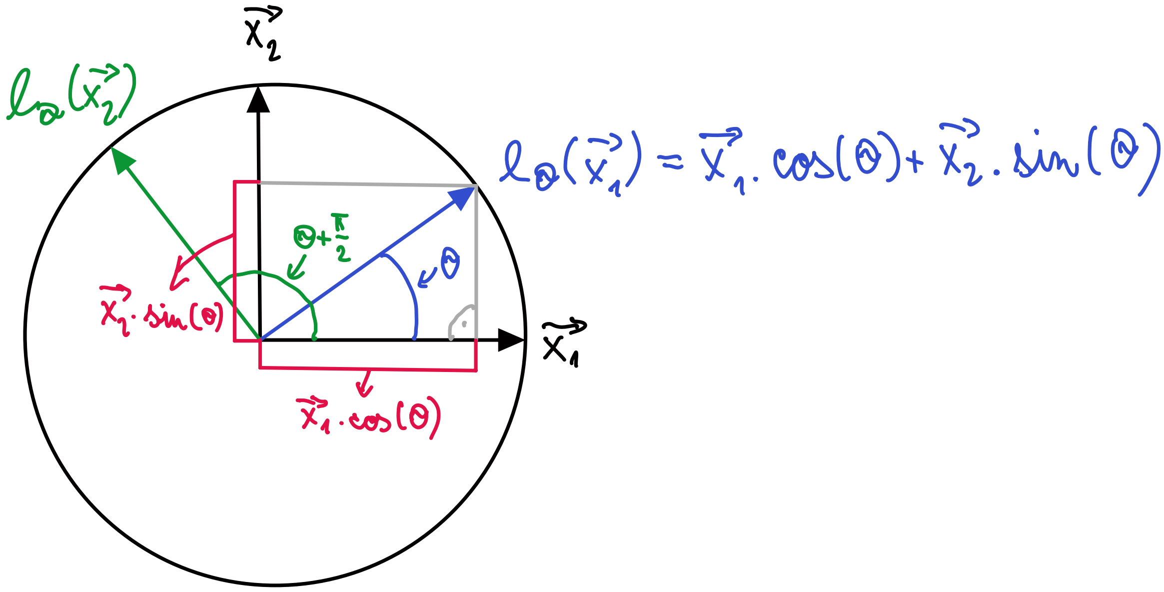
$\vec{x_2} = 0\vec{x_1} + 1\vec{x_2} + \ldots + 0\vec{x_n}$ $\quad [\vec{x_2}]_X = (0, 1, \ldots, 0) = \vec{e_2}$

$$* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & & 1 \end{pmatrix} = I_n$$

3) S - vektory v rovine s počiatkom. $l_\Theta : S \longrightarrow S$ rotácia okolo počiatku doľava o uhol Θ

$\vec{x_1}, \vec{x_2}$ dva vektory, kolmé na seba, rovnaká dĺžka. $X = (\vec{x_1}, \vec{x_2})$ je báza S.

Aká je matica $[l_\Theta]_{XX}$?



Dostávame z obrázka súradnice vektorov

$$[l_\theta(\vec{x}_1)]_X = (\cos\theta, \sin\theta)$$

$$[l_\theta(\vec{x}_2)]_X = \left(\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right), \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\right) = (-\sin(\theta), \cos(\theta))$$

nakreslite si grafy sin, cos

Teda matica l_θ v bázach X, X je

$$[l_\theta]_{XX} = \begin{pmatrix} [l_\theta(\vec{x}_1)]_X & [l_\theta(\vec{x}_2)]_X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

4) Lineárne zobrazenie $d : \mathbb{R}^3[x] \longrightarrow \mathbb{R}^2[x]$ „derivácia"

Báza $\mathbb{R}^3[x]$ $\quad X = (1, x, x^2, x^3)$

Báza $\mathbb{R}^2[x]$ $\quad Y = (1, x, x^2)$

$d(1) = 0 \qquad [0]_Y = (0, 0, 0)$

$d(x) = 1 \qquad [1]_Y = (1, 0, 0)$

$d(x^2) = 2x \qquad [2x]_Y = (0, 2, 0)$

$d(x^3) = 3x^2 \qquad [3x^2]_Y = (0, 0, 3)$

Teda matica d v bázach X, Y je

$$[d]_{YX} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

5) Lineárne zobrazenie $ev_{1,2,3} : \mathbb{R}^2[x] \longrightarrow \mathbb{R}^3$

dané predpisom

$ev_{1,2,3}(p) = (p(1), p(2), p(3))$

$X = (1, x, x^2)$ - báza $\mathbb{R}^2[x]$

$E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ - báza $\mathbb{R}^3$

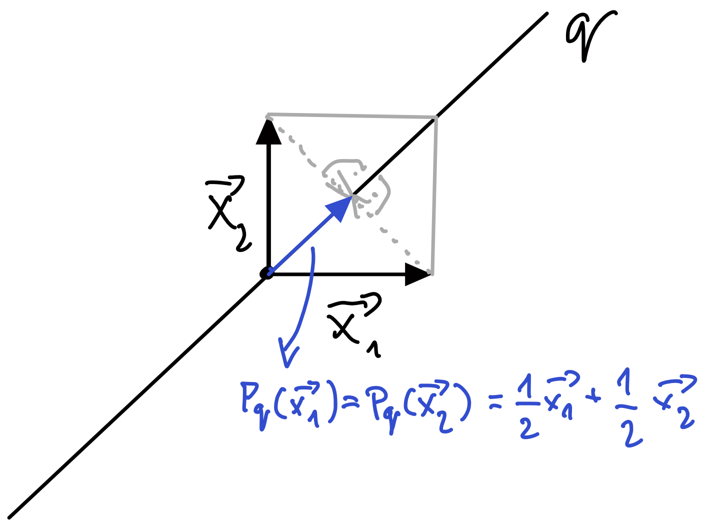
$ev_{1,2,3}(1) = (1, 1, 1)$

$ev_{1,2,3}(x) = (1, 2, 3)$

$ev_{1,2,3}(x^2) = (1, 4, 9)$

$$[ev_{1,2,3}]_{EX} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

6) Uvažujme priamku q v rovine s počiatkom $\mathcal{S}$ takú, že q prechádza počiatkom. Zobrazenie $P_q : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$, ktoré zobrazí každý vektor $\vec{v} \in \mathcal{S}$ na jeho ortogonálnu projekciu na q je lineárne (nedokazujem).



Ale $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ sú dva navzájom kolmé vektory rovnakej dĺžky, ktoré (oba) zvierajú s priamkou q uhol $45°$, oba sa pravouhlo premietajú na priamku q do rovnakého vektora $P_q(\vec{x}_1) = P_q(\vec{x}_2)$, ktorého koncový vrchol leží presne v strede štvorca vytýčeného $\vec{x}_1, \vec{x}_2$.

Súradnice tohto vektora v báze $X=(\vec{x}_1,\vec{x}_2)$ sú $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ a matica P_q v báze X je $\begin{pmatrix}1/2 & 1/2\\ 1/2 & 1/2\end{pmatrix}$ □

Věta 13.2: Nech V, U sú konečnorozmerné vektorové priestory, nech X je báza V, nech Y je báza U. Nech $f: V \longrightarrow U$ je lineárne zobrazenie. Potom pre každý vektor $\vec{v}\in V$ platí

násobenie matíc

$$\underbrace{[f(\vec{v})]_Y}_{\text{súradnice } f(\vec{v}) \text{ v báze } Y} = \underbrace{[f]_{YX}}_{\text{matica lineárneho zobrazenia } f \text{ v bázach } X,Y}\;\underbrace{[\vec{v}]_X}_{\text{súradnice } \vec{v} \text{ v báze } X}$$

Dôkaz:

Označme $X=(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n)$.

Uvažujme najprv prípad že $\vec{v}$ je priamo vektor z X, povedzme $\vec{v}=\vec{x}_1$. Zrejme $\vec{x}_1 = 1\vec{x}_1 + 0\vec{x}_2 + \dots + 0\vec{x}_n$, teda súradnice $\vec{x}_1$ v báze X sú

$$[\vec{x}_1]_X = (1,0,\dots,0) = \vec{e}_1$$

Počítajme, čomu je rovná pravá strana dokazovanej rovnosti pre $\vec{v}=\vec{x}_1$:

$$[f]_{YX}[\vec{x}_1]_X = \begin{pmatrix} [f(\vec{x}_1)]_Y & \cdots & [f(\vec{x}_n)]_Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

čo je presne prvý stĺpec matice $[f]_{YX}$, teda $[f(x_1)]_Y$. Zrejme to takto bude fungovať aj pre ostatné stĺpce / prvky bázy X, teda vidíme, že pre všetky $i = 1, \dots, n$ máme

$$[f]_{YX}[\vec{x}_i]_X = [f(\vec{x}_i)]_Y$$

Uvažujme teraz ľubovoľný vektor $\vec{v} \in V$ a označme jeho súradnice v báze X $[\vec{v}]_X = (c_1, \dots, c_n)$, čo vlastne znamená, že $\vec{v} = c_1\vec{x}_1 + \dots + c_n\vec{x}_n$. Počítajme

zobrazenie vektora na jeho súradnice je lineárne

$$[f]_{YX}[\vec{v}]_X = [f]_{YX}[c_1\vec{x}_1 + \dots + c_n\vec{x}_n]_X =$$

distributívny zákon

$$[f]_{YX}\left(c_1[\vec{x}_1]_X + \dots + c_n[\vec{x}_n]_X\right) =$$

toto sú všetko matice

$$c_1[f]_{YX}[\vec{x}_1]_X + \dots + c_n[f]_{YX}[\vec{x}_n]_X =$$

$[f]_{YX}[\vec{x}_i]_X = [f(\vec{x}_i)]_Y$

$$c_1[f(\vec{x}_1)]_Y + \dots + c_n[f(\vec{x}_n)]_Y =$$

zobrazenie vektora na jeho súradnice je lineárne

$[c_1 f(\vec{x}_1) + \ldots + c_m f(\vec{x}_m)]_Y =$ → f je lineárne zobrazenie
$[f(c_1\vec{x}_1 + \ldots + c_m\vec{x}_m)]_Y =$
$= [f(\vec{v})]_Y$ $\square$.

Ukážme si, ako Veta 13.2 funguje na príklade:

Príklad:
Uvažujme polynóm $p \in \mathbb{R}^3[x]$ daný predpisom $p(x) = -3x^3 + 2x - 2$; Jeho súradnice v báze $X = (1, x, x^2, x^3)$ sú $(-2, 2, 0, -3)$. Uvažujme zobrazenie $d: \mathbb{R}^3[x] \longrightarrow \mathbb{R}^2[x]$ „derivácia". Ak zvolíme bázu $Y = (1, x, x^2)$ vektorového priestoru $\mathbb{R}^2[x]$,

$$[d(p)]_Y = [d]_{YX}[p]_X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix}$$

čo sú súradnice polynómu $-9x^2 + 2$ v báze Y; zároveň $d(p) = p' = (-3x^3 + 2x - 2)' = -9x^2 + 2$, čiže všetko sedí ako má.

Vetu 13.2 môžeme vyjadriť kompaktne pomocou diagramu:

súradnice v X

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "{[-]_X}"'] & U \arrow[d, "{[-]_Y}"] \\
\mathbb{R}^n \arrow[r, "{[f]_{YX}\cdot -}"'] & \mathbb{R}^m
\end{tikzcd}$$

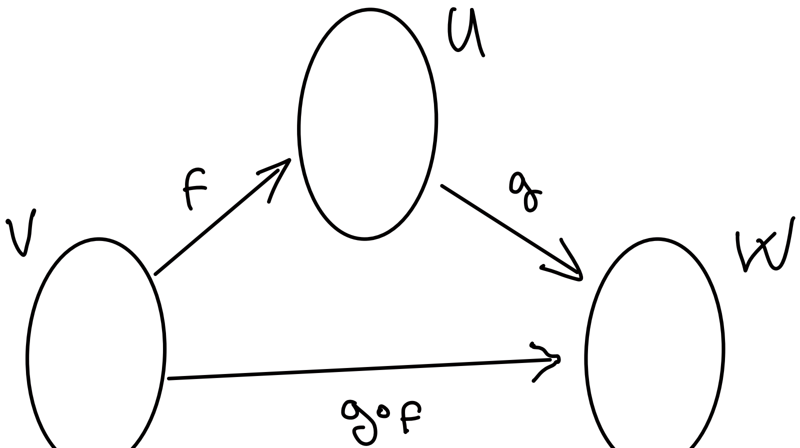
súradnice v báze Y

násobenie maticou $[f]_{YX}$ zľava

Veta 13.2 potom znamená, že tento diagram komutuje: ak zložíme zobrazenia, ktoré sú na obrázku reprezentované šípkami $\rightarrow$ $\downarrow$, dostaneme rovnaké zobrazenie, ako keď zložíme zobrazenia reprezentované šípkami $\downarrow$ $\rightarrow$.

SKLADANIE LINEÁRNYCH ZOBRAZENÍ A NÁSOBENIE MATÍC

Uvažujme teraz tri konečnorozmerné vektorové priestory V, U, W a dve lineárne zobrazenia $f: V \to U$, $g: U \to W$. Podľa Vety 12.2 je zobrazenie $g \circ f: V \to W$ lineárne.



Ak vyberieme tým trom priestorom nejaké bázy, každé zo zobrazení $f, g, g\circ f$ bude reprezentované nejakou maticou, teda dostaneme tri matice. Nasledujúca Veta nám hovorí o vzťahu medzi týmito tromi maticami.

Veta 13.3 Nech

- V, U, W sú konečnorozmerné vektorové priestory
- $f: V \longrightarrow U$, $g: U \longrightarrow W$ sú lineárne zobrazenia
- X je báza V, Y je báza V, Z je báza W.

Potom

$$[g\circ f]_{ZX} = [g]_{ZY}[f]_{YX}$$

skladanie zobrazení

súčin matíc

Dôkaz

Najskôr dokážeme, že pre každý vektor $\vec{v} \in V$ platí, že

$$[g\circ f]_{ZX}[\vec{v}]_X = [g]_{ZY}[f]_{YX}[\vec{v}]_X \qquad (*)$$

a naozaj, naľavo máme

$$[g\circ f]_{ZX}[\vec{v}]_X \underset{\text{Veta 13.2}}{=} [(g\circ f)(\vec{v})]_Z \underset{\text{Definícia zloženého zobrazenia}}{=} [g(f(\vec{v}))]_Z$$

a napravo

$$[g]_{ZY}[f]_{YX}[\vec{v}]_X \underset{\text{Veta 13.2}}{=} [g]_{ZY}[f(\vec{v})]_Y \underset{\text{Veta 13.2}}{=} [g(f(\vec{v}))]_Z$$

Označme teraz $X=(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n)$. Pre všetky $i=1,\dots,n$ je $[\vec{x}_i]_X = \vec{e}_i = (0,\dots,0,\underset{\text{i-ta pozícia}}{1},0,\dots,0)\in\mathbb{R}^n$. Pre každú maticu A s n stĺpcami máme

$$A[\vec{x}_i]_X = A\,\vec{e}_i = \underbrace{S_i(A)}_{\text{i-ty stĺpec matice A}}$$

Ak teraz použijeme rovnosť $(*)$ s $\vec{v}=\vec{x}_i$, dostaneme

$$[g\circ f]_{ZX}[\vec{x}_i]_X = [g]_{ZY}[f]_{YX}[\vec{x}_i]_X$$
$$[g\circ f]_{ZX}\,\vec{e}_i = [g]_{ZY}[f]_{YX}\,\vec{e}_i$$
$$S_i([g\circ f]_{ZX}) = S_i([g]_{ZY}[f]_{YX})$$

Teda $[g \circ f]_{ZX}$ a $[g]_{ZY}[f]_{YX}$ majú rovnaký i-ty stĺpec pre $i = 1, \dots, n$ a teda sú to rovnaké matice. $\square$

Pár dôsledkov Vety 13.3:

A) Pozrime sa najprv na rovinné rotácie z príkladu 3. Zrejme pre dva uhly $\Theta, \Psi \in \langle 0, 2\pi)$ platí $l_\Psi \circ l_\Theta = l_{\Theta+\Psi}$ (najprv otočiť doľava o Θ a potom ešte o Ψ je to isté ako otočiť doľava o $\Theta+\Psi$). Podľa Vety 13.2 má pre každú bázu X platiť $[l_\Psi \circ l_\Theta]_{XX} = [l_\Psi]_{XX}[l_\Theta]_{XX}$, z toho dostaneme maticovú rovnosť

$$[l_{\Psi+\Theta}]_{XX} = [l_\Psi \circ l_\Theta]_{XX} = [l_\Psi]_{XX}[l_\Theta]_{XX}$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\Psi+\Theta) & -\sin(\Psi+\Theta) \\ \sin(\Psi+\Theta) & \cos(\Psi+\Theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\Psi & -\sin\Psi \\ \sin\Psi & \cos\Psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\Theta & -\sin\Theta \\ \sin\Theta & \cos\Theta \end{pmatrix}$$

Po vynásobení matíc napravo dostaneme rovnosť matíc

$$\begin{pmatrix} \cos(\Psi+\Theta) & -\sin(\Psi+\Theta) \\ \sin(\Psi+\Theta) & \cos(\Psi+\Theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\cos\Psi\cos\Theta - \sin\Psi\sin\Theta) & (-\cos\Psi\sin\Theta - \sin\Psi\cos\Theta) \\ (\sin\Psi\cos\Theta + \cos\Psi\sin\Theta) & (-\sin\Psi\sin\Theta + \cos\Psi\cos\Theta) \end{pmatrix}$$

Porovnaním prvkov v týchto maticiach nám vyjdú vzorce

$$\cos(\Psi+\Theta) = \cos\Psi\cos\Theta - \sin\Psi\sin\Theta \qquad \sin(\Psi+\Theta) = \sin\Psi\cos\Theta + \cos\Psi\sin\Psi$$

B) Ak uvažujeme lineárne zobrazenie P_q z príkladu 6, zrejme platí $P_q(P_q(\vec{v})) = P_q(\vec{v})$ pre každý vektor $\vec{v}$, pretože $P_q(\vec{v})$ je už na priamke q, a teda jeho pravouhlou projekciou na priamku q je on sám. To znamená, že $P_q \circ P_q = P_q$. Z tohto pozorovania a z Vety 13.2 máme

$$[P_q]_{XX}[P_q]_{XX} \underset{\text{Veta 13.2}}{=} [P_q \circ P_q]_{XX} \underset{P_q \circ P_q = P_q}{=} [P_q]_{XX}$$

Teda má platiť

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

a to je naozaj pravda, ako sa môžete sami presvedčiť výpočtom.

INVERZNÉ LINEÁRNE ZOBRAZENIE A INVERZNÁ MATICA

Veta 13.4 Nech V, U sú konečnorozmerné vektorové priestory, nech f je bijektívne lineárne zobrazenie $f: V \longrightarrow U$. Nech X je báza V, Y je báza U. Potom matica $[f^{-1}]_{YX}$ je inverzná k matici $[f^{-1}]_{XY}$.

Dôkaz

Máme dokázať, že $[f^{-1}]_{XY}[f]_{YX} = I$, $[f]_{YX}[f]^{-1}_{XY} = I$.

Počítajme:

$$[f^{-1}]_{XY}[f]_{YX} \overset{\text{Veta 13.3}}{=} [f^{-1}\circ f]_{XX} \overset{f^{-1}\circ f = id_V}{=} [id_V]_{XX} \overset{\text{Príklad 2}}{=} I$$

Druhá rovnosť sa dokáže rovnako. □

Pár dôsledkov Vety 13.4

A) Zrejme inverzné zobrazenie k rovinnej rotácii doľava je rovinná rotácia doprava, ale tú môžeme vyjadriť ako rovinnú rotáciu doľava o záporný uhol:

$$\ell_\Theta \circ \ell_{(-\Theta)} = \ell_{(-\Theta)} \circ \ell_\Theta = id$$

Teda $\ell_\Theta^{-1} = \ell_{(-\Theta)}$. Podľa Vety 13.4 má byť matica $[\ell_{(-\Theta)}]_{XX}$ inverzná k matici $[\ell_\Theta]_{XX}$. Počítajme:

$$[\ell_\Theta]_{XX}[\ell_{(-\Theta)}]_{XX} = \begin{pmatrix} \cos\Theta & -\sin\Theta \\ \sin\Theta & \cos\Theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(-\Theta) & -\sin(-\Theta) \\ \sin(-\Theta) & \cos(-\Theta) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\Theta\cos(-\Theta) + (-\sin\Theta)(-\sin(-\Theta)) & \cos\Theta(-\sin(-\Theta)) + (-\sin\Theta)\cos(-\Theta) \\ \sin\Theta\cos(-\Theta) + \cos\Theta\sin(-\Theta) & \sin\Theta(-\sin(-\Theta)) + \cos\Theta\cos(-\Theta) \end{pmatrix} =$$

$\cos(-\Theta) = \cos\Theta$
$\sin(-\Theta) = -\sin(\Theta)$

$$= \begin{pmatrix} \cos^2\Theta + \sin^2\Theta & \cos\Theta\sin\Theta - \sin\Theta\cos\Theta \\ \sin\Theta\cos\Theta - \cos\Theta\sin\Theta & \sin^2\Theta + \cos^2\Theta \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad □$$

B) Pozrime sa opäť na lineárne zobrazenie $ev_{1,2,3}$ vyššie. Prezradím že je bijektívne; aký význam môžeme prisúdiť zobrazeniu $ev_{1,2,3}^{-1}$? $ev_{1,2,3}^{-1} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2[x]$ je zobrazenie, ktoré priraďuje usporiadaným trojiciam reálnych čísel polynómy. Má vlastnosť

$ev_{1,2,3} \circ (ev_{1,2,3})^{-1} = id_{\mathbb{R}^3}$

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R}^2[x] \arrow[dr, "ev_{1,2,3}"] & \\ \mathbb{R}^3 \arrow[ur, "(ev_{1,2,3})^{-1}"] \arrow[rr, bend right, "id_{\mathbb{R}^3}"'] & & \mathbb{R}^3 \end{tikzcd}$$

To znamená, že ak vezmeme ľubovoľné $(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$, $(ev_{1,2,3}^{-1})(y_1, y_2, y_3) = p$, pričom pre to p platí

$$ev_{1,2,3}(p) = (y_1, y_2, y_3)$$

Ale $ev_{1,2,3}(p) = (p(1), p(2), p(3))$ a teda $p(1) = y_1$, $p(2) = y_2$ $p(3) = y_3$.

Ak si teda zvolíme povedzme trojicu $(1,7,14)$, $ev_{1,2,3}^{-1}(1,7,14)$ musí byť polynóm $p \in \mathbb{R}^2[x]$ taký, že $p(1) = 1$ $p(2) = 7$ $p(3) = 14$.

Matica inverzná k $[ev_{1,2,3}]_{EX}$ vieme vypočítať:

$$\left([ev_{1,2,3}]_{EX}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -5/2 & 4 & -3/2 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \end{pmatrix}$$

a podľa Vety 13.4 je $\left([ev_{1,2,3}]_{EX}\right)^{-1} = [ev_{1,2,3}^{-1}]_{XE}$ a podľa Vety 13.2 pre každý vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ máme

$$[ev_{1,2,3}^{-1}]_{XE}[\vec{v}]_E = [ev_{1,2,3}^{-1}(\vec{v})]_X$$

Ak vezmeme teraz napríklad $\vec{v} = (1,2,5)$, potom

$$[ev_{1,2,3}^{-1}]_{XE}[\vec{v}]_E = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -5/2 & 4 & -3/2 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a to sú súradnice polynómu $p(x) = x^2 - 2x + 2$ v báze $(1, x, x^2)$.

A naozaj, máme $p(1) = 1$ $p(2) = 2$ $p(3) = 5$ pre tento polynóm p. $\square$