

**SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE**

**Stavebná fakulta**

Evidenčné číslo: SvF-5342-87746

**Modely oligopolov pri rozhodovaní za  
prítomnosti rizika.**

**Bakalárska práca**

Študijný program: matematicko-počítačové modelovanie

Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika

Školiace pracovisko: Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie

Vedúci záverečnej práce: Ing. Alexandra Šipošová, PhD.

**Bratislava 2019**

**Ján Koval'**



## ZADANIE BAKALÁRSKEJ PRÁCE

Študent: **Ján Koval'**  
ID študenta: 87746  
Študijný program: matematicko-počítačové modelovanie  
Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika  
Vedúca práce: Ing. Alexandra Šipošová, PhD.

Názov práce: **Modely oligopolov pri rozhodovaní za prítomnosti rizika.**

Jazyk, v ktorom sa práca vypracuje: slovenský jazyk

Špecifikácia zadania:

Bakalárska práca bude zameraná na štúdium modelov oligopolov s použitím techník teórie hier. Cieľom je vytvorenie konkrétnej aplikácie v programovacom prostredí podľa výberu študenta a následná analýza výsledkov získaných pri rozhodovaní za prítomnosti rizika.

Zoznam odbornej literatúry:

1. MAŇAS, M. Teorie her a její aplikace, STNL Praha, 1991
2. VARIAN, H.R. Intermediate Microeconomics. A modern approach. 8th edition, 806 p., Norton & Company, ISBN 978-0-393-93424-3

Riešenie zadania práce od: 27. 11. 2018

Dátum odovzdania práce: 02. 05. 2019

**Ján Koval'**  
študent

**prof. RNDr. Radko Mesiar, DrSc.**  
vedúci pracoviska

**prof. RNDr. Karol Mikula, DrSc.**  
garant študijného programu

## **Pod'akovanie**

Chcem sa predovšetkým pod'akovať svojej školiteľke Ing. Alexandre Šipošovej, PhD. za odbornú pomoc a rady pri vypracovaní tejto bakalárskej práce a v neposlednom rade za ochotu.

## **Čestné prehlásenie**

Čestne prehlasujem, že túto bakalársku prácu s názvom: Modely oligopolov pri rozhodovaní za prítomnosti rizika som vypracoval samostatne, na základe štúdia odbornej literatúry a konzultácií so školiteľkou. Všetky príslušné zdroje sú uvedené v texte práce a celý zoznam sa nachádza na konci práce.

Bratislava, 02.05.2019

.....

podpis

Názov práce: Modely oligopolov pri rozhodovaní za prítomnosti rizika

Autor: Ján Koval'

## Abstrakt

V tejto bakalárskej práci sa zaoberáme modelmi oligopolu. Predovšetkým sa zameriavame na nekooperatívne rozhodovacie situácie, kde za pomoci teórie hier riešime rozhodovanie za prítomnosti rizika. Na uľahčenie výpočtov navrhujeme program v jazyku Wolfram, ktorý vypočíta pre dané modely jednotkovú cenu produktu, objem produkcie a výplatné funkcie všetkých inteligentných hráčov. Na záver zhodnotíme všetky modely a vyberieme najlepší, ktorý reprezentuje optimálne riešenie nekooperatívnej rozhodovacej situácie.

**Kľúčové slová:** oligopol, Teória hier, nekooperatívne hry

Title: Oligopoly models under risk-based decision making

Author: Ján Koval'

## Abstract

In this bachelor thesis we deal with oligopoly models. In particular, we focus on non-cooperative decision-making situations, where we use the help of the game theory to solve decision making under risk. To make calculations easier, we recommend a program written in Wolfram language that calculates the price of one unit per product, pay off functions for all of the intelligent players and the overall production. In conclusion, we evaluate all models and choose the best one that represents the optimal solution for the non-cooperative decision-making situations.

**Key words:** oligopoly, Game theory, non-cooperative games

# Obsah

|                                                                        |    |
|------------------------------------------------------------------------|----|
| Úvod .....                                                             | 3  |
| 1. Základné pojmy v mikroekonómii.....                                 | 4  |
| 1.1 Dopyt a ponuka .....                                               | 4  |
| 1.2 Maximalizácia zisku.....                                           | 5  |
| 1.3 Trhové štruktúry.....                                              | 7  |
| 2. Teória hier .....                                                   | 11 |
| 2.1 Úvod do teórie hier .....                                          | 11 |
| 2.2 Dominantná stratégia a Nashova rovnováha .....                     | 12 |
| 3. Hry s neinteligentnými protihráčmi .....                            | 16 |
| 3.1 Optimálna stratégia pri riziku .....                               | 16 |
| 3.2 Hry s viac inteligentnými a neinteligentnými hráčmi .....          | 18 |
| 3.3 Modelový príklad hry za prítomnosti rizika .....                   | 19 |
| 4. Modely oligopolu .....                                              | 22 |
| 4.1 Cournotov model .....                                              | 22 |
| 4.1.1 Aplikácia Cournotovho modelu na Príklad 3.3 .....                | 23 |
| 4.2 Bertrandov model .....                                             | 24 |
| 4.3 Stackelbergov model - množstva.....                                | 25 |
| 4.3.1 Aplikácia Stackelbergovho modelu na príklad 3.3 .....            | 26 |
| 4.4 Stackelbergov model - ceny.....                                    | 28 |
| 4.5 Porovnanie modelov oligopolu.....                                  | 28 |
| 5. Program na riešenie hier s neinteligentnými protihráčmi .....       | 30 |
| 5.1 Popis algoritmu a vstupy/výstupy programu .....                    | 30 |
| 5.2 Príklad s viacerými inteligentnými a neinteligentnými hráčmi ..... | 32 |
| 5.1.1 Cournotov model príkladu 5.2 .....                               | 34 |
| 5.1.2 Stackelbergov model príkladu 5.2 .....                           | 35 |
| 5.3 Porovnanie modelov oligopolu príkladu 5.2 .....                    | 39 |
| Záver.....                                                             | 43 |
| Zoznam použitej literatúry .....                                       | 44 |
| Zoznam použitých online zdrojov .....                                  | 44 |



# Úvod

Hlavným cieľom tejto bakalárskej práce je vysvetliť oligopolistické modely a za pomoci teórie hier vyriešiť situáciu, kde je potrebné sa rozhodovať za prítomnosti rizika. Pre lepšie pochopenie trhu si v prvej kapitole predstavíme základné pojmy mikroekonómie a priblížime si viaceré trhové štruktúry, medzi ktoré patrí aj oligopol a jeho modely. Následne si predstavíme teóriu hier. Je to pomerne mladá matematická disciplína, začínajúca v štyridsiatych rokoch minulého storočia, ktorá sa zaoberá strategickým rozhodovaním. My sme sa v práci zaoberali len nekooperatívnymi, kedy účastníci medzi sebou nespolupracujú. Riešením takejto situácie je pomerne známy pojem - Nashova rovnováha. Nás však zaujímal ešte jeden sprievodný jav nekooperatívnej situácie, a to ako sa rozhodovať v prítomnosti rizika. Na to v teórii hier existuje funkčný algoritmus, ako sa s takýmito situáciami vysporiadať. Následne nám ostáva riešenie modelov oligopolu. Konkrétne budeme riešiť príklady, kde firmy rozhodujú o svojom finálnom objeme produktov, ktoré chcú dodať na trh tak, aby maximalizovali svoj zisk. Na výpočet príkladov sme navrhli program v jazyku Wolfram, ktorý berie do úvahy situáciu za prítomnosti rizika a následne vypočíta konkrétny objem produkcie pre všetky firmy oligopolu.

Budeme riešiť dva hlavné modely: Cournotov a Stackelbergov model. Na záver zhodnotíme, ktorý je najlepší model oligopolu z hľadiska ziskovosti firiem, jednotkovej ceny produktu a iných parametrov.



# Kapitola 1

## 1. Základné pojmy v mikroekonómii

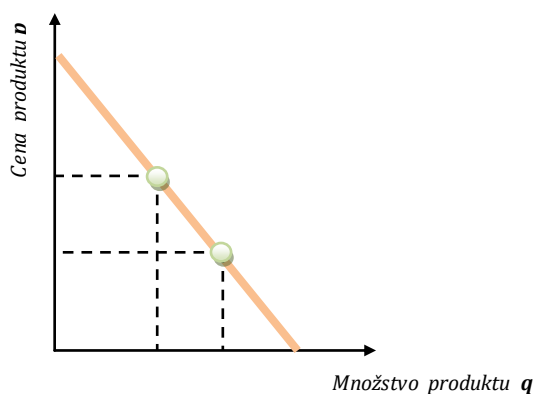
V tejto kapitole si zhmieme základné pojmy mikroekonómie, a to predovšetkým pojmy dopyt a ponuka, maximalizácia zisku, prehľad trhových štruktúr a na záver podrobnejšie predstavenie oligopolu a modelov oligopolu. Zdrojom pre túto kapitolu je predovšetkým učebný text [1] a prednášky od Jacoba Clifforda [A].

### 1.1 Dopyt a ponuka

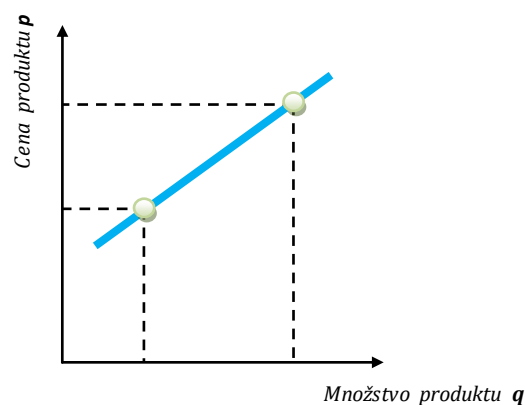
#### Dopyt

Pod dopytom si predstavujeme množstvo daného produktu alebo služieb, ktoré sú spotrebitelia ochotní zakúpiť za určitú cenu na trhu. Dané **žiadané množstvo** sa odvíja nielen od kúpnej ceny, ale aj od iných faktorov, ako napríklad od preferencií jednotlivých spotrebiteľov, ich príjmu a od ceny iných, podobných produktov. Zvyčajne sa v mikroekonómii zaoberáme len tým, ako cena produktu ovplyvňuje žiadané množstvo. Práve vzťah medzi cenou a množstvom hrá v analýzach dôležitú úlohu pri určovaní trhovej ceny.

Vzťah medzi množstvom a cenou produktu nám graficky vyjadruje **krivka dopytu**. Všeobecne platí, že za nižšiu cenu spotrebiteľ nakúpi väčšie množstvo produktu.



Obr. 1.1: Krivka dopytu



Obr. 1.2: Krivka ponuky

## Ponuka

Ponuka predstavuje **množstvo** produktu alebo služieb, ktoré sú firmy ochotné dodať na trh za určitú cenu. To, koľko produktu budú firmy ponúkať, závisí hlavne od predajnej ceny, ale aj od nákladov firiem na dodanie produktov alebo služieb. Ak náklady klesajú, firma je ochotná ponúkať viac produktu na trh. Naopak, ak náklady prevýšia sumu, ktorú by získali predajom produktu, tak sa firme neoplatí nič predávať. Predpokladáme, že firmy chcú dosiahnuť zisk, preto za vyššiu predajnú cenu sú ochotní dodať väčšie ponúkané množstvo.

Podobne, ako pri dopyte, budeme sledovať vzťah medzi cenou a ponúkaným množstvom. Tu platí, že s rastúcou cenou, ponúkané množstvo rastie.

### 1.2 Maximalizácia zisku

Po prejdení modelu dopytu-ceny máme základnú predstavu, ako to vyzerá na trhu. Pri nižšej cene sú spotrebitelia schopní nakúpiť väčšie množstvo produktu, no za tú cenu ju musia na trh dodať firmy. Zdá sa, že firmy chcú predáť čo najviac tovaru a mať tak väčší zisk, no na to musia sledovať svoje náklady a neskôr zhodnotia, či sa im oplatí ostávať na trhu.

Základným predpokladom je, že každá inteligentná firma chce maximalizovať svoj zisk. V tejto práci sa nebudeme zaoberať neziskovými spoločnosťami a filantropmi, ktorí by predávali svoj tovar za nízku sumu a ich motívom by bola nezištná pomoc ľuďom. Aj keď je to obdivuhodný motív, realita je, že každý chce zarobiť čo najviac a keď to firme nevynáša, zanikne.

To, koľko firma na trhu zarobí, nám udáva funkcia **zisku** (ozn.  $\pi$ ). Zisk určíme ako rozdiel medzi firemným príjmom (skr. **R**, angl. **revenue**) a firemnými nákladmi (skr. **C**, angl. **cost**):

$$\pi(q) = R(q) - C(q),$$

kde  $q$  je množstvo predaného produktu.

Keďže funkcie zisku, príjmu a nákladov závisia od množstva  $q$ , firma bude hľadať také  $q^*$ , ktoré bude maximalizovať funkciu zisku. Maximálnu hodnotu nájdeme zderivovaním funkcie podľa  $q$ :

$$\frac{d}{dq}\pi(q) = \frac{d}{dq}R(q) - \frac{d}{dq}C(q).$$

Nastáva otázka, ako interpretovať získané derivácie funkcií. Funkcia  $\frac{d}{dq}C(q)$  označuje **hraničné náklady** (skr. **MC**, angl. **marginal cost**), ktoré vyjadrujú takú zmenu nákladov, ktoré vzniknú navýšením celkového vyprodukovaného množstva tovaru o jednu jednotku. Druhá funkcia  $\frac{d}{dq}R(q)$  určuje **hraničný príjem** (skr. **MR**, angl. **marginal revenue**) a vyjadruje zmenu príjmu, ktorú dostaneme predajom o jednu jednotku vyprodukovaného tovaru navyše. To znamená, že predajom jednej jednotky tovaru navyše sa firme zvýši príjem o  $MR(q)$ , ale na druhej strane sa zníži o  $MC(q)$ . Rovnicu prepíšeme do nasledovného tvaru:

$$zmena\ zisku(q) = MR(q) - MC(q)$$

Položme si otázku: oplatí sa nám vyprodukovať o jednu jednotku tovaru viac, ako už máme? Ak hraničný príjem pre navýšené  $q^*$ , teda: ( $q^* = q + 1$ ), je väčšie ako hraničné náklady ( $MR(q^*) > MC(q^*)$ ), zmena zisku bude kladná a preto sa firme sa oplatí navýšiť produkciu. Navyšovať produkciu - opakovane zvyšovať  $q^*$  o 1 jednotku, sa oplatí, až pokiaľ  $MR(q^*) = MC(q^*)$ , kedy zmena zisku je nulová.

Týmto sme sa dostali k takému množstvu produktu  $q^*$ , ktoré nám maximalizuje zisk. Práve vzťah  $MR(q) = MC(q)$ , je všeobecný predpoklad pre všetky typy firiem na trhu.

### 1.3 Trhové štruktúry

V tejto časti práce si vysvetlíme celú štruktúru trhu pomocou spektra:



Obr 1.3 : Štruktúra - spektrum trhu

Na ľavej strane spektra sa nachádza **Dokonalá konkurencia**. Popisuje trh, kde sa nachádza vysoký počet malých firiem predávajúcich identický (homogénny) produkt. Kvôli tomu, že ich je veľké množstvo, samotná firma nemá významnú trhovú silu a nevie výrazne ovplyvniť množstvo a cenu produktu na trhu (tzv. **price taker**). Medzi ďalšie predpoklady patrí úplná informácia o cene a charakteristike produktu pre všetkých predávajúcich a kupujúcich a to, že firmy majú voľný vstup na trh. Práve kvôli predpokladu úplnej informácie je dokonalá konkurencia iba teoretický konštrukt. Úplná informácia zahŕňa aj znalosť budúcnosti, čo je nemožné.

Čo sa ale podobá tejto štruktúre, je napríklad farmársky trh. Veľké množstvo farmárov predáva zeleninu a ovocie, ktoré sa na prvý pohľad až tak nelíšia (takmer homogénny produkt). Ceny zeleniny a ovocia sa medzi jednotlivými farmármi nemôžu diametrálne odlišovať, keďže farmárov je veľa a spotrebiteľ by si predražený identický produkt nekúpil.

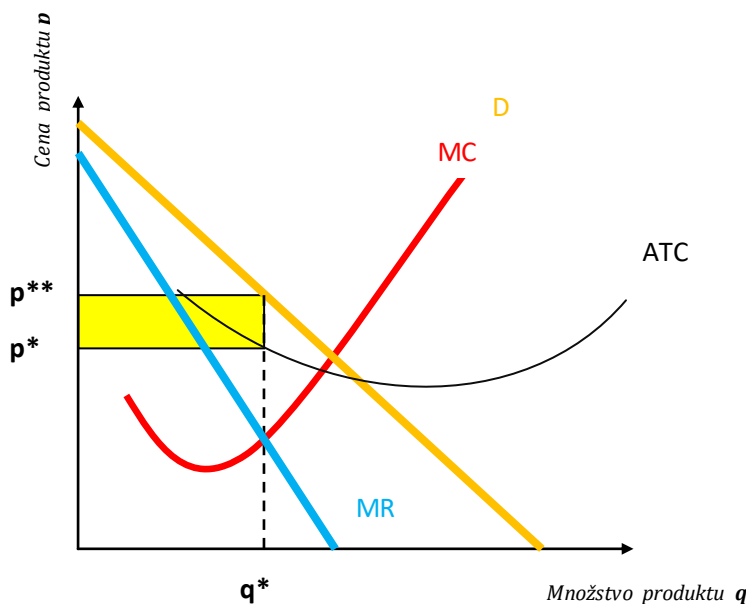
Na opačnej strane je **Monopol**, ktorý predstavuje trhovú štruktúru, kde len jedna firma ovláda celý trh. Určuje cenu a množstvo produktu tak, aby mala čo najväčší zisk. Ňou predávaný produkt na trhu nemá náhradu, preto kupujúci nemajú na výber, iba kupovať práve od jednej firmy. Dôležitým predpokladom je takmer nemožný vstup na trh pre iné firmy. Monopol vo všeobecnosti nie je veľmi žiadanou trhovou štruktúrou z dôvodu dodaného menšieho množstva a vyššej ceny produktu na trh v porovnaní s konkurenčným trhom. Preto existujú rôzne štátne regulácie a zákony, ktoré zabráňujú vzniku monopolu na trhu.

Uvedené dva typy predstavujú teoretické trhové štruktúry. V realite sa stretneme skôr s dvoma typmi, ktoré sa nachádzajú medzi koncovými stranami spektra.

**Monopolistická konkurencia**, podobne ako dokonalá konkurencia, popisuje trh s veľkým počtom malých firiem, ktoré ale predávajú podobný, nie identický produkt. Firmy majú

vlastnú trhovú silu, určujú cenu predávaného produktu jej navýšením nad hraničné náklady:  $p > MC$  (tzv. **price setter**). Aj keď je pri tejto štruktúre vstup na trh voľný, v dlhodobom horizonte žiadna ďalšia firma, ktorá príde na trh, nebude mať kladný zisk. Dôvod si zobrazíme pomocou grafov.

Na prvom grafe je zobrazená monopolistická konkurenčná firma v krátkodobom horizonte. Ako sme si povedali v predchádzajúcej podkapitole, na určenie množstva produkcie postaví firma do rovnosti hraničné náklady a hraničný príjem:  $MC(q) = MR(q)$ . Takto vie určiť cenu  $p^*$  za pomoci krivky dopytu. Príjem firmy bude  $R(q^*) = p^*$ .  $q^*$  a náklady určíme pomocou krivky  $ATC$  - **priemerné celkové náklady** (angl. **average total cost**), ktorá nám udáva celkové náklady prepočítané na jednotku produkcie. Preto celkové náklady na výrobu  $q^*$  produktu vypočítame ako  $C(q^*) = p^{**}$ .  $q^*$ , kde  $p^{**}$  je výrobná cena. Tak firma dosiahne zisk:  $\pi(q^*) = R(q^*) - C(q^*)$ , ktorý je na Obr 1.4 zobrazený žltým obdĺžnikom.

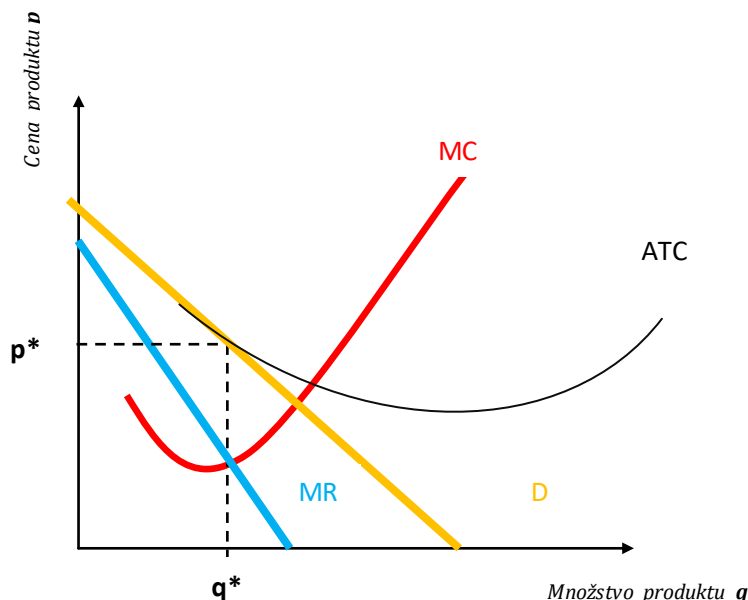


Obr. 1.4: Krátkodobý horizont mon. konkurencie

Čo sa teda stane, v dlhodobom horizonte? Iné firmy si všimnú, že na trhu má táto firma kladný zisk. Keďže nič nebráni firmám vstup na trh, prichádzajú s vlastným, podobným produktom. Tým je na trhu viac podobných produktov a preto sa dopytová krivka vybranej firmy posunie doľava. Našej zvolenej jednej firme sa náklady nemenia. Z dôvodu posunutia dopytovej krivky sa posunie aj krivka hraničných príjmov doľava. Teraz vypočítané produkované množstvo  $q^*$  bude nižšie, taktiež aj výrobná cena  $p^*$ . Firemný príjem sa vyrovná firemným nákladom a tak dosiahne nulový zisk v dlhodobom horizonte.

Nulový zisk platí pre všetky firmy na trhu, pretože ak by nejaká mala kladný, ostatné firmy by taktiež zvýšili produkciu, aby sa im zvýšil zisk.

Príkladom by mohol byť trh s reštauráciami - reštaurácie sa snažia preraziť kvalitou jedla a taktiež vlastnou cenovou ponukou. Rozdielne produkty, ako vlastné recepty jedál, sa považujú za samozrejmosť. Taktiež vstup na trh nie je nijak špeciálne limitovaný.



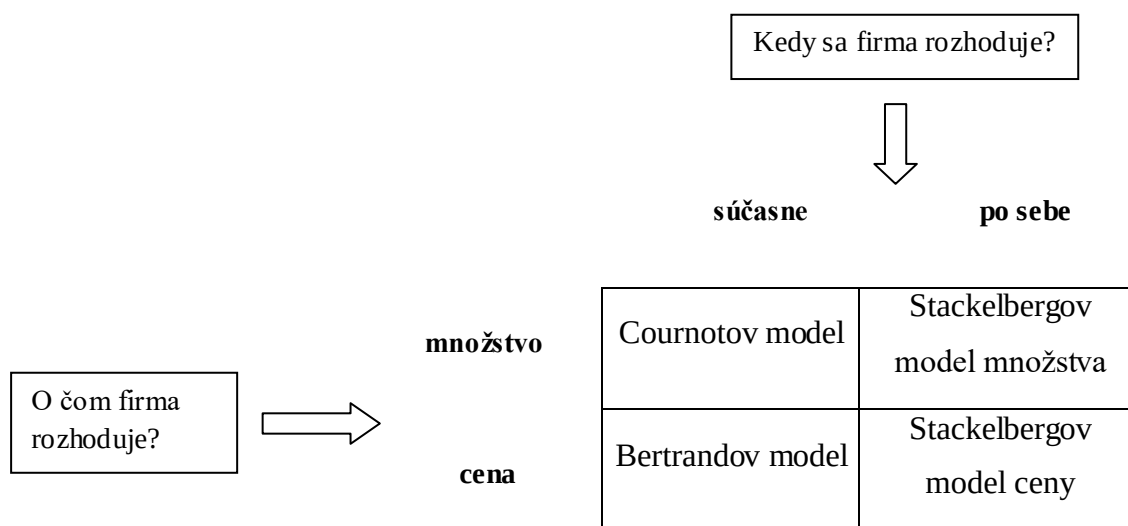
Obr. 1.5: Dlhodobý horizont mon. konkurencie

Poslednou trhovou štruktúrou je **oligopol**. Popisuje trh, kde je len relatívne málo firiem predávajúcich podobný, ale nie identický produkt. Kvôli nízkemu počtu firiem na trhu, každá firma ovplyvňuje cenu všetkých produktov. Dokonca aj tých, ktoré vyrábajú konkurenčné firmy. To, že firma musí sledovať a predpokladať správanie všetkých konkurentov robí analýzu oligopolu o to zložitejšiu. Firma, ktorá by ignorovala alebo nesprávne predpokladala stratégiu konkurentov, sa často dostane do straty. Čo by sa stalo, ak by si firmy nekonkurovali, ale začali by spolu spolupracovať. Nie je to až tak nepredstaviteľné, keďže ide o nízky počet firiem na celom trhu, rôznymi dohodami by vedeli dôjsť ku maximalizácii zisku pre každú jednu firmu bez toho, aby museli tráviť čas a energiou odhadovaním stratégie svojich súperov. Takejto skupine firiem hovoríme **kartel**. V karteli sa firmy vedia dohodnúť na presných číslach, kto koľko bude dodávať produktov alebo na jednotnej cene. Takouto spoluprácou dostaneme takmer monopol a kartel získa monopolistický zisk. Ako sme si spomínali vyššie, monopol nie je žiadaný na trhu, preto takisto aj pre kartel existujú obmedzenia a vo väčšine vyspelých krajinách je kartel nezákonný.

V tejto práci budeme predpokladať modely, kde firmy nespolupracujú, čiže pôjde o **nekooperatívne modely**.

V súčasnom modernom svete máme mnoho prípadov oligopolov. Môžeme sa pozrieť napr. na trh operačných systémov počítačov. Tie už dlhodobo vedú firmy Microsoft, Apple a Linux. Tieto firmy pokrývajú takmer 100% celého trhu s operačnými systémami vo svete.

Nekooperatívnych modelov oligopolu je hneď viacero. To, ktorý vyberieme, závisí od konkrétneho typu trhu a od všetkých možností, ktoré oligopolistické firmy môžu vykonať. Modely vieme rozdeliť do kategórií podľa toho, či sa firmy rozhodujú v čase **súčasne** alebo **po sebe**. Taktiež, či rozhodujú o optimálnom množstve produktov alebo o nastavení predajnej ceny. Nasledujúca tabuľka zobrazuje štyri typy modelov oligopolu:



Obr. 1.6 : Modely oligopolu

Oligopolistická firma musí pri svojich rozhodnutiach brať do úvahy aj možné rozhodnutia súperov.

Vhodným matematickým nástrojom na podporu strategického rozhodovania v tejto oblasti sú techniky **teórie hier**.

# Kapitola 2

## 2. Teória hier

### 2.1 Úvod do teórie hier

V tejto kapitole si prejdeme základné pojmy teórie hier. Ako už napovedá názov, teória hier sa zaoberá štúdiom a analýzou rozhodovania sa v rôznych hrách. Hra je charakterizovaná ako ľubovoľná rozhodovacia situácia medzi minimálne dvoma hráčmi ( tí môžu byť chápaní ako jednotlivci alebo ako firmy), kde každý hráč má vlastnú množinu **akcií** a funkcie **výplat**. Funkcia výplaty je hráčove ocenenie výsledku hry, ako napríklad, pre firmy na trhu je to zisk. Akciou hráča sa myslí činnosť, ktorú hráč môže urobiť. Medzi akcie môže patriť napríklad to, či sa firma rozhodne zaplatiť televíznu reklamu, alebo nie. Pri modeloch oligopolu je to určenie celkového produkovaného množstva tovaru, čo bude pre nás to najzaujímavejšie.

V predchádzajúcej kapitole sme uviedli, že teória hier slúži na podporu strategického rozhodovania, preto cieľom je určiť optimálne stratégie hráčov. **Stratégia** je plán, ktorý špecifikuje, akú akciu má hráč vykonať v každom jeho ťahu. Strategické rozhodovanie je množina všetkých akcií hráča vykonaných tak, aby získal čo najväčšiu výplatu. Funkcia výplaty každého z hráčov je ovplyvnená akciami všetkých hráčov.

V tejto bakalárskej práci sa budeme venovať **nekooperatívnym modelom oligopolu**. Z tohto dôvodu si bližšie popíšeme **teóriu nekooperatívnych hier**. Sú to také hry, kde hráči medzi sebou nespolupracujú a nevytvárajú aliancie. Hlavný zdroj informácií pre túto kapitolu je [2], [3] a [4]. Presné matematické definície sú čerpané predovšetkým od Mañasa - [2] a [3].

Formálna matematická definícia hry v normálnom tvare je nasledovná:

**Definícia 2.1:** Trojicu  $Q = (I, \{X_{i \in I}\}, \{M_{i \in I}\})$  voláme hru v strategickom (normálnom) tvare, kde:

$I = \{1, 2, \dots, n\}$  je množina hráčov

$X_i$  je množina akcií hráča  $i$

$M_i$  je funkcia výplat hráča  $i$



## 2.2 Dominantná stratégia a Nashova rovnováha

Stratégia, ktorej výsledkom je vyššia výplata než akákoľvek iná výplata získaná zahrnutím inej stratégie, uvažujúc všetky možné zahraté stratégie protihráčov, sa nazýva **dominantná**. Keď firma má svoju dominantnú stratégiu, tak už neberie ohľad na stratégie iných hráčov a s veľkou pravdepodobnosťou zahrá práve ju. Pre formálnosť uvedieme aj matematickú definíciu dominantnej stratégie a dvojmaticevej hry. Potom si uvedieme príklad hry, kde hráči majú dominantné stratégie a určíme jej výsledok.

**Definícia 2.2:** *Nech  $\bar{x}, \bar{y}$  sú rovnovážne stratégie nekooperatívnej hry v normálnom tvare popísaná v Def.1. s vlastnosťami:*

$$M_1(\bar{x}, \bar{y}) \geq M_1(\check{x}, \check{y}),$$

$$M_2(\bar{x}, \bar{y}) \geq M_2(\check{x}, \check{y}),$$

kde dvojica  $\check{x}, \check{y}$  je ľubovoľná dvojica rovnovážnych stratégií nekooperatívnej hry. Potom dvojicu  $\bar{x}, \bar{y}$  nazývame **dominantnú** dvojicu rovnovážnych stratégií.

Konečná nekooperatívna hra sa dá zapísať prehľadnejším spôsobom, ako je uvedená definícia hry v normálnom tvare. Zostavíme tabuľku, kde riadky budú predstavovať stratégie hráča 1 a stĺpce stratégie hráča 2. Na každom priesečníku riadkov a stĺpcov uvedieme dve hodnoty vedľa seba, kde ľavá predstavuje výhru hráča 1 a pravá hodnota výhru hráča 2. Všeobecne sa teda taká hra dá zapísať pomocou dvoch matic:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix},$$

ktoré sa pre lepšiu prehľadnosť zapisujú do jednej tabuľky - **dvojmatice** nasledovne:

$$\begin{pmatrix} (a_{11}, b_{11}) & \cdots & (a_{1n}, b_{1n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{n1}, b_{n1}) & \cdots & (a_{nn}, b_{nn}) \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

**Príklad 1.** Na trhu s papierovými vreckovkami máme duopol - dve firmy Tento a Harmony ovládajú celý trh. Výplata firmy je v tomto prípade čistý zisk, ktorý získajú predajom svojho produktu a odčítaním nákladov. Majú na výber dve akcie: buď si zaplatia reklamu do televízie, alebo si ju nezaplatia. Hodnoty výplatných funkcií firiem zapíšeme pre lepší prehľad do dvojmatice. Hodnoty v dvojmatice uvádzame v jednotkách.

Množina hráčov  $I = \{1.\text{hráč}, 2.\text{ hráč}\} = \{\text{TENTO}, \text{HARMONY}\}$

akcie :  $X_i = \{\text{Nezaplatiť reklamu}_i, \text{Zaplatiť reklamu}_i\}$ .

|       |                    | HARMONY                    |                    |
|-------|--------------------|----------------------------|--------------------|
|       |                    | Zaplatiť reklamu           | Nezaplatiť reklamu |
| TENTO | Zaplatiť reklamu   | ( <u>90</u> , <u>90</u> )* | ( <u>120</u> , 70) |
|       | Nezaplatiť reklamu | (70 , <u>120</u> )         | (100 , 100)        |

Maticový tvar hry

Červenou farbou sú zobrazené výplaty prvého hráča - TENTO, modrou sú zobrazené výplaty druhého hráča - HARMONY. Výplatná matica reprezentuje všetky možné výsledky a ľahko sa interpretuje - napríklad, ak 1. hráč TENTO sa rozhodne zaplatiť reklamu a súčasne 2. hráč HARMONY sa taktiež rozhodne zaplatiť reklamu, výplata oboch firiem bude 100 (tisíc).

Pozrime sa teraz na dominantnú akciu (stratégiu) 1. hráča. Keďže musí predvídať možné ťahy protihráča, začne predpokladať akciu, že druhá firma sa rozhodne zaplatiť reklamu. V matici sa nachádzame v prvom stĺpci a sledujeme červené čísla. Vidíme, že najlepšou voľbou 1. hráča TENTO je taktiež zvoliť akciu zaplatiť reklamu, keďže výplata 90 je vyššia ako výplata 70. Teraz predpokladajme, že druhá firma HARMONY zvolí akciu zaplatiť reklamu. Nachádzame sa v druhom stĺpci a opäť, sledujeme červené čísla výplat. 1. Hráč TENTO, rovnako ako v predchádzajúcom prípade, zvolí akciu zaplatenia reklamy. Vo všetkých možných stratégiách 2. hráča HARMONY, sa 1. hráč TENTO vždy rozhodol zahrať jednu a tú istú akciu, a to zaplatiť reklamu. Tým pádom je táto akcia pre 1. hráča TENTO dominantná.

Hľadanie dominantnej akcie 2. hráča HARMONY je veľmi podobná. Vždy si zafixujeme jednu akciu 1. hráča TENTO a na rozdiel od predchádzajúceho postupu budeme sledovať riadky výplatnej matice a porovnávame modré čísla výplat 2. hráča HARMONY. Nech prvý hráč TENTO zvolí ľubovoľnú akciu, vidíme, že druhý hráč HARMONY zvolí akciu - zaplatiť reklamu. Teda taktiež pre 2. hráča HARMONY je táto akcia dominantná.

Obidvaja hráči teda v konečnom výsledku zvolia svoju *dominantnú akciu* - *zaplatiť reklamu*. V matici sa teda nachádzame v prvom riadku a v prvom stĺpci, kde máme

hodnoty výplat: (90, 90). Túto stratégiu nazývame rovnovážnou, získanou pomocou dominantných stratégií. Môžeme ale vidieť, že to nie je najvyššia hodnota výplat pre oboch hráčov, akú by mohli z tejto hry získať. Ak by sa obidve firmy rozhodli nezaplatiť reklamu, tak majú výplatu o 10 jednotiek vyššiu. Prečo teda nie je stratégia nezaplatenie reklamy súčasne u oboch hráčov rovnovážna? Na to nám odpovie definícia Nashovej rovnováhy.

**Nashova rovnováha (Nash equilibrium)** je množina stratégií, kde keď hráči zvolia tieto stratégie, žiaden z hráčov nezíska vyššiu výplatu vybraním ľubovoľnej inej stratégie. Ak si každý hráč vyberie stratégiu Nashovej rovnováhy, tak žiaden z nich nechce porušiť túto rovnováhu vybraním inej stratégie, pretože by to viedlo ku zníženiu jeho výplaty. V našom príklade máme 2 hráčov, k tomu si zdefinujeme matematickú definíciu Nashovej rovnováhy.

**Definícia 2.3:** *Nech  $Q$  je konečná nekooperatívna hra uvedená v normálnom tvare:*

$$Q = (I = \{1, 2\}; X, Y; M_1(x, y), M_2(x, y))$$

*Potom Nashovou rovnováhou tejto hry nazveme dvojicu stratégií  $\bar{x}$  a  $\bar{y}$ , ak platia nasledovné nerovnosti:*

$$M_1(\bar{x}, \bar{y}) \geq M_1(x, \bar{y}),$$

$$M_2(\bar{x}, \bar{y}) \geq M_2(\bar{x}, y),$$

*pre všetky stratégie  $x \in X$  a  $y \in Y$ . Stratégia  $\bar{x}$  je rovnovážna stratégia hráča 1 a stratégia  $\bar{y}$  je rovnovážnou stratégiou hráča 2.*

V našom príklade bude Nashovou rovnováhou výber stratégie  
 $\{\text{Zaplatiť reklamu}_{\text{Tento}}, \text{Zaplatiť reklamu}_{\text{Harmony}}\},$

ktorá vedie k výplatám: (90, 90). Pozrime sa na prípad, keď sa niektorý z hráčov rozhodne vybrať inú stratégiu, ako Nashovu rovnováhu. Ak by sa 1. hráč TENTO rozhodol nezaplatiť reklamu a vie, že 2. hráč HARMONY by svoju stratégiu nezmenil, tak by si svojou zmenou stratégie pohoršil výplatu až o 20 jednotiek. Taktiež, ak by sa 2. hráč HARMONY rozhodol nezaplatiť reklamu, pričom 1. hráč TENTO by sa držal svojej pôvodnej stratégie, 2. hráč HARMONY si zhorší výplatu o 20 jednotiek. Ani jeden z hráčov nemá motiváciu zmeniť svoju stratégiu, preto ostávajú pri Nashovej rovnováhe.

Prečo nie je Nashovou rovnováhou stratégia:

$$\{\text{Nezaplatiť reklamu}_{\text{Tento}}, \text{Nezaplatiť reklamu}_{\text{Harmony}}\},$$

čo by viedlo k vyšším výplatám pre oboch hráčov? Vychádza to už zo slova "rovnováha". Pri takej stratégii majú obaja hráči motiváciu zmeniť svoju stratégiu z dôvodu značného zvýšenia svojej výplaty. V *Príklade 1* si môžu tak obaja vylepšiť výplatu o 20 jednotiek, preto za predpokladu racionality hráčov, predpovedáme zmenu stratégie. Čím sa opäť dostaneme do strategickej rovnováhy pomocou určenia dominantných stratégií. Nashova rovnováha je ale ešte silnejšia stratégia, ako rovnováha dominantných stratégií. Uvažujme zmenu *Príkladu 1* tak, že jedna firma nebude mať dominantnú stratégiu.

**Príklad 1.1** - zmenená matica výplat

|       |                    | HARMONY          |                    |
|-------|--------------------|------------------|--------------------|
|       |                    | Zaplatiť reklamu | Nezaplatiť reklamu |
| TENTO | Zaplatiť reklamu   | (60 , 70)        | (120 , 90)*        |
|       | Nezaplatiť reklamu | (70 , 100)       | (100 , 120)        |

Maticový tvar hry

Ako môžeme vidieť v matici výplat, firma TENTO nemá dominantnú stratégiu. Ak sa protihráč rozhodne zaplatiť reklamu, tak firma TENTO sa rozhodne nezaplatiť. V opačnom prípade si vyberie presne naopak, preto nemá dominantnú stratégiu. Firma HARMONY má pre tento pozmenený príklad dominantnú stratégiu - nezaplatiť reklamu. Ako určíme Nashovu rovnováhu? Z definície nám vyplýva, že to má byť taká množina stratégií, kde žiaden hráč dobrovoľne neurobí zmenu svojej stratégie, pretože by si pohoršili. 2. hráč HARMONY má dominantnú stratégiu, tak vieme, že zahrá práve tú. Nachádzame sa v druhom stĺpci matice. V takom prípade 1. hráč TENTO zvolí stratégiu - zaplatiť reklamu, pretože týmto zvolením získava vyššiu výplatu, ako voľbou druhej stratégie.

Získali sme novú Nashovu rovnováhu:

$$\{\text{Zaplatiť reklamu}_{\text{Tento}}, \text{Nezaplatiť reklamu}_{\text{Harmony}}\},$$

ktorá vedie k výplatám: (120, 90). Ani jeden z hráčov by inú stratégiu nevybral.

# Kapitola 3

## 3. Hry s neinteligentnými protihráčmi

### 3.1 Optimálna stratégia pri riziku

Doteraz sme sa zaoberali len prípadmi, kde firmy konajú racionálne, teda sme predpokladali, že sú inteligentné. Ich primárnym cieľom je maximalizácia zisku, čo v teórii hier znamená maximalizácia výplat. Vezmime si hru, kde okrem inteligentných hráčov budú vystupovať aj náhodné mechanizmy, tzv. neinteligentní hráči. Všetky definície a informácie sme čerpali od Mañasa [2].

Na začiatku si uvidíme hru s dvoma hráčmi, kde prvý hráč bude inteligentný a druhý bude náhodný mechanizmus. Hru zapíšeme v normálnom tvare:

$$\{I = \{1, 2\}; X, Y; M(x, y)\} \quad (3.1)$$

Budeme uvažovať len výplatnú funkciu hráča 1, pretože hráča 2 nezaujíma výška výplaty a tak výplatná funkcia  $M_2(x, y)$  nenesie žiadnu dôležitú informáciu pre prvého hráča. V zápise hry výplatná funkcia hráča 1  $M(x, y)$  je len skráteným zápisom  $M_1(x, y)$ . V rozhodovacej situácii sa hráč 2 prejaví tak, že do výplatnej funkcie  $M(x, y)$  dosadí svoju stratégiu  $y \in Y$  podľa nejakého rozdelenia pravdepodobnosti. Jej distribučnú funkciu označíme  $F(y)$ . Dôležité pre rozhodovanie hráča 1 je to, či pozná strategické rozloženie používané hráčom 2. Ak áno, hovoríme o **rozhodovaní pri riziku**. Ak pozná len to, že stratégie hráča 2 podliehajú nejakému rozloženiu pravdepodobnosti, ktoré v momente rozhodovania svojej stratégie nepozná, hovoríme o **rozhodovaní pri neistote**.

Je zaujímavé si predstaviť, ako môže taký hráč 2 existovať. Bežným príkladom by mohla byť lotéria. Hráč 1 je v tomto prípade hráč, ktorý ide hrať lotériu a chce ju vyhrať. Hráčom 2 je samotná lotéria, kde šanca vyhrať je určená počtom výherných tiketov zo všetkých predaných tiketov. Ak hráč 1 pozná tieto počty, vie si určiť pravdepodobnosť výhry a lepšie sa rozhodnúť, koľko tiketov nakúpi, aby sa mu to vyplatilo.

Avšak, ako sme spomenuli v Kapitole 1, na trhu oligopolu sme predpokladali inteligentných hráčov - firmy, ktoré chcú maximalizovať svoj zisk. Firma, ktorá by sa rozhodovala len na základe pravdepodobnosti, nerieši zisk ani svoje náklady. V rozvinutých krajinách sú také firmy nevídané. Ale mohla by nastať napríklad taká situácia,

kde by sa veľmi bohatý investor rozhodol vstúpiť na trh so značným množstvom produktu len na základe hodu mince. Aj keď to neznie veľmi pravdepodobne, inteligentná firma, ktorá by mala informáciu o takomto investorovi a nebrala by ho vôbec do úvahy, môže zvoliť nesprávnu optimálnu stratégiu. Vyrobila by napríklad väčšie množstvo produktu, ktoré ale nepredá z dôvodu vstupu takého investora na trh a môže sa dostať do straty. Preto, ak inteligentné firmy majú informácie o rozložení pravdepodobností takýchto investorov, musia s ňou počítať. Definícia optimálnej stratégie pri rozhodovaní za prítomnosti rizika sa opiera o predpoklad bežne užívaný v teórii hier: ***v prípade stretu s náhodným mechanizmom je najlepšie sa zachovať tak, aby sme maximalizovali strednú hodnotu výhry, čiže výplaty.***

Uvedieme si formálnu matematickú definíciu optimálnej stratégie:

**Definícia 3.1:** *Stratégia  $\bar{x}$  je optimálna stratégia pri riziku v hre (3.1), ak platí:*

$$\bar{x} = \arg \max_{x \in X} \int M(x, y) dF(y). \quad (3.2)$$

V definícii 3.1 je zaujímavé si všimnúť integrál  $\int M(x, y) dF(y)$ , kde integrátorom je  $dF(y)$ . Ide totiž o **Riemann-Stieltjesov** integrál. Tento integrál teraz neformálne opíšeme.

Nech  $g(x)$  a  $F(x)$  sú reálne a ohraničené funkcie definované na uzavretom intervale  $I = [a, b]$ . Vezmime delenie intervalu  $a = x_1 < x_2 < x_3, \dots < x_{n-1} < x_n = b$ , a uvažujme Riemannovu sumu:

$$\sum_{i=1}^n g(c_i) [F(x_i) - F(x_{i-1})]$$

kde  $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ . Ak sa táto suma blíži k fixnému číslu  $\mu$  ako  $\max(x_i - x_{i-1}) \rightarrow 0$ , potom  $\mu$  sa nazýva Stieltjesov integrál, alebo niekedy Riemann-Stieltjesov integrál. Stieltjesov integrál funkcie  $g$  viazaný na funkciu  $F$  na intervale  $I$  zapíšeme v tvare:

$$\int g(x) dF(x)$$

Najčastejšie sa v aplikáciách stretávame s dvoma typmi funkcií  $F$  v integráli

$$\int_I g(x) dF(x)$$

1.  $F$  má deriváciu v každom bode vnútri  $I$  a  $g$  je spojitá. Potom:

$$\int_I g(x) dF(x) = \int_I g(x) F'(x) dx \quad (3.3)$$

2.  $F$  je "schodkovitá" funkcia, teda pre  $I = [a, b]$  a delenie  $a = d_0 < d_1 < \dots < d_n = b$  je  $F$  definovaná predpisom

$$F(x) = F_i ; x \in [d_{i-1}, d_i)$$

pričom  $F_1 < F_2 < \dots < F_n$ . Potom, ak  $g$  je spojitá, platí:

$$\int_I g(x) dF(x) = \sum_{i=1}^{n-1} g(d_i) [F_{i+1} - F_i]. \quad (3.4)$$

Pre podrobnejší výklad odporúčame literatúru [5] a [6].

### 3.2 Hry s viac inteligentnými a neinteligentnými hráčmi

Na rozdiel od hry (3.1), kde sme mali len dvoch hráčov, uvažujme teraz hru s  $N$  hráčmi, z ktorých hráči  $1, 2, \dots, J$  sú inteligentní a hráči  $J+1, J+2, \dots, N$  sú náhodné mechanizmy so známym rozložením pravdepodobnosti. Takúto hru v normálnom tvare zapíšeme ako

$$\{Q = \{1, 2, \dots, N\}; X_1, X_2, \dots, X_N; M_1(x), M_2(x), \dots, M_J(x)\} \quad (3.5)$$

Rovnako, ako pri hre (3.1), výplatné funkcie neinteligentných hráčov  $J+1, J+2, \dots, N$  nebudeme sledovať, pretože týchto hráčov nezaujíma výška výplaty a preto nenesú žiadnu dôležitú informáciu pre inteligentných hráčov.

V záujme zjednodušenia zápisu je vhodné predpokladať, že v hre (3.5) hodnotia všetci inteligentní hráči všetkých neinteligentných hráčov rovnako. To znamená, že sa inteligentní hráči zhodnú na pravdepodobnostnom rozložení, ktoré  $j$ -ty hráč užíva,  $j = J+1, J+2, \dots, N$  a je známa jeho distribučná funkcia  $F_j(x), x \in X_j$ .

V predchádzajúcej podkapitole sme si uviedli definíciu optimálnej stratégie pri rozhodovaní za rizika. Tá je založená na maximalizácii strednej hodnoty výplatnej funkcie inteligentného hráča. Podobne, za prítomnosti viacerých náhodných mechanizmov sa chovanie inteligentných hráčov riadi strednými hodnotami stratégií z priestoru

$X_{J+1}, X_{J+2}, \dots, X_N$ . Takáto konfliktná situácia prebieha rovnako, ako keby išlo o konflikt len inteligentných hráčov, čo je modelovaný hrou v normálnom tvare:

$$\{Q = \{1, 2, \dots, J\}; X_1, X_2, \dots, X_J; N_1(x), N_2(x), \dots, N_J(x)\} \quad (3.6)$$

kde  $N_i(x) = N_i(x_1, x_2, \dots, x_J)$

$$= \int_{X_{J+1}} \int_{X_{J+2}} \dots \int_{X_N} M_i(x_1, x_2, \dots, x_N) dF_{J+1}(x_{J+1}) dF_{J+2}(x_{J+2}) \dots dF_N(x_N)$$

Optimálne stratégie inteligentných hráčov v hre (3.5) sú totožné s optimálnymi stratégiami v hre (3.6).

Teraz máme všetky informácie potrebné na výpočet modelového príkladu hry za prítomnosti rizika.

### 3.3 Modelový príklad hry za prítomnosti rizika

Uvažujme príklad oligopolu, kde 4 oligopolisti vyrábajú ten istý druh produktu, ktorého cena je podľa zákona dopytu a ponuky závislá od celkového množstva produktu na trhu. Označme  $x_i$  množstvo produktu dodané  $i$ -tým oligopolistom na trh za jedno časové obdobie. Celkové množstvo produktu na trhu je  $t = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ . Závislosť jednotkovej ceny produktu od celkového množstva dodaného oligopolistami je popísaná funkciou:

$$f(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = 1\,000 - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4).$$

Uvažujeme nekooperatívny model hry, čiže oligopolisti medzi sebou neuzatvárajú dohody. Hráči - oligopolisti s číslami 1 a 2 sú inteligentní hráči a snažia sa zistiť optimálne množstvo produktu, ktoré majú dodať na trh tak, aby maximalizovali zisk. Nech ich nákladové funkcie a rozsahy produkcie sú:

$$c_1(x_1) = 10 + 12x_1; \quad X_1 = [0, 350]$$

$$c_2(x_2) = x_2^2; \quad X_2 = [0, 120]$$

Títo inteligentní hráči vedia o treťom oligopolistovi informáciu, že pred dodaním tovaru si hodí mincou. Ak padne hlava, dodá na trh  $x_3 = 200$  jednotiek tovaru. Vyzerá to tak, že tento hráč 3 nesleduje a nezaobrá sa cenou produktov. Poznajú teda len jeho pravdepodobnosť, s akou dodá na trh množstvo produktu  $x_3 = 200$ .



Predpokladajú u takého hráča distribučnú funkciu:

$$F_3(x_3) = \begin{cases} 0, & x_3 \in (-\infty, 0) \\ \frac{200}{2} = 100, & x_3 \in [0, 200] \\ 1, & x_3 \in [200, \infty) \end{cases}$$

U hráča 4 je známe, že dodáva tovar podľa rovnomerného rozdelenia pravdepodobnosti na intervale  $[0, 400]$ . Preto funkcia  $F_4(x_4)$  je teda distribučná funkcia spojitého rovnomerného rozdelenia na uvedenom intervale  $[0, 400]$ .

**Riešenie:** Táto hra v tvare (3.5) má nasledovné priestory stratégií:

$$X_1 = [0, 350]; X_2 = [0, 120]; X_3 = [0, 200]; X_4 = [0, 400],$$

a pre inteligentných hráčov má nasledovné výplatné funkcie (výplatná funkcia je v tomto príklade funkcia zisku  $\pi$ , ktorú určíme ako  $\pi_i = x_i f(t) - c_i(x_i)$ ):

$$M_1(x_1, \dots, x_4) = x_1(1000 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4) - 10 - 12x_1$$

$$M_2(x_1, \dots, x_4) = x_2(1000 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4) - x_2^2$$

Prechodom k stredným hodnotám s použitím distribučných funkcií  $F_3(x_3)$  a  $F_4(x_4)$

dostaneme hru v tvare (3.6):

$$\{Q = \{1, 2\}; X_1, X_2; N_1(x), N_2(x)\}$$

kde výplatné funkcie sú:

$$N_1(x_1, x_2) = \int_{\bar{x}_3} \int_{\bar{x}_4} M_1(x_1, \dots, x_4) dF_3(x_3) dF_4(x_4)$$

$$N_2(x_1, x_2) = \int_{\bar{x}_3} \int_{\bar{x}_4} M_2(x_1, \dots, x_4) dF_3(x_3) dF_4(x_4)$$

Potrebuje vypočítať tieto 2 dvojné integrály. Ako sme spomenuli v predchádzajúcej podkapitole, na výpočet potrebujeme poznať integrátory  $dF_3(x_3)$  a  $dF_4(x_4)$ . Začnime posledným, čiže  $dF_4(x_4)$ . Distribučná funkcia rovnomerného rozdelenia je spojitá funkcia a má deriváciu v každom bode intervalu  $[0, 400]$ . Má tvar:  $F_4(x_4) = \frac{1}{400}x_4$ . Využijeme teraz vlastnosť (3.3) a prevedieme integrál

$$\int_{\bar{x}_3} \int_{\bar{x}_4} M_i(x_1, \dots, x_4) dF_3(x_3) dF_4(x_4) = \int_{\bar{x}_3} \int_{\bar{x}_4} M_i(x_1, \dots, x_4) dF_3(x_3) \frac{1}{400} dx_4$$

Vonkajší integrál pri oboch výplatných funkciách bude:

$$N_1(x_1, x_2) = \int_{x_3} -10 - x_1(-788 + x_1 + x_2 + x_3) dF_3(x_3)$$

$$N_2(x_1, x_2) = \int_{x_3} -x_2(-800 + x_1 + 2x_2 + x_3) dF_3(x_3)$$

Ostávajú nám len posledné 2 jednoduché integrály s integrátorom  $dF_3(x_3)$ , kde  $F_3$  je distribučná funkcia diskrétného rozdelenia. Je tzv. "schodkovitá", pre to využijeme vlastnosť (3.4) a dostávame výsledné maximalizované funkcie výplat:

$$\begin{aligned} N_1(x_1, x_2) &= -10 - x_1(-688 + x_1 + x_2) \\ N_2(x_1, x_2) &= -x_2(-700 + x_1 + 2x_2) \end{aligned} \tag{3.7}$$

Vďaka optimálnej stratégii pri rozhodovaní za prítomnosti rizika sme našli výsledné funkcie výplat, kde ako neznáme sú jednotlivé produkované množstvá oboch inteligentných hráčov. V takomto prípade sa môžeme začať venovať rôznym modelom oligopolu, kde sa rozhoduje o definitívnom množstve produktu, ktoré jednotliví hráči vyrobia.

# Kapitola 4

## 4. Modely oligopolu

V tejto kapitole sa budeme venovať konkrétnym modelom oligopolu, kde okrem teoretickej časti si ukážeme konkrétnu aplikáciu na náš modelový príklad popísaný v podkapitole 3.3. Celkovo popíšeme 4 rôzne modely, ktoré sme uviedli v kapitole 1.3. V tejto práci sa budeme venovať predovšetkým modelom, kde firmy optimalizujú množstvo produkovaneho tovaru. Medzi také modely patria Cournotov a Stackelbergov model. K týmto modelom vypočítame náš modelový príklad. Modelom, ktoré riešia nastavenie predajnej ceny produktov pre jednotlivú firmu, sa nebudeme až tak podrobne venovať. Podkladom tejto kapitoly je knižný zdroj [1] a prednášky od Jacoba Clifforda [A].

### 4.1 Cournotov model

Tento model bol prvým formálnym modelom oligopolu, ktorý predstavil francúzsky matematik a ekonóm Antoine-Augustin Cournot v roku 1838. Tu Cournot vysvetľuje, ako sa oligopolistické firmy správajú, ak rozhodujú o množstve svojej produkcie všetky firmy súčasne. Množstvo produkcie jednej firmy priamo ovplyvňuje zisk všetkých ostatných firiem, pretože cena produktu sa odvíja od celkového množstva produkcie na trhu.

Keďže sa rozhodujú všetky firmy súčasne, nepoznajú finálne množstvo, pre ktoré sa každá firma rozhodla. Preto musia predpokladať, že každá sa bude snažiť maximalizovať svoj zisk. Cournot predstavil koncept rovnováhy, známy aj ako **Cournotova rovnováha**, alebo **Cournot - Nashova rovnováha**. Je to taká množina finálnych produkovanych množstiev tovaru vybraná jednotlivými firmami tak, aby žiadna firma zmenou svojej produkcie nezískala väčší zisk. Môžeme vidieť, že táto definícia je veľmi podobná Nashovej rovnováhe, hoci tá bola formálne zadefinovaná až o vyše 100 rokov neskôr.

Na to, aby sme mohli hľadať Cournotovu rovnováhu v modeli oligopolu v danom časovom úseku, musia byť splnené nasledujúce podmienky:

1. na trhu sú minimálne 2 firmy, ich finálny počet je konečný a žiadna ďalšia firma v danom časovom úseku nemôže vstúpiť na trh,
2. každá firma sa snaží maximalizovať zisk,
3. trhovú cenu produktu sa odvíja od celkovej produkcie,

4. firmy nespolupracujú, každá samostatne rozhoduje finálnom množstve produkcie a výstup svojich konkurentov považuje za fixnú konštantu,
5. firmy predávajú takmer identický produkt.

Hľadanie Cournotovej rovnováhy vychádza z predpokladu maximalizácie zisku každej firmy. Predpokladajme, že na trhu je počet firiem rovných  $N$  a jednotlivé finálne produkcie firiem označíme ako  $x_1, x_2, \dots, x_N$ . Zisk  $i$  – tej firmy je funkcia  $\pi_i(x_1, x_2, \dots, x_N) = x_i f(t) - c_i(x_i)$  kde  $f(t) = f(x_1 + x_2 + \dots + x_N)$  je funkcia trhovej ceny. Už z kapitoly 1 vieme, že množstvo  $q$ , ktoré maximalizuje zisk  $\pi(q)$  získame deriváciou funkcie podľa množstva  $q$ . V našom prípade je zisk závislý od produkcie všetkých firiem na trhu. Konkrétne, cenová funkcia je závislá od celkovej produkcie. Ak chceme získať množstvo produkcie  $i$  – tej firmy  $x_i^*$ , ktoré bude maximalizovať zisk  $\pi_i(x_1, x_2, \dots, x_N)$ , potrebujeme parciálne derivovať len podľa produkcie danej  $i$  – tej firmy  $x_i$ . Produkcie všetkých ostatných firiem berieme ako fixnú konštantu (podľa predpokladu 4.).

Tento postup zopakujeme pre všetky firmy a ich ziskové funkcie  $\pi_i$ , kde  $i \in 1, \dots, N$ . Takto získame  $N$  rovníc s  $N$  neznámymi  $x_1, x_2, \dots, x_N$ . Na výpočet takejto sústavy rovníc využijeme poznatky lineárnej algebry. Z definície oligopolu vychádza, že by v modeli nemalo vystupovať veľké množstvo hráčov, takže by nemal byť vysoký počet rovníc. Problém by mohol nastať pri nelinearite zderivovaných ziskových funkcií. My sa budeme zaoberať jednoduchšími príkladmi. Funkcie sú vybrané tak, aby sme po zderivovaní dostali sústavu lineárnych rovníc, čo vieme ľahko vypočítať.

#### 4.1.1 Aplikácia Cournotovho modelu na Príklad 3.3

V príklade 3.3 sme vypočítali výplatné funkcie dvoch firiem: (3.7). Podľa vyššie uvedeného popisu obe výplatné funkcie zderivujeme podľa príslušných produkcií oboch firiem.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} N_1(x_1, x_2) &= 688 - 2x_1 - x_2 = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_2} N_2(x_1, x_2) &= 700 - x_1 - 4x_2 = 0 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Dostali sme sústavu dvoch lineárnych rovníc o dvoch neznámych. Jednoduchým výpočtom zistíme optimálne množstvá oboch firiem z príkladu 3.3.

$$x_1^* = 293,14 \quad \text{a} \quad x_2^* = 101,71.$$

Vidíme, že vypočítané optimálne množstvá  $x^*_1$  a  $x^*_2$  patria do daného rozsahu produkcie oboch firiem  $X_1 = [0, 350]$ ,  $X_2 = [0, 120]$ .

Výplaty, ktoré získame po dosadení  $x^*_1$  a  $x^*_2$  budú nasledovné:

$$N_1(x^*_1, x^*_2) = 85\,922,7$$

$$N_2(x^*_1, x^*_2) = 20\,691,6$$

Na to, aby sme Cournotov model mohli porovnať s inými modelmi oligopolu, potrebujeme určiť trhovú cenu produktu  $f(t)$ . V príklade 3.3 ale vystupujú aj neinteligentní hráči, ktorí sa riadia nejakými rozdeleniami pravdepodobnosti. Nevieme presne povedať, aké veľké množstvo produktu dodajú na trh. Môžeme to ale aspoň odhadnúť strednou hodnotou daných pravdepodobnostných rozdelení. Hráč 3 s pravdepodobnosťou  $1/2$  dodá na trh 200 výrobkov, v opačnom prípade nedodá nič. Strednú hodnotu takejto náhodnej premennej  $Y$  vypočítame nasledovne:  $E[Y] = \int y dF(y) = \frac{1}{2} * 200 + \frac{1}{2} * 0 = 100$ . Budeme teda predpokladať, že hráč 3 na trh dodá  $x_3 = 100$  výrobkov. Hráč 4 má rovnomerné rozdelenie  $Z$ , ktorého stredná hodnota sa dá vypočítat vzorcom:  $E[Z] = \frac{1}{2}(a + b)$ , kde  $[a, b]$  je interval rovnomerného rozdelenia. V našom príklade je to interval  $[0, 400]$ . Po dosadení do vzorca získavame strednú hodnotu, teda množstvo tovaru dodaného na trh hráčom 4, čo predstavuje  $x_4 = 200$  výrobkov.

Celkové množstvo produkcie odhadneme:  $t = x^*_1 + x^*_2 + x_3 + x_4 = 694,9$ . Teraz už vieme určiť trhovú cenu  $f(t) = 1\,000 - 694,9 = 305,1$ .

## 4.2 Bertrandov model

V roku 1883 ako odpoveď voči už existujúcemu Cournotovmu modelu zaviedol Joseph Bertrand vlastný model, kde oligopolistické firmy rozhodujú o nastavení finálnej ceny svojho produktu. Množstvo produkcie nechávajú na ochote spotrebiteľov zakúpiť tovar v takejto cene. Výsledná rovnováha sa nazýva **Bertrandova**, alebo **Bertrand-Nashova rovnováha**. Ide o takú množinu cien zvolených firmami tak, aby žiadna firma voľbou inej ceny nezískala vyšší zisk.

V tejto práci sa Bertrandovmu modelu nebudeme venovať, pretože v našom modelovom príklade sa rozhodujeme za prítomnosti rizika. Prítomné náhodné mechanizmy si určujú množstvo produkcie na základe nejakej pravdepodobnosti. Ich vplyv na cenu je zahrnutá v

trhovej cenovej funkcii produktu  $f(t)$ . Inteligentní hráči berú do úvahy túto cenovú funkciu, pretože je to jediný vplyv náhodných mechanizmov na trh, kde sú prítomné.

### 4.3 Stackelbergov model - množstva

Predstavme si situáciu, keď na trhu je jedna silnejšia firma - **vodca**, ktorý určí svoju produkciu skôr ako jeho konkurent - **nasledovník**. Firmy si teda zvolia produkcie po sebe a nie súčasne, ako to bolo v Cournotovom modeli. Má firma, ktorá určuje produkciu skôr ako konkurent, výhodu? Aby našiel Heinrich von Stackelberg na túto otázku odpoveď, modifikoval Cournotov model na takýto prípad. Vodca si uvedomí, že po nastavení výšky svojej produkcie konkurent stanoví svoju výšku produkcie podľa najlepšej reakčnej funkcie (best-response function) vychádzajúcej z Cournotovho modelu. Reakčnú funkciu určíme zo zisku jednotlivcej firmy. Pre lepšie vysvetlenie budeme pracovať s príkladom kde vystupujú 2 firmy.

Firma 1 si uvedomuje, že nedokáže priamo ovplyvniť množstvo produkcie druhej firmy, preto bude maximalizovať svoj zisk. Množstvo produkcie druhej firmy bude brať ako fixný parameter  $x_2 = \bar{x}_2$ . Derivovaním svojho zisku  $\pi_1(x_1, \bar{x}_2)$  podľa produkcie  $x_1$  dostávame rovnakú rovnicu ako pri Cournotovom modeli. Vyjadrením produkcie  $x_1$  ako  $x_1 = \varphi_1(\bar{x}_2)$  pomocou parametra  $\bar{x}_2$  získavame najlepšiu reakciu firmy 1 na produkované množstvo firmy 2. Obdobne, firma 2 si určí svoju reakčnú funkciu zo svojho zisku, kde berie produkciu firmy 1 za fixnú  $x_1 = \bar{x}_1$ . Vyjadrením svojej produkcie  $x_2$  ako  $x_2 = \varphi_2(\bar{x}_1)$  získava svoju najlepšiu reakčnú funkciu.

Vezmime si situáciu, kde vodcom bude firma 1 a nasledovníkom bude firma 2. Vodca vie, že nasledovník určuje svoje produkčné množstvo podľa svojej reakčnej funkcie  $x_2 = \varphi_2(\bar{x}_1)$ . Preto vodca bude maximalizovať zisk s dvoma parametrami  $\pi_1(x_1, \varphi_2(x_1))$ . Tento zisk je funkciou jednej premennej  $x_1$ , preto jej zderivovaním vzhľadom na  $x_1$  a položením výsledku rovnému 0, získavame optimálne množstvo produkcie  $x_1^*$  firmy 1. Optimálne množstvo produkcie firmy 2 získame dopočítaním hodnoty z reakčnej funkcie  $x_2^* = \varphi_2(x_1^*)$ .

Opačná situácia, kde vodcom bude firma 2 a nasledovníkom firma 1, je identická. Firma 2 vie, že nasledovník - firma 1 určuje produkciu zo svojej reakčnej funkcie a preto maximalizuje svoj zisk vzhľadom na parametre  $\pi_2(\varphi_1(x_2), x_2)$ . Výpočet optimálnych produkcií je totožný.

### 4.3.1 Aplikácia Stackelbergovho modelu na príklad 3.3

Budeme vychádzať z vypočítaných výplatných funkcií - funkcie zisku (3.7). Môžu nastať celkovo 3 prípady:

1. firma 1 je vodca, firma 2 je nasledovník
2. firma 2 je vodca, firma 1 nasledovník
3. firma 1 a firma 2 sa chovajú ako vodcovia

Predtým, než začneme riešiť konkrétne prípady Stackelbergovho modelu, si pripravíme reakčné funkcie oboch firiem. Tie sme si už vypočítali v (4.1), tak teraz si vyjadríme jednotlivé produkcie v tvare  $x_i = \varphi_i(\bar{x}_j)$ ,  $i \neq j$ .

$$\frac{\partial}{\partial x_1} N_1(x_1, \bar{x}_2) = 688 - 2x_1 - \bar{x}_2 = 0 \xrightarrow{\text{po vyjadrení}} x_1(\varphi_1(\bar{x}_2)) = -\frac{1}{2}(\bar{x}_2 - 688)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} N_2(\bar{x}_1, x_2) = 700 - \bar{x}_1 - 4x_2 = 0 \xrightarrow{\text{po vyjadrení}} x_2(\varphi_2(\bar{x}_1)) = -\frac{1}{4}(\bar{x}_1 - 700)$$

#### 1. firma 1 je vodca a firma 2 je nasledovník

Vodca pozná reakčnú funkciu nasledovníka, čo je  $x_2 = -\frac{1}{4}(\bar{x}_1 - 700)$ . Práve to množstvo produkcie  $x_2$  dosadíme do svojej funkcie zisku (3.7) a budeme hľadať maximum premennej  $x_1$ . Tak nájdeme optimálne množstvo  $x_1^*$ .

$$N_1(x_1, x_2) = -10 - x_1 \left( -688 + x_1 - \frac{1}{4}(x_1 - 700) \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} N_1(x_1, x_2) = 688 - \frac{7}{4}x_1 + \frac{1}{4}(x_1 - 700) = 0 \xrightarrow{\text{po vyjadrení}} x_1^* = 342$$

Keď už máme množstvo produkcie firmy 1, z reakčnej funkcie firmy 2 vypočítame jeho optimálne množstvo:

$$x_2(\varphi_2(x_1^*)) = -\frac{1}{4}(342 - 700) = 89,5 = x_2^*$$

Rovnako, ako pri Cournotovom modeli skontrolujeme, či výsledok patrí do intervalu produkcie:  $X_1 = [0, 350]$ ,  $X_2 = [0, 120]$ . Oba výsledky sú možné, preto môžeme vyčíslieť ich výplaty:

$$N_1(x_1^*, x_2^*) = 87\,713 \quad , \quad N_2(x_1^*, x_2^*) = 16\,020,5.$$

Celková produkcia je  $t = x_1^* + x_2^* + x_3 + x_4 = 731,5$  a trhová cena produktu bude:

$$f(t) = 1\,000 - 731,5 = 268,5.$$

2. firma 2 je vodca a firma 1 je nasledovnik

Keďže postup je identický ako v predošlom príklade, ku optimálnym množstvám sa dostaneme pomocou rovníc bez rozsiahlejšieho popisu.

$$N_2(x_1, x_2) = -x_2 \left( -700 + -\frac{1}{2}(x_2 - 688) + 2x_2 \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} N_2(x_1, x_2) = 700 - \frac{7}{2}x_2 + \frac{1}{2}(x_2 - 688) = 0 \xrightarrow{\text{po vyjadrení}} x_2^* = 118,7$$

$$x_1(\varphi_1(x_2^*)) = -\frac{1}{2}(118,7 - 688) = 284,65 = x_1^*$$

Optimálne množstvá patria do intervalu produkcie oboch firiem, takže ich výplaty budú:

$$N_1(x_1^*, x_2^*) = 81\,015,6$$

$$N_2(x_1^*, x_2^*) = 21\,122,7$$

Celková produkcia je  $t = x_1^* + x_2^* + x_3 + x_4 = 703,35$  a trhová cena produktu je:

$$f(t) = 1\,000 - 703,35 = 296,65.$$

3. firma 1 a firma 2 sa chovajú ako vodcovia

Predpokladajme, že obe firmy si spočítali, akú veľkú produkciu by mali v prípade, že by boli vodcovia. Táto produkcia im vyšla vyšia ako v prípade Cournotovho modelu. Može sa naskytnúť taká situácia, kde sa obaja rozhodnú zvoliť svoju vodcovskú produkciu a ignorovali by konkurentove reakčné funkcie. Pozrime sa teda na výplaty, ak zvolia takéto produkcie  $x_1^* = 342$  a  $x_2^* = 118,7$

$$N_1(x_1^*, x_2^*) = 77\,726,6$$

$$N_2(x_1^*, x_2^*) = 14\,319,1$$

Celková produkcia  $t = x_1^* + x_2^* + x_3 + x_4 = 760,7$  a trhová cena produktu:

$$f(t) = 1\,000 - 760,7 = 239,3.$$



#### 4.4 Stackelbergov model - ceny

Tomuto modelu sa nebudeme venovať z rovnakého dôvodu, ako sme sa nevenovali Bertrandovmu modelu. V našom príklade náhodné mechanizmy ovplyvňujú cenu produktu, preto pre inteligentných hráčov nie je možné určovať vlastnú cenu. Pre zaujímavosť je vhodné dodať, že na rozdiel od Bertrandoveho modelu v tomto Stackelbergovom modeli opäť vystupujú vodcovia a následovníci. Ak vodca určí cenu, za ktorú bude predávať výrobok, aké má nasledovník možnosti? Žiadne, pretože ak by si cenu určil vyššiu ako vodca, nikto by od neho nekupoval výrobky. Ak by určil cenu nižšiu, tak by prevzal celý trh a stal sa tak monopolistom. Rovnováha nastáva práve vtedy, ak predávajú výrobok za rovnakú cenu, čiže za cenu určenú vodcom trhu.

#### 4.5 Porovnanie modelov oligopolu

Na príklade 3.3 sme vypočítali dva rôzne modely - Cournotov a Stackelbergov model. Oligopolistom vyšli rôzne optimálne stratégie - aké množstvo produkcie majú nastaviť, aby maximalizovali svoj zisk. Výsledky sme zhmulovali do finálnej tabuľky, kde okrem optimálnych množstiev produkcie uvádzame aj zisky firiem, celkový objem produkcie a trhovú cenu jedného produktu.

| Model                           | $x^*_1$ | $x^*_2$ | Celková produkcia | Cena   | Zisk firmy 1 | Zisk firmy 2 |
|---------------------------------|---------|---------|-------------------|--------|--------------|--------------|
| Cournot                         | 293,14  | 101,71  | 694,9             | 305,1  | 85 922,7     | 20 691,6     |
| Stackelberg<br>(1. vodca)       | 342     | 89,5    | 731,5             | 268,5  | 87 713       | 16 020,5     |
| Stackelberg<br>(2. vodca)       | 284,67  | 118,7   | 703,35            | 296,65 | 81 015,6     | 21 122,7     |
| Stackelberg<br>(obaja vodcovia) | 342     | 118,7   | 760,7             | 239,3  | 77 726,6     | 14 319,1     |

Výsledná tabuľka: 1.

Pre prehľadnosť sme v tabuľke (1) označili červenou farbou najvyššiu, a modrou farbou najmenšiu hodnotu v stĺpci.

Pozrime sa najprv na jednotlivé produkcie. Neprekvapuje, že najväčšie množstvo produkcie firma dosiahla, keď bola vodca a ako prvá určovala výšku svojej produkcie.

Takže trh oligopolu, kde sa firmy rozhodujú v reakcii na konkurenciu a nie všetky súčasne, má výhodu práve tá firma, ktorá ako prvá určí svoju produkciu a správa sa ako vodca. So svojou najvyššou produkciou ide ruka v ruke aj vyššia výplata - zisk firmy. Obe firmy, ako vodcovia, si prilepšili v porovnaní s Cournotovým modelom. Naopak, ako nasledovníci, majú produkciu aj zisk nižší ako v Cournotovom modeli. Čo je zaujímavé, najnižší zisk dosiahnu práve vtedy, ak precenia svoje sily a snažia sa vyrábať čo najvyššie množstvo, ako keby boli vodcami. Prepád ich zisku je vtedy očividný, boli by na tom lepšie hoci by boli len nasledovníci. Tým, že majú vysokú produkciu, na trhu je prebytok tovaru a preto je aj cena omnoho nižšia ako v iných modeloch. Zákazníci budú síce viac nakupovať lacnejší tovar, ale za takú cenu to stále nezvýši firmám ich zisk.

Najnižšia celková produkcia a najvyššia cena je pri Cournotovom modeli. Pripomíname, že pri Cournotovom modeli sa firmy rozhodovali súčasne. Čo by sa ale stalo v prípade, keby sa firma 1 rozhodla nastaviť svoju produkciu na úroveň, ako keby bol vodca - pri súčasnom rozhodovaní? Cieľ firmy 1 by bolo docieľiť zisk zo Stackelbergovho modelu, kde by bola vodcom. Firma 2 ale nemusí uveriť firme 1, že nastaví produkciu tak vysoko. Tiež si spočítala Cournotovu rovnováhu a nemá dôvod veriť, že by si firma 1 vybrala takú produkciu, ktorá by viedla ku nižšej výplate v prípade, ak firma 2 nezvolí produkciu nasledovateľ'a. Nenastáva stabilná rovnováha, preto by tak inteligentní hráči nevolili.

## 5. Kapitola

### 5. Program na riešenie hier s neinteligentnými protihráčmi

V poslednej kapitole tejto práce si prejdeme vytvorený program v softvéri Wolfram Mathematica, ktorý uľahčuje výpočet hier s viacerými inteligentnými a neinteligentnými hráčmi. V modelovom príklade 3.3 vidíme, že v prípade hier viacerých hráčov vystupuje v príklade väčšie množstvo integrálov. Tie nemusia hneď znamenať komplikáciu, ale určite zvyšujú možnosť pochybenia pri výpočte, napríklad z nepozornosti.

#### 5.1 Popis algoritmu a vstupy/výstupy programu

V kapitole 3 je popísaný podrobný algoritmus na výpočet hry za prítomnosti rizika (modelový príklad 3.3). Práca sa viacerými hráčmi je vyriešená pomocou vytvorenia zoznamov údajov, ktoré vstupujú do funkcií *For[]* a *Table[]*. Tieto funkcie sú integrované v samotnom programovacom jazyku Wolfram. Umožňujú pre každú jednu iteráciu výpočet, ktorý je po uložení do ďalšieho zoznamu pripravený na vstup iných funkcií. Tento prístup pripomína programovanie v jazyku C++, kde sa často využívajú pamäťové štruktúry ako *vector* a *list*.

Ako prvé vstupy uvedieme celkové množstvo produkcie pomocou funkcie *Sum[]* a funkciu ceny jedného výrobku, kde vstup je práve vypočítané celkové množstvo produkcie. Medzi ďalšie vstupy patria údaje o inteligentných a o neinteligentných hráčoch. Pre inteligentných hráčov potrebujeme rozsah ich produkcie a ich nákladovú funkciu. Neinteligentným hráčom stačia rozsahy ich produkcií a popis ich distribučnej funkcie, podľa ktorej riadia svoju produkciu. Diskrétnu distribučnú funkciu popíšeme pomocou funkcie *Piecewise[]*, ktorá umožňuje popísanie pravdepodobnosti na určitých intervaloch. Na popísanie spojitých distribučných funkcií využijeme integrované funkcie pravdepodobností. Napríklad, pre normálne rozdelenie použijeme funkciu *UniformDistribution[]*. Pre vytvorenie vhodnej reprezentácie takého spojitého rozdelenia je v programe vytvorená funkcia *SpojitaDistrF[]*. Do nej vstupuje integrovaná funkcia popisujúca spojitý rozdelenie, rozsah produkcie a premenná reprezentujúca produkované množstvo daného hráča. Všetky potrebné údaje uložíme do zoznamov pomocou funkcie *AppendTo[]*.

Hlavným prínosom tohto programu, je vypočítaný prechod ku stredným hodnotám s použitím distribučných funkcií neinteligentných hráčov a následný výpočet výplatných funkcií. Podrobné informácie o prechode ku stredným hodnotám sa nachádzajú v podkapitole 3.1. Keďže vo výpočte potrebujeme zahrnúť Riemann-Stieltjesov integrál, riešením je rozdeliť výpočet integrálu na dva prípady: kedy v integrále je potrebné integrovať podľa konkrétneho integrátora jednej premennej a kedy stačí dosadiť hodnotu do premennej. V prípade viacerých hráčov je potrebné zabezpečiť rekurzívny výpočet, kde sa pomocná premenná stále prepočíta podľa aktuálnej potreby. Kvôli dôležitosti riešenia prechodu ku stredným hodnotám v tejto práci, uvádzame konkrétnu časť kódu programu:

```
In[45]:= For[j = 1, j ≤ pocetInteligent, j++,
    produkt = M[j];
    For[i = pocetHracov, i > pocetInteligent, i--,
        If[dF[[i]] == 0, produkt = produkt /. x[i] → F[[i]], produkt =  $\int_{\text{hranice}[[i,1]]}^{\text{hranice}[[i,2]]} (\text{produkt} * dF[[i]]) dx[i]$ ];
        AppendTo[VyplatneFunkcie, produkt];
    ]
```

Obr. 5.1 - Kód programu o prechode ku stredným hodnotám

$M[]$  reprezentuje výplatné funkcie hráčov pred prechodom ku stredným hodnotám,  $F[]$  predstavuje distribučné funkcie všetkých hráčov - pre inteligentných hráčov je táto hodnota rovná 0. Zoznam  $dF[]$  reprezentuje zderivované distribučné funkcie. V takomto stave máme vypočítané výplatné funkcie inteligentných hráčov, kde vystupujú už len premenné ich vlastných produkcií.

Prechádzame od teórie hier ku mikroekonómii, kde môžeme riešiť modely oligopolu. Riešené modely s podrobným postupom sú popísané v kapitole 4. Na matematické operácie využívané pri výpočte rôznych sústav rovníc, derivácií funkcií, prípadne vyjadrenia premenných pomocou iných parametrových neznámych, využijeme integrované funkcie *Derivative[]*, *NSolve[]* a *Map[]*.

Výstupom programu sú taktiež, ako vstupy, zoznamy hodnôt, ktoré pre prehľadnosť uvádzať zosumarizujeme do tabuliek.

## 5.2 Príklad s viacerými inteligentnými a neinteligentnými hráčmi

Uvažujeme príklad oligopolu, podobne ako v príklade 3.3, kde 8 oligopolisti vyrábajú ten istý druh produktu. Cena produktu je závislá od celkového množstva. Označme  $x_i$  množstvo produktu dodané  $i$ -tým oligopolistom na trh za jedno časové obdobie. Celkové množstvo produktu na trhu je  $t = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8$ . Závislosť jednotkovej ceny produktu od celkového množstva dodaného oligopolistami je popísaná funkciou:  $f(t) = 1\,000 - t$ .

Uvažujeme nekooperatívny model hry, čiže oligopolisti medzi sebou neuzatvárajú dohody. Prví štyria hráči sú inteligentní, čiže uvádzame ich nákladové funkcie a rozsahy ich produkcie:

$$c_1(x_1) = 10 + 12x_1 \quad ; \quad X_1 = [0, 250]$$

$$c_2(x_2) = x_2^2 \quad ; \quad X_2 = [0, 45]$$

$$c_3(x_3) = 100 - 2x_3 \quad ; \quad X_3 = [0, 150]$$

$$c_4(x_4) = 10 + 1.5x_4^2 \quad ; \quad X_4 = [0, 35]$$

Zvyšní štyria sú neinteligentní hráči. Teoreticky by mohli mať ľubovoľné pravdepodobnostné rozloženie, ale v realite by sa ťažko hľadal príklad, kde by sa nejaký oligopolista rozhodol riadiť napríklad Studentovým T-rozdelením. Preto pre uveriteľnosť uvádzame dvoch hráčov s diskretným rozdelením a dvoch s normálnym spojitým rozdelením pravdepodobnosti. Neinteligentný hráč 5 dodá s pravdepodobnosťou  $1/3$  na trh 200 jednotiek produktu a s pravdepodobnosťou  $2/3$  nedodá žiaden výrobok. Hráč 6 podobne, s pravdepodobnosťou  $1/2$  dodá 500 jednotiek produktu, inak žiaden. Ich distribučné funkcie majú nasledovný tvar:

$$F_5(x_5) = \begin{cases} 0, & x_5 \in (-\infty, 0) \\ \frac{200}{3}, & x_5 \in [0, 200) \\ 1, & x_5 \in [200, \infty) \end{cases}$$

$$F_6(x_6) = \begin{cases} 0, & x_6 \in (-\infty, 0) \\ \frac{500}{2} = 250, & x_6 \in [0, 500) \\ 1, & x_6 \in [500, \infty) \end{cases}$$

U hráčov 7 a 8 je známe, že ich produkcia sa riadi normálnym rozdelením na intervaloch  $[0, 100]$  a  $[0, 400]$ . Preto funkcie  $F_7(x_7)$  a  $F_8(x_8)$  sú distribučné funkcie normálneho rozdelenia na daných intervaloch.

**Riešenie:** V danej hre nás zaujímajú výplatné funkcie inteligentných hráčov, čo je na oligopolistickom trhu funkcia zisku  $i$  – tého hráča v tvare:  $\pi_i = x_i f(t) - c_i(x_i)$ .

$$M_1(x_1, \dots, x_8) = x_1(1000 - t) - 10 - 12x_1$$

$$M_2(x_1, \dots, x_8) = x_2(1000 - t) - x_2^2$$

$$M_3(x_1, \dots, x_8) = x_3(1000 - t) - 100 + 2x_3$$

$$M_4(x_1, \dots, x_8) = x_4(1000 - t) - 10 - 1.5 x_4^2$$

Aby sme vedeli vypočítať výplatné funkcie týchto hráčov, potrebujeme prejsť ku stredným hodnotám pomocou distribučných funkcií a dostať hru v normálnom tvare:

$$\{Q = \{1, 2, 3, 4\}; X_1, X_2, X_3, X_4; N_1(x), N_2(x), N_3(x), N_4(x)\}$$

(5.1)

kde výplatné funkcie sú:

$$N_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = \int_{X_5} \int_{X_6} \int_{X_7} \int_{X_8} M_1(x_1, \dots, x_8) dF_5(x_5) \dots dF_8(x_8)$$

$$N_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = \int_{X_5} \int_{X_6} \int_{X_7} \int_{X_8} M_2(x_1, \dots, x_8) dF_5(x_5) \dots dF_8(x_8)$$

$$N_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = \int_{X_5} \int_{X_6} \int_{X_7} \int_{X_8} M_3(x_1, \dots, x_8) dF_5(x_5) \dots dF_8(x_8)$$

$$N_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = \int_{X_5} \int_{X_6} \int_{X_7} \int_{X_8} M_4(x_1, \dots, x_8) dF_5(x_5) \dots dF_8(x_8)$$

Teraz môžeme naplno využiť náš program. Predsa ide o štvornásobný integrál na 4 rôznych intervaloch, kde integrujeme Riemann-Stieltjesov integrál. Ručne by to trvalo nejaký čas a s programom máme istotu, že to vypočíta rýchlo a presne. V tabuľke uvedieme všetky 4 výplatné funkcie inteligentných hráčov.

| Hráč | Výplatná funkcia                                                      |
|------|-----------------------------------------------------------------------|
| 1    | $-10 + x_1 \left( \frac{1264}{3} - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 \right)$     |
| 2    | $x_2 \left( \frac{1300}{3} - x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 \right)$          |
| 3    | $-100 + x_3 \left( \frac{1306}{3} - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 \right)$    |
| 4    | $-10 + x_4 \left( \frac{1300}{3} - x_1 - x_2 - x_3 - 2.5 x_4 \right)$ |

Tabuľka 5.1 : Výplatné funkcie

Teraz sa môžeme posunúť od teórie hier ku modelom oligopolu. Budeme riešiť dva modely, a to *Cournotov* a *Stackelbergov* model. Pri Stackelbergovom modeli sa môžu vyskytnúť situácie, kde každý jeden hráč sa bude správať ako vodca a ostatní budú jeho následníci.

### 5.1.1 Cournotov model príkladu 5.2

Výpočet jednotlivých produkcií inteligentných hráčov je v podstate jednoduchý, v skratke potrebujeme zderivovať každú výplatnú funkciu príslušnou neznámou premennou. Dostaneme tak sústavu 4 rovníc o 4 neznámych. Za využitia integrovanej funkcie *NSolve[]* ľahko dopočítame jednotlivé produkované množstvá, výplaty a celkový objem s jednotkovou cenou. Najvyššie hodnoty sú označené červenou farbou a najnižšie modrou. Výsledok zapíšeme v jednoduchých tabuľkách:

| Hráč | Množstvo produkcie | Výplata  |
|------|--------------------|----------|
| 1    | 111.72             | 12 471.6 |
| 2    | 41.24              | 3 401.53 |
| 3    | 125.72             | 15 705.8 |
| 4    | 30.93              | 2 381.7  |

Tabuľka 5.2 : Cournotov model-jednotlivé firmy

Z daných údajov vidíme, že hráč 3 je najsilnejší dodávateľ s najvyššou mierou produkcie a výplaty. Hráč 1 je tesne za ním, takže predpokladáme, že práve títo hráči by sa snažili byť

vodcami v Stackelbergovom modeli. Pozrime sa ešte na celkovú produkciu a jednotkovú cenu produktu na trhu.

| Objem produktu<br>inteligentných<br>hráčov | Celkový objem<br>produktu | Jednotková cena<br>produktu | Celková výplata<br>trhu |
|--------------------------------------------|---------------------------|-----------------------------|-------------------------|
| <b>309.612</b>                             | <b>876.279</b>            | <b>123.721</b>              | <b>33 906.63</b>        |

Tabuľka 5.3 : Cournotov model - celková štatistika

Aby sme získali viac informácií, potrebujeme preskúmať Stackelbergov model. Budeme predpokladať, že len hráči 1 a 3 sú schopní zaujať vodcovskú pozíciu. Prejdeme si aj situáciu, kde obaja nastaví svoju produkciu na svoju vodcovskú a porovnáme to s našimi výsledkami v príklade 3.3.

### 5.1.2 Stackelbergov model príkladu 5.2

Vychádzame z informácií popísaných v podkapitole 4.3.1 o Stackelbergovom modeli, kde sme síce mali len 2 inteligentných hráčov, ale pointa pre 4 hráčov je analogická. Budeme uvádzať už len výsledné tabuľky produkcií. Ako sme spomenuli vyššie, budeme riešiť len tieto tri prípady:

1. Hráč 1 je vodca a ostatní sú nasledovníci
2. Hráč 3 je vodca a ostatní sú nasledovníci
3. Hráči 1 a 3 nastaví produkciu ako vodcovia, ostatní si určú svoju najvyššiu produkciu, akú dosiahli v jednom z predchádzajúcich modeloch

1. situácia: Pozrime sa na výslednú tabuľku takého modelu:

| Hráč           | Množstvo<br>produkcie | Výplata         |
|----------------|-----------------------|-----------------|
| <b>1-vodca</b> | <b>200.167</b>        | <b>15 499.7</b> |
| 2              | 29.828                | 1 779.41        |
| 3              | 91.484                | 8 269.3         |
| 4              | 22.371                | 1 241.15        |

Tabuľka 5.4: Stackelbergov model s hráčom 1 ako vodcom



Ako sme očakávali, v porovnaní s Cournotovým modelom je prudký nárast produkcie u vodcu - hráča 1 a pokles u hráča 3, ktorý bol predtým najsilnejší. Produkcia sa mu nezhoršila až o také vysoké číslo, ale výplata poklesla o takmer 50 percent. Taktiež aj ostatným hráčom sa znížili produkcie a výplaty o podobné číslo. Hráč 1 má hranicu produkcie  $X_1 = [0, 250]$ , takže môže si dovoliť byť vodcom. Ostatní hráči majú nastavené také produkcie aké si podľa svojich hraníc môžu dovoliť.

Všimnime si, ako sa zmenila celková produkcia a cena produktov:

| Objem produktu<br>inteligentných<br>hráčov | Celkový objem<br>produktu | Jednotková cena<br>produktu | Celková výplata<br>trhu |
|--------------------------------------------|---------------------------|-----------------------------|-------------------------|
| <b>343.849</b>                             | <b>910.516</b>            | <b>89.484</b>               | <b>26 789.56</b>        |

Tabuľka 5.5 : Stackelbergov model s vodcom hráča 1 - celková štatistika

Do pozornosti v tabuľke 5.5 dávame hlavne celkovú výplatu na trhu. Tá sa znížila o 7 117.07 jednotiek, čo je zníženie o 21% v porovnaní s Cournotovým modelom. Hoci sa objem produktu zvýšil, jednotková cena sa preto znížila. Jediný, komu tento model vyhovuje, je vodca - hráč 1. Inak sa všetkým znížia výplaty a rozhodne to nie je očakávaný stav pre ostatných nasledovateľov. Avšak táto situácia môže nastať, ak hráč 1 bol na trhu prvý, bol monopolista a ostatní hráči sa mu museli prispôbiť.

2. situácia: Hráč 3 je vodcom, ako sa zmenia produkcie a výplaty jednotlivých hráčov:

| Hráč           | Množstvo<br>produkcie | Výplata         |
|----------------|-----------------------|-----------------|
| <b>1</b>       | <b>73.194</b>         | <b>5 347.3</b>  |
| <b>2</b>       | <b>28.398</b>         | <b>1 612.88</b> |
| <b>3-vodca</b> | <b>225.25</b>         | <b>19 540.3</b> |
| <b>4</b>       | <b>21.298</b>         | <b>1 124.05</b> |

Tabuľka 5.6: Stackelbergov model s hráčom 3 ako vodcom

Situácia je veľmi analogická s prvou situáciou. Najsilnejší je opäť vodca - hráč 3 a ostatní si pohoršia v porovnaní s Cournotovým modelom oligopolu. Mierny pokles oproti 1. situácii majú hráči 2 a 4, čo by mohlo znamenať preferenciu nasledovať hráča 1 ako vodcu

na rozdiel od hráča 3. Avšak dôležité je si skontrolovať, či si hráč 3 môže dovoliť byť vodcom. Podľa jeho hraníc  $X_3 = [0, 150]$  je jeho maximálna produkcia 150, takže byť vodcom s produkciou 225.25 si nemôže dovoliť. Preto sa pozrime na situáciu, kde hráč 3 ako vodca produkciu nastaví na svoju maximálnu hodnotu.

| Hráč    | Množstvo produkcie | Výplata  |
|---------|--------------------|----------|
| 1       | 102.323            | 10 459.9 |
| 2       | 38.108             | 2 904.37 |
| 3-vodca | 150                | 17 348.4 |
| 4       | 28.581             | 2 032.13 |

Tabuľka 5.7: Stackelbergov model s hráčom 3 ako vodcom - maximálna hranica

Vidíme, že hráč 3 je stále najsilnejším hráčom na trhu. Vyrobí síce o 75.25 menej výrobkov ako keby bol vodca, ktorý si určuje produkciu maximalizáciou výplatnej funkcie s produkciami ostatných hráčov ako parametre - tabuľka 5.6, ale výplatu si pohorší iba o 2 191.9 jednotiek. Môžeme si aj všimnúť, že aj ostatní hráči si prílepšia. Hráči 2 a 4 by teraz boli spokojnejší s vodcom - hráč 3, ktorý za produkciu si určuje svoju maximálnu hranicu. Porovnajme teraz objem produkcie a cenu výrobkov z tabuliek 5.6 a 5.7:

| Tabuľka | Objem produktu inteligentných hráčov | Celkový objem produktu | Jednotková cena produktu | Celková výplata trhu |
|---------|--------------------------------------|------------------------|--------------------------|----------------------|
| 5.6     | 348.14                               | 914.806                | 85.194                   | 27 624.53            |
| 5.7     | 319.01                               | 885.677                | 114.323                  | 32 744.8             |

Tabuľka 5.8 : Stackelbergov model s vodcom hráča 3 - celková štatistika

Celková výplata všetkých hráčov je výrazne vyššia, ako to bolo v prípade vodcovstva hráča 3 podľa maximalizácie a taktiež je vyššia ako v situácii, kde bol vodcom hráč 1 - tabuľka 5.5. Stále, z hľadiska všeobecnej spokojnosti hráčov, ostáva najlepším Cournotov model. Stackelbergov model je zatiaľ výhodný iba pre vodcu.

3.situácia: Hráči 1 a 3 si určia svoje vodcovské produkcie a hráči 2 a 4 si určia svoje maximálne produkcie z predchádzajúcich modelov, čo u hráča 2 je 41.24 a u hráča 4 to je

30.93, čo sú produkcie z Cournotovho modelu. Očakávame zvýšenie celkovej produkcie, keďže každý zvýši práve tu svoju.

| Hráč | Množstvo produkcie | Výplata   |
|------|--------------------|-----------|
| 1    | 200.167            | -210.901  |
| 2    | 41.24              | -1 247.25 |
| 3    | 150                | 1 849.45  |
| 4    | 30.93              | -1 104.88 |

Tabuľka 5.9: Stackelbergov model s vybratými produkciami

Už pri prvom pohľade na tabuľku je nám zrejmé, že takýto model nebude žiadaný ani jedným hráčom. Hráči 1, 2 a 4 majú dokonca záporné výplaty, čo značí nielen neziskovosť, ale dokonca stratu, ktorú musia doplácať. Pozrime sa ešte na celkovú produkciu a cenu. Tieto faktory nám vysvetlia situáciu, ktorá nastala.

| Objem produktu inteligentných hráčov | Celkový objem produktu | Jednotková cena produktu | Celková výplata trhu |
|--------------------------------------|------------------------|--------------------------|----------------------|
| 422.337                              | 989.004                | 10.996                   | -713.581             |

Tabuľka 5.10 : Stackelbergov model s vybranými produkciami - celková štatistika

Celkový objem produkcie je omnoho vyšší ako v predchádzajúcich modeloch. Keďže cena produktu sa odvíja od funkcie:  $f(t) = 1\,000 - t$ , kde  $t$  je celkový objem produkcie, nie je nečakaná takáto nízka cena. Tento príklad poukazuje na to, že nie je dobrý nápad za každú cenu vyrábať čo najvyššie množstvo, ak si to trh nežiada. Funkcia  $f(t)$  bola vytvorená na základe princípu dopytu a ponuky, a tvar funkcie popisuje trh, kde maximum požadovaného tovaru je 1 000 jednotiek tovaru. Naplniť trh toľkými výrobkami, blízko ku maximu požadovaných zákazními, je dobré akurát pre zákazníkov. To si môžeme všimnúť na jednotkovej cene produktu. Hráči - firmy by v takom prípade mali zhodnotiť vôbec vstup na taký trh.

V záverečnej podkapitole si zhrnieme porovnania modelov oligopolu na danom príklade 5.2.

### 5.3 Porovnanie modelov oligopolu príkladu 5.2

Už z modelového príkladu 3.3 očakávame najnižší celkový objem produkcie v Cournotovom modeli, s čím sa spája najvyššia celková výplata na trhu. Vodcovia v Stackelbergovom modeli by si oproti Cournotovmu modelu mali vždy polepšiť, vo výške vlastnej produkcie ako aj vo výške svojej výplaty. Jednotková cena sa nepriamo úmerne odvíja iba od celkovej produkcie, čiže najvyššiu cenu očakávame u Cournotovho modelu.

Kvôli prítomnosti viacerých hráčov a modelov, tabuľky porovnania modelov rozdelíme do viacerých skupín. Najprv sa pozrieme na jednotlivé produkcie hráčov. Červenou farbou zvýrazníme najvyššiu produkciu pre každého hráča. Naopak, modrou označíme najnižšiu produkciu. Najvyššie produkcie sú vždy 2. Keďže posledný model bol navrhnutý tak, aby vyberal z predchádzajúcich najvyššiu produkciu. Nás bude zaujímať, v akých modeloch hráči dosiahnu svoje maximá a minimá.

| Model                                    | Hráč 1<br>produkcia | Hráč 2<br>produkcia | Hráč 3<br>produkcia | Hráč 4<br>produkcia |
|------------------------------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| <b>Cournot</b>                           | <b>111.721</b>      | <b>41.24</b>        | <b>125.721</b>      | <b>30.93</b>        |
| <b>Stackelberg -<br/>vodca hráč 1</b>    | <b>200.167</b>      | <b>29.828</b>       | <b>91.483</b>       | <b>22.371</b>       |
| <b>Stackelberg -<br/>vodca hráč 3</b>    | <b>102.323</b>      | <b>38.108</b>       | <b>150</b>          | <b>28.581</b>       |
| <b>Stackelberg<br/>vybraté produkcie</b> | <b>200.167</b>      | <b>41.24</b>        | <b>150</b>          | <b>30.93</b>        |

Výsledná tabuľka 5.1 : Jednotlivé produkcie hráčov

Pre zopakovanie, výsledné produkcie dostaneme z výplatných funkcií, ktoré sme získali prechodom ku stredným hodnotám, aby sme brali do úvahy aj neinteligentných hráčov. Samotné modely majú svoj vlastný algoritmus na určenie konkrétnej produkcie. Všimnime si, že hráči 1 a 3 svoju maximálnu produkciu dosahujú v Stackelbergovom modeli ako vodcovia. Naopak, hráči 2 a 4 maximum dosahujú v Cournotovom modeli. V podkapitole 5.1.1 sme predpokladali, že v Stackelbergovom modeli práve hráči 2 a 4 nemajú na to, aby sa stali vodcami. Tento predpoklad sme určili z dôvodu ich nízkych hraníc produkcie:

$X_2 = [0, 45]$  a  $X_4 = [0, 35]$ . Svojou maximálnou produkciou sa nedotáhajú ani na polovicu toho, čo ponúkajú hráči 1 a 3 v ľubovoľnom vyššie spomenutom modeli. Z hľadiska produkcie sa zdá, že hráčom 2 a 4 by viac vyhovoval Cournotov model. Spolu s hráčom 3 by sa radi chceli vyhnúť Stackelbergovmu modelu s hráčom 1 ako vodcom, keďže vtedy títo hráči majú najnižšie produkcie. Výška produkcia ale nie je hlavným parametrom rozhodovania, je to maximálna výplata. Pozrime sa na výslednú tabuľku výplat jednotlivých hráčov:

| Model                                    | Hráč 1<br>výplata | Hráč 2<br>výplata | Hráč 3<br>výplata | Hráč 4<br>výplata |
|------------------------------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| <b>Cournot</b>                           | 12 471.6          | <b>3 401.53</b>   | 15 705.8          | <b>2 381.7</b>    |
| <b>Stackelberg -<br/>vodca hráč 1</b>    | <b>15 499.7</b>   | 1 779.41          | 8 269.3           | 1 241.15          |
| <b>Stackelberg -<br/>vodca hráč 3</b>    | 10 459.9          | 2 904.37          | <b>17 348.4</b>   | 2 032.13          |
| <b>Stackelberg<br/>vybraté produkcie</b> | <b>-210.901</b>   | <b>-1 247.25</b>  | <b>1 849.45</b>   | <b>-1 104.88</b>  |

Výsledná tabuľka 5.2 : Jednotlivé výplaty hráčov

Pri maximálnych výplatách sa žiadne prekvapenie nekoná. Hráči, ktorí v modeli mali svoju najväčšiu produkciu, majú taktiež v tom istom modeli svoju maximálnu výplatu - čistý zisk. Taktiež pre hráčov 2 a 4 je výhodnejšie nasledovať hráča 3 v Stackelbergovom modeli, keďže rozdiel výplat medzi ich maximálnou výplatou a výplaty v modeli s týmto vodcom je nižší, ako v prípade nasledovania hráča 1. V poslednom modeli máme suverénne najnižšie výplaty. Dôvodom je, ako bolo spomenuté v predchádzajúcej podkapitole, vysoký objem produkcie pre daný trh. Môžeme s určitou pravdepodobnosťou blízkej k jednej povedať, že tento model nepreferuje ani jeden z hráčov.

Tu sa pekne odzrkadľuje dôležitosť správneho určenia produkcie. Bez sledovania trhu urobí hráč chybu veľmi ľahko. Ak by nesledoval cenovú funkciu trhu, kde sa cena odvíja od celkového objemu produkcie a nezarátal by tam napríklad odhad produkcie neinteligentných hráčov, svojím konkrétnym objemom by pomohol "prestreliť" požadovaný objem zákazníkmi a to by viedlo nie len ku zníženiu jeho výplaty, ale aj ostatných inteligentných hráčov. Mať informácie o ostatných hráčoch, ich nákladových

funkciách a o trhu je veľmi silná vedomosť, ktorého ignorovanie sa môže prirovnávať ku neinteligentnému správaniu.

Teraz si prejdeme priehľadnú štatistiku trhu: koľko produktov sa tam nachádza a za akú cenu sa predáva:

| Model                                | Objem produktu inteligentných hráčov | Celkový objem produktu | Jednotková cena produktu | Celková výplata trhu |
|--------------------------------------|--------------------------------------|------------------------|--------------------------|----------------------|
| <b>Cournot</b>                       | <b>309.612</b>                       | <b>876.279</b>         | <b>123.721</b>           | <b>33 906.63</b>     |
| <b>Stackelberg - vodca hráč 1</b>    | 343.849                              | <b>910.516</b>         | <b>89.484</b>            | <b>26 789.56</b>     |
| <b>Stackelberg - vodca hráč 3</b>    | <b>319.01</b>                        | <b>885.677</b>         | <b>114.323</b>           | <b>32 744.8</b>      |
| <b>Stackelberg vybraté produkcie</b> | <b>422.337</b>                       | <b>989.004</b>         | <b>10.996</b>            | <b>-713.581</b>      |

Výsledná tabuľka 5.3 : Celková štatistika trhu pre rôzne modely

Vo výslednej tabuľke 5.3 naozaj vidieť, že s rastúcim objemom produkcie klesá cena rapídne rýchlejšie. S tým ide ruka v ruke zníženie celkovej výplaty na trhu. Skúsme si položiť otázku: ktorý model je najlepší pre hráčov? Za hlavné kritérium pri rozhodovaní budeme považovať celkovú výplatu na trhu. Vylučovacou metódou môžeme vyškrtnúť posledný model, kde si hráči vybrali svoje čo najvyššie produkcie. Dôvodom je úplná neziskovosť na trhu a inteligentný hráč by na neziskovosť nepristúpil. Ako sme už vyššie spomenuli, takýto model by vyhovoval zákazníkom, keďže cena produktu je príliš nízka. V realite by sa niečo také nestalo, preto odmietame považovať tento model za najlepší.

S druhou najnižšou výplatou je Stackelbergov model, kde hráč 1 je vodcom. Jediný hráč, ktorý by si vybral tento model je samotný vodca - hráč 1. Nikomu z ostatných hráčov tento model nevyhovuje, preto by prirodzene k nemu neinklinovali. Jedine v jednom prípade. Ak hráč 1 bol jediný na trhu a teda fungoval monopol s jediným rozdielom, že ostatným hráčom monopolista umožnil vstup na trh. Vtedy by noví hráči prirodzene začali nasledovať silnejšieho hráča.

Analogický prípad je v prípade hráča 3 ako vodcu s upravenou produkciou, kde zvolí svoju maximálnu možnú produkciu. Avšak celková výplata na trhu je rozhodne vyššia ako v predošlom prípade. Traja hráči zo štyroch si prilepšujú na svojich výplatách. Teda, ak by si hráči 2 a 4 mohli vybrať, koho chcú za vodcu, vyberú si bez váhania hráča 3.

Posledným modelom, kde je najvyššia celková výplata a najvyššia cena jednotky produktu, je Cournotov model. Hráči 2 a 4 dosahujú svoje maximá produkcie v porovnaní s predošlými modelmi. Vo výslednej tabuľke 5.2 vidíme, že ani hráči 1 a 3 nemajú až tak nízke výplaty v porovnaní s ich vodcovskými výplatami. Na prvý pohľad sa zdá, že práve Cournotov model je najlepším riešením, aby boli všetci ako tak spokojní. Je to práve preto, ako sme popísali v podkapitole 4.1, lebo výsledok Cournotovho modelu je Cournotova-Nashova rovnováha. Pripomeňme si, čo z definície znamená Nashova rovnováha. Je to taká množina akcií, že zvolením inej akcie hráč nezíska vyššiu výplatu. To sa presne stane aj v tomto prípade. Ak by ľubovoľný hráč zvolil inú produkciu, a nie Cournotovu-Nashovu rovnováhu, zníži sa mu výplata. V prípade, ak si ju zvýši o väčšie množstvo, zníži výplatu aj ostatným hráčom, čo vyplýva z nepriamej úmery objemu produkcie a ceny výrobku.

Z vyššie spomenutých dôvodov tvrdíme, že najlepším modelom oligopolu viacerých hráčov, kde na trhu sa objavujú aj náhodné mechanizmy, je Cournotov model. Naším úvodným predpokladom bol aj fakt, že hráči spolu nespolupracujú, teda najlepším riešením je hľadanie Nashovej rovnováhy. Videli sme, že určovať produkciu podľa pocitu, alebo za každých okolností ju navyšovať na maximum, nie je správnym krokom. Stackelbergov model má svoje opodstatnenie, hlavne v prípade, ak je jeden hráč schopný dodať veľmi vysoké množstvo produktu na trh a prirodzene sa stáva vodcom. Alebo, ako bolo viackrát spomenuté, bol na trhu prvý a ostatní hráči podriadili svoje produkcie vodcovi.

## Záver

V práci sme venovali dostatočný priestor vysvetleniu základných pojmov z mikroekonómie a teórie hier. Zaujímala nás rozhodovacia situácia, kde je prítomné riziko. Prítomnosť rizika znamená, že sa tam nachádzajú náhodné mechanizmy riadiace sa nejakými rozloženiami pravdepodobnosti. Vďaka poznatkom z teórie hier sme boli schopní sa vysporiadať s takouto rozhodovacou situáciou. Hlavným prínosom tejto práce je predovšetkým zrozumiteľné vysvetlenie problematiky a navrhnúť program, schopný aplikovať algoritmus na vyhodnotenie situácie za prítomnosti rizika. Vytvoriť taký program sa nám podarilo pomocou poznatkov z mikroekonómie, matematickej analýzy a z využitia integrovaných funkcií jazyka Wolfram. Následne je program schopný vypočítať jednotlivé objemy produkcie, výplaty jednotlivých hráčov a celkový objem produkcie. Na základe simulovaného príkladu v programe sme vyhodnotili dva rôzne modely oligopolu: Cournotov a Stackelbergov model.

Tie sme navzájom porovnávali z hľadiska vypočítaných neznámych. Vyšlo nám to, čo sme očakávali z teórie. **Stackelbergov model** je výhodný iba pre vodcu trhu, pre jeho nasledovníkov už veľmi nie je. K tomu modelu sa hráči dopracujú pravdepodobne len vtedy, ak jeden hráč bol prvý na trhu a ostatní sa pridali až neskôr v časovom horizonte. Ich rozhodnutie nasledovať vodcu je slobodné a neznamena to spoluprácu, skôr sa dá chápať ako prispôsobenie situácii. Inak najlepším modelom oligopolu, za predpokladu úplnej informácie o trhu a nespolupráce medzi hráčmi, je **Cournotov model**. Riešením takého modelu získavame Cournot-Nashovu rovnováhu, ktorá už z definície znamená optimálne riešenie nekooperatívneho modelu hry. Ani jednému hráčovi sa neoplatí zmeniť svoju produkciu, iba si tým pohorší. Vyskúšali sme aj model, kde si hráči určili vlastné objemy produkcie a to sa hneď zobrazilo na výplatách, že to rozhodne nie je najlepším ťahom. Matematika za strategickým rozhodovaním nepustí a poukazuje na to, že Nashova rovnováha je naozaj najlepším riešením nekooperatívneho modelu.



## Zoznam použitej literatúry

1. PERLOFF, M. J. 2012. *Microeconomics*. 6th ed. ISBN 978-0-13-139263-2
2. MAŇAS, M. 1991. *Teorie her a její aplikace*. První vydání. SNTL, Praha. ISBN 04-022-91.
3. MAŇAS, M. 1974. *Teorie her a optimálního rozhodování*. První vydání. SNTL, Praha. ISBN 04-012-74.
4. OSBORNE, M. J. 2003. *An Introduction to Game Theory*. 1st ed. Oxford University Press, ISBN 978-0195128956
5. KADANE, J.B. 2011. *Principles of Uncertainty*. 1st ed. Chapman and Hall/CRC , ISBN 978-1439861615
6. RICHARDSON, L. F. 2008. *Advanced Calculus: An Introduction to Linear Analysis*. 1st ed. Wiley-Interscience, ISBN 978-0470232880

## Zoznam použitých online zdrojov

- A. <https://www.acdcecon.com/micro-econ-videos>