STU SvF

Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie

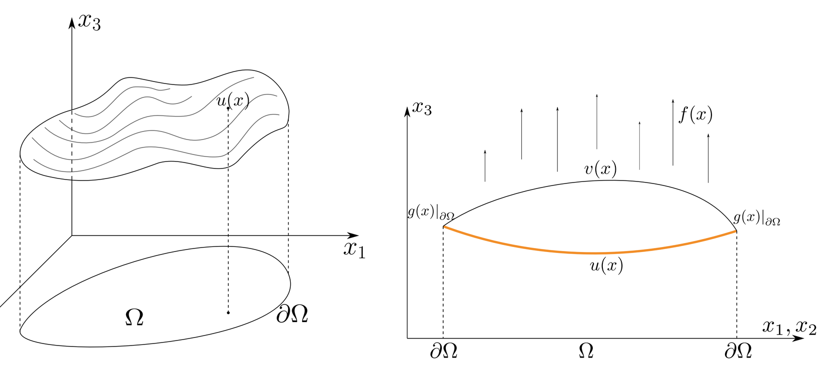
MODELOVANIE MEMBRÁNOVÝCH KONŠTRUKCIÍ POMOCOU MKP S KVADRATICKÝMI ELEMENTAMI

Lucia Baránková

Membránové konštrukcie

Membrána predstavuje súbor materiálov, ktorých hrúbka je voči ich ostatným rozmerom zanedbateľná (častokrát sa pohybuje v rozmedzí 50 μm – 500 μm). Membránové konštrukcie sú najmä stavby rôznych prekrytí ako sú pódiá, či veľkoplošné stany. V bakalárskej práci uvažujeme iba jeden z membránových materiálov a to Valmex FR700 Universal. Tvar membrány je daný okrajovými a vnútornými upevneniami membrány, v práci hľadáme tieto tvary riešením diferenciálnej rovnice priehybu membrány pomocou MKP.

Matematický model



Náčrt membrány a jej vychýlenia z rovnovážneho stavu.

Matematický model získame pomocou zákona zachovania energie. Najskôr vyjadríme celkovú prácu, ktorá je súčtom práce vykonanej vonkajšou silou f a práce potrebnej na zmenu plochy membrány. Využitím princípu minima potenciálnej energie a použitím nutnej podmienky minima získame integrálny tvar zákona zachovania energie

$$\int_\Omega \mu \nabla u \cdot \nabla w \, dx = \int_\Omega f w \, dx$$

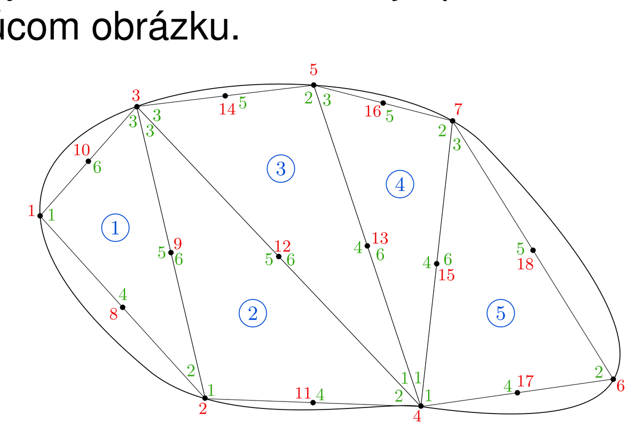
a z toho diferenciálnu rovnicu priehybu membrány

$$-\nabla \cdot (\mu \nabla u) = f,$$

kde μ predstavuje tuhosť membrány, ktorú v bakalárskej práci uvažujeme len konštantnú, f je výslednica vonkajších síl pôsobiacich na membránu a u je hľadané neznáme riešenie, ktoré vyjadruje zvislé posunutia membrány.

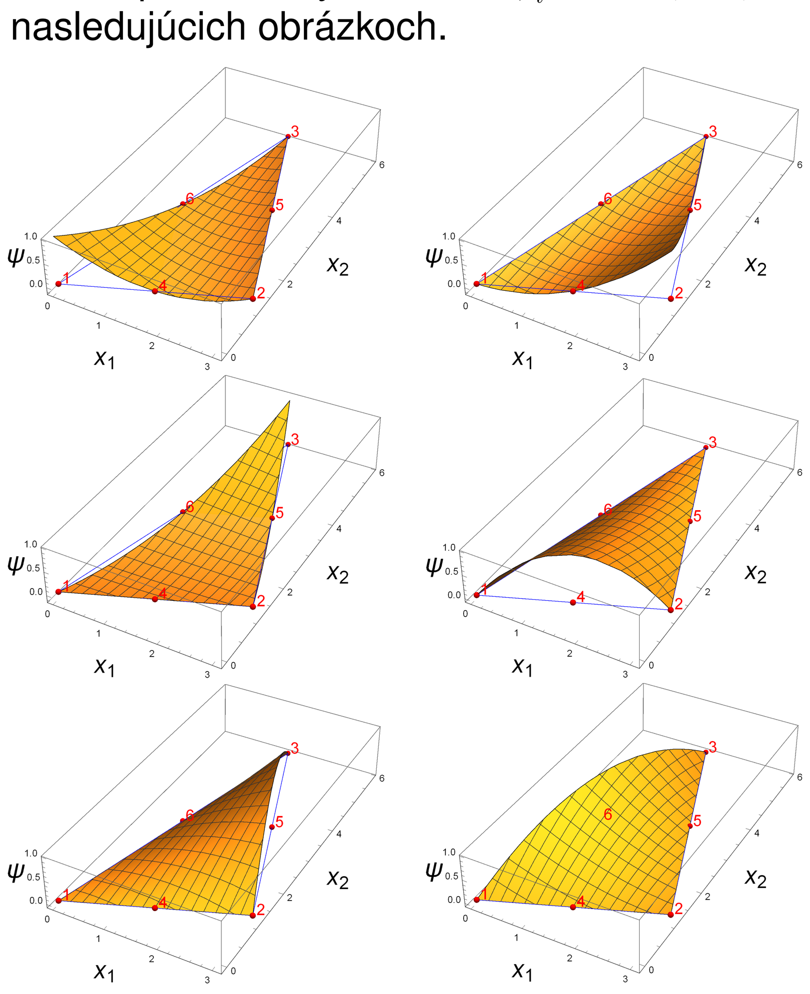
MKP pre 2D kvadratické elementy

Prvým krokom MKP je diskretizácia výpočtovej oblasti na N trojuholníkových elementov, ktorá je pre ilustráciu zobrazená na nasledujúcom obrázku.



Globálne číslovanie uzlových bodov (červenou), lokálne číslovanie (zelenou) a číslovanie elementov siete (modrou).

Druhým krokom MKP je zostrojenie sústavy rovníc na každom z elementov. Tie obsahujú lokálne matice tuhosti K^e, lokálne pravé strany f^e vyjadrujúce pôsobenie vonkajších síl a stĺpcové vektory neznámych u^e a Q^e. Hodnoty prvkov K^e a f^e vypočítame použitím aproximačných funkcií ψ_i^e a $i = 1, \ldots, 6$, zobrazených na nasledujúcich obrázkoch.



Aproximačné funkcie pre kvadratické trojuholníkové elementy ψ_i^e, kde $i = 1, \ldots, 6$.

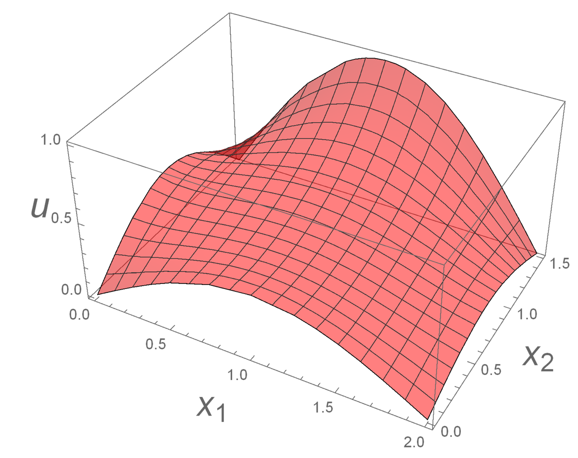
Keďže lokálne sústavy rovníc ešte nevieme riešiť, využijeme spojitosť riešenia na styku elementov, bilanciu síl medzi nimi a zahrnieme okrajové podmienky. Získame tak konečnú globálnu sústavu rovníc.

Numerické riešenie

Modelový príklad: Riešime modelový príklad membrány nad plochou Ω v tvare obdĺžnika so šírkou $h_1 = 2$ m a výškou $h_2 = 1,5$ m. Okrajové podmienky sú dané v tvare

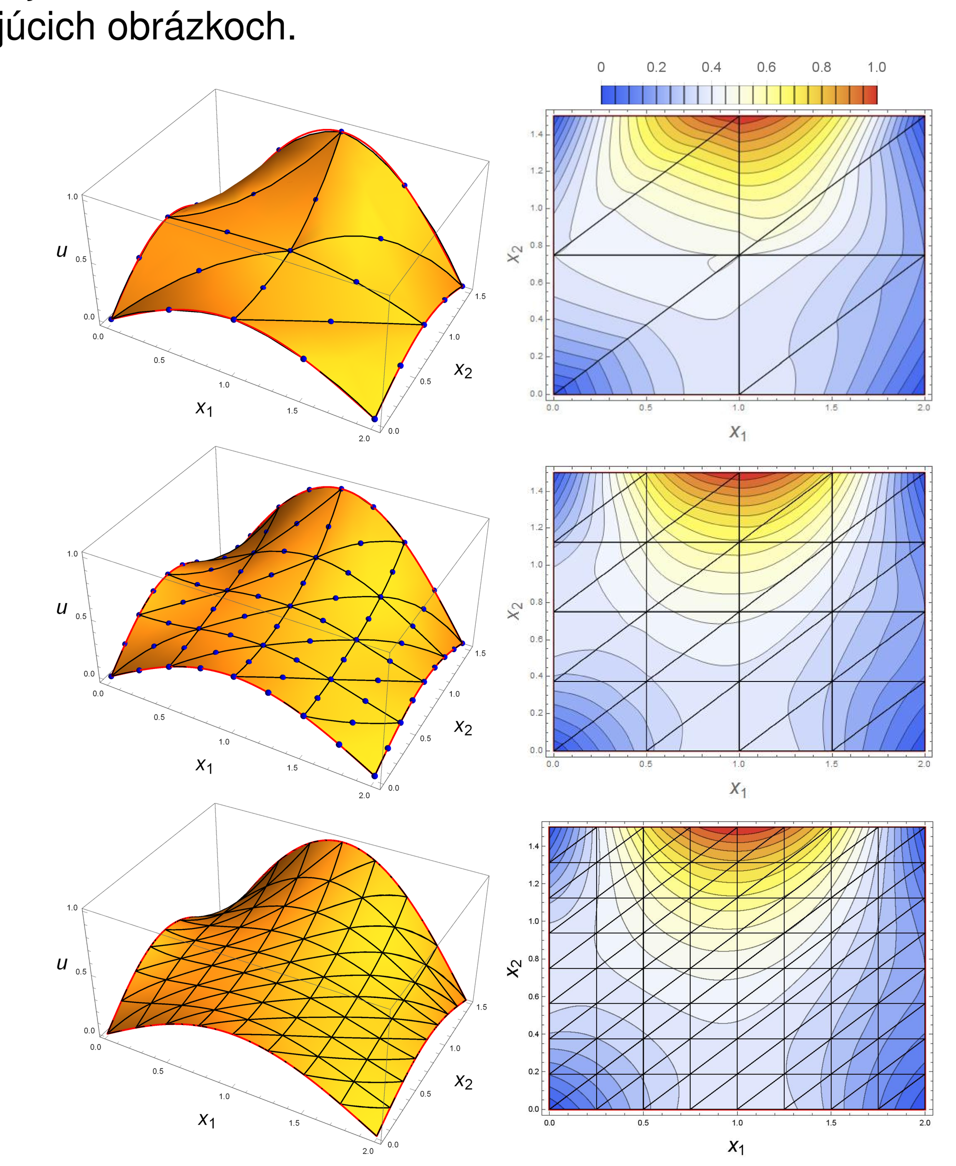
$$\begin{aligned} g(x_1, 0) &= 0.4 \sin\left(\frac{\pi x_1}{h_1}\right), & x_1 &\in [0, h_1], \\ g(h_1, x_2) &= 0.2 \sin\left(\frac{\pi x_2}{h_2}\right), & x_2 &\in [0, h_2], \\ g(x_1, h_2) &= \sin\left(\frac{\pi x_1}{h_1}\right), & x_1 &\in [0, h_1], \\ g(0, x_2) &= 0.4 \sin\left(\frac{\pi x_2}{h_2}\right), & x_2 &\in [0, h_2]. \end{aligned}$$

V príklade uvažujeme tuhosť membrány $\mu(x_1, x_2) = 1\,\mathrm{N\,m^{-1}}$ a nulové pôsobenie vonkajších síl $f(x_1, x_2) = 0\,\mathrm{N\,m^{-2}}$. Takto zadaný príklad má aj presné analytické riešenie zobrazené na nasledujúcom obrázku.



Presné riešenie modelovej úlohy.

Na modelovom príklade skúmame zmenšovanie sa chyby pri zjemňovaní siete. Niektoré riešenia sú zobrazené na nasledujúcich obrázkoch.

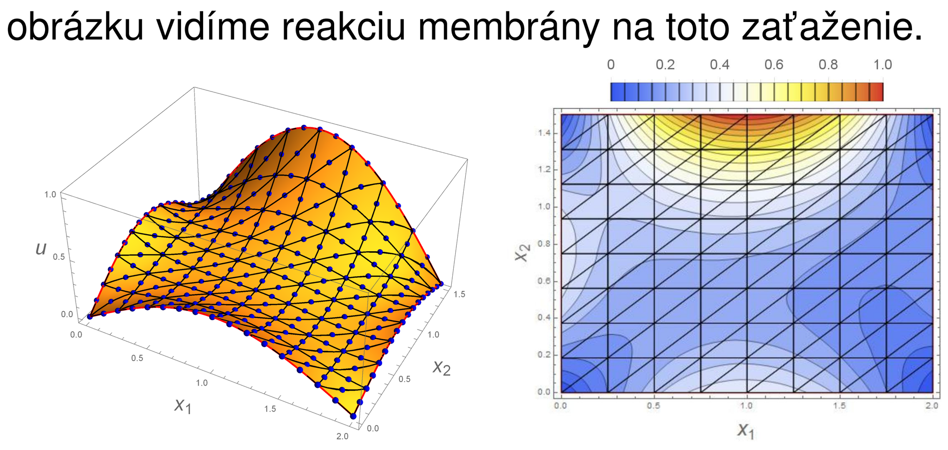


Riešenie modelovej úlohy so zjemňujúcou sa sieťou pre prípad 8, 32 a 128 elementov.

Skúmali sme experimentálny rád konvergencie (EOC) MKP s kvadratickými trojuholníkovými elementami. Očakávali sme, že rád konvergencie MKP bude v L_2 norme rovný 3 a v energetickej norme rovný 2. V tabuľke vidíme, že výsledky výpočtov chýb a z nich vypočítaný experimentálny rád konvergencie metódy, zobrazený v stĺpcoch L_2 EOC a Energ. EOC, sa pre zvyšujúci sa počet uzlových bodov n a počet elementov N blíži k očakávaným hodnotám a teda výpočty zrejme prebehli správne.

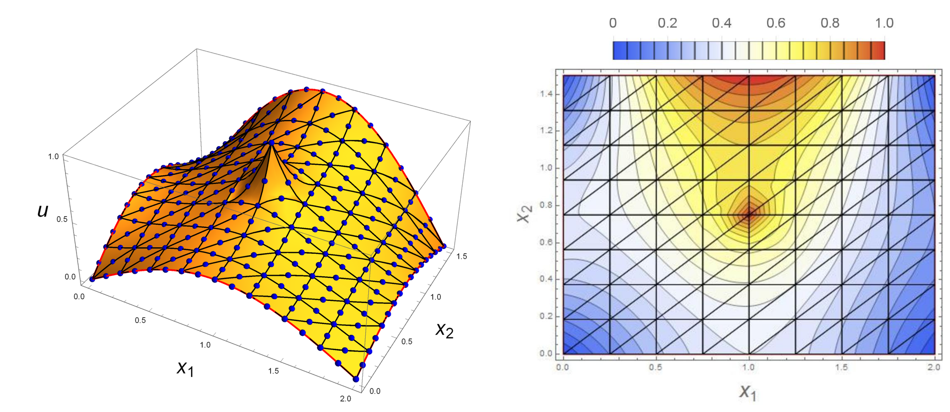
nx_1	nx_2	n	N	L_2 chyba	L_2 EOC	Energ. chyba	Energ. EOC
1	1	9	2	0.2577		0.9596	
2	2	25	8	0.03531	2.8676	0.2940	1.7064
4	4	81	32	0.004413	3.0003	0.07816	1.9113
8	8	289	128	0.0005473	3.0111	0.01989	1.9742
16	16	1089	512	0.00006821	3.0042	0.004997	1.9930
32	32	4225	2048	0.000008520	3.0011	0.001250	1.9982

V modelovom príklade teraz uvažujeme pôsobenie vonkajšej sily. Zvolíme teda intenzitu vonkajších síl $f(x_1, x_2) = -1\,\mathrm{N\,m^{-2}}$. Na obrázku vidíme reakciu membrány na toto zaťaženie.



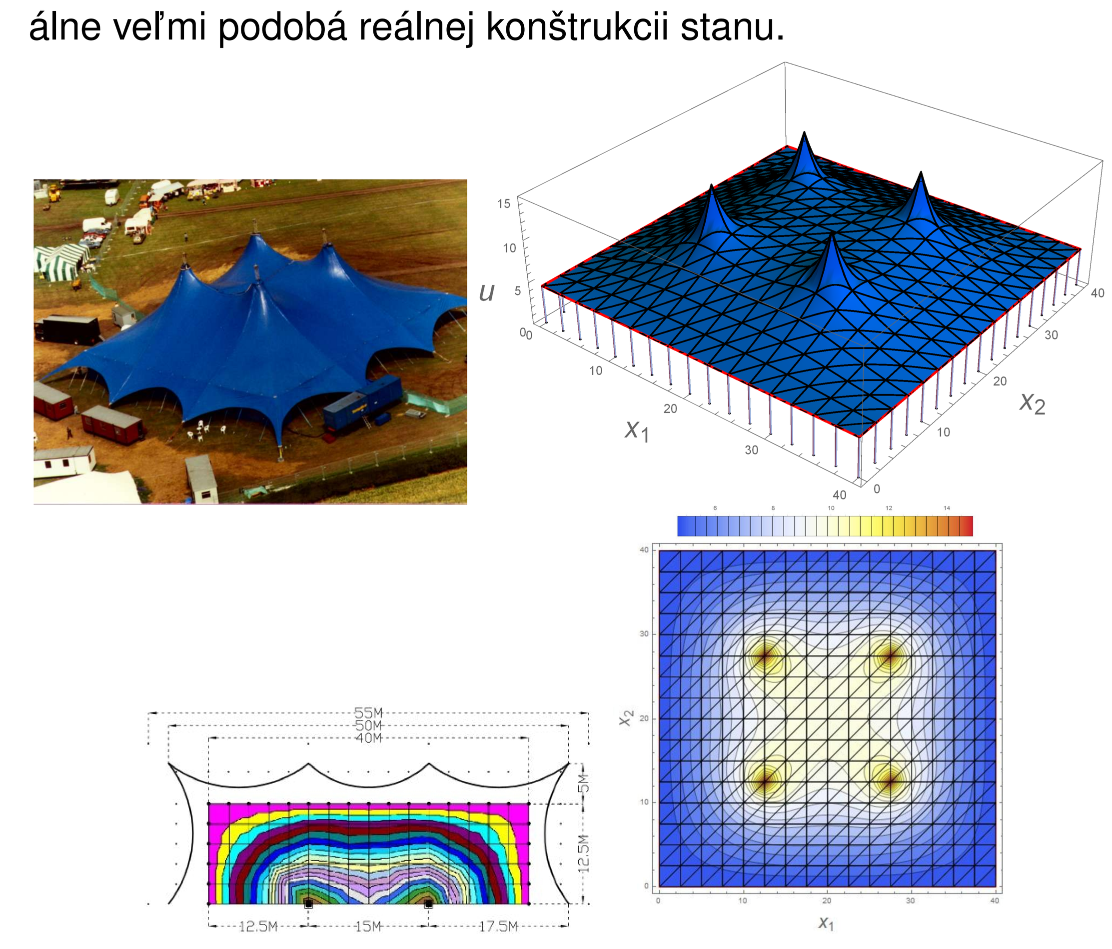
Priehyb membrány modelovej úlohy pod vplyvom zaťaženia vonkajšími silami.

Ďalej uvažujeme podopretie stĺpom v strede membrány a teda v bode so súradnicami $S = \left(a_1 + \frac{h_1}{2}, b_1 + \frac{h_2}{2}\right)$ vo výške 1 m. Výsledok riešenia úlohy je zobrazený na nasledujúcich obrázkoch.



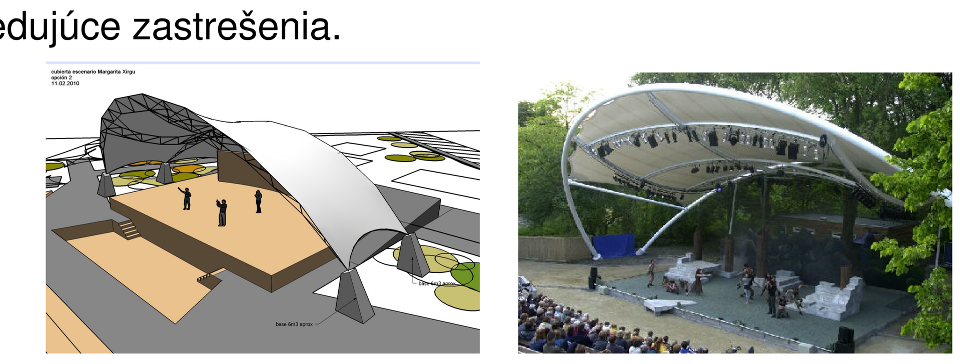
Ukážka vplyvu podopretia stĺpom na tvar membrány modelovej úlohy.

Reálna konštrukcia stanu: Model bol vytváraný podľa reálnej konštrukcie stanu s pôdorysom v tvare štvorca so stranou dlhou $a = 40$ m. Membrána je vytvorená z materiálu nazvaného Valmex FR700 Universal, ktorého plošná hustota je $\rho_S = 0.69\,\mathrm{kg\,m^{-2}}$. Tuhosť membrány uvažujeme konštantnú $\mu(x_1, x_2) = 2000\,\mathrm{N\,m^{-1}}$. Intenzitu vonkajších síl, ktorá v tomto prípade prestavuje vlastnú tiaž membrány, zadáme ako $f(x_1, x_2) = -6.7689\,\mathrm{N\,m^{-2}}$. Membrána je na všetkých okrajoch upevnená vo výške 4.5 m a na stĺpy je ukotvená vo výške 15 m. Po riešení úlohy získame nasledujúce riešenie, ktoré sa vizuálne veľmi podobá reálnej konštrukcii stanu.



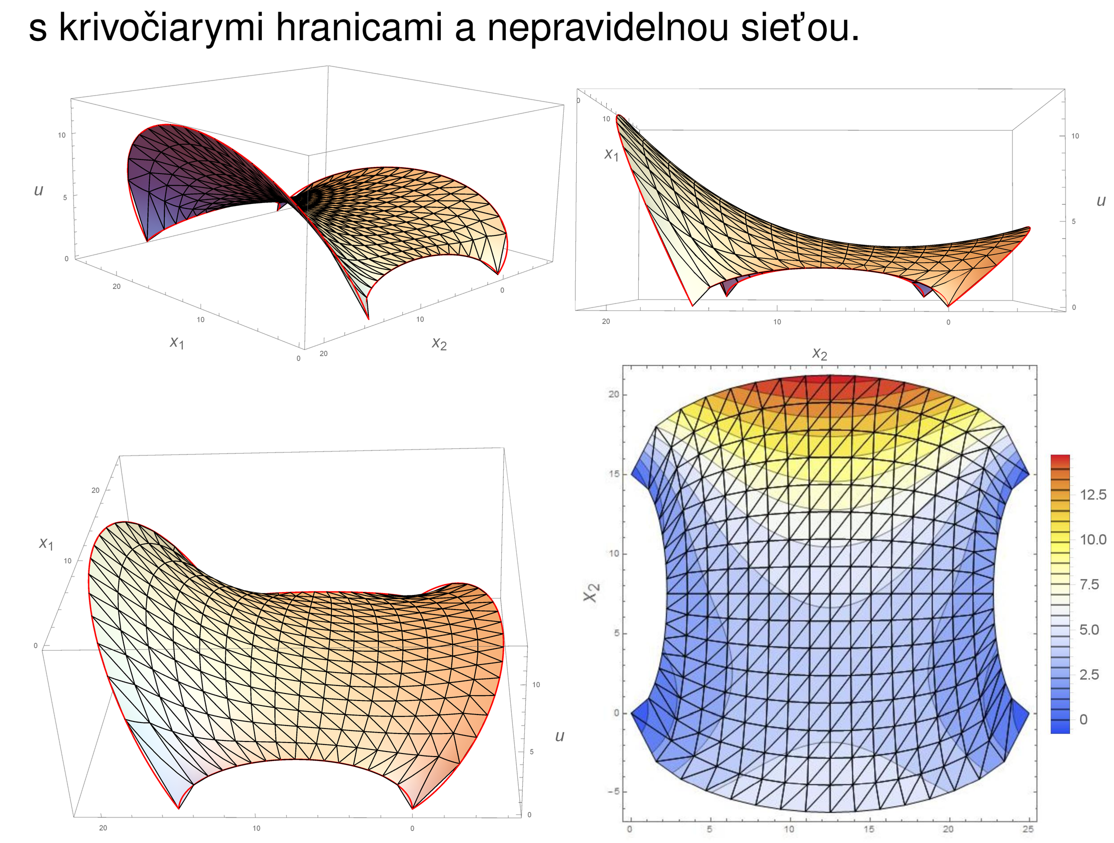
Porovnanie modelu a reálnej konštrukcie stanu.

Návrh zastrešenia pódia: Inšpiráciou pri tvorbe návrhu boli nasledujúce zastrešenia.



Návrh zastrešenia amfiteátru v Uruguaji a zastrešenie pódia v parku v meste Haag.

Pôdorys zastrešenia nie je obdĺžnikového tvaru, má totiž krivkové hrany. Zadané okrajové podmienky sú na obrázkoch riešenia zvýraznené červenou farbou, na tieto krivky je teda membrána uchytená. Vzdialenosti rohových bodov sú na šírku 25 m a na výšku 15 m. Volíme membránu z materiálu Valmex FR700 Universal, ktorého parametre sú rovnaké ako pri modeli stanu vyššie. Po vyriešení úlohy dostávame riešenia zobrazené na obrázkoch nižšie. Z tých vidíme, že MKP funguje aj na sieťach s krivočiarymi hranicami a nepravidelnou sieťou.



Výsledky riešenia návrhu zastrešenia pódia.