Slovenská Technická Univerzita v Bratislave
Stavebná Fakulta

# Modelovanie a analýza platňovej tektoniky

Bakalárska práca

2019
Martin Štefanec

Slovenská Technická Univerzita v Bratislave
Stavebná Fakulta

# Modelovanie a analýza platňovej tektoniky

Bakalárska práca

| | |
|---|---|
| Študijný program: | Matematicko-počítačové modelovanie |
| Študijný odbor: | 9.1.9 aplikovaná matematika |
| Školiace pracovisko: | Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie (SvF) |
| Školiteľ: | Ing. Michal Kollár, PhD. |

Bratislava, 2019
Martin Štefanec

**Čestné prehlásenie:**

Prehlasujem, že som bakalársku prácu vypracoval samostatne, na základe uvedenej použitej literatúry a s odbornou pomocou vedúceho práce.

V Bratislave, 2.5.2019

. . . . . . . . . . . . . . . . .
Martin Štefanec

**Poďakovanie:** Chcel by som poďakovať Ing. Michalovi Kollárovi, PhD. za jeho trpezlivosť, cenné rady a odborné konzultácie počas vypracovania tejto práce.

# Abstrakt

Bakalárska práca sa zaoberá tvorbou trojdimenzionálneho modelu zemskej kôry a pohybov litosferických dosiek v softvéri ANSYS. Teoretická časť sa zaoberá priblížením teórie platňovej tektoniky, príčinou pohybu litosferických platní a druhov tektonických zlomov. Ďalej vysvetľuje základy teórie pružnosti a metódy konečných prvkov. Praktická časť je tvorená globálnym experimentom, v ktorom sa vytvára model Zeme tvorený icosahedronovou sieťou, ktorý aproximuje geoid z modelu WGS84. Model reprezentuje zemskú kôru tvorenú 4 vrstvami materiálov rôznych vlastností (3 vrstvy sedimentov s ľadom, horná kôra, stredná kôra a spodná kôra), ktoré boli získané z modelu zemskej kôry CRUST 1.0. Na hornej vrstve, ktorá reprezentuje zemskú topografiu a batymetriu a spodnej vrstve predstavujúcej Moho plochu boli uplatnené okrajové podmienky z modelu ITRF2014. V práci je popísaný postup vytvárania geometrie modelu so všetkými potrebnými krokmi a transformáciami a ako výsledok práce sú zobrazené jednotlivé zložky napätí a posunov na povrchu Zeme vizualizované v softvéri Surfer 15.


**Kľúčové slová:** platňová tektonika, litosferické dosky, teória pružnosti, metóda konečných prvkov, ANSYS, icosahedronová sieť

# Abstract

This bachelor's thesis deals with modelling three-dimensional model of Earth's crust and movement of tectonic plates in ANSYS software. The theoretical part deals with plate tectonics, origins of motion of tectonic plates and types of tectonic faults. Furthermore, it explains the basics of elasticity theory and finite element method. The practical part is dedicated to a global experiment, in which the model of Earth is created by approximating WGS84 geoid by icosahedron grid. The model represents Earth's crust made up of 4 layers of materials with different material properties (3 layers of sediments with ice, upper crust, middle crust and lower crust) which were obtained from a model of Earth's crust CRUST 1.0. Boundary conditions obtained from model of Earth's crust velocities ITRF2014 were applied to the uppermost layer, which represents Earth's topography and bathymetry and lowest layer representing Mohorovičić discontinuity. The thesis also describes the process of creating a model' geometry with every transformation needed. The result contains images of components of the stress tensor and displacements visualized in Surfer 15 software.

**Keywords:** plate tectonics, tectonic plates, elasticity theory, finite element method, ANSYS, icosahedron grid

# Obsah

# Úvod

Hoci história teórie globálnej tektoniky je pomerne nová a začala sa vo väčšom rozvíjať až v sedemdesiatych rokoch 20. storočia, ľudia verili, že časti Zeme sú v pohybe už omnoho skôr. Odkedy ľudia po prvý krát zmapovali pobrežia kontinentov v okolí Atlantického oceánu, sme si začali všímať veľkú podobnosť tvaru pobreží Amerík a Európy s Afrikou. Ako prvú písomnú zmienku o povšimnutí si spomenutej podobnosti môžeme považovať dielo *Novum Organum* od Sira Francisa Bacona z roku 1620.

Táto bakalárska práca sa zaoberá využitím poznatkov z teórie pružnosti a metódy konečných prvkov na modelovanie pohybov litosferických dosiek. Hlavným cieľom práce je vytvorenie trojdimenzionálnej aproximácie povrchu Zeme, ktorá sa následne použije na modelovanie posunov a napätí v tektonických platniach. Práca je zložená z dvoch hlavných častí.

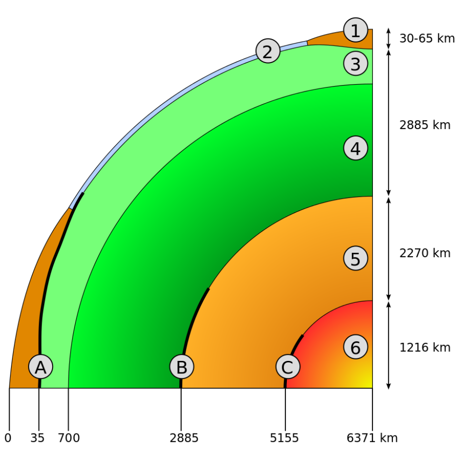
V teoretickej časti, v 1. kapitole, opíšeme stavbu Zeme a procesy v jej vnútri. Nasledujúce 2 kapitoly sa venujú základom teórie pružnosti a metóde konečných prvkov potrebných na riešenie danej problematiky.

V praktickej časti sa venujeme tvorbe dikretizovaného modelu Zeme, ktorý slúži ako geometria pre konečno-prvkový softvér ANSYS [2]. Výsledkom výpočtu sú zložky tenzora napätia a posuny na Zemskom povrchu.

# Kapitola 1

# Platňová tektonika

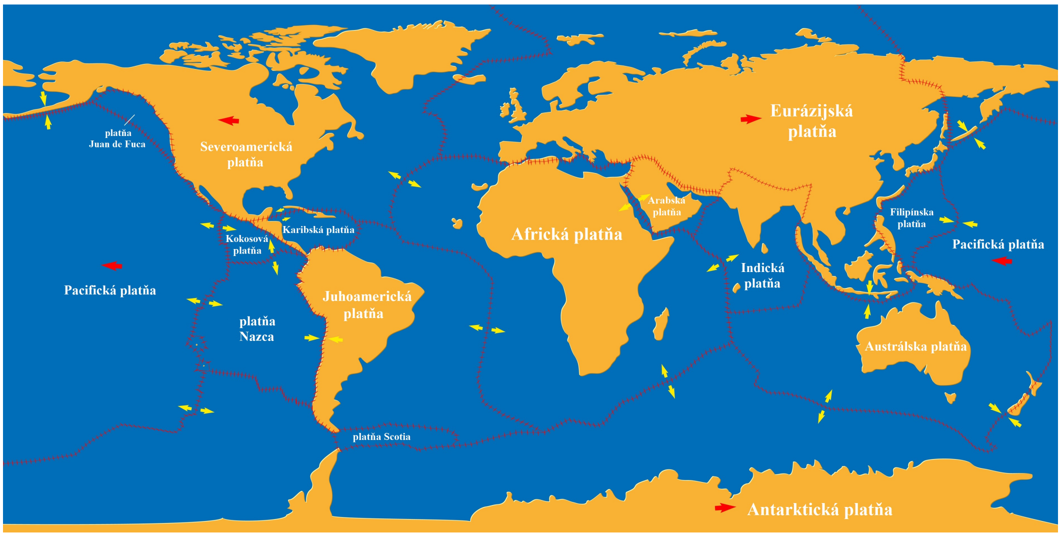
Veríme, že všetky telesá v slnečnej sústave (vrátane Slnka) boli vytvorené z mračna prachu vzniknutého výbuchom supernovy. Zhlukovaním prachu sa vytvárali drobné kamenné kusy rozmeru niekoľkých kilometrov nazývané *planetesimály*, ktoré sa následne vzájomnými zrážkami spájali do stále väčších a väčších telies. Približne pred $4,5$ miliardami rokov narazil do mladej Zeme objekt veľkosti Marsu a materiál vyrazený zo Zeme sa na obežnej dráhe nakopil a vytvoril tým Mesiac. Týmto nárazom, rovnako ako aj rozpadom rádioaktívnych prvkov s krátkym polčasom rozpadu sa Zem ohrievala a povrch Zeme bol dlhý čas pokrytý sopkami. Toto všetko prispelo k tomu, že sa ťažké kovy ako železo a nikel roztavili a vďaka svojej veľkej hustote klesali smerom ku stredu Zeme a vytvorili jadro, zatiaľ čo ľahšie materiály ako hliník, kyslík a kremík sa vznášali pri povrchu a vytvorili tak kôru. Týmto postupom sa vytvorila radiálne symetrická kompozícia Zeme tak, ako ju poznáme. Na obrázku 1.1 môžeme vidieť kompozíciu Zeme zistenú na základe seizmických prieskumov. Vidíme, že kôra $(1,2)$, dosahujúca hrúbku $30-100\,km$ na pevnine a $5-15\,km$ v oceánoch, je omnoho tenšia ako plášť $(3,4)$ a jadro $(5,6)$, ktoré dosahujú hrúbku viac než $2500\,km$, resp. $3500\,km$. [11]




1- kontinentálna kôra
2- oceánska kôra
3- vrchný plášť
4- spodný pláš
5- vonkajšie jadro
6- vnútorné jadro
*A*- Mohorovičićova diskontinuita
*B*- Gutenbergova diskontinuita
*C*- Lehmann–Bullenova diskontinuita

Obr. 1.1: Zloženie Zeme (nie v pravdivej mierke)

Celá zemská kôra vrátane najvrchnejšej časti plášťa tvoria *litosféru*, pod ktorou sa nachádza *astenosféra*, čo je horná časť zemského plášťa. Litosféra je rozdelená na viacero častí nazývaných litosferické platne (tektonické dosky), ktorých presný počet nie je známy, avšak poznáme 12 veľkých platní, ktoré dopĺňajú mnohé menšie. Na obrázku 1.2 sú zobrazené najväčšie litosferické dosky s naznačením ich vzájomného pohybu.



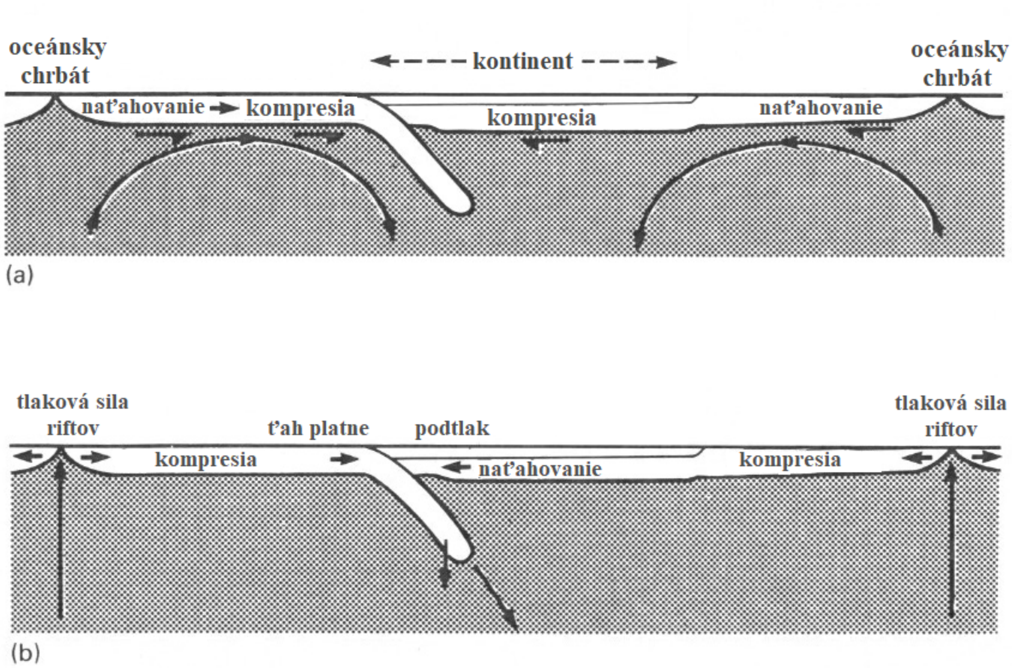

Obr. 1.2: Mapa najväčších litosferických platní

## 1.1 Príčina pohybu platní

Energia potrebná na uvedenie a udržanie litosferických platní v pohybe je teplo generované v zemskom jadre a spodnom plášti, ktoré je prinášané ku povrchu termálnou konvekciou v plášti. Tá zapríčiňuje, že horúci materiál, pochádzajúci zo spodnejšej vrstvy plášťa, kde sú teplota aj tlak vyššie, ktorý má menšiu hustotu, je unášaný smerom nahor do astenosféry. Tam následne chladne a príchodom ďalšieho horúcejšieho materiálu je prinútený klesnúť späť do nižšej časti plášťa, kde sa celý proces opakuje. Ostáva už len určiť akým spôsobom sa táto tepelná energia pretvorí na kinetickú energiu litosferických dosiek.[11]

Na obrázku 1.3 sú zobrazené dva návrhy mechanizmov zapríčiňujúcich pohyby litosferických dosiek. Prvý je tzv. *Mantle drag mechanism*, ktorý je všeobecne najuznávanejší a spočíva v predpoklade, že pohyb dosiek je zapríčinený trením pohybujúcej sa chladnúcej astenosféry o podstavu litosferických dosiek. Problém tohto návrhu je, že na udržanie konštantnej rýchlosti $40mm/rok$ je potrebné, aby bola rýchlosť astenosféry približne $200mm/rok$, čo je z geologického hľadiska nepravdepodobné.

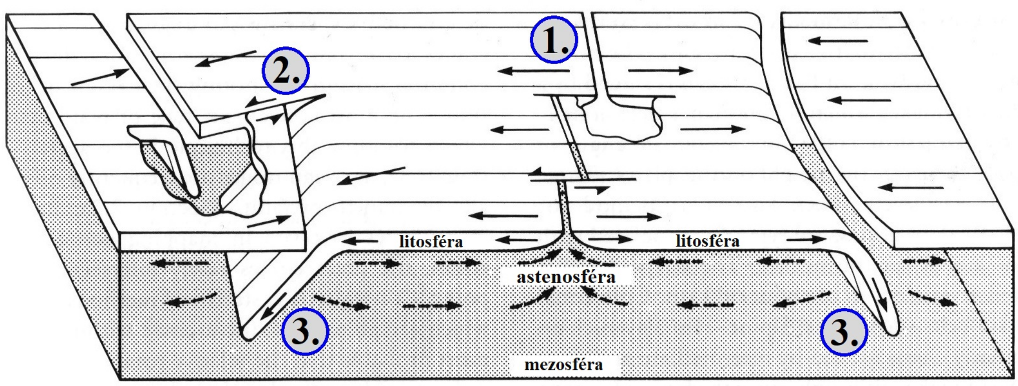
Druhý návrh je tzv. *Edge-force mechanism*, ktorý spočíva v tom, že hornou hranicou konvekcie je litosféra, nie astenosféra. Teda predpokladá, že pohyb litosferických dosiek je zapríčinený silami pôsobiacimi na ich hranice. To avšak znamená, že je zužitkovaná iba malá časť energie plášťa, ale tento zlomok energie je adekvátny kinetickej energii dosiek. Tento návrh je vhodnejší z viacerých hľadísk. Je prípustnejší nielen z hľadiska termodynamiky a efektívnejší pri prenose tepla z plášťa, ale aj je konzistentnejší pri pozorovaní napätí vo vnútri platní.[11]




Obr. 1.3: Dva návrhy mechanizmov zapríčiňujúcich pohyby litosferických dosiek[11]

## 1.2 Druhy stykov platní

Ako je už vyššie spomenuté, teória platňovej tektoniky tvrdí, že zemská litosféra je rozdelená do systému dosiek. Na strete tých dosiek môžu nastať 3 situácie (Obr. 1.4).




Obr. 1.4: Druhy stykov platní[11]

Číslom **1.** sú označené *riftové zóny*. Je to prípad styku platní, kde platne divergujú, t.j. pohybujú sa od seba. Tým sa umožní magme zo zemského plášťa aby vystúpila na povrch a vytvorila tak nový úsek morského dna. Týmto spôsobom vznikajú dlhé oceánske chrbty, ktorých najznámejšími prípadmi sú Stredoatlantický chrbát na stykoch Severoamerickej dosky s Eurázijskou a Juhoamerickej s Africkou alebo chrbát na styku Nazca platne s Pacifickou doskou v týchto miestach sú dosiahnuté maximálne napätia v ťahu.

Číslo **2.** značí *transformné zlomy*. Tieto zlomy vznikajú v prípadoch, keď sa dve susediace platne vedľa seba šmýkajú takým spôsobom, že nevzniká ani nezaniká žiadna časť platní, čo znamená že maximálne sú tu tangenciálne (šmykové) napätia. Typickým príkladom takéhoto stretu je zlom San Andreas na styku platní Juan de Fuca so Severoamerickou platňou.

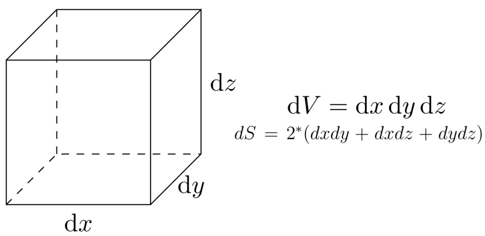
A nakoniec, číslom **3.** sú označené *konvergentné zlomy*. Tento druhy zlomu nastáva v prípade, keď sa dve platne pohybujú smerom k sebe (konvergujú). Maximálne napätie je tu v tlaku. To sa väčšinou uvoľní tým, že jedna z platní sa podsunie pod druhú (subdukčné zlomy) a zaniká tým. Väčšinou táto situácia nastáva na styku oceánskych platní s kontinentálnymi, keď sa hustejšia oceánska platňa podsunie pod pevninskú. Rýchlosť zániku dosiek musí byť rovnaká ako rýchlosť ich vzniku, aby pokrývali celú plochu Zeme v každom okamihu. Pri vnikaní dosky do astenosféry sa topí dôsledkom trenia a vyššej teploty okolitého prostredia a následne vzniknutá magma tvorí magmatické krby a dochádza ku tvorbe sopiek a priekop. Typickým príkladom takéhoto stretu je pohorie Andy, ale vo všeobecnosti to platí pre celý *Ohnivý kruh* obkolesujúci Pacifickú platňu.

Niekedy pri dlhotrvajúcom strete dosiek sa nepodsúva ani jedna doska a dochádza tak ku vrásneniu, čím vznikajú pohoria ako Alpy a Himaláje.[11]

# Kapitola 2

# Základy teórie pružnosti

Definujme hmotný bod ako časť hmotného telesa s elementárnym objemom $dV\,[m^3]$ a elementárnym povrchom $dS\,[m^2]$, v ktorom je definovaná hustota $\rho\,[kg/m^3]$ obsahujúcu veľké množstvo elementárnych častíc hmoty. Obvykle sa hmotný bod interpretuje ako elementárny hranol s rozmermi $dx$, $dy$, $dz$ (obr. 2.1).

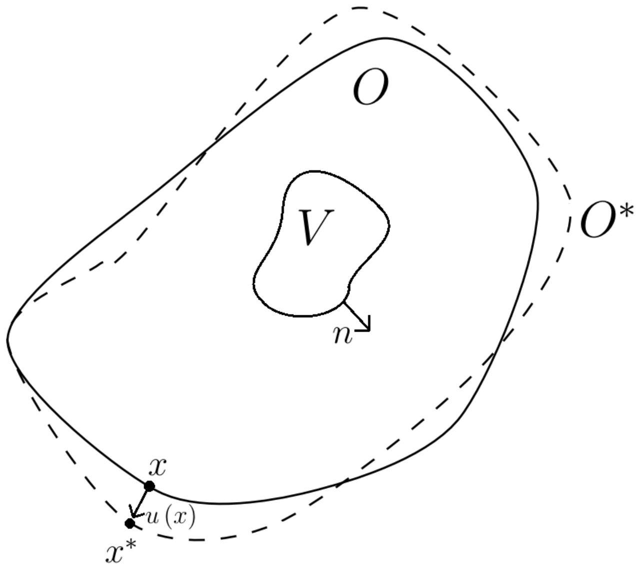



Obr. 2.1: Hmotný bod

Hmotné teleso $O \subseteq R^3$ je potom definované v trojrozmernom priestore ako oblasť s objemom $V$ a povrchom $S$ spojito vyplnená hmotnými bodmi. Pôsobením vonkajších síl na teleso delíme telesá na dva druhy podľa ich reakcie na danú záťaž. Poddajné telesá sú také telesá, ktoré sa pôsobením vonkajších síl deformujú, zatiaľ čo dokonalo tuhé telesá sa nedeformujú. Teleso sa zdeformuje v tom prípade, ak pre dva ľubovoľné body $A, B \in O$ je ich vzdialenosť pred zaťažením rôzna ako po zaťažení. Teória pružnosti sa zaoberá poddajnými telesami. Poddajné teleso $O$ sa pôsobením síl zdeformuje na teleso $O^*$ pričom $\forall x\,(x_1, x_2, x_3) \in O \rightarrow x^*\,(x_1^*, x_2^*, x_3^*) \in O^*$. Čo znamená, že každý bod $x^* \in O^*$ po deformácii vieme vyjadriť pomocou bodu pred deformáciou ako $x^* = x + u\,(x)$, kde $u\,(x)$ je vektor posunutia (obr. 2.2).

Majme ľubovoľný podobjem $V \subseteq O$. Sily pôsobiace na tento objem delíme na objemové a povrchové. Nech $F\,(x)$ je intenzita objemových síl pôsobiacich na teleso $O$, potom celková objemová sila pôsobiaca na objem $V$ je určená vzťahom

$$\int\limits_V F\,(x)\,dO. \tag{2.1}$$




Obr. 2.2: Deformácia telesa $O$

Ďalej ak intenzita povrchových síl (síl, ktorými na objem $V$ pôsobí zvyšok telesa $O$) je označená $f(x, \vec{n})$, potom celková povrchová sila pôsobiaca na objem $V$ je daná vzťahom

$$\int_{\partial V} f(x, \vec{n})\, dS, \tag{2.2}$$

pričom $f(x, \vec{n})$ reprezentuje vektor napätia v bode $x$ a $\vec{n}$ reprezentuje jednotkový vektor vonkajšej normály k povrchu $V$.
V každom objeme $V \subseteq O$ musí byť rovnováha síl, čo znamená, že súčet objemových a povrchových síl pôsobiacich na objem $V$ je nulový. Tejto rovnosti hovoríme rovnica statickej rovnováhy

$$\int_{V} F(x)\, dO + \int_{\partial V} f(x, n)\, dS = 0. \tag{2.3}$$

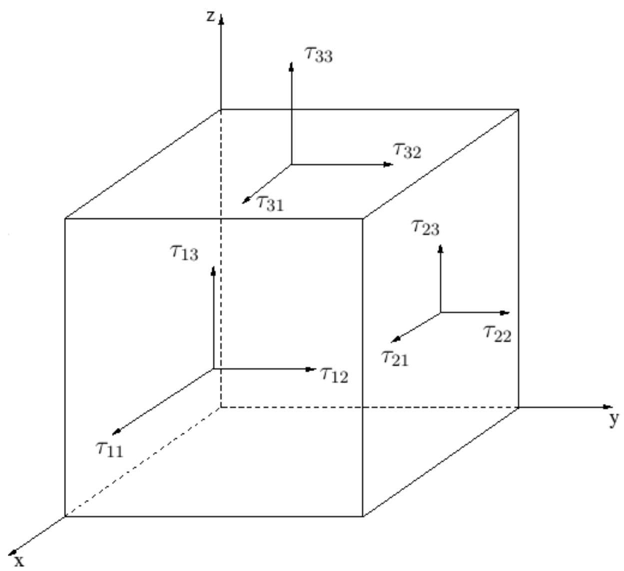
Intenzita povrchových síl $f_i$ je vektor napätí vzhľadom na ľubovoľný smer vektora vonkajšej normály. Potom sa $f_i$ musí dať zapísať v tvare

$$f_i = n_1\tau_{i1} + n_2\tau_{i2} + n_3\tau_{i3} = n_i\tau_i, \quad i = 1, 2, 3, \tag{2.4}$$

kde $\tau_i$, $i = 1, 2, 3$ sú vektory napätia vzhľadom na roviny kolmé na súradnicové osi. Potom môžeme definovať tenzor napätia $\tau$ ako

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{bmatrix},$$

kde $\tau_{ii}$, $i = 1, 2, 3$ sú normálové napätia na roviny kolmé na súradnicové osi, t.j. predstavujú čistý ťah/tlak na danú rovinu a $\tau_{ij}$ pre $i \neq j$ sú šmykové napätia, vzhľadom na danú rovinu (obr. 2.3).




Obr. 2.3: Zložky tenzora napätia $\tau$

Pod dosadení rovnice 2.4 do rovnice statickej rovnováhy 2.3 zapísanej po zložkách, dostaneme rovnicu

$$\int_V F_i dO + \int_{\partial V} f_i dS = \int_V F_i dO + \int_{\partial V} \tau_{i1} n_1 + \tau_{i2} n_2 + \tau_{i3} n_3 dS = 0, \quad i = 1, 2, 3. \tag{2.5}$$

Čo sa dá zjednodušene napísať ako

$$\int_V F_i dO + \int_{\partial V} \tau_i \cdot \vec{n} dS = 0, \quad i = 1, 2, 3. \tag{2.6}$$

Použitím Greenovej vety prevedieme povrchový integrál na objemový

$$\int_V F_i dO + \int_V \bigtriangledown . \tau_i dO = 0, \quad i = 1, 2, 3. \tag{2.7}$$

Následne spojíme rovnaké integrály

$$\int_V F_i + \bigtriangledown \cdot \tau_i dO = 0, \quad i = 1, 2, 3. \tag{2.8}$$

Keďže tento integrál musí byť nulový pre ľubovoľný objem $V \subseteq O$, tak musí byť nulový nie len integrál ale aj samotný výraz v integráli

$$F_i + \bigtriangledown \cdot \tau_i = 0, \quad i = 1, 2, 3. \tag{2.9}$$

Rozpísaním divergencie dostaneme

$$F_i + \frac{\partial \tau_{i1}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{i2}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{i3}}{\partial x_3} = 0, \quad i = 1, 2, 3. \tag{2.10}$$

Rovnica 2.10 sa nazýva statická rovnováha v diferenciálnom tvare. Na jej vyriešenie potrebujeme Hookov zákon, ktorý udáva vzťah medzi tenzorom napätia a deformáciou:

$$\tau_{ij} = \sum_{k=1}^{3} \sum_{l=1}^{3} a_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad i, j = 1, 2, 3, \tag{2.11}$$

kde $a$ je tenzor pružnosti a $\varepsilon$ je tenzor malých deformácií, ktorý vieme napísať v tvare

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix},$$

kde pre jednotlivé prvky tenzora platí rovnosť

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right), \tag{2.12}$$

čiže pre $\varepsilon_{kk}$ (pre $k = l$) platí

$$\varepsilon_{kk} = \frac{\partial u_k}{\partial x_k}. \tag{2.13}$$

Pre homogénne a izotropné teleso, t.j. teleso, ktoré reaguje rovnako pri silách pôsobiacich zo všetkých smerov je daný Hookov zákon v tvare

$$\tau_{ii} = 2\mu \varepsilon_{ii} + \lambda \left( \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} \right), \tag{2.14}$$

$$\tau_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij}, \tag{2.15}$$

alebo maticovo

$$\begin{bmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{22} \\ \tau_{33} \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\mu + \lambda & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 2\mu + \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & 2\mu + \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \end{bmatrix}, \tag{2.16}$$

kde $\lambda$ a $\mu$ sú Lamého konštanty elasticity dané vzťahmi

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \sigma)}, \tag{2.17}$$

$$\lambda = \frac{E\sigma}{(1 - 2\sigma)(1 + \sigma)}, \tag{2.18}$$

kde $E$ nazývame Youngov modul pružnosti a $\sigma$ Poissonovo číslo, pričom $\sigma \in [0, 0.5]$

# Kapitola 3

# Metóda konečných prvkov

## 3.1 Úvod

Metóda konečných prvkov je numerická metóda na riešenie problémov inžinierskej matematiky. Typické problémy riešené metódou konečných prvkov sú šírenie tepla, prúdenie tekutín (kvapalín a plynov), javy elektromagnetizmu, výpočet deformácií alebo napätia alebo stabilita rôznych konštrukcií.
Táto metóda sa používa najmä pri problémoch s okrajovými podmienkami pre parciálne diferenciálne rovnice. Jej cieľom je aproximovať neznámu funkciu nad určenou oblasťou $\Omega$. Základnou myšlienkou tejto metódy je diskretizácia výpočtovej oblasti $\Omega$ na menšie, podobné časti nazývané elementy (prvky), pričom jednoduché funkcie aproximujúce dané elementy sú následne spojené do väčšieho systému rovníc, ktoré aproximujú celý problém.
Presný vznik metódy konečných prvkov je neznámy, avšak vieme, že vznikla pri potrebe vyriešiť zložité problémy elasticity a štrukturálnej analýzy v stavebníctve a leteckom priemysle. Za priekopníkov v metóde končených prvkov sa považujú Alexander Hrennikoff a Richard Courant, ktorí sa jej venovali v štyridsiatych rokoch 20. storočia. K väčšiemu využitiu tejto metódy dochádza až po príchode počítačovej techniky, ktorá zefektívnila výpočtovú (časovú) náročnosť tejto metódy. [13]

## 3.2 Algoritmus

Všeobecný postup pre riešenie úloh pomocou metódy konečných prvkov spočíva z viacerých krokov, a to:

1. Diskretizácia výpočtovej oblasti na konečné prvky (elementy)
2. Zostrojenie sústavy rovníc na elemente
    (a) Zostrojenie slabej formulácie diferenciálnej rovnice na elemente

   (b) Zostrojenie aproximačných funkcií na elemente

   (c) Zostrojenie lokálnej sústavy rovníc na elemente

3. Spojenie elementových sústav do globálneho konečno-prvkového systému lineárnych rovníc

   (a) Globálne číslovanie uzlových bodov a neznámych

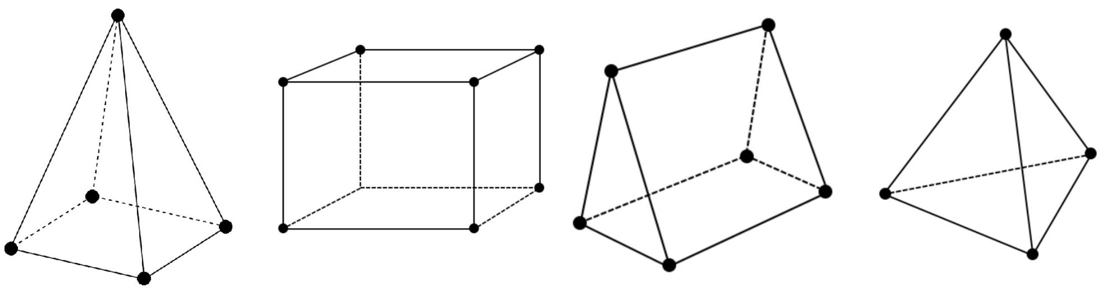
   (b) Bilancia tokov

4. Zahrnutie okrajových podmienok

5. Riešenie globálneho systému rovníc

### 3.2.1 Diskretizácia výpočtovej oblasti

Ako prvé je potrebné diskretizovať výpočtovú oblasť $\Omega \subseteq R^3$. Keďže sa pohybujeme v 3-dimenzionálnom priestore, najvhodnejšia bude voľba objemových elementov, ktorých základné príklady sú uvedené v nasledujúcom obrázku 3.1.



(a) Ihlan (b) Hranol/kocka (c) Trojboký hranol (d) Štvorsten

Obr. 3.1: Základné druhy 3D elementov

Do diskretizácie okrem vytvorenia elementov patrí aj vhodné očíslovanie elementov, očíslovanie uzlových bodov (bodov na spojeniach elementov) a vytvorenie matice spojitosti, tzv. *Connectivity matrix*. Výber typu elementu, počet elementov, stupeň elementu a hustota elementov závisí od požadovanej presnosti výpočtu, ale aj od fyzikálneho problému, ktorý riešime. V miestach s veľkým gradientom zvolíme jemnejšiu sieť a podobne.

### 3.2.2 Zostrojenie slabej formulácie diferenciálnej rovnice na elemente

Majme daný zákon zachovania rovnováhy

$$- \bigtriangledown \cdot \tau_i = F_i, \tag{3.1}$$

ktorý následne prenásobíme váhovou funkciou $w$ a zintegrujeme na konkrétnom elemente $\Omega^e$.

$$\int_{\Omega^e} -\nabla \cdot \tau_i w dx = \int_{\Omega^e} F_i w dx. \tag{3.2}$$

Využitím vzorca divergencie $\nabla \cdot f = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3}$ upravíme rovnicu na tvar

$$-\int_{\Omega^e} \left( \frac{\partial \tau_{i1}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{i2}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{i3}}{\partial x_3} \right) w dx = \int_{\Omega^e} F_i w dx. \tag{3.3}$$

Následne uplatnením Greenovej vety $\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i} g dV = \int_{\partial\Omega} f g n dS - \int_\Omega f \frac{\partial g}{\partial x_i} dV$ na pravú stranu rovnice dostaneme rovnicu:

$$\int_{\Omega^e} \tau_{i1} \frac{\partial w}{\partial x_1} + \tau_{i2} \frac{\partial w}{\partial x_2} + \tau_{i3} \frac{\partial w}{\partial x_3} dx = \int_{\Omega^e} F_i w dx + \int_{\partial\Omega^e} (\tau_{i1} w n_1 + \tau_{i2} w n_2 + \tau_{i3} w n_3) dS. \tag{3.4}$$

Po úprave do tvaru sumy dostaneme:

$$\int_{\Omega^e} \sum_{j=1}^{3} \tau_{ij} \frac{\partial w}{\partial x_j} dx = \int_{\Omega^e} F_i w dx + \int_{\partial\Omega^e} w(\tau_{i1} n_1 + \tau_{i2} n_2 + \tau_{i3} n_3) dS. \tag{3.5}$$

Z teórie pružnosti vieme, že Hookov zákon má tvar

$$\tau_{ii} = 2\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \lambda \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right), \tag{3.6}$$

$$\tau_{ij} = 2\mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \tag{3.7}$$

a

$$f_i = \tau_{i1} n_1 + \tau_{i2} n_2 + \tau_{i3} n_3, \tag{3.8}$$

teda ľavá strana rovnice má tvar

$$\int_{\Omega^e} \sum_{j=1}^{3} \tau_{ij} \frac{\partial w}{\partial x_j} dx = \int_{\Omega^e} \left[ \sum_{j=1}^{3} \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial w}{\partial x_j} + \lambda \sum_{j=1}^{3} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) \frac{\partial w}{\partial x_j} \right] dx. \tag{3.9}$$

Dosadením do rovnice a úpravami dostávame slabú formuláciu na elemente $\Omega^e$

$$\int_{\Omega^e} \left[ \sum_{j=1}^{3} \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial w}{\partial x_j} + \lambda \sum_{j=1}^{3} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) \frac{\partial w}{\partial x_j} \right] dx = \int_{\Omega^e} F_i w dx + \int_{\partial\Omega^e} f_i w dS. \tag{3.10}$$

Roznásobením dostaneme [13]:

$$\int\limits_{\Omega^e} \mu \frac{\partial u_i}{\partial x_1}\frac{\partial w}{\partial x_1} + \mu \frac{\partial u_i}{\partial x_2}\frac{\partial w}{\partial x_2} + \mu \frac{\partial u_i}{\partial x_3}\frac{\partial w}{\partial x_3} + \mu \frac{\partial u_1}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_1} + \mu \frac{\partial u_2}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_2} + \mu \frac{\partial u_3}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_3} + \lambda\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial w}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\frac{\partial w}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\frac{\partial w}{\partial x_3}\right) = \int\limits_{\Omega^e} F_i w dx + \int\limits_{\partial\Omega^e} f_i w dS. \tag{3.11}$$

### 3.2.3 Zostrojenie aproximačných funkcií na elemente

Približné riešenie na elemente $U^e$ hľadáme v tvare lineárnej kombinácie uzlových hodnôt $u_1^e, u_2^e, \ldots, u_n^e$ a bázových funkcií $\psi_1^e, \psi_2^e, \ldots, \psi_n^e$. V MKP (metóde konečných prvkov) musí platiť:

1. Polynómy musia byť úplné (musia obsahovať všetky mocniny $x$ od nultej až po najvyššiu)
2. Derivácie polynómu, ktoré sa vyskytnú v slabej formulácii musia byť nenulové
3. Musia byť splnené interpolačné podmienky pre primárne neznáme

Potom približné riešenie má tvar:

$$U^e = u_1^e\psi_1^e + u_2^e\psi_2^e + \cdots + u_2^e\psi_n^e = \sum_{i=1}^{n} u_i^e\psi_i^e. \tag{3.12}$$

Následne do slabej formulácie dosadíme približné riešenie $U^e$ za $u$ a za váhovú funkciu $w$ postupne dosadíme aproximačné funkcie $\psi_i^e$ a úpravami dostaneme lokálnu sústavu rovníc:

$$\begin{bmatrix} K_{11}^e & \ldots & \ldots & \ldots & K_{1n}^e \\ \vdots & & & & \vdots \\ K_{i1}^e & & \ddots & & K_{in}^e \\ \vdots & & & & \vdots \\ K_{n1}^e & \ldots & \ldots & \ldots & K_{nn}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^e \\ \vdots \\ u_i^e \\ \vdots \\ u_n^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^e + Q_1^e \\ \vdots \\ f_i^e + Q_i^e \\ \vdots \\ f_n^e + Q_n^e \end{bmatrix}, \tag{3.13}$$

kde $K$ je matica tuhosti, $u$ je vektor neznámych, $\vec{f}$ je vektor intenzity síl a $Q$ je vektor sekundárnych neznámych.

### 3.2.4 Vytvorenie globálneho systému lineárnych rovníc

Spájanie elementových sústav do globálneho systému si vyžaduje:

1. Spojitosť riešenia (primárnej neznámej) na styku elementov. Kvôli tomu zavedieme globálne číslovanie neznámych:

$$U_1 = u_1^1, U_2 = u_2^1, U_3 = u_3^1 = u_1^2, U_4 = u_2^2, U_5 = u_3^2 = u_1^3 \dots \tag{3.14}$$

   čo v podstate znamená, že hodnoty v dotýkajúcich sa uzlových bodoch susediacich elementov sú rovnaké.

2. Bilanciu tokov

$$-Q_2^e = Q_1^{e+1}, \tag{3.15}$$

   čo v konečnom dôsledku znamená len to, že toky tečúce do/zo spoločnej steny susediacich elementov sú rovnaké, iba opačného smeru.

# Kapitola 4

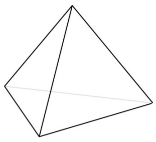
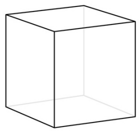
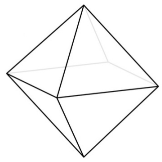
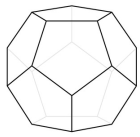
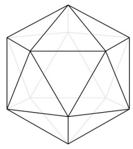
# Globálny numerický experiment

## 4.1 Úvod

Cieľom globálneho numerického experimentu je modelovať globálne pohyby litosferických dosiek v softvéri ANSYS[2]. Experiment bol realizovaný na konečno-prvkovom modeli zemskej kôry tvorenom 4 guľovými plášťami predstavujúcimi tri vrstvy zemskej kôry a sedimenty s ľadom. Model bol vytvorený 3D elementami SOLID185 za požitia ich variantu pre trojboký hranol. Materiálové vlastnosti (Youngov modul pružnosti, Poissonovo číslo a hustota) boli získané z modelu zemskej kôry CRUST 1.0[4]. Model Zeme bol aproximáciou WGS84 (World Geodetic System 1984, alebo Svetový geodetický systém 1984)[21], pričom súradnice hornej vrstvy boli získané z modelu ETOPO1[7], súradnice spodnej vrstvy reprezentujúce Mohorovičićovu diskontinuitu (Moho plochu) a hrúbky jednotlivých vrstiev kôry boli získané z modelu CRUST 1.0[4]. Okrajové podmienky určené pre hornú (topografia s batymetriou) a spodnú vrstvu (Moho) boli získané z globálneho rýchlostného modelu ITRF2014[1].

## 4.2 Icosahedronová sieť

V trojrozmernom priestore je za platónske teleso považovaný každý pravidelný konvexný mnohosten, ktorého povrch je tvorený zhodnými, pravidelnými mnohouholníkmi, pričom sa v každom vrchole dotýka rovnaký počet mnohouholníkov. Platónske telesá boli známe už v starovekom Grécku. Platón ich opísal vo svojom diele *Timaeus* okolo roku 350 pred naším letopočtom. Taktiež priradil každému telesu jeden element. Konkrétne štvorstenu priradil oheň, kocke zem, dvadsaťstenu vodu, osemstenu vzduch a dvanásťstenu materiál, z ktorého sú zložené hviezdy, súhvezdia a nebo a pravdepodobne ako prvý dokázal, že v trojdimenzionálnom priestore neexistujú žiadne iné platónske telesá. V nasledujúcej tabuľke sú zobrazené všetky platónske telesá. [3]

| Platónske telesá | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **Teleso** | **Štvorsten** | **Kocka** | **Osemsten** | **Dvanásťsten** | **Dvadsaťsten** |
| Názov | Tetrahedron | Hexahedron | Octahedron | Dodecahedron | Icosahedron |
| Počet stien | 4 | 6 | 8 | 12 | 20 |
| Počet hrán | 6 | 12 | 12 | 30 | 30 |
| Počet vrcholov | 4 | 8 | 6 | 20 | 12 |
| Typ steny | trojuholník | štvoruholník | trojuholník | päťuholník | trojuholník |
| Obrázok |  |  |  |  |  |

Už z názvu dvadsaťsten je zjavné, že icosahedron je tvorený 20 pravidelnými trojuholníkmi, pričom z tabuľky vieme, že má 12 vrcholov. Súradnice vrcholov základného icosahedronu sú nasledovné:

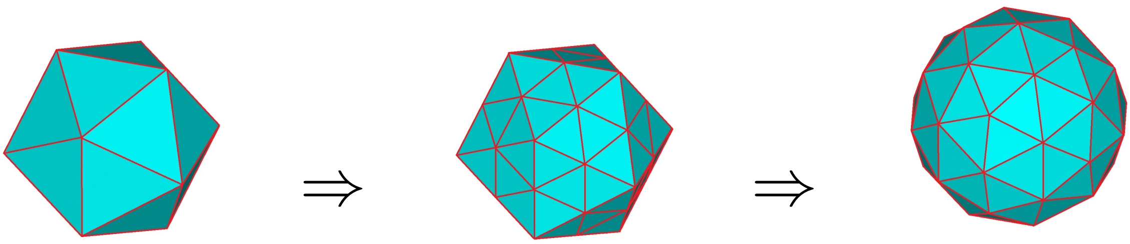
$$
\begin{gathered}
(\pm 1,\ \pm\varphi,\ 0),\\
(0,\ \pm 1,\ \pm\varphi),\\
(\pm\varphi,\ 0,\ \pm 1),
\end{gathered}
$$

kde

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.6180339887\ldots \tag{4.1}$$

je zlatý rez. [20]

Pomocou pravidelného icosahedronu môžeme aproximovať sféru, pretože sme schopní premietnuť jeho vrcholy na sféru. Nakoľko aproximácia jednotkovej sféry 12 vrcholmi nie je veľmi presná, zjemníme ju tým, že každý trojuholník na icosahedrone rozdelíme na 4 pravidelné trojuholníky spojením stredov strán, pričom novovzniknuté vrcholy premietneme na jednotkovú sféru (viď obrázok 4.1). Výber icosahedronu ako začiatočného telesa pre náš model je založený na tom, že pri zjemňovaní siete vyššie spomenutým spôsobom je jeho povrch tvorený výhradne pravidelnými trojuholníkmi.



(a) Originálny icosahedron

(b) Icosahedron so zjemnenou sieťou

(c) Icosahedron s premietnutými bodmi na opísanú sféru

Obr. 4.1: Názorná ukážka zjemňovania icosahedronu

Týmto spôsobom sa dá zjemňovať sieť do požadovaných hodnôt. Pri delení icosahedronu sa počet plôch riadi jednoduchým vzorcom $20{*}4^N$ a počet vrcholov vzorcom $10{*}4^N{+}2$, kde $N$ je počet delení.
Pri našom experimente sme pracovali s 8 násobným delením icosahedronu, čo znamená, že počet vrcholov bol

$$N_V = 10 * 4^8 + 2 = 655\,362 \tag{4.2}$$

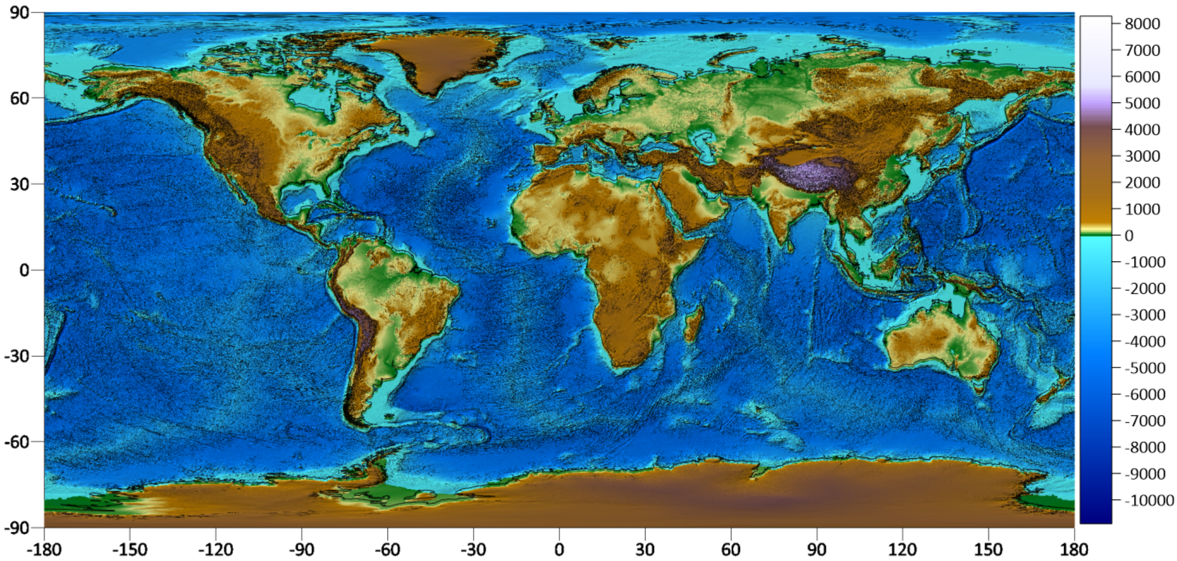
a počet plôch bol

$$N_A = 20 * 4^{10} = 1\,310\,720, \tag{4.3}$$

pričom na výpočet boli pripravené súbory s 9 a 10 násobným delením, čiže počet vrcholov na jednej vrstve bol 2 621 442, resp. 10 485 762, ale výpočet bol nemožný kvôli limitácii výpočtovou technikou, konkrétne nedostatočnou pamäťou.

## 4.3 ETOPO1

Topológia a batymetria zemského povrchu na experiment bola získaná z moedlu ETOPO1 čo je model zemského reliéfu vrátane topografie pevniny a batymetrie oceánskeho dna s rozlíšením 1 minúty zemepisnej šírky a dĺžky. K dispozícii sú 2 gridy. Jeden je model Zeme vrátane ľadovej pokrývky v oblasti Grónska a Antarktídy (viď obrázok 4.2). Druhý je model podložia bez akejkoľvek ľadovej pokrývky. V našom experimente sme pracovali s modelom obsahujúcim ľad. [7]




Obr. 4.2: Nadmorské výšky získané z gridu ETOPO1.grd $[m.n.m]$.

Na získanie nadmorských výšok jednotlivých bodov na delenom icosahedrone z gridu bolo treba transformovať ich súradnice z kartézskych $(x, y, z)$ do sférických $(r, \theta, \varphi)$, kde $r$ je polomer, $\theta$ je zenith, čiže uhol odklonu sprievodcu bodu od roviny $xy$ a $\varphi$ je azimuth, t.j. uhol odklonu sprievodcu bodu od osi $x$ pričom $\theta \in [-90°, 90°]$ a $\varphi \in [-180°, 180°]$. Transformácia bola uskutočnená pomocou transformačných vzorcov [10]:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\ \theta = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} &= \arccos \frac{z}{r}, \\ \varphi &= \arctan \frac{y}{x}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

## 4.4 CRUST1

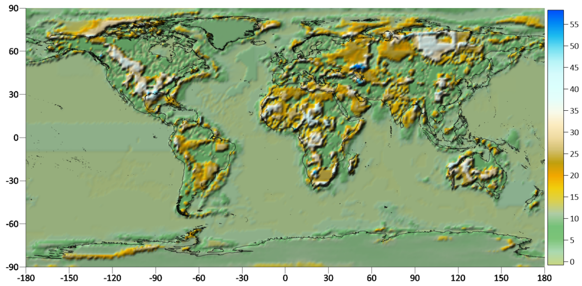
CRUST1 je model zemskej kôry s rozlíšením 1° zemepisnej šírky a dĺžky. Tento model obsahuje modely 8 vrstiev zemskej kôry (voda, ľad, 3 vrstvy sedimentov, hornú, strednú a spodnú kôru), pre ktoré je udaná hustota, nadmorská výška danej vrstvy, hrúbka, Youngov modul pružnosti a Poissonova konštanta. [4][12]

Z daných konštánt boli vytvorené globálne gridy, z ktorých sa následne bilineárnou interpoláciou získavali hodnoty v transformovaných (sférických) súradniciach vrcholov icosahedronovej siete. Kvôli výpočtovej náročnosti bol experiment zjednodušený spojením 3 vrstiev sedimentov a ľadu do jednej vrstvy a zanedbaním vodnej vrstvy z dôvodu minimálneho vplyvu na posuny litosferických dosiek.

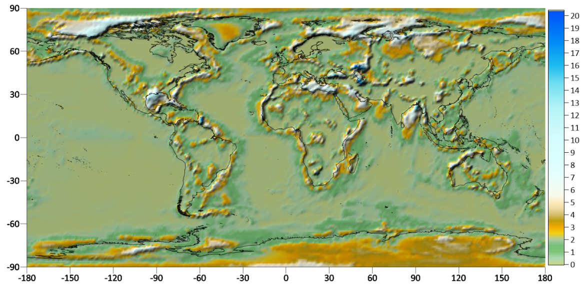
Hodnoty materiálových vlastností v hornej vrstve tvorenej sedimentami a ľadom boli vypočítané ako vážený priemer hodnôt v jednotlivých vrstvách (ukážka na Youngovom module pružnosti E):

$$E = \frac{E_{ice} * w_{ice} + E_{s1} * w_{s1} + E_{s2} * w_{s2} + E_{s3} * w_{s3}}{w_{ice} + w_{s1} + w_{s2} + w_{s3}}, \tag{4.5}$$

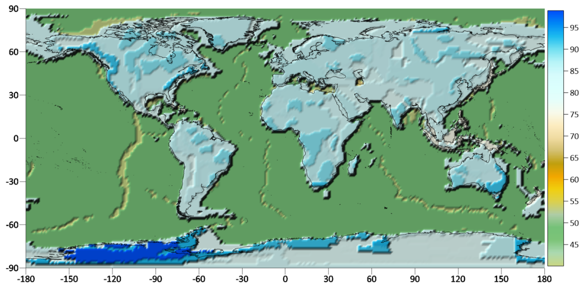
kde $E_{ice}, E_{s1}, E_{s2}, E_{s3}$ sú hodnoty Youngovho modulu pružnosti na jednotlivých vrstvách a $w_{ice}, w_{s1}, w_{s2}, w_{s3}$ sú hrúbky vrstiev.
V nasledujúcich obrázkoch 4.3a-4.3h sú znázornené hodnoty Youngovho modulu pružnosti použitých vrstiev v gigapascaloch a hrúbky v kilometroch.



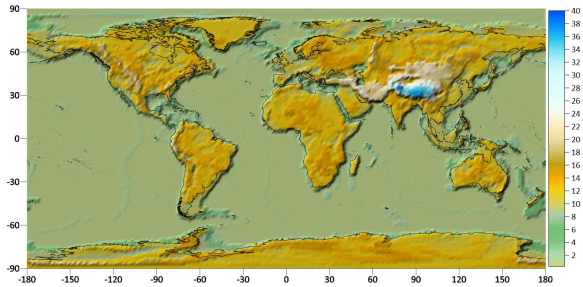
(4.3a) E pre sedimenty a ľad



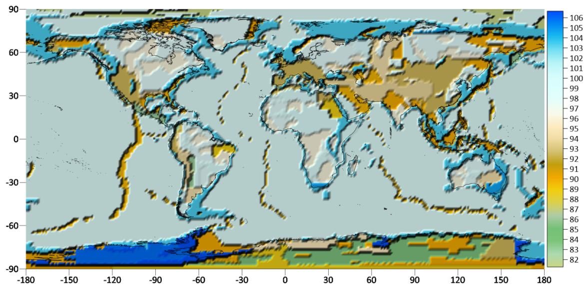
(4.3b) Hrúbka sedimentov a ľadu



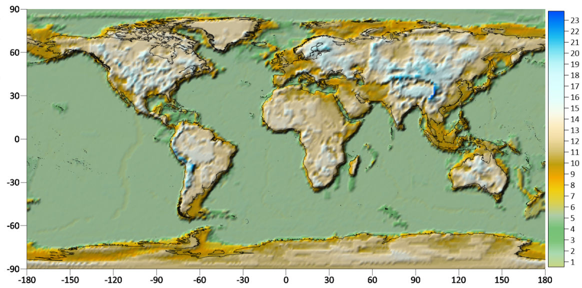
(4.3c) E pre hornú vrstvu kôry



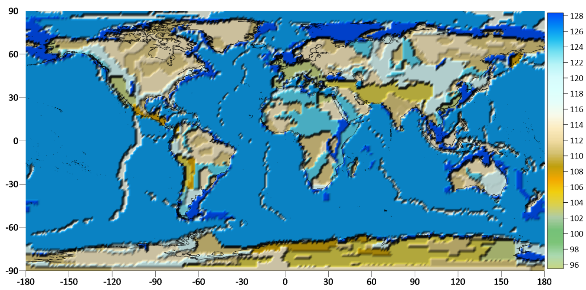
(4.3d) Hrúbka hornej vrstvy kôry



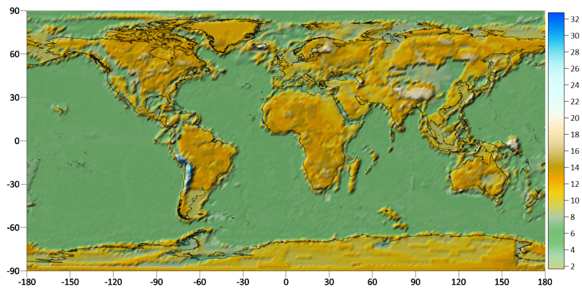
(4.3e) E pre strednú vrstvu kôry



(4.3f) Hrúbka strednej vrstvy kôry



(4.3g) E pre spodnú vrstvu kôry

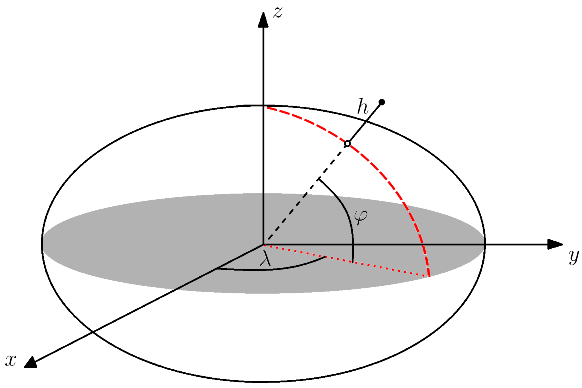


(4.3h) Hrúbka spodnej vrstvy kôry

## 4.5 WGS84

WGS84 (*World Geodetic System 1984*) alebo svetový geodetický systém 1984 je celosvetovo uznaný súradnicový systém Zeme, ktorý definuje referenčný elipsoid, na základe ktorého sa odvíja GPS a ktorého centrom je ťažisko Zeme určené s presnosťou na 2cm. Pri našom globálnom experimente sme vytvorili konečno-prvkový model zemskej kôry v prostredí Ansys. Na jeho zostrojenie bolo potrebné transformovať súradnice vrcholov icosahedronu do kartézskych súradníc a to konkrétne premietnutím na referenčný elipsoid WGS84. [21]

Kartézske súradnice $(x, y, z)$ sa dajú vyjadriť v elipsoidických súradniciach $(\varphi, \lambda, h)$, kde $\varphi$ a $\lambda$ sú zemepisná šírka, resp. zemepisná dĺžka a h je výška na elipsoidom. Vzťah medzi súradnicami je zobrazený na obrázku 4.4.



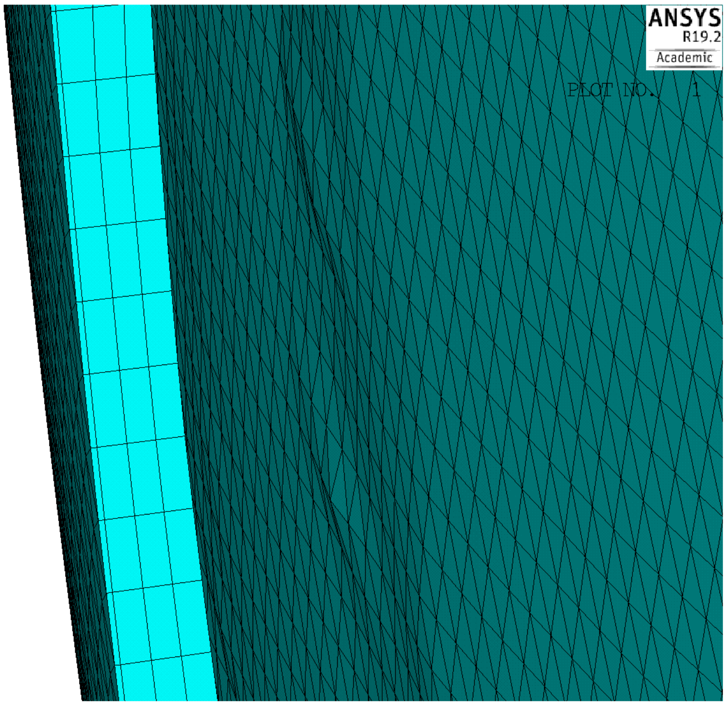

Obr. 4.4: Vzťah medzi elipsoidickými a kartézskymi súradnicami

Na transformáciu boli použité vzorce

$$\begin{aligned} x &= (N + h) \cos\varphi \, \cos\lambda \\ ,*y &= (N + h) \cos\varphi \, \sin\lambda \\ ,*z &= \big((1 - e^2)N + h\big) \sin\varphi. \end{aligned} \tag{4.6}$$

kde N je polomer Zeme na danej rovnobežke daný vzťahom $N = \dfrac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2\varphi}}$, $e$ je excentricita, ktorej hodnota sa dá vyjadriť zo vzorca $e^2 = \dfrac{a^2 - b^2}{a^2} \Rightarrow\ e \approx\ 0,081819190842622$, $a = 6\,378\,137\,m$ je dĺžka hlavnej polosi (polomer Zeme na rovníku), $b = 6\,356\,752,3142\,m$ je dĺžka vedľajšej polosi (polomer Zeme na póloch) a $h$ je nadmorská výška.

Na obrázku 4.5 je zobrazený zväčšený prierez globálneho modelu s rozdelením na jednotlivé vrstvy a s viditeľnou variáciou nadmorskej výšky Mohorovičićovej diskontinuity.




Obr. 4.5: Detail modelu

## 4.6 ITRF2014

Okrajové podmienky pre globálny experiment boli získané z modelu ITRF2014 (*International Terrestrial Reference Frame*)[1]. Tento model je, ako prvý z modelov ITRF, generovaný pomocou rozšírených nelineárnych posunov kontrolných staníc, vrátane sezónnych posunov (ročných a polročných) a posunov zapríčinenými významnými zemetraseniami. Na vytvorenie tohto modelu boli použité nasledovné geodetické merania:

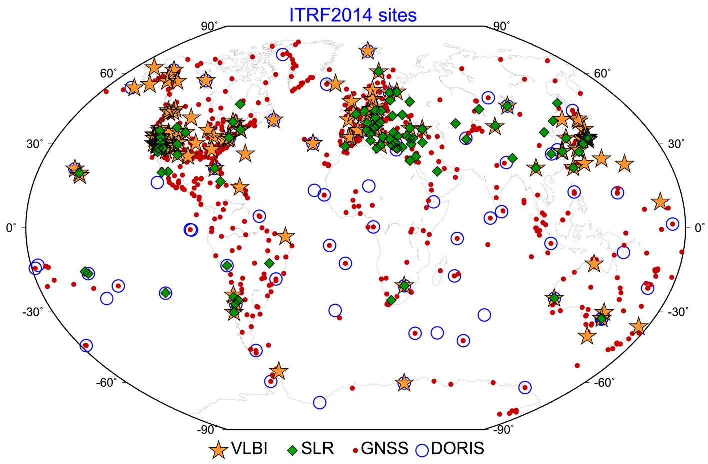
1. VLBI (*very long baseline interferometry*)
2. SLR (*satellite laser ranging*)
3. GNSS (*Global Navigation Satellite Systems*)
4. DORIS (*Doppler orbitography and radiopositioning integrated by satellite*),

pričom bola využitá celá história meraní (týždenné z SLR a DORIS a denné z GNSS a VLBI).

Model ITRF2014 sa preukázal ako najkvalitnejší model globálnych rýchlostí, pretože presne modeluje pohyby staníc, čo vedie k presnejšej a hustejšej sieti rýchlostí pohybu zemskej kôry a pretože v prípade odchýlky jednej geodetickej techniky je chyba kompenzovaná presnejšími hodnotami ostatných techník. Počiatok súradnicovej sústavy sa nachádza v ťažisku Zeme lokalizovanom dvomi satelitmi LAGEOS (*LAser GEOdynamic Satellite*) v priebehu rokov 1993 – 2015 vďaka čomu je veľkosť chyby menej ako 3 milimetre. ITRF2014 na rozdiel od predošlých modelov obsahuje aj deformácie spôsobené zemetraseniami. Proces formácie modelu IRF2014 sa dá zhrnúť do dvoch krokov:

1. Spracovanie individuálnych časových radov na predpovedanie dlhodobého vývinu polôh a rýchlostí kontrolných staníc.
2. Skombinovanie jednotlivých predpovedí získaných štyrmi, vyššie spomenutými, technikami do jedného modelu.

Sieť je tvorená 1499 meracími stanicami lokalizovanými na 975 stanovištiach, pričom na približne 10% z nich sa nachádzajú 2, 3 alebo 4 rôzne geodetické prístroje. Na obrázku 4.6 sú zobrazené ich polohy.



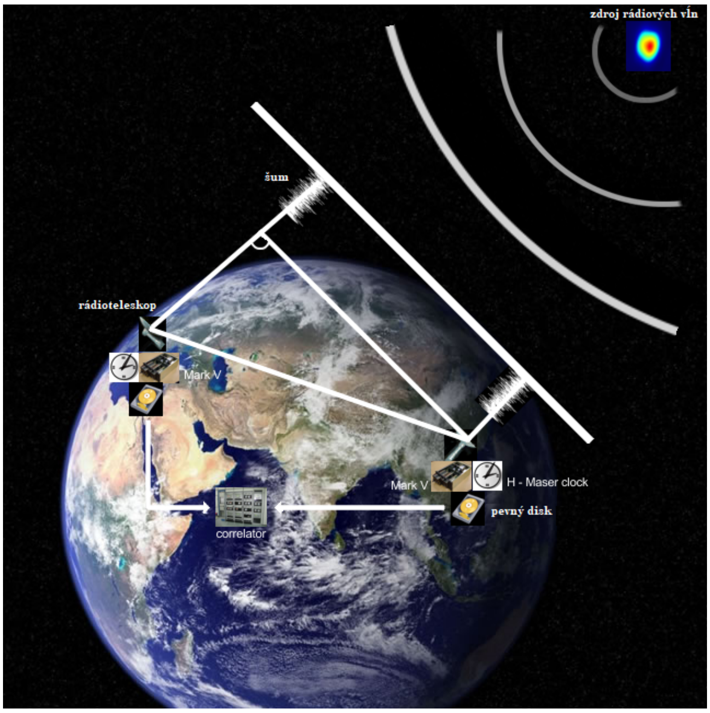

Obr. 4.6: Meracie stanice modelu ITRF2014

Pri našom experimente sme získavali okrajové podmienky zo stránky spoločnosti UNAVCO (neziskové univerzitno–vládne konzorcium zaoberajúce sa výskumom a výučbou geodézie)[18], kde boli zadané sférické súradnice (zemepisná dĺžka a šírka) a nadmorská výška uzlových bodov hornej a spodnej vrstvy nášho modelu, následne bol zvolený model ITRF2014 a ako referenčná platňa bola zvolená Antarktická platňa. To znamená, že všetky pohyby budú vzhľadom na Antarktídu, ktorá bude votknutá s nulovými posunmi. Nakoniec ako výstupný formát súboru bol zvolený *"ASCII table w/ WGS84 XYZ plate velocities"*, v ktorom boli udané posuny v kartézskych súradniciach $x, y, z$, čo umožnilo priame zadanie okrajových podmienok do softvéru ANSYS bez potreby ich transformovať.

### 4.6.1 VLBI

VLBI alebo *Very Long Baseline Radio Interferometry* je veľmi presná technika, používaná od sedemdesiatych rokov 20. storočia v geodézii, ktorá priniesla prelomové vedecké objavy. Táto metóda umožňuje merať vzdialenosti globálnej mierky s presnosťou na milimetre. Pri tejto technike viacero rádioteleskopov pozoruje rovnaký objekt na oblohe. [19][11]

Na obrázku 4.7 je zobrazený princíp fungovanie VLBI a ten je nasledovný. Dva rôzne rádioteleskopy umiestnené na zemskom povrchu sledujú jeden objekt vo vesmíre vyžarujúci elektromagnetický signál (obvykle kvazar- čierna diera v centre galaxií obklopená mračnom plynov). Signály sú spracované v jednotlivých rádioteleskopoch spolu s časom ich nasnímania získaného z atómových hodín a sú následne vyslané do špeciálneho počítacieho zariadenia nazývaného korelátor, ktorý na základe ich vzájomnej korelácie vyhodnotí presný časový rozdiel zachytenia signálu jednotlivými rádioteleskopmi. S touto informáciou je vypočítaná ich vzájomná vzdialenosť s presnosťou na milimetre. Rovnakou metódou sa určujú smery zdrojov rádiových signálov s presnosťou približne 40 uhlových mikrosekúnd, čo je porovnateľné s lokalizovaním tenisovej lopty na povrchu Mesiaca.

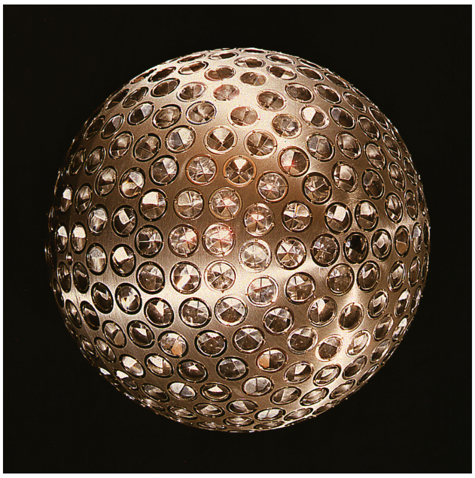



Obr. 4.7: Princíp fungovania VLBI

### 4.6.2 SLR

SLR alebo *Satellite Laser Ranging* je ďalšou z metód na určenie polohy na zemskom povrchu. SLR meria čas potrebný pre pulzy laserových lúčov na to, aby prešli na obežnú dráhu k satelitom a naspäť k vysielacej stanici. Vzdialenosť medzi satelitom a laserom je približne rovná polovici času potrebného na prekonanie obojsmernej cesty prenásobeného rýchlosťou svetla vo vákuu.[15]

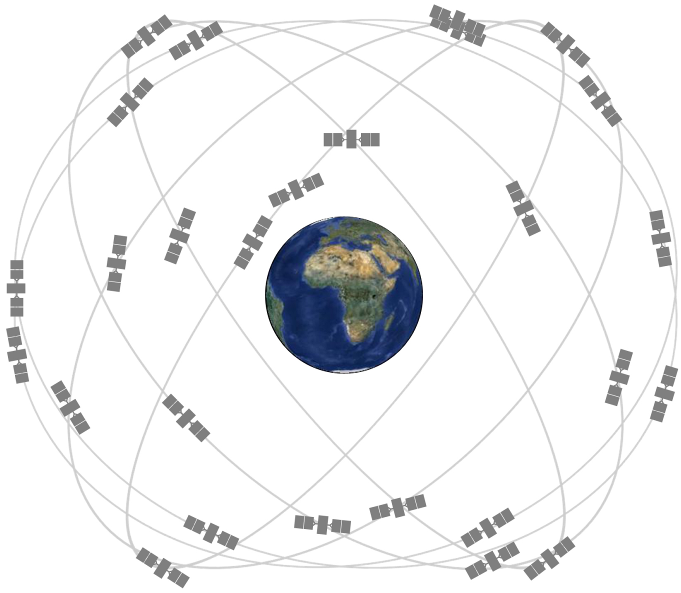
Existuje viacero satelitov vybavených špeciálne navrhnutými zrkadlami na odrazenie lúčov, ale najbežnejšie používané sú satelity Lageos-1 (Obr. 4.8) a Lageos-2, vypustené v rokoch 1976 a 1992. Obidva satelity, ktorých priemer je len 60 centimetrov, obiehajú Zem vo výške 5900 kilometrov, avšak na rôznych obežných dráhach. Touto metódou sa dá určiť poloha s chybou menej ako 1 centimeter pri použití len jedného laserového pulzu. Menšou nevýhodou tejto metódy je fakt, že stanice musia sledovať atmosférický tlak, teplotu a vlhkosť vzduchu kvôli presnosti merania.



Obr. 4.8: Lageos-1

### 4.6.3 GNSS

GNSS alebo *Global Navigation Satellite System* je štandardným pomenovaním satelitných navigačných systémov s celosvetovým pokrytím. GNSS zahŕňa GPS (*Global Positioning System* z USA), GLONASS (*Globalnaja navigacionnaja sputnikovaja sistema* z Ruska), Galileo z Európskej únie, BeiDou z Číny a iné regionálne systémy. Presnosť týchto systémov sa pohybuje v okolí jedného metra, čo je nevýhodou oproti SLR alebo VLBI, avšak na druhú stranu to kompenzujú svojou spoľahlivosťou, pretože aj v prípade výpadku jedného zo satelitov je v každom momente možnosť pripojenia na iné, funkčné satelity. Na obrázku 4.9 je zobrazený Americký GPS pozostávajúci z 27 satelitov.[9]



Obr. 4.9: Americký GPS

### 4.6.4 DORIS

DORIS alebo *Doppler Orbitography and Radiopositioning Integrated by Satellite* je francúzsky satelitný systém používaný najmä na určovanie obežných dráh satelitov, ale využitie má aj v geodézii pri určovaní polôh na zemskom povrchu a meranie toku ľadovcov a určovanie oceánskej topografie. DORIS je založený na Dopplerovom jave, čo je zrejmé už z názvu a to konkrétne tak, že jeden z rádiových vysielačov na zemskom povrchu (obr. 4.10) vyšle signál ku okolo prechádzajúcemu satelitu, ktorý ho prijme špeciálne navrhnutou anténou a následne na základe posunu frekvencií dokáže určiť svoju polohu a rýchlosť s presnosťou na 10 centimetrov. Na Zemi je približne 50-60 staníc pozostávajúcich z rádiového vysielača, antény a meteorologických prístrojov na určovanie atmosférického tlaku, teploty a vlhkosti, pričom vysielače vysielajú na dvoch frekvenciách - 2036.25 MHz a 401.25 MHz.[5][6]


Obr. 4.10: Lokácie staníc DORIS

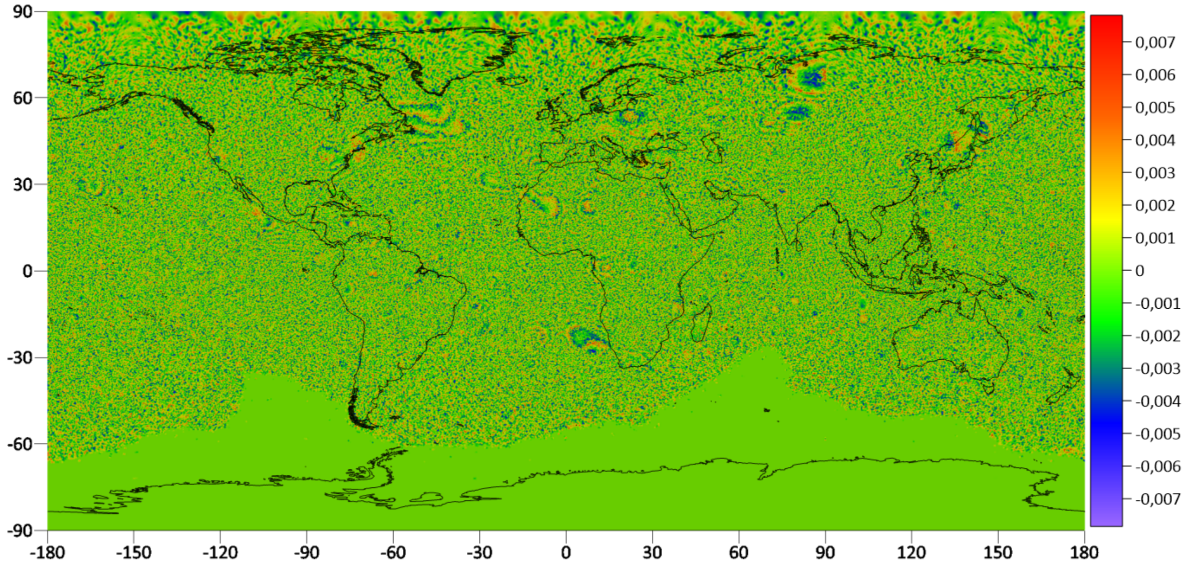
## 4.7 Zobrazenie a zhodnotenie výsledkov

Vyriešením globálneho modelu, sme dostali hodnoty posunov UX, UY a UZ a veľkosť celkových posunov USUM v jednotlivých výpočtových uzloch, zložky tenzora napätí SX, SY, SZ, SXY, SYZ, SXZ na elementoch a relatívnu deformáciu na elementoch. Na vizualizáciu výsledkov bol použitý softvér Surfer 15 [16], kde sa z relatívnej deformácie a jednotlivých zložiek posunov a napätí vytvorili gridy. Na vytvorenie gridov bolo treba transformovať hodnoty z kartézskej súradnicovej sústavy do sférických súradníc. Transformácia bola uskutočnená v softvéri ANSYS[2] za pomoci príkazu RSYS, pričom nová súradnica $x$ reprezentuje radiálny smer (t.j. smer daný vektorom smerujúcim do ťažiska Zeme), $y$ reprezentuje sférickú dĺžku a $z$ reprezentuje sférickú šírku.

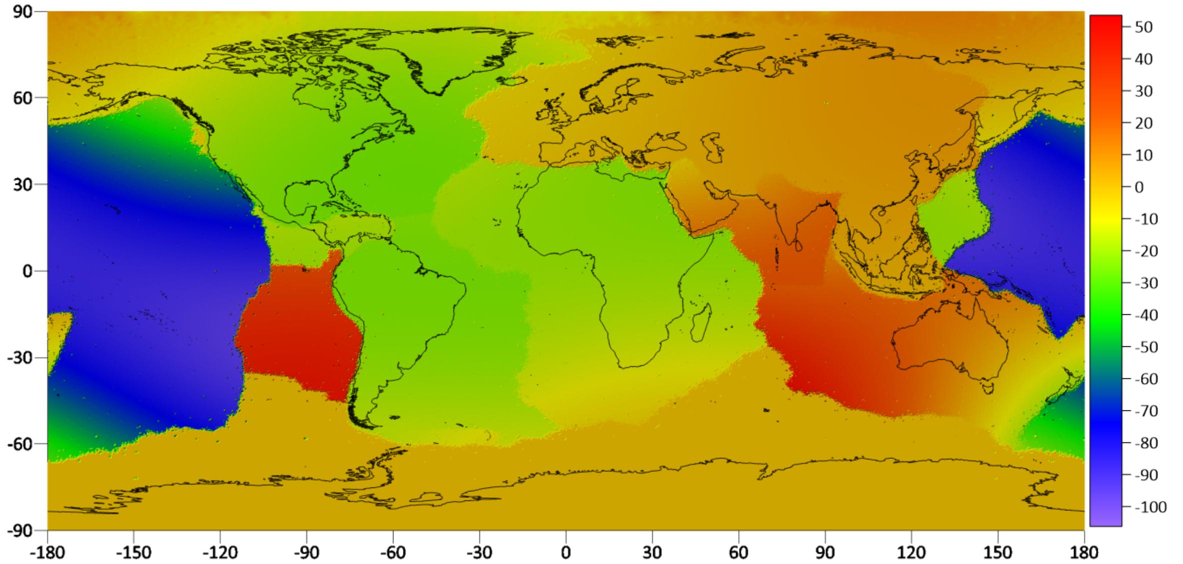
Nasledujúce obrázky boli vytvorené z údajov získaných pre body a elementy v hornej vrstve modelu, t.j. na povrchu Zeme. Na obrázkoch je jasne vidieť hranice Severoamerickej, Karibskej, Juhoamerickej, Nazca, Kokosovej, Antarktickej, Africkej, Eurázijskej, Arabskej, Indickej, Austrálskej, Pacifickej a Filipínskej platne, čiže všetkých veľkých platní okrem Juan de Fuca, ktorá sa ťažko rozlišuje od Pacifickej.

### 4.7.1 Posuny

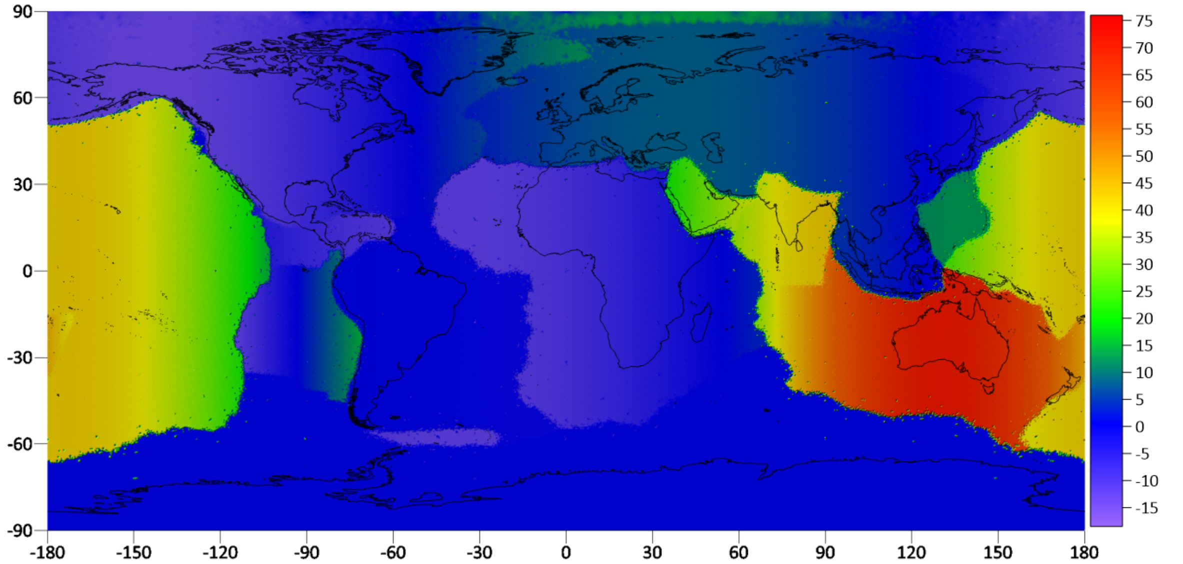
Na obrázku 4.11a sú zobrazené posuny v radiálnom smere. Z obrázku je zjavné, že všetky hodnoty sa pohybujú veľmi blízko nuly, čo je z dôvodu, že v modeli ITRF2014[1] nie sú zadané posuny v radiálnom smere, iba v smeroch zemepisnej šírky a dĺžky (obrázky 4.11b a 4.11c).




(4.11a) Posunutia v smere UX (radiálny smer) [mm/rok]



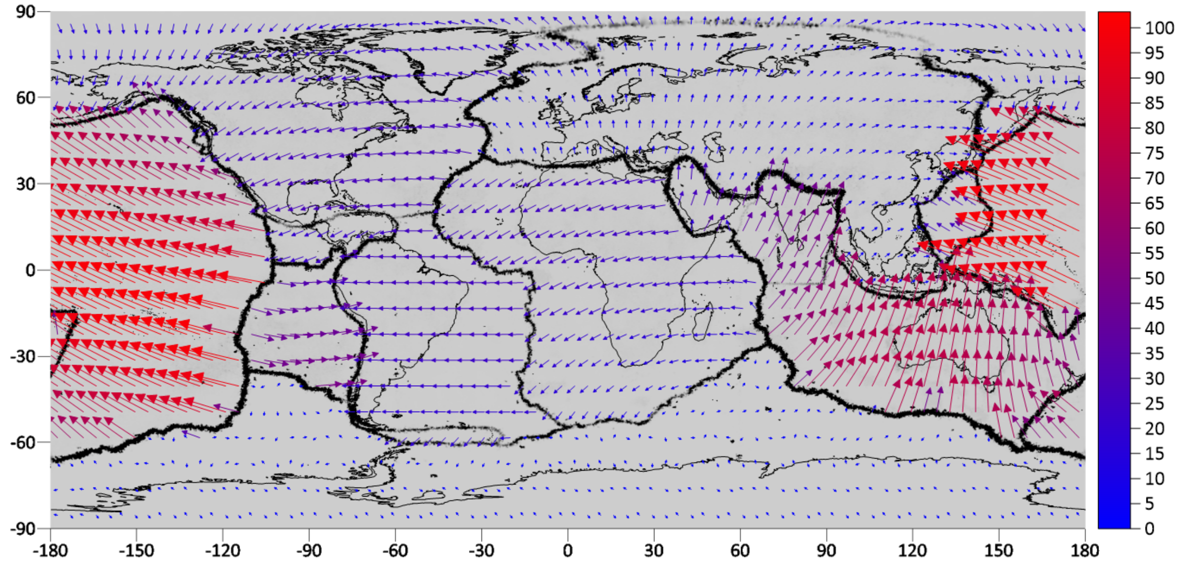

(4.11b) Posunutia v smere UY (zemepisná šírka) [mm/rok]



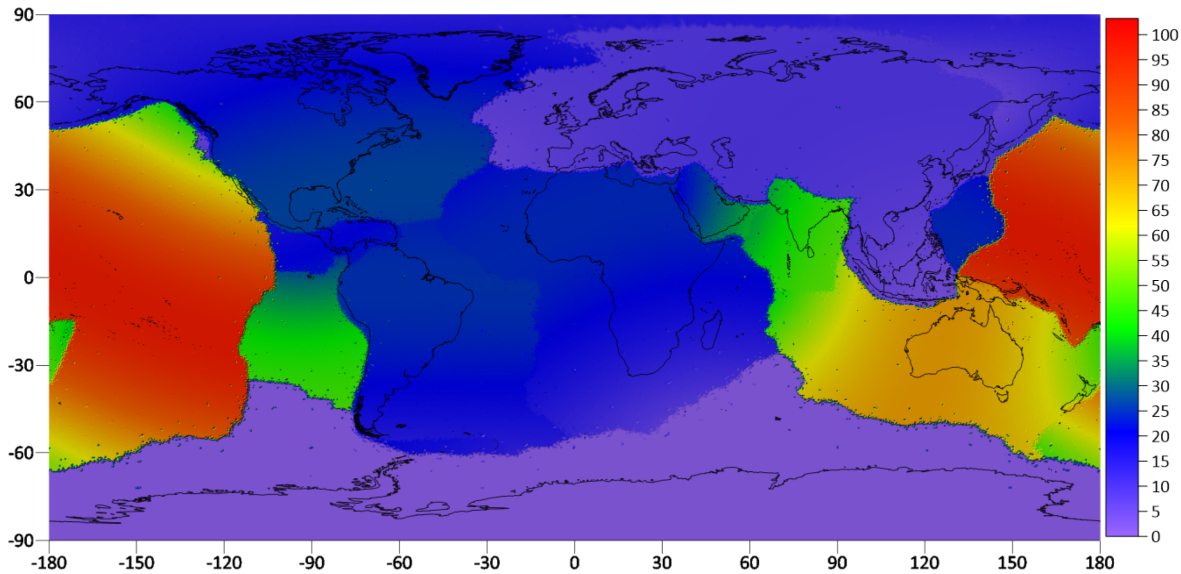

(4.11c) Posunutia v smere UZ (zemepisná dĺžka) [mm/rok]

Pre lepšiu vizualizáciu posunov bol vytvorený obrázok 4.12, na ktorom sú zobrazené vektory posunov litosferických dosiek. Z neho je okrem iného zrejmé, že vzhľadom na Antarktickú dosku sa pohybuje najviac Pacifická a Austrálska doska a že za vznikom Himalájí je pohyb Indickej platne, ktorá tlačí na Eurázijskú.

Ďalej na obrázku 4.13 sú zobrazené celkové posuny jednotlivých dosiek, ktoré boli vypočítané vzorcom $USUM = \sqrt{UX^2 + UY^2 + UZ^2}$




Obr. 4.12: Vektory posunutia [mm/rok]



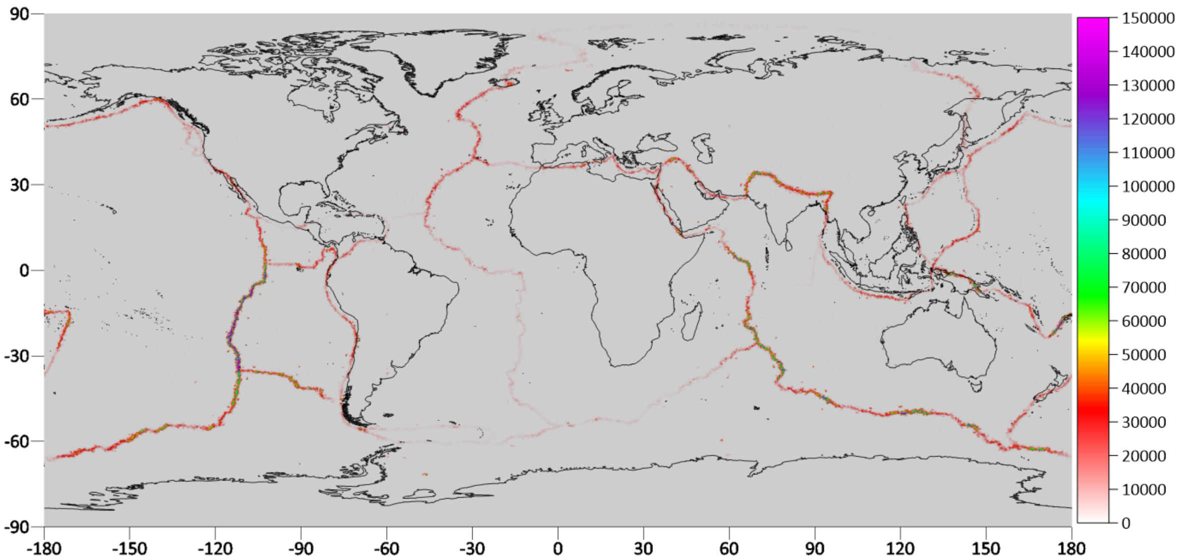

Obr. 4.13: Veľkosť výsledných posunutí USUM [mm/rok]

## 4.7.2 Zložky tenzora napätia

Na obrázku 4.14 sú zobrazené Von Mises napätia, ktoré sú dané vzťahom

$$\sigma_v = \sqrt{\frac{(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2+(\sigma_{22}-\sigma_{33})^2+(\sigma_{33}-\sigma_{11})^2+6(\sigma_{12}^2+\sigma_{23}^2+\sigma_{31}^2)}{2}}, \tag{4.7}$$

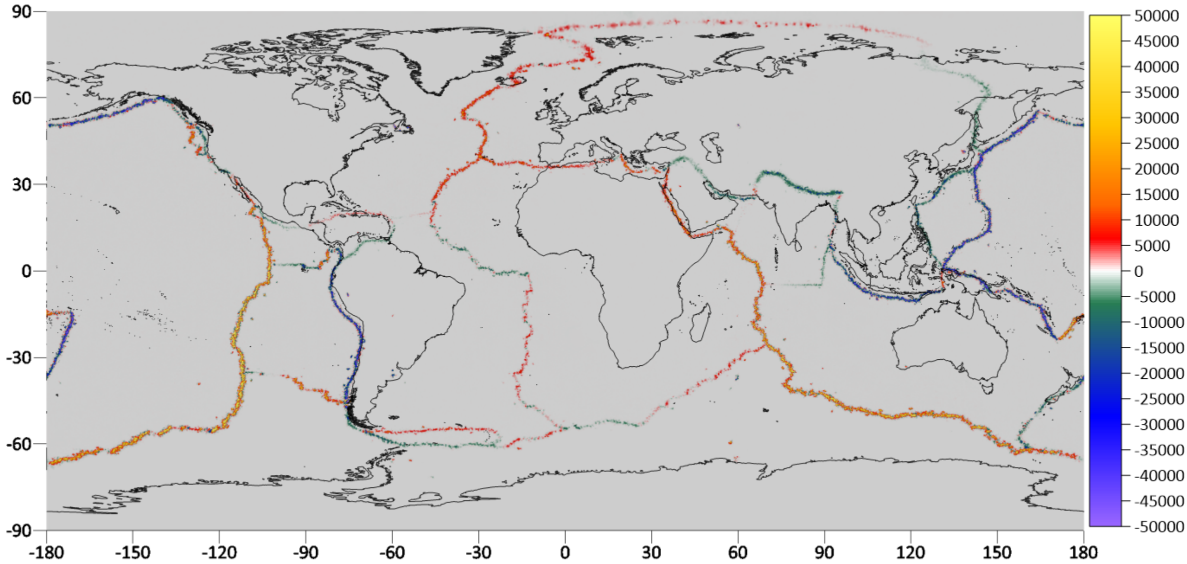
pričom je dôležité vedieť, že Von Mises napätie nie je žiadne reálne napätie. Je to len teoretická hodnota, ktorá umožňuje reprezentáciu 3 rozmerných napätí pomocou jednej kladnej konštanty.



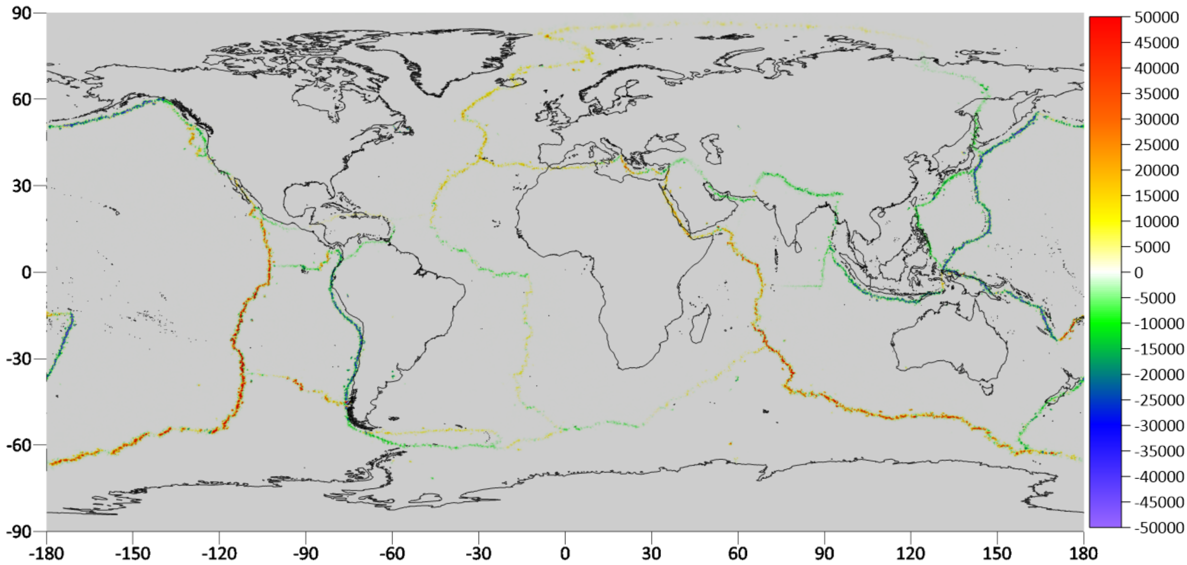

Obr. 4.14: von Mises napätie [Pa]

Na obrázkoch 4.15a–4.16c sú zobrazené normálové napätia SX,SY a SZ a šmykové napätia SXY,SYZ a SXZ, pričom ich minimálne a maximálne napätia sú zapísané v nasledujúcej tabuľke.

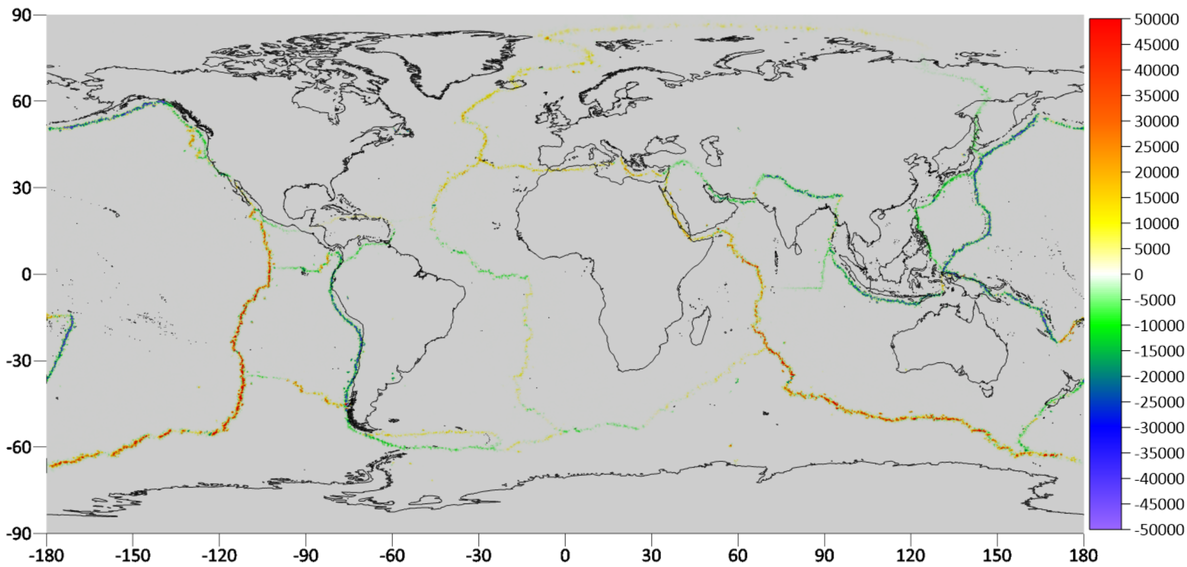
| **Tabuľka extrémov napätí** | | |
|---|---|---|
| **napätie** | **minimum** | **maximum** |
| SX | -447 kPa | 272 kPa |
| SY | -457 kPa | 343 kPa |
| SZ | -450 kPa | 271 kPa |
| SXY | -105 kPa | 116 kPa |
| SYZ | -79 kPa | 90 kPa |
| SXZ | -57 kPa | 66 kPa |



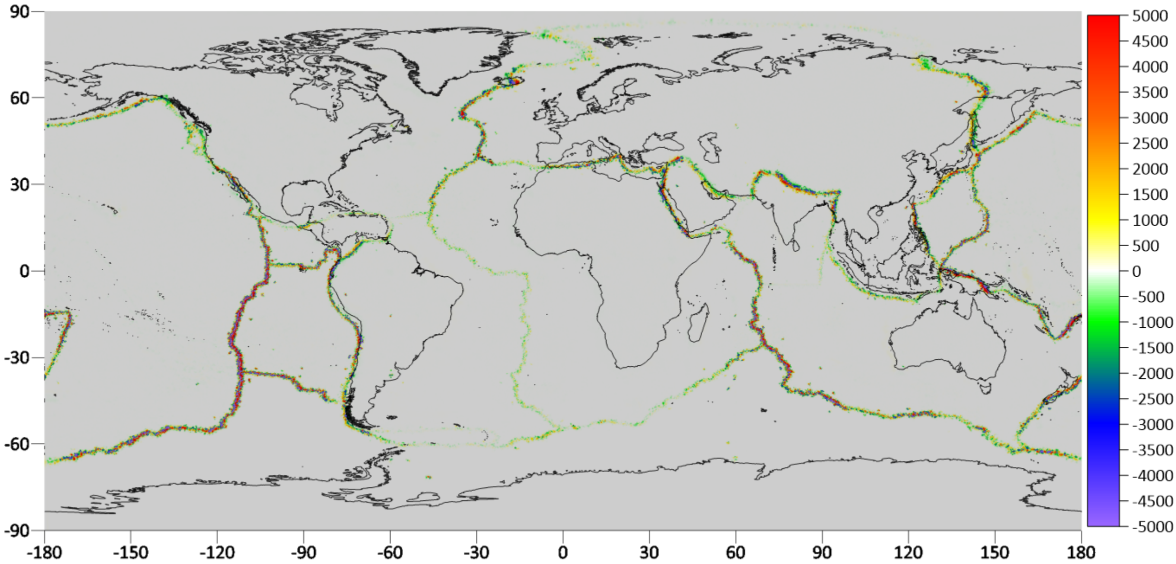

(4.15a) Normálové napätie SX [Pa]



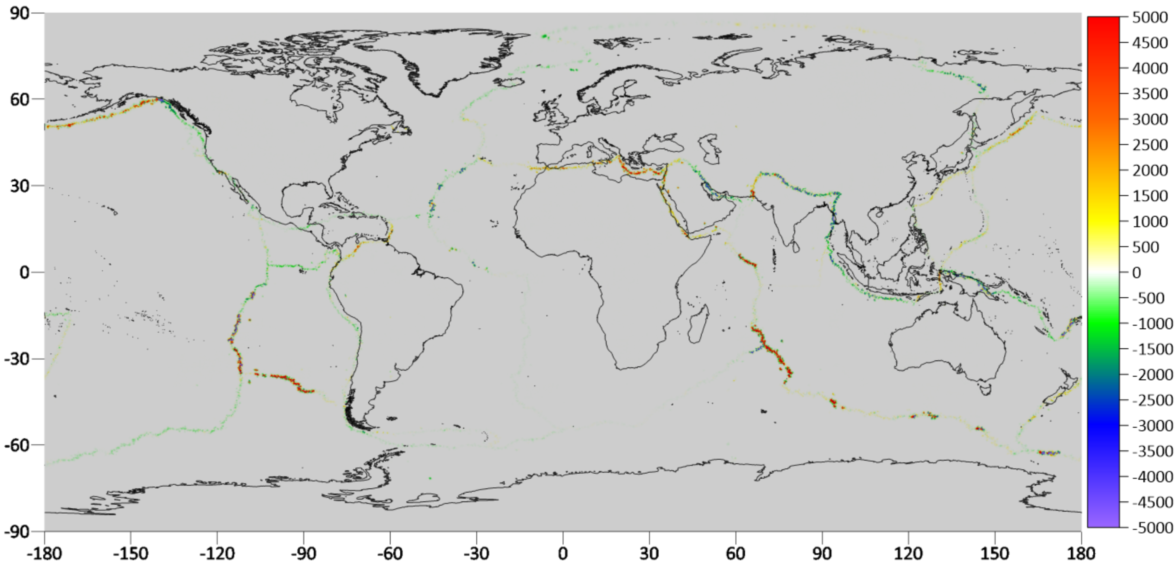

(4.15b) Normálové napätie SY [Pa]



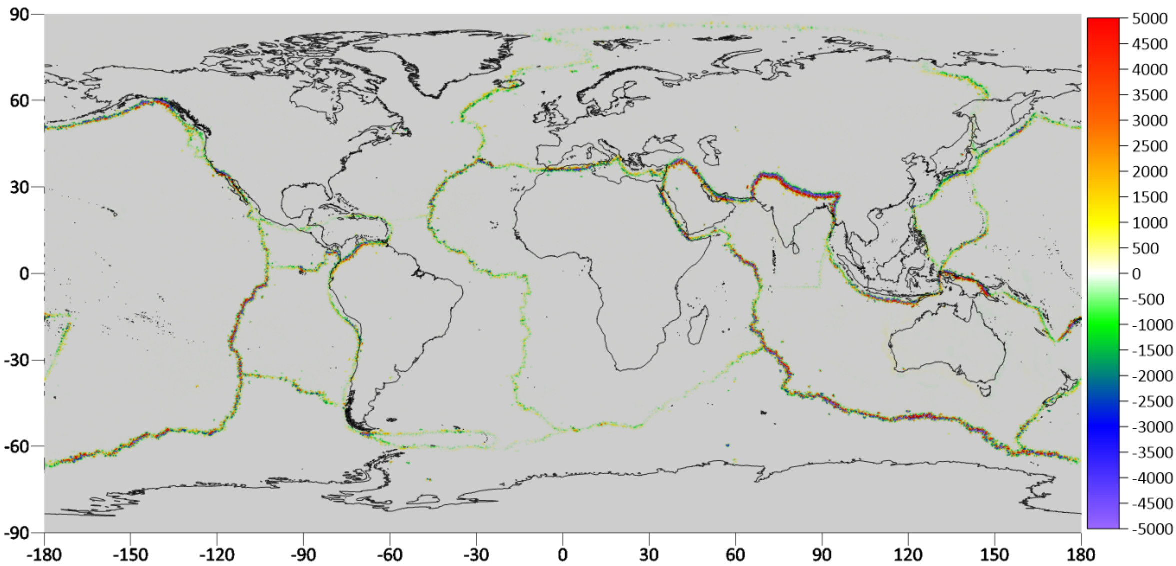

(4.15c) Normálové napätie SZ [Pa]




(4.16a) Šmykové napätie SXY [Pa]




(4.16b) Šmykové napätie SYZ [Pa]



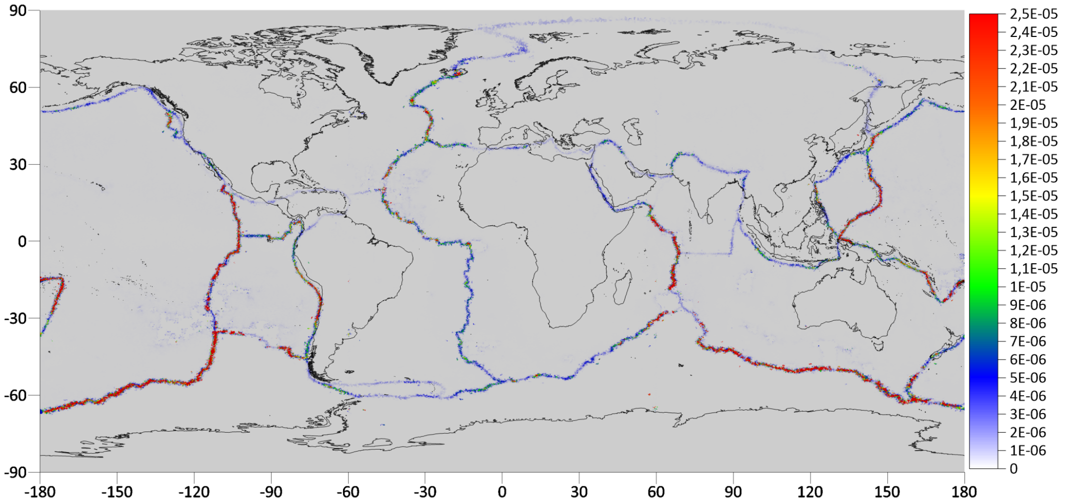

(4.16c) Šmykové napätie SXZ [Pa]

### 4.7.3 Pomerné deformácie

Zložky tenzora napätia na jednotlivých elementoch spôsobujú ich deformáciu, pričom dôležitá je tzv. pomerná deformácia, ktorá vyjadruje pomer absolútneho predĺženia ku pôvodnej dĺžke, čiže je daná vzťahom

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{l_{po} - l_{pred}}{l_{pred}}. \tag{4.8}$$

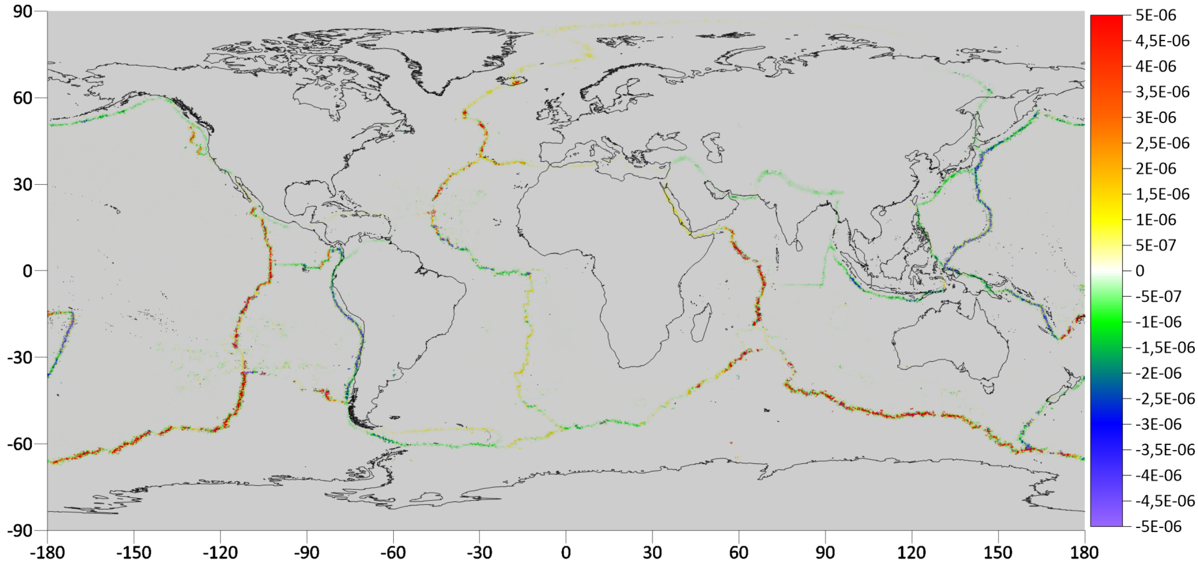
Na obrázku 4.17 sú znázornené celkové deformácie litosferických dosiek.



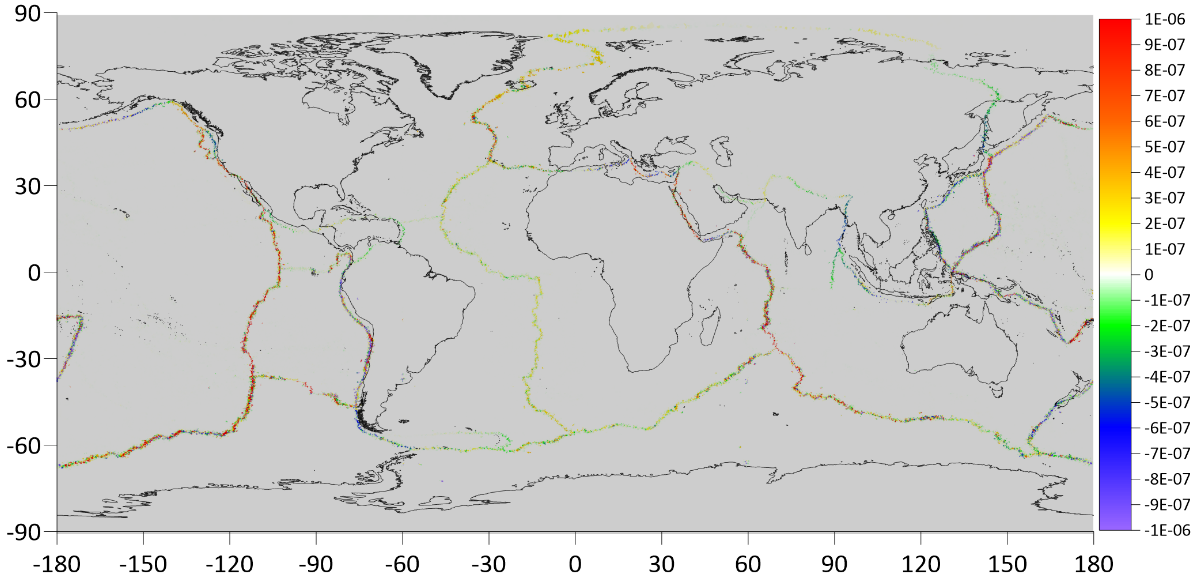

Obr. 4.17: Relatívna deformácia

Vidíme, že litosferické platne sa deformujú len na ich okrajoch, kde dochádza ku stretu s inými platňami a v stredoch dosiek dochádza ku takmer nulovej deformácii.

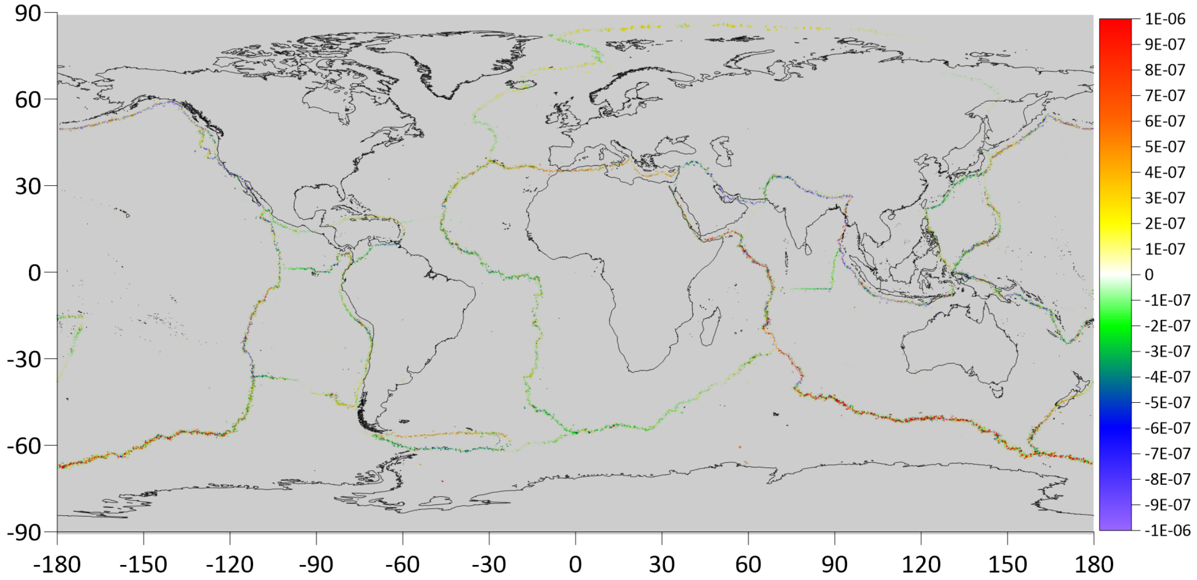
Na nasledujúcich obrázkoch 4.18a-4.18c a 4.19a-4.19c sú znázornené pomerné predĺženia, resp. skosenia v smere súradnicových osí.



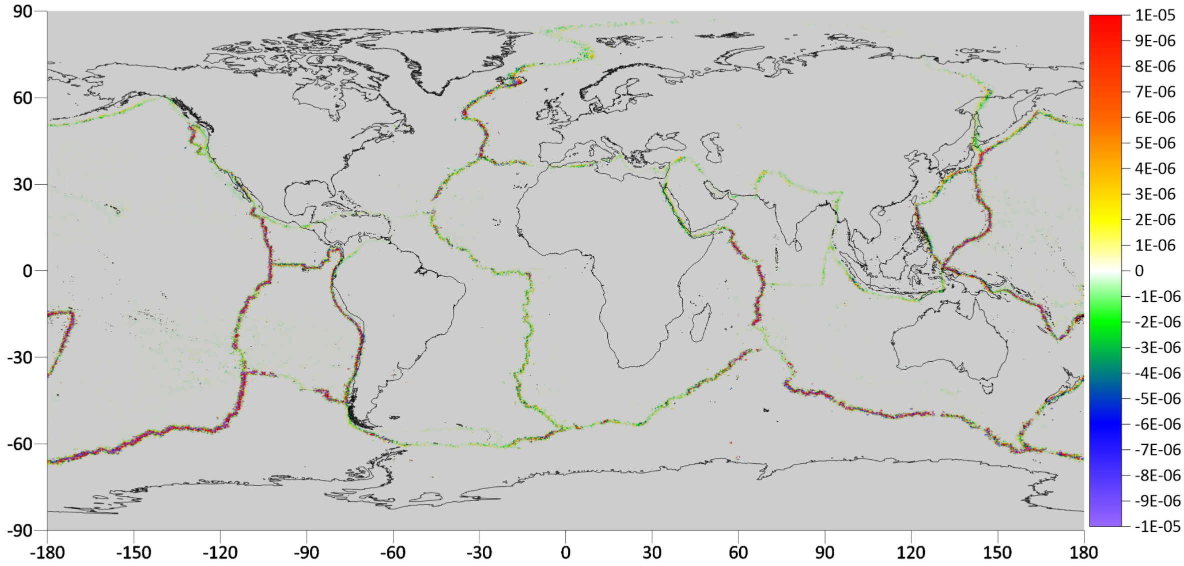

(4.18a) Pomerné predĺženie v smere X



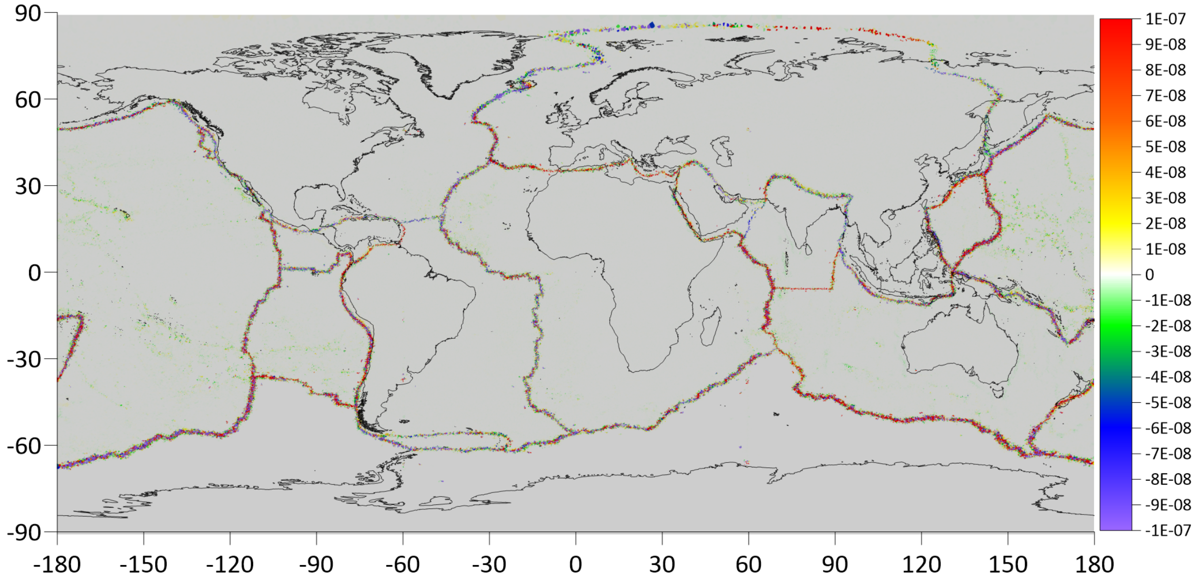

(4.18b) Pomerné predĺženie v smere Y



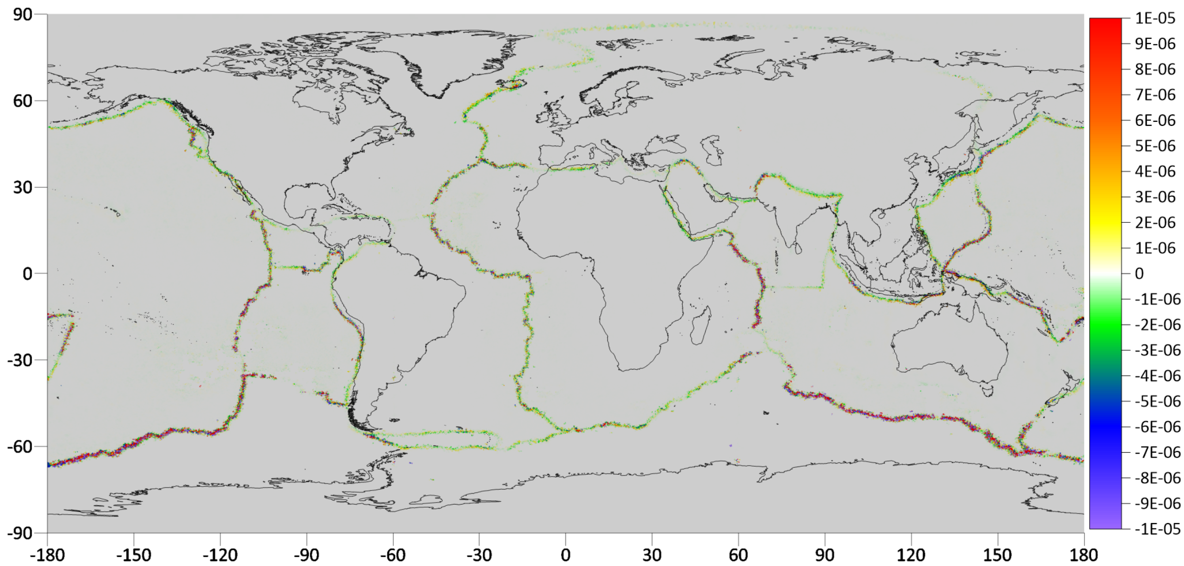

(4.18c) Pomerné predĺženie v smere Z




(4.19a) Skosenie v smere X závisle od Y



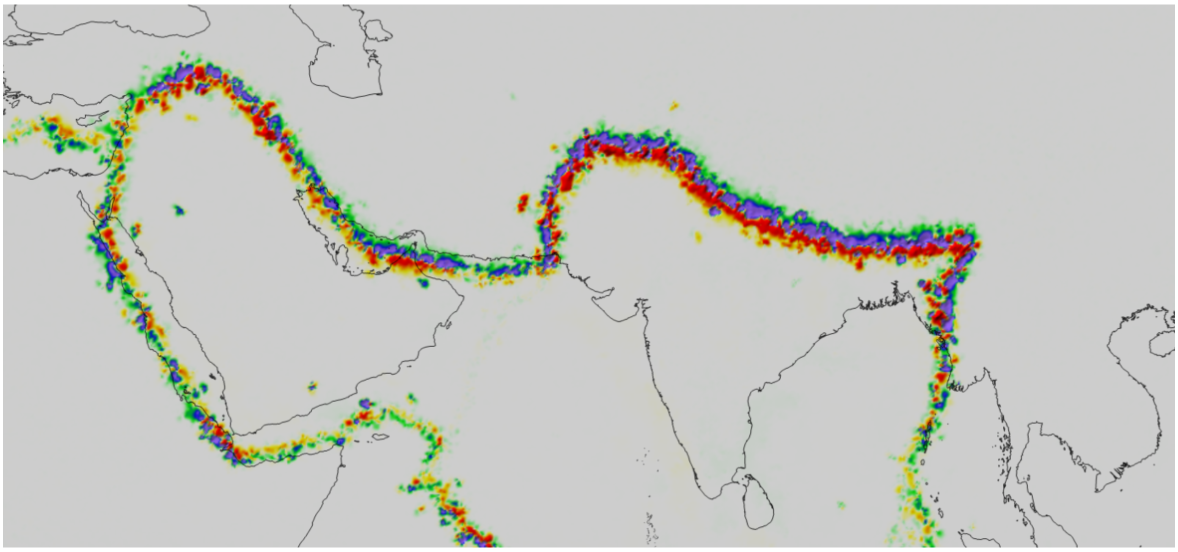

(4.19b) Skosenie v smere Y závisle od Z




(4.19c) Skosenie v smere X závisle od Z

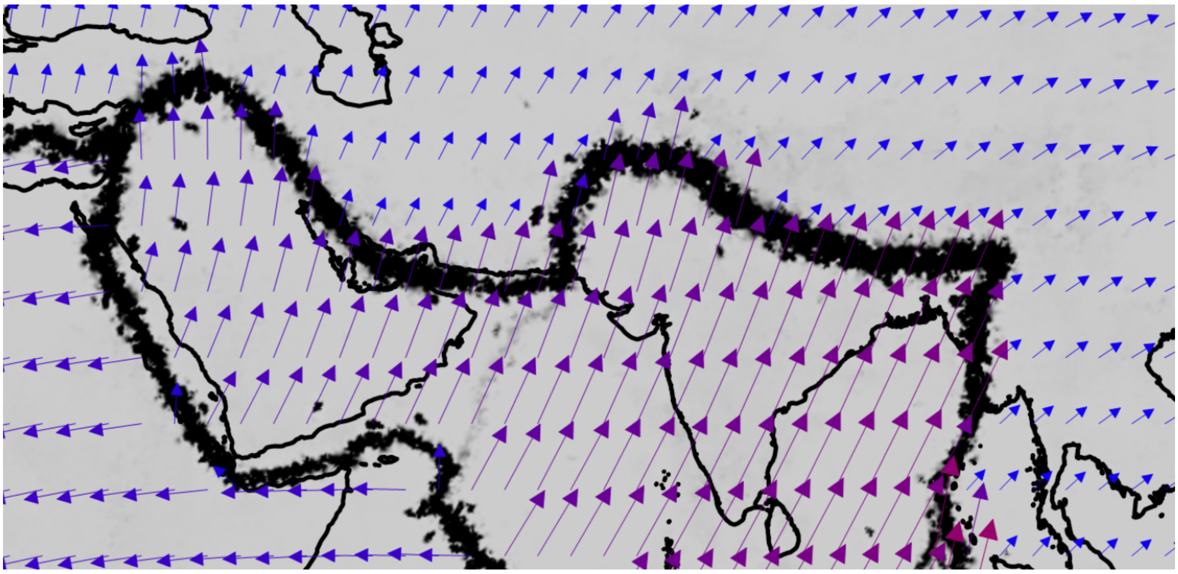
### 4.7.4 Detail stretu Idickej platne s Eurázijskou platňou

Dalo sa všimnúť, že na obrázku 4.16c sú najvýraznejšie šmykové napätia v oblasti Himalájí. Na detaile danej lokality (obr. 4.20) vidíme, že na serverne položenej Eurázijskej doske sú napätia záporné, zatiaľ čo na južnej Indickej doske sú kladné. To naznačuje podsúvanie Indickej platne pod Eurázijskú, čo zapríčiňuje rast pohorí Himaláje a Karakoram.



Obr. 4.20: Detail šmykových napätí SXZ v oblasti Himalájí

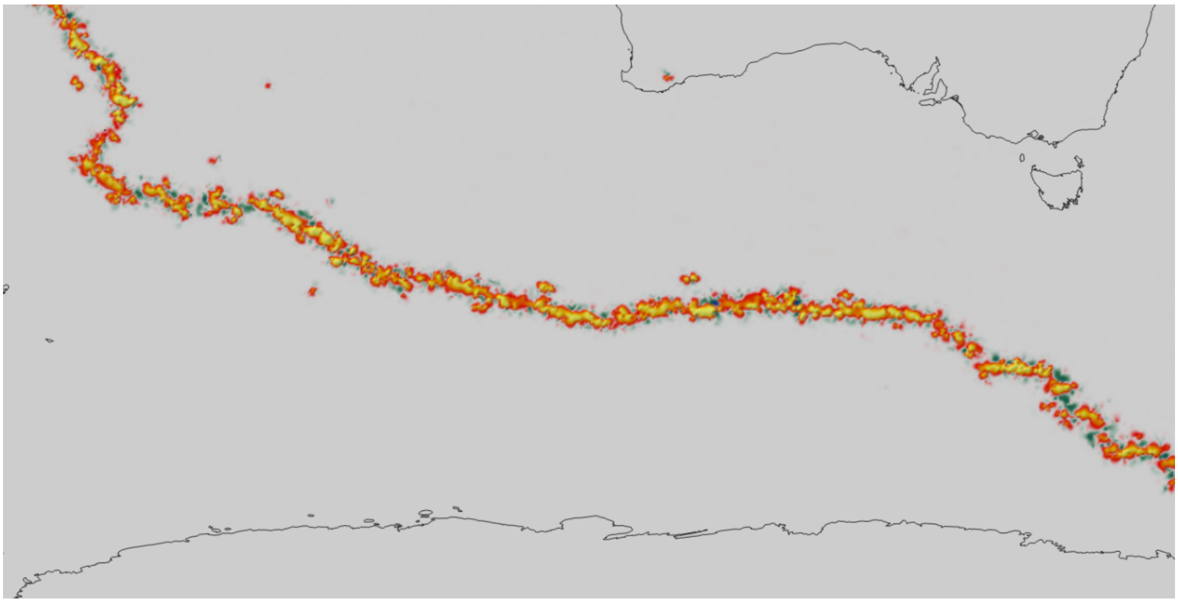
Potvrdiť to môžeme aj na základe obrázku 4.21 (detail obrázku 4.12), kde vidíme, že Indická platňa sa posúva severnejšímm smerom omnoho rýchlejšie ako Eurázijská doska.



Obr. 4.21: Detail vektorov posunutia v oblasti Himalájí

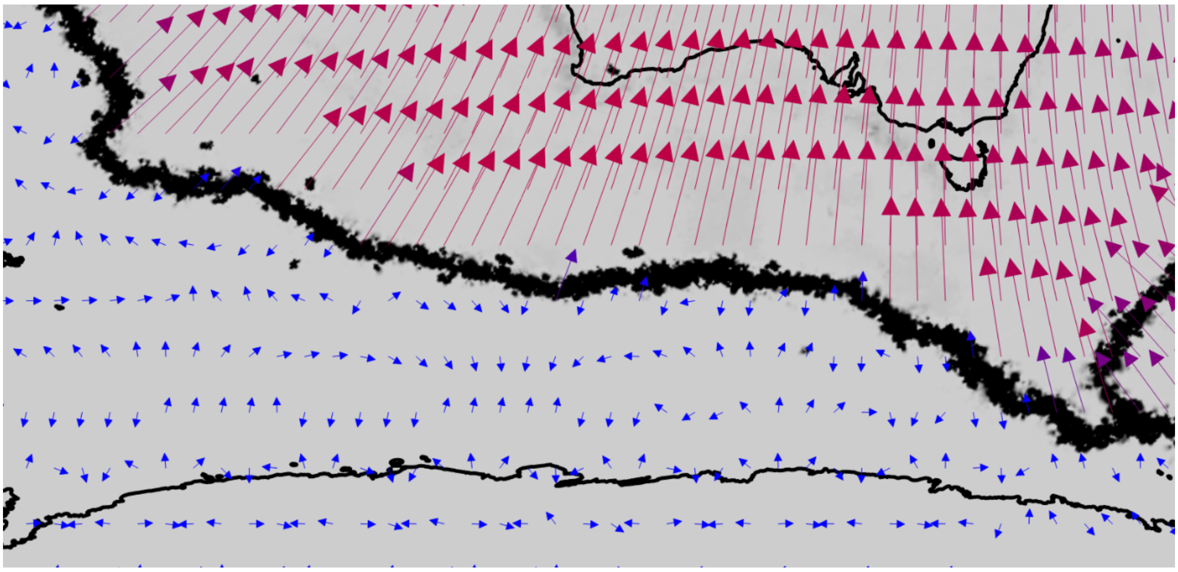
### 4.7.5 Detail stretu Austrálskej platne s Antarktickou platňou

Ďalej z obrázku 4.22 môžeme presne určiť hranicu Austrálskej a Antarktickej platne. Kladné hodnoty normálového napätia v radiálnom smere naznačujú tvorbu oceánskeho chrbta.



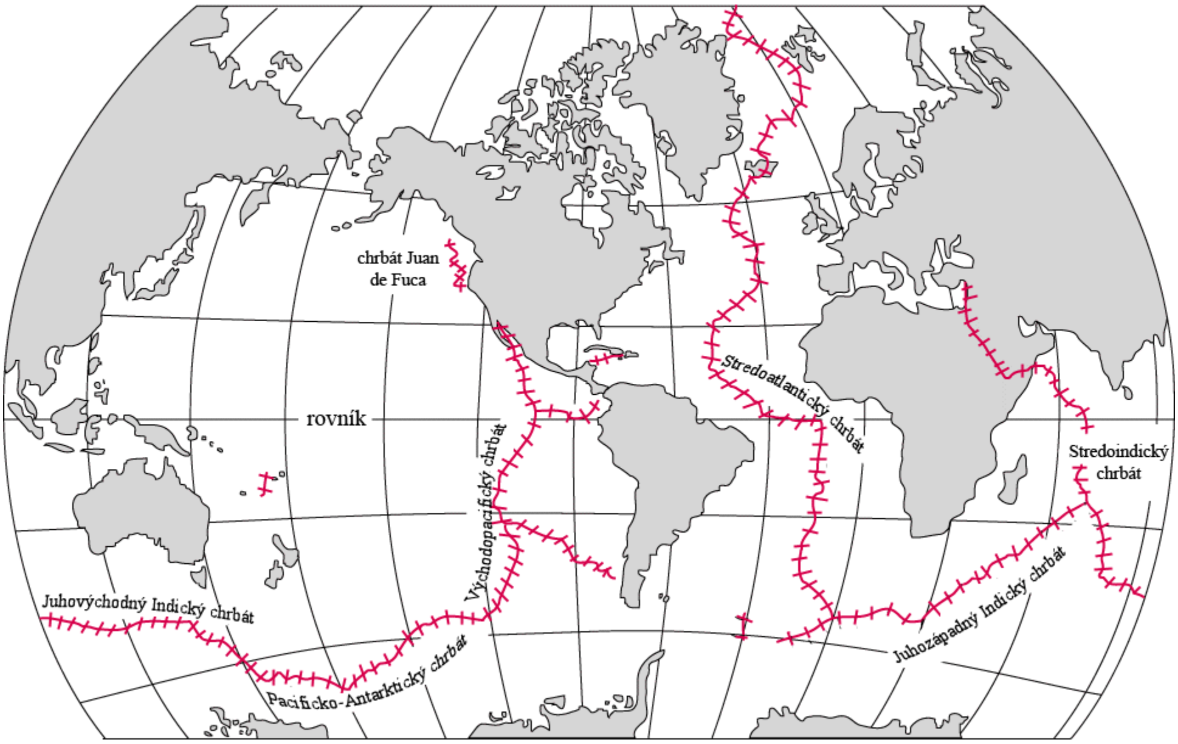
Obr. 4.22: Detail normálových napätí SX v oblasti Austrálie

Na obrázku 4.23 (detail obrázku 4.12) vidíme, že sa tieto dve platne pohybujú smerom od seba rýchlosťou približne 70 $mm/rok$, čo nám vďaka znalostiam z podkapitoly 1.2 naznačuje, že sa jedná o divergentný (riftový) zlom, pri ktorom sa tvoria chrbty. Konkrétne sa jedná o Juhovýchodný Indický chrbát, ktorý sa rozpína od *Rodrigues Triple Junction*, čo je pomenovanie stretu troch litosférických platní: Indickej, Austrálskej a Antarktickej, až po *Macquarie Triple Junction* (stret Austrálskej, Pacifickej a Antarktickej platne) neďaleko Nového Zélandu.



Obr. 4.23: Detail vektorov posunutia v oblasti Austrálie

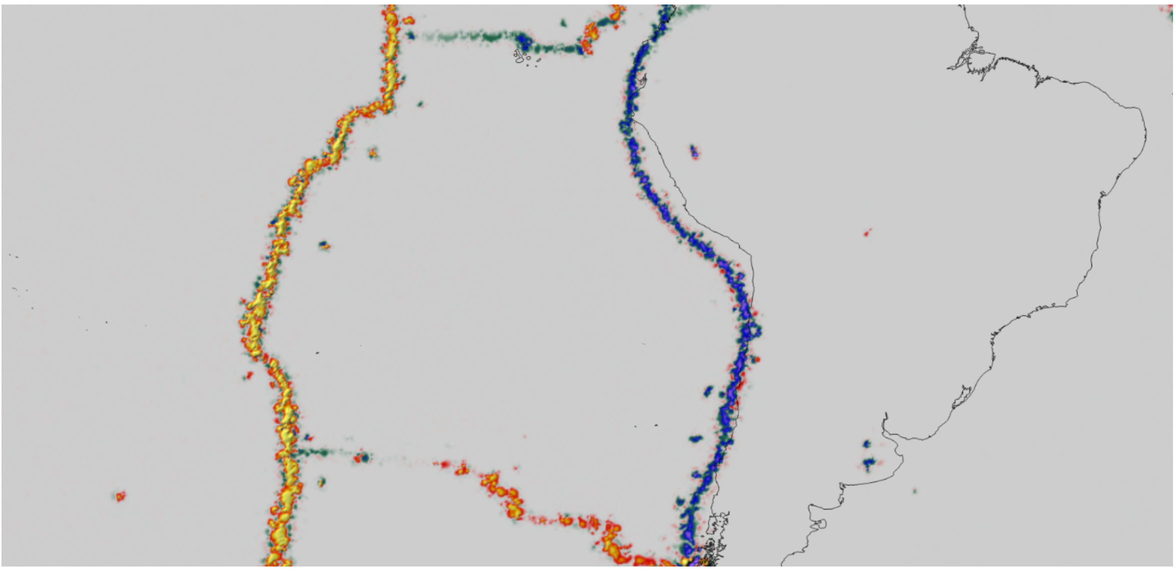
Tento oceánsky chrbát so svojou dĺžkou približne 6 000 $km$ je len malou časťou globálneho systému oceánskych chrbtov, v ktorom sú súvisle spojené všetky významnejšie chrbty. Tento systém oceánskych chrbtov, znázornený na obrázku 4.24, dosahuje dĺžku 65 000 $km$, čo je viac než deväťnásobok dĺžky pohoria Andy (najdlhšie pohorie na Zemi). [14]




Obr. 4.24: Oceánske chrbty

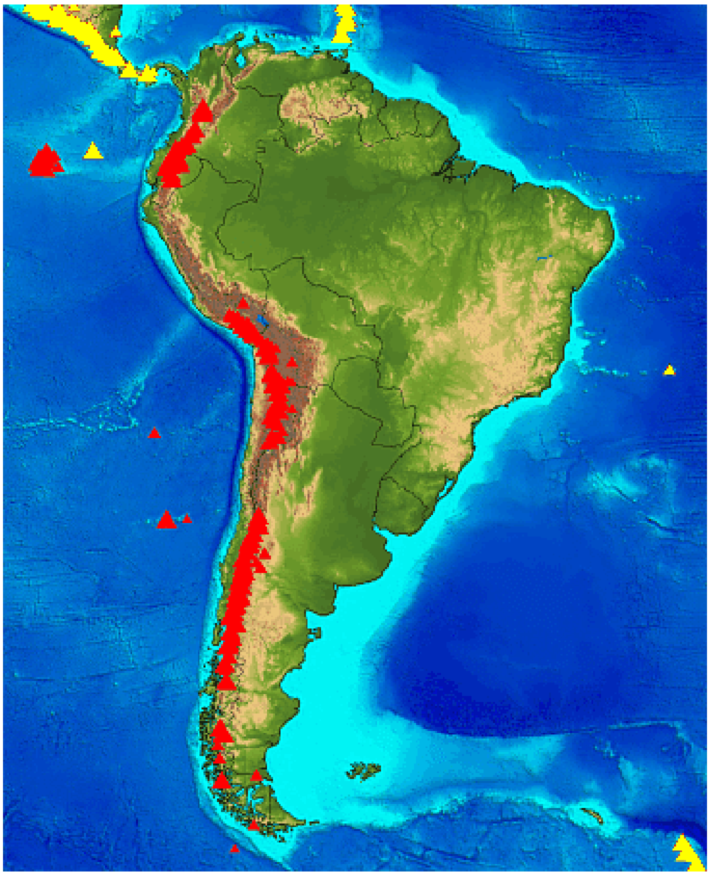
### 4.7.6 Detail Juhovýchodného Pacifiku

Rovnako na obrázku 4.25 vidíme, že v oblasti juhovýchodného Pacifiku sa nachádza ďalší oceánsky chrbát. Konkrétne sa jedná o Východopacifický chrbát, ktorý začína v Kalifornskom zálive a končí na strete s Pacificko-Antarktickým chrbtom, ktorý smeruje západne a oddeľuje Pacifickú platňu od Severoamerickej, Kokosovej, Nazca a Antarktickej platne. Tento chrbát je, čo si môžeme všimnúť na základe žltej farby označujúcej maximálne normálové napätie v radiálnom smere, najrýchlejšie rastúcim oceánskym chrbtom na celej Zemi.



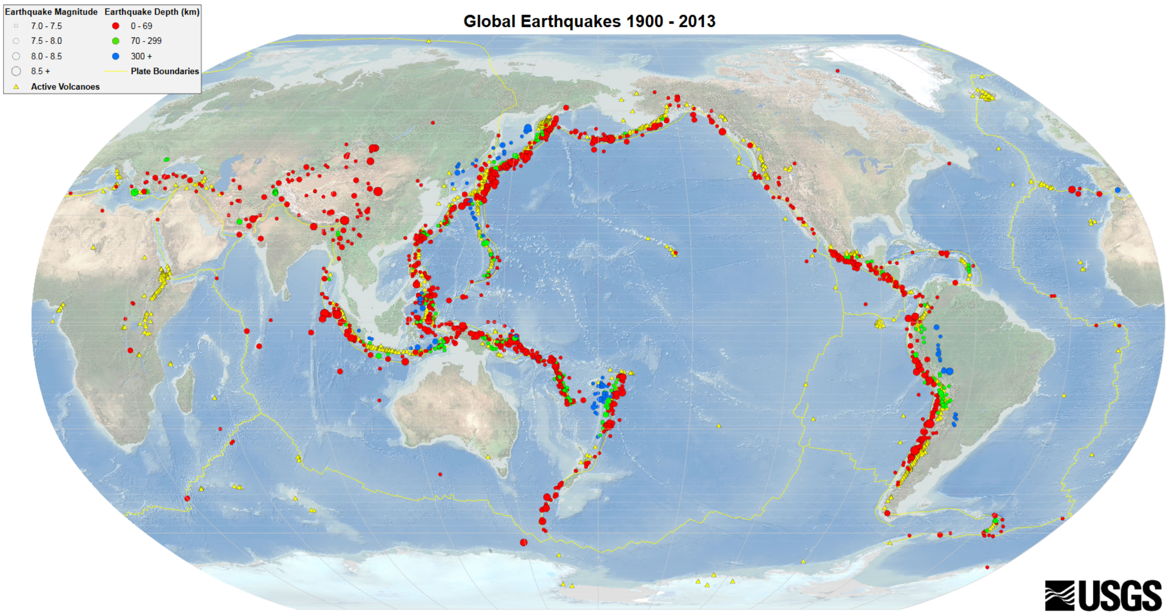
Obr. 4.25: Detail normálových napätí SX v oblasti juhovýchodného Pacifiku

Rovnako na tomto obrázku si môžeme všimnúť, že normálové napätia tesne pred pobrežím Chile v Južnej Amerike dosahujú veľké záporné hodnoty. To naznačuje klesanie platne Nazca, ktorá sa podsúva pod Juhoamerickú dosku. Z podkapitoly 1.2 vieme, že sa jedná o konvergentný zlom, keď sa oceánska platňa podsúva pod kontinentálnu. To vysvetľuje veľkú hustotu sopiek v oblasti Ánd (obr. 4.26).



Obr. 4.26: Mapa sopiek v Južnej Amerike

Táto lokalita je avšak len malou časťou tzv. *Ohnivého kruhu* (angl. Ring of Fire). Ohnivý kruh je zóna obkolesujúca takmer celý Tichý oceán, na ktorej sa nachádza približne 450 aktívnych sopiek (viac než 75% svetových aktívnych sopiek) a ktorú zasahuje takmer 90% svetových zemetrasení. Zapríčiňuje to nielen platňa Nazca, ale hlavne Pacifická platňa, ktorá sa severe a severovýchode spolu s platňou Juan de Fuca podsúvajú pod Severoamerickú dosku a na severozápade pod Eurázijskú. Západný a juhozápadný koniec Ohnivého kruhu je zložitejší, vzhľadom na väčší počet drobnejších platní. Na obrázku 4.27 sú zobrazené aktívne sopky (označené trojuholníkom) a všetky zemetrasenia s magnitúdou väčšou ako 7.0 Richterovej stupnice od roku 1900 v oblasti Ohnivého kruhu.




Obr. 4.27: Ohnivý kruh[17]

# Záver

V tejto práci sme sa zaoberali modelovaním pohybov tektonických platní v zemskej litosfére.

Prvým cieľom bolo vytvorenie diskretizovaného modelu Zeme. Tento cieľ sme splnili v kapitole 4 vytvorením štvorvrstvového modelu zemskej kôry.

Druhým, hlavným, cieľom bolo vypočítanie zložiek tenzoru napätia a vektoru posunutia pre body nachádzajúce sa na zemskom povrchu. Tento cieľ sme splnili tak isto v kapitole 4, pričom výsledky sú vizualizované v podkapitole 4.7. Výsledný model bol tvorený 3 276 810 bodmi a 5 242 880 konečnými prvkami. Na výpočet boli pripravené komplexnejšie modely (so štorvnásobným, resp. 16-násobným počtom uzlov a elementov), avšak boli sme limitovaný výpočtovou technikou, ktorá nepokryla pamäťové nároky experimentov.

To znamená, že potenciál pokračovať v tejto problematike je aj v budúcnosti, keď budeme schopní vypočítať zložitejší problém. Rovnako by sa mohol experiment zdokonaliť využitím presnejšieho modelu zloženia zemskej kôry alebo zakomponovaním zemského plášťa a jadra s ich pohybmi.

# Literatúra


[1] ALTAMINI, Z., REBISCHUNG, P., MÉTIVIER, L., and COLLILIEUX, X. ( 2016), ITRF2014: A new release of the International Terrestrial Reference Frame modeling nonlinear station motions, J. Geophys. Res. Solid Earth, 121, 6109– 6131, doi:10.1002/2016JB013098.

[2] ANSYS, [online] <http://www.ansys.com/>

[3] COXETER H. S. M., *Regular Polytopes* (3rd edition). New York: Dover Publications, 1973, 321 s., ISBN 0-486-61480-8.

[4] CRUST 1.0, [online] <https://igppweb.ucsd.edu/g̃abi/crust1.html>

[5] Doppler Orbitography and Radiopositioning Integrated by Satellite, [online] <https://www.ga.gov.au/scientific-topics/positioning-navigation/geodesy/geodetic-techniques/doris>

[6] DORIS, [online] <https://www.aviso.altimetry.fr/en/techniques/doris.html>

[7] ETOPO1, [online] <https://www.ngdc.noaa.gov/mgg/global/global.html>

[8] ETOPO1 1 ARC-MINUTE GLOBAL RELIEF MODEL, [online] <https://www.ngdc.noaa.gov/mgg/global/relief/ETOPO1/docs/ETOPO1.pdf>

[9] GNSS, [online] <https://www.gps.gov/systems/gps/space/>

[10] HEFTY, J. - HUSÁR, L. Družicová geodézia - globálny polohový systém. Bratislava: STU, 2003. 186 s. ISBN 80-227-1823-8

[11] KEAREY P. - VINE F. J.,*Global Tectonics*, 2nd edition, Padstow: Wiley-Blackwell, 1996, 344 s., ISBN 0-86542-924-3

[12] LASKE, G., G. MASTERS, Z. MA a M. PASYANOS. Update on CRUST1.0 - A 1-degree Global Model of Earth's Crust. Geophys. Res. Abstracts, Abstract EGU2013-2658. 2013.

[13] REDDY, J. An Introduction to the Finite Element . New York: McGraw-Hill, 1993. 684 s. ISBN 0-07-112799-2.

[14] Searle R., Mid-Ocean Ridges . New York: Cambridge University Press, 2013. 330 s. ISBN 9781107017528.

[15] SLR, [online] <https://www.iers.org/IERS/EN/Science/Techniques/slr.html>

[16] Surfer 15, [online] <http://www.goldensoftware.com/products/surfer/>

[17] USGS, [online] <https://earthquake.usgs.gov/earthquakes/byregion/>

[18] UNAVCO, [online] <https://www.unavco.org/software/geodetic-utilities/plate-motion-calculator/plate-motion-calculator.html>

[19] VLBI, [online] <https://www.gfz-potsdam.de/en/section/space-geodetic-techniques/topics/geodetic-and-astrometric-vlbi/>

[20] WEISSTEIN, Eric W. Ïcosahedral Group."[online] <http://mathworld.wolfram.com/IcosahedralGroup.html>

[21] WORLD GEODETIC SYSTEM 1984 (WGS 84), [online] <http://earth-info.nga.mil/GandG/update/index.php?dir=wgs84&action=wgs84>