Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie

MODELOVANIE A ANALÝZA PLATŇOVEJ TEKTONIKY

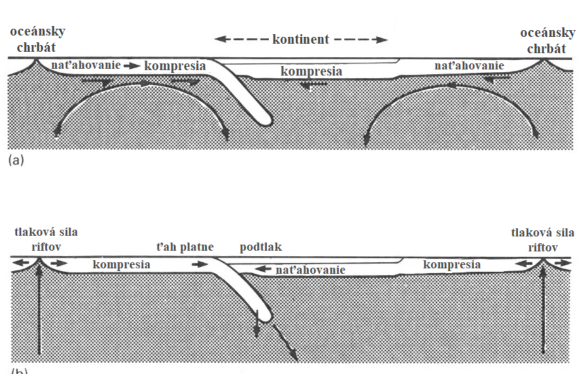
Martin Štefanec

Úvod

Hoci história teórie globálnej tektoniky je pomerne nová a začala sa vo väčšom rozvíjať až v sedemdesiatych rokoch 20. storočia, ľudia verili, že časti Zeme sú v pohybe už omnoho skôr. Odkedy ľudia po prvý krát zmapovali pobrežia kontinentov v okolí Atlantického oceánu, sme si začali všímať veľkú podobnosť tvaru pobreží Amerík a Európy s Afrikou. Ako prvú písomnú zmienku o povšimnutí si spomenutej podobnosti môžeme považovať dielo *Novum Organum* od Sira Francisa Bacona z roku 1620.
Táto bakalárska práca sa zaoberá využitím poznatkov z teórie pružnosti a metódy konečných prvkov na modelovanie pohybov litosferických dosiek. Hlavným cieľom práce je vytvorenie trojdimenzionálnej aproximácie povrchu Zeme, ktorá sa následne použije na modelovanie posunov a napätí v tektonických platniach. Práca je zložená z dvoch hlavných častí.
Na začiatku opíšeme stavbu Zeme a procesy v jej vnútri. Ďalej si vysvetlíme základné pojmy z teórie pružnosti a metódy konečných prvkov a v praktickej časti opíšeme tvorbu diskretizovaného modelu Zeme, ktorý slúžil ako geometria pre konečnoprvkový softvér ANSYS. Na záver si ako výsledok experimentu ukážeme vypočítané zložky tenzora napätia a posuny na Zemskom povrchu.

Platňová tektonika

Na základe seizmických prieskumov vieme, že Zem je zložená z troch hlavných častí. Kôra, dosahujúca hrúbku $30-100\,km$ na pevnine a $5-15\,km$ v oceánoch, je omnoho tenšia ako plášť a jadro, ktoré dosahujú hrúbku viac než $2500\,km$, resp. $3500\,km$. Celá zemská kôra vrátane najvrchnejšej časti plášťa tvoria *litosféru*, pod ktorou sa nachádza *astenosféra*, čo je horná časť zemského plášťa. Litosféra je rozdelená na viacero častí nazývaných litosferické platne (tektonické dosky), pričom takmer celý povrch Zeme pokrýva 12 najväčších platní.
Príčinou pohybu platní je termálna konvekcia v zemskom plášti. Na obrázku sú zobrazené dva návrhy mechanizmov zapríčiňujúcich pohyby litosferických dosiek. Prvý je tzv. Mantle drag mechanism, ktorý je všeobecne najuznávanejší a spočíva v predpoklade, že pohyb dosiek je zapríčinený trením pohybujúcej sa chladnúcej astenosféry o podstavu litosferických dosiek. Druhý návrh je tzv. Edge-force mechanism, ktorý spočíva v tom, že hornou hranicou konvekcie je litosféra, nie astenosféra. Teda predpokladá, že pohyb litosferických dosiek je zapríčinený silami pôsobiacimi na ich hranice.



Dva návrhy mechanizmov zapríčiňujúcich pohyby litosferických dosiek

Základné pojmy z teórie pružnosti

Cieľom práce bolo vypočítať zložky tenzora napätia. Na to si potrebujeme definovať základné pojmy z teórie pružnosti. Elasticitu materiálu definujú Lamého konštanty elasticity mí a lambda, ktoré sú dané vzťahmi

$$\mu = \frac{E}{2(1+\sigma)}, \tag{1}$$

$$\lambda = \frac{E\sigma}{(1-2\sigma)(1+\sigma)}, \tag{2}$$

kde E nazývame Youngov modul pružnosti a sigma Poissonovo číslo. Tieto dve konštanty vystupujú v Hookovom zákone, ktorého tvar pre homogénne izotropné teleso je

$$\tau_{ii} = 2\mu\varepsilon_{ii} + \lambda\left(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}\right), \tag{3}$$

$$\tau_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij}, \tag{4}$$

pričom τ_{ii} a τ_{ij}, sú zložky tenzora napätia, kde kde τ_{ii} sú normálové napätia na roviny kolmé na súradnicové osi, t.j. predstavujú čistý ťah/tlak na danú rovinu a τ_{ij} sú šmykové napätia, vzhľadom na danú rovinu.

Metóda konečných prvkov

Metóda konečných prvkov je numerická metóda na riešenie problémov inžinierskej matematiky. Základnou myšlienkou tejto metódy je diskretizácia výpočtovej oblasti Ω na menšie, podobné časti nazývané elementy (prvky), pričom jednoduché funkcie aproximujúce dané elementy sú následne spojené do väčšieho systému rovníc, ktoré aproximujú celý problém. Všeobecný postup pre riešenie úloh pomocou metódy konečných prvkov spočíva z viacerých krokov, a to:

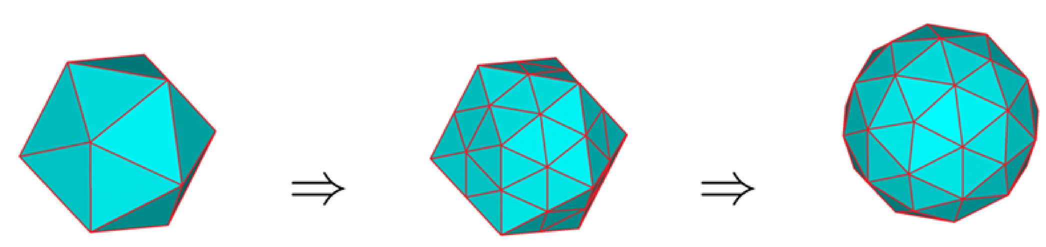
1. Diskretizácia výpočtovej oblasti na konečné prvky/elementy (v našom príklade 3D element SOLID185 v softvéri ANSYS)
2. Zostrojenie sústavy rovníc na elemente
   (a) Zostrojenie slabej formulácie diferenciálnej rovnice na elemente
   $$\int_{\Omega^e}\left[\sum_{j=1}^{3}\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial w}{\partial x_j}+\lambda\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right)\frac{\partial w}{\partial x_j}\right]dx = \int_{\Omega^e} F_i w dx + \int_{\partial\Omega^e} f_i w dS.$$
   (b) Zostrojenie aproximačných funkcií na elemente
   (c) Zostrojenie lokálnej sústavy rovníc na elemente
3. Spojenie elementových sústav do globálneho konečnoprvkového systému lineárnych rovníc
   (a) Globálne číslovanie uzlových bodov a neznámych
   (b) Bilancia tokov
4. Zahrnutie okrajových podmienok
5. Riešenie globálneho systému rovníc

Icosahedronová sieť

Pravidelný icosahedron alebo po slovensky dvadsaťsten je tvorený 20 pravidelnými trojuholníkmi a 12 vrcholmi. Súradnice vrcholov základného icosahedronu sú nasledovné:

$$(\pm 1, \pm\varphi, 0);\ (0, \pm 1, \pm\varphi);\ (\pm\varphi, 0, \pm 1), \text{ kde}$$
$$\varphi = \tfrac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.6180339887\ldots$$

Pomocou pravidelného icosahedronu môžeme aproximovať sféru, pretože sme schopní premietnuť jeho vrcholy na sféru. Nakoľko aproximácia jednotkovej sféry 12 vrcholmi nie je veľmi presná, zjemníme ju tým, že každý trojuholník na icosahedrone rozdelíme na 4 pravidelné trojuholníky spojením stredov strán, pričom novovzniknuté vrcholy premietneme na jednotkovú sféru.



(a) Originálny icosahedron

(b) Icosahedron so zjemnenou sieťou

(c) Icosahedron s premietnutými bodmi na opísanú sféru

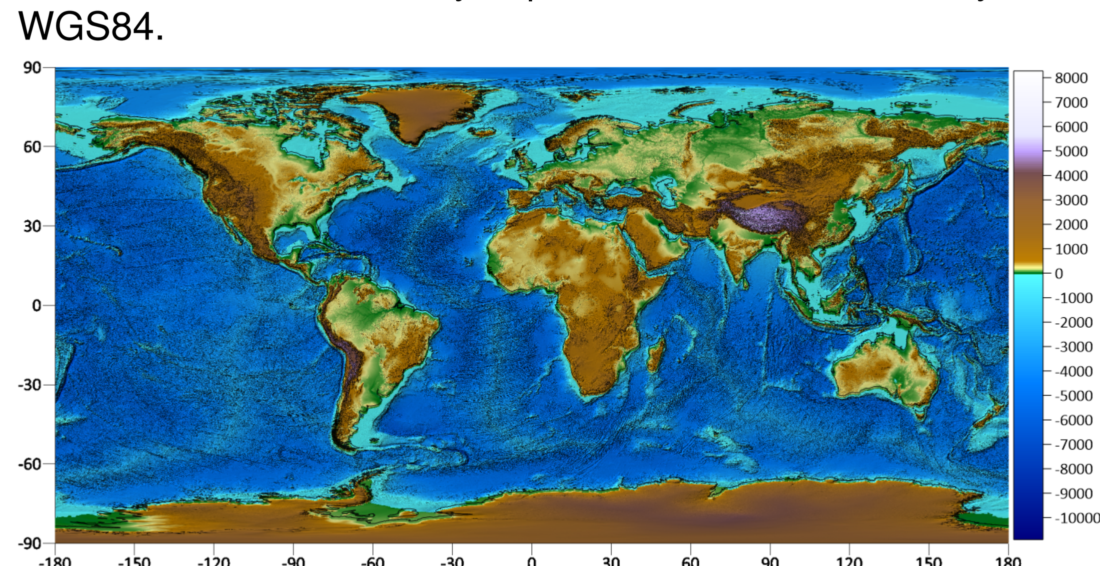
Týmto spôsobom sa dá zjemňovať sieť do požadovaných hodnôt. Pri delení icosahedronu sa počet plôch riadi jednoduchým vzorcom $20*4^N$ a počet vrcholov vzorcom $10*4^N+2$, kde N je počet delení. Pri našom experimente sme pracovali s 8 násobným delením icosahedronu.

počet vrcholov	655 362
počet trojuholníkov	1 310 720
vzdialenosť susediacich vrcholov	$\approx 27,65\,km$
uhlová vzdialenosť vrcholov	$\approx 0.248°$

Počet vrcholov a plôch pri použitej sieti

Postup tvorby modelu

Model bol tvorený 4 vrstvami- ľad s 3 vrstvami sedimentov, horná, stredná a spodná kôra. Najskôr bola vytvorená horná vrstva reprezentujúca zemský povrch, pričom nadmorské výšky boli získané z modelu ETOPO1, čo je model zemského reliéfu vrátane topografie pevniny a batymetrie oceánskeho dna s rozlíšením 1 minúty zemepisnej šírky a dĺžky. Nadmorské výšky sa nanášali na referenčný elipsoid zo súradnicového systému WGS84.



Nadmorské výšky z modelu ETOPO1

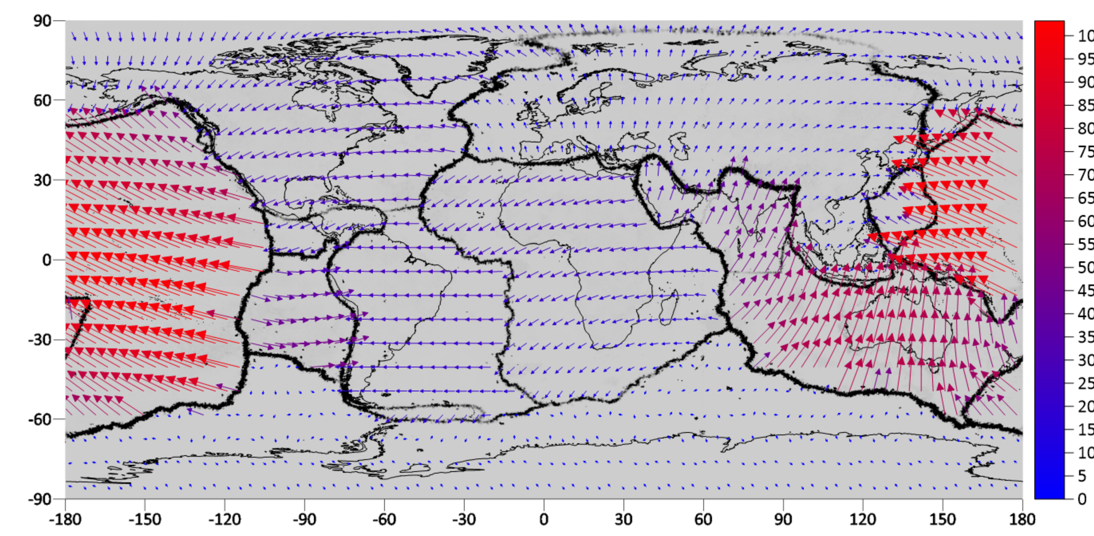
Potom súradnice ďalších vrstiev boli získavané odpočítaním hrúbky danej vrstvy od predošlej. Hodnoty hrúbok jednotlivých vrstiev a ich materiálové vlastnosti – hustota, Youngov modul pružnosti a Poissonova konštanta boli získavané z modelu zemskej kôry CRUST 1.0. Tento model obsahuje modely 8 vrstiev zemskej kôry (voda, ľad, 3 vrstvy sedimentov, hornú, strednú a spodnú kôru). Ale kvôli výpočtovej náročnosti bol experiment zjednodušený spojením 3 vrstiev sedimentov a ľadu do jednej vrstvy a zanedbaním vodnej vrstvy z dôvodu minimálneho vplyvu na posuny litosferických dosiek.

Okrajové podmienky

Okrajové podmienky pre experiment boli získané z modelu globálnych rýchlostí ITRF2014. Okrajové podmienky boli uplatňované na hornú a spodnú vrstvu modelu, pričom vektory rýchlostí boli určené vzhľadom na Antarktickú platňu, ktorá bola ukotvená na mieste. Model ITRF2014 je generovaný pomocou nelineárnych posunov kontrolných staníc, vrátane sezónnych posunov (ročných a polročných) a posunov zapríčinenými významnými zemetraseniami. Na vytvorenie tohto modelu boli použité geodetické merania VLBI, SLR, GNSS a DORIS.

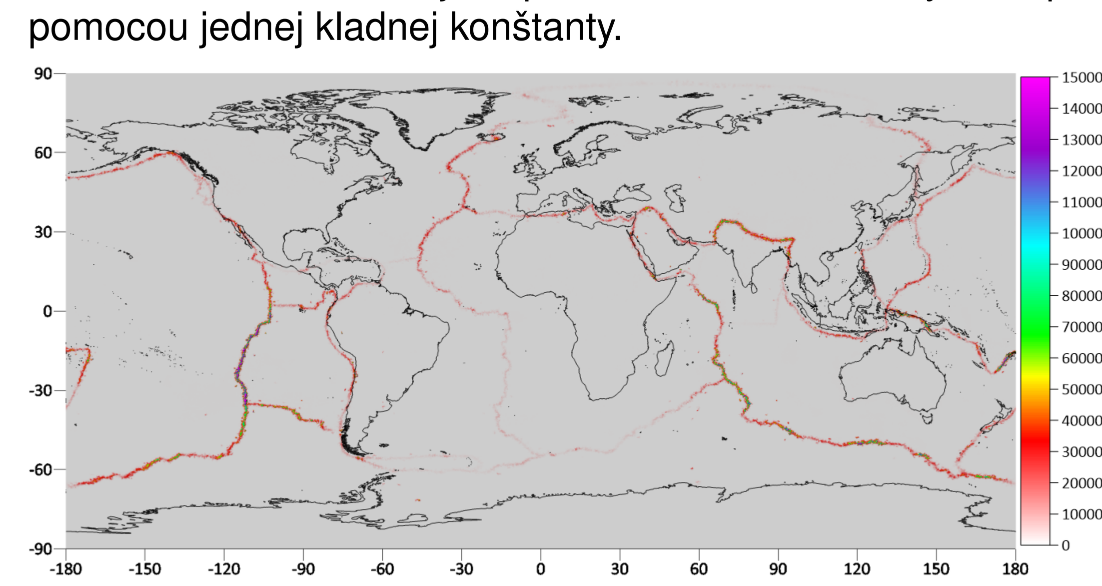
Výsledky experimentu

Výsledkom globálneho experimentu boli posuny v smere súradnicových osí UX,UY a UZ, zložky tenzora napätia SX, SY, SZ, SXY, SYZ, SXZ a pomerné predĺženia a skosenia, pričom súradnica X reprezentuje radiálny smer (t.j. smer daný vektorom smerujúcim do ťažiska Zeme), Y reprezentuje sférickú dĺžku a Z reprezentuje sférickú šírku. Posuny sú zobrazované v milimetroch ročne a jednotkou napätí je Pascal. Pre najlepšiu vizualizáciu posunov bol vytvorený obrázok, na ktorom sú zobrazené vektory posunov litosferických dosiek.



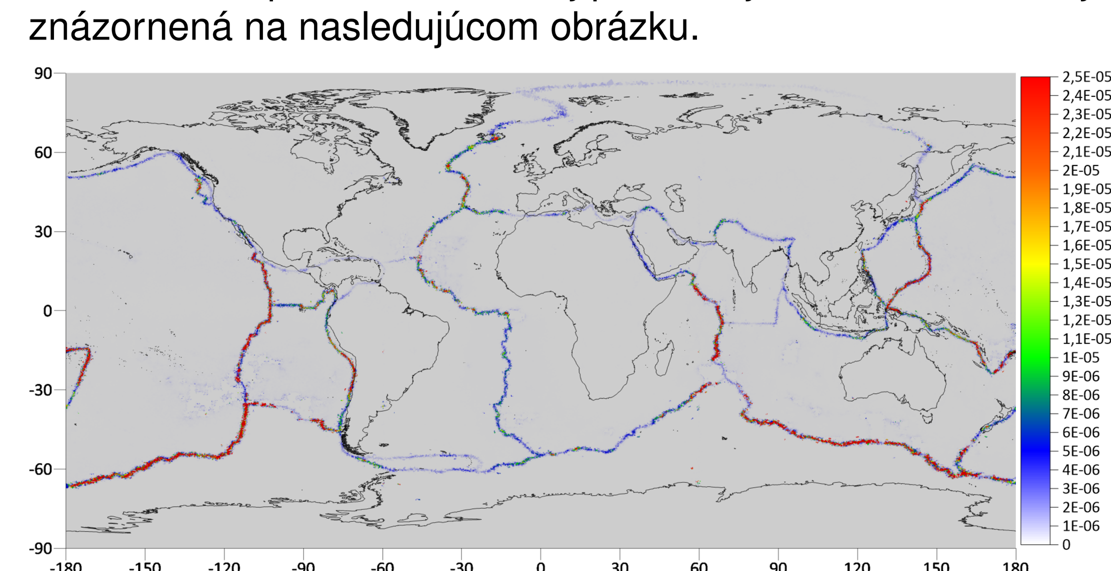
Vektory posunutia [mm/rok]

Podobne, zložky tenzora napätia sú najlepšie vizualizované pomocou tzv. von Mises napätia, pričom je dôležité vedieť, že Von Mises napätie nie je žiadne reálne napätie. Je to len teoretická hodnota, ktorá umožňuje reprezentáciu 3 rozmerných napätí pomocou jednej kladnej konštanty.



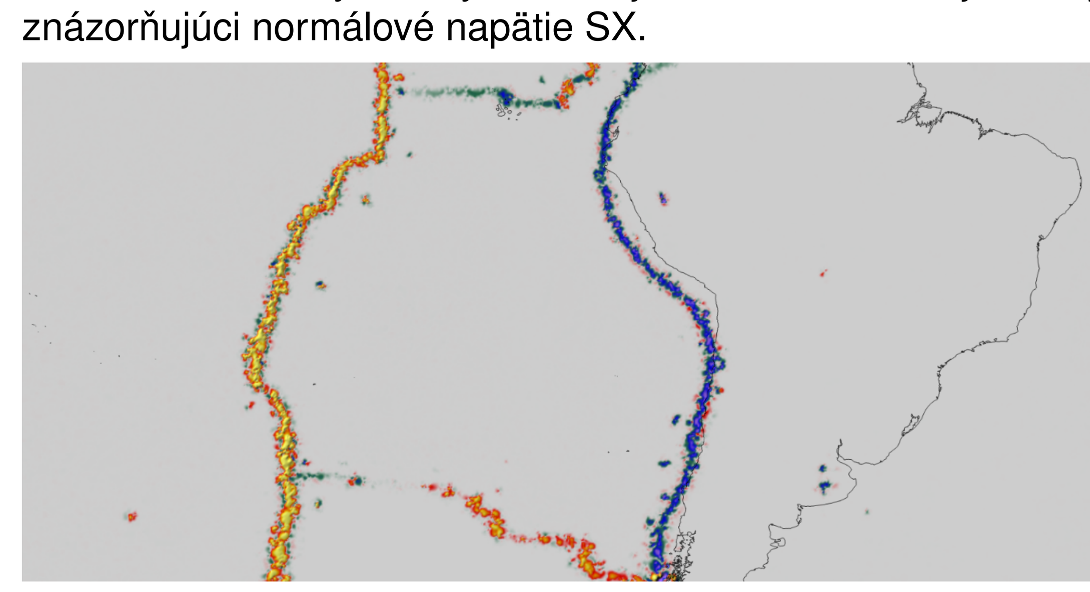
von Mises napätie [Pa]

Pomerné predĺženia a skosenia sa taktiež dajú zobraziť v jednom obrázku pomocou celkovej pomernej deformácie, ktorá je znázornená na nasledujúcom obrázku.



Celková pomerná deformácia

Na obrázku znázorňujúcom von Mises napätie vidíme, že maximálne hodnoty sú dosiahnuté v oblasti juhovýchodného Pacifiku. Preto bol vytvorený detailnejší obrázok z danej lokality znázorňujúci normálové napätie SX.



Detail normálových napätí SX v oblasti juhovýchodného Pacifiku

Na tomto obrázku kladné (oranžové až žlté) hodnoty normálového napätia v radiálnom smere naznačujú tvorbu oceánskeho chrbta. Konkrétne sa jedná o Východopacifický chrbát, ktorý začína v Kalifornskom zálive a končí na strete s Pacificko-Antarktickým chrbtom, ktorý smeruje západne a oddeľuje Pacifickú platňu od Severoamerickej, Kokosovej, Nazca a Antarktickej platne. Tento chrbát je, čo si môžeme všimnúť na základe žltej farby označujúcej maximálne normálové napätie v radiálnom smere, najrýchlejšie rastúcim oceánskym chrbtom na celej Zemi. Rovnako na tomto obrázku si môžeme všimnúť, že normálové napätia tesne pred pobrežím Chile v Južnej Amerike dosahujú veľké záporné hodnoty. To naznačuje klesanie platne Nazca, ktorá sa podsúva pod Juhoamerickú dosku, čiže sa jedná o konvergentný zlom.

Pedagóg: Ing. Michal Kollár, PhD.

Akademický rok: 2018/2019

BAKALÁRSKA PRÁCA

Poslucháč: Martin Štefanec

Študijný program: 9.1.9. aplikovaná matematika

Modelovanie a analýza platňovej tektoniky