

SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE

Stavebná fakulta

Evidenčné číslo: SvF-5343-63355

**Inflow-implicit/outflow-explicit metódy riešenia
parciálnych diferenciálnych rovníc na
nerovnomernych sieťach**

Diplomová práca

Študijný program: matematicko-počítačové modelovanie

Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika

Školiace pracovisko: Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie

Vedúci záverečnej práce: prof. RNDr. Karol Mikula, DrSc.

Bratislava 2018

Bc. Lenka Hrapková



ZADANIE DIPLOMOVEJ PRÁCE

Študentka: **Bc. Lenka Hrapková**
ID študenta: 63355
Študijný program: matematicko-počítačové modelovanie
Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika
Vedúci práce: prof. RNDr. Karol Mikula, DrSc.

Názov práce: **Inflow-implicit/outflow-explicit metódy riešenia parciálnych
diferenciálnych rovníc na nerovnomerných siet'ach**

Jazyk, v ktorom sa práca vypracuje: slovenský jazyk

Špecifikácia zadania:

Témou práce je riešenie rovnice advekcie pomocou moderných numerických metód konečných objemov. Cieľom je otestovať rôzne rekonštrukcie gradientu numerického riešenia v spojení so semi-implicitnou metódou inflow-implicit/outflow-explicit a získanie tak efektívnej a stabilnej metódy druhého rádu presnosti. Na testovanie bude použité porovnanie numerického riešenia s reprezentatívnymi príkladmi analytických riešení pre rovnicu advekcie prostredníctvom experimentálneho rádu konvergenzie (EOC).

Riešenie zadania práce od: 01. 10. 2017

Dátum odovzdania práce: 10. 05. 2018

Bc. Lenka Hrapková
študentka

prof. RNDr. Radko Mesiar, DrSc.
vedúci pracoviska

prof. RNDr. Karol Mikula, DrSc.
garant študijného programu

Pod'akovanie

Svoje pod'akovanie venujem vedúcemu práce prof. RNDr. Karolovi Mikulovi, DrSc. za odbornú pomoc, usmerňovanie pri písaní diplomovej práce, trpezlivosť a predovšetkým ochotu. Chcela by som sa pod'akovať taktiež Ing. Matejovi Medľovi, za cenné rady a pripomienky na konzultáciách ohľadom odvádzaných numerických schém a Ing. Marekovi Macákovi, PhD. za ústretovosť a technickú pomoc. V neposlednom rade ďakujem rodine a blízkym za nekonečnú podporu a pochopenie.

Čestné prehlásenie

Čestne vyhlasujem, že diplomovú prácu Inflow-implicit/outflow-explicit metódy riešenia parciálnych diferenciálnych rovníc na nerovnomerných sieťach som vypracovala samostatne, s odbornou pomocou vedúceho práce a na základe štúdia odbornej literatúry.

Bratislava, 10.05.2018

.....

Vlastnoručný podpis

Abstrakt:

Diplomová práca prezentuje riešenie parciálnych diferenciálnych rovníc pomocou moderných numerických metód na logicky štvoruholníkových nerovnomerných sieťach v dvojdimenzionálnom priestore. Objektom skúmania práce je parciálna diferenciálna rovnica advekcie a jej riešenie explicitnou metódou, priamou implicitno-explicitnou metódou (ang. *inflow-implicit/outflow-explicit method*) a nepriamou-iteračnou semi-implicitnou metódou s využitím metódy konečných objemov. V diplomovej práci sa zameriavame na využitie rôzne skonštruovaných nerovnomerných sietí a skúmame efektivitu viacerých metód určených na výpočet gradientu funkcie v reprezentačnom bode konečného objemu. Cieľom práce je prepojiť priamu implicitno-explicitnú metódu s rekonštrukciou riešenia na hranách za pomoci určenia gradientu metódou najmenších štvorcov.

Kľúčové slová: nerovnomerná sieť, metóda konečných objemov, rovnica advekcie, explicitná metóda, priama implicitno-explicitná metóda, nepriama-iteračná semi-implicitná metóda, bilineárna interpolácia, metóda *diamond cell*, metóda najmenších štvorcov

Abstract:

This diploma thesis presents the solution of partial differential equations using modern numerical methods on logically quadrilateral non-uniform domains in a two-dimensional space. The objective of the work study is the partial differential advection equation and its solution by an explicit method, direct inflow-implicit/outflow-explicit method and indirect-iterative semi-implicit method with the additional use of the finite volume method. In this thesis we focus on the use of differently constructed non-uniform grids, and we observe the effectiveness of several methods for calculating function gradient at the representative point of finite volume. The aim of the thesis is to connect the direct implicit-explicit method with the reconstruction of the edge solution by means of a gradient determination by the least squares method.

Key words: non-uniform grid, finite volume method, advection equation, explicit method, direct implicit-explicit method, indirect-iterative semi-implicit method, bilinear interpolation, diamond cell method, least square method

Obsah

1	Úvod	1
2	Nerovnomerná sieť	4
2.1	Center shifted sieť	4
2.2	Corner shifted sieť	7
3	Bilineárna interpolácia pre nerovnomernú sieť	10
3.1	Bez použitia mapovacej funkcie	10
3.2	Mapovaním na jednotkový štvorec	12
4	Výpočet gradientu	16
4.1	Metóda <i>diamond cell</i>	16
4.2	Metóda <i>least square gradient</i>	17
5	Numerické schémy	20
5.1	Explicitná schéma	22
5.2	Inflow-implicit/outflow-explicit schéma	23
5.2.1	IIOE na center shifted sieti	24
5.2.1.1	Plochy trojuholníkov	25
5.2.1.2	Prevrátené hodnoty plôch	26
5.2.1.3	Prevrátené hodnoty vzdialeností	26
5.2.1.4	Matica systému	27
5.2.2	IIOE na corner shifted sieti	35
5.2.2.1	Matica systému	35
5.3	Nepriama-iteračná inflow-implicit/outflow-explicit metóda	39
6	Numerické experimenty	40
6.1	Explicitná metóda na corner shifted sieti	43
6.1.1	<i>Diamond cell</i>	43
6.1.2	<i>Least square gradient</i>	48
6.2	IIOE metóda	53
6.2.1	IIOE na center shifted sieti	53
6.2.1.1	Plochy trojuholníkov	53

6.2.1.2	Prevrátené hodnoty plôch	55
6.2.1.3	Prevrátené hodnoty vzdialeností	58
6.2.2	IIOE na corner shifted sieti	60
6.3	Nepriama-iteračná IIOE metóda na corner shifted sieti	63
6.3.1	<i>Diamond cell</i>	64
6.3.2	<i>Least square gradient</i>	67
7	Záver	72
	Literatúra	74

Zoznam skratiek a značiek

2D - dvojdimenzionálny priestor

3D - trojdimenzionálny priestor

IIOE - inflow-implicit/outflow-explicit

LSG - *least square gradient*

EOC - experimentálny rád konverencie (z ang. *experimental order of convergence*)

1 Úvod

Všade okolo nás sa dejú jednoduché i komplikované deje, ktoré si častokrát azda vôbec neuvedomujeme. Ved' kto z nás rozmýšľa nad príčinami osiežujúceho vánku v horúce letné dni? Koľkí z nás sa zamýšľajú nad spôsobom, akým tečú rieky pri prechádzke prírodou? Uvažuje niekto z nás nad podstatou šírenia zvuku pri počúvaní obľúbenej hudby?

Svet ako taký je pre ľudí bezodnotu inšpiráciou. Ponúka nám milióny dôvodov, prečo neprestať byť zvedavými a pokračovať v skúmaní do hĺbky. Relevantnou otázkou zostáva, koľko výskumov by bolo možné úspešne vykonávať bez adekvátnych matematických modelov. Azda každý fyzikálne podložený dej má svoje ekvivalentné matematické vyjadrenie. Matematické formulácie majú najčastejšie tvar rovníc, resp. nerovníc, a spolu s istými empirickými zákonmi vytvárajú ucelený kompaktný model.

Jednou z najpoužívanějších matematických rovníc popisujúcich fyzikálne deje je rovnica advekcie. Advekčná rovnica je parciálnou diferenciálnou rovnicou modelujúcou napríklad šírenie znečistenia v podzemných vodách, prúdenie plynov, pohyb zvukových vĺn v čase. Využíva sa teda predovšetkým na opis tých procesov, ktoré v sebe nesú myšlienku transportu.

Ani riešenie matematických úloh však nie je v každej situácii neobmedzené. Nie vždy sme schopní zostrojiť takzvané analytické riešenie, ktoré by vyjadrovalo presné riešenie danej úlohy. V takých prípadoch prechádzame k numerickým metódam, ktorých hlavnou úlohou je zostrojiť čo najlepšie metódy pre aproximáciu presného riešenia. Na spomenuté obmedzenia narážame aj v prípade rovnice advekcie. Existujú, samozrejme, situácie, v ktorých je presné riešenie známe. Tieto prípady využívame na vývoj numerických metód, pretože poukazujú na presnosť odvodených schém.

V praxi sa často riešia úlohy matematického modelovania na nerovnomerných sieťach. Nerovnomerné siete veľa krát lepšie vystihujú reálnu oblasť záujmu. Uvažujeme napríklad úlohu riešenia parciálnych diferenciálnych rovníc nad reálnou topografiou zeme. Takáto matematická formulácia by mohla modelovať prúdenie vzduchu v atmosfére alebo úlohu výpočtu tiažového poľa zeme. Nevyhnutnosť použitia nerovnomerných sietí vidíme aj v simuláciách procesu horenia v spaľovacích motoroch automobilov. Práve spaľovacími motormi a procesom horenia modelovaným parciálnymi diferenciálnymi rovnicami sa zaoberá spoločnosť AVL. AVL je najväčšou nezávislou spoločnosťou na svete v oblasti vývoja pohonných systémov s vnútorným spaľovacím motorom. Jednou z motivácií

diplomovej práce je aj spolupráca AVL s Katedrou matematiky a deskriptívnej geometrie. Spoločnosť využíva k svojim simuláciám aj rovnicu advekcie, pričom manipuluje s komplikovanými nerovnomernými 3D sieťami. Požiadavkou AVL je vyvinutie metódy druhého rádu presnosti pre riešenie parciálnych diferenciálnych rovníc na nerovnomerných sieťach.

Pri písaní diplomovej práce nedisponujeme reálnymi nerovnomernými sieťami, preto ich sami simulujeme. Na umelo vytvorených sieťach následne testujeme odvodené metódy. Z rovnomernej siete dokážeme aplikáciou niekoľkých krokov získať simulácie nerovnomerných sietí. V práci vychádzame z logicky štvoruholníkových oblastí s reprezentačnými bodmi zastupujúcimi hodnotu riešenia na určitej podoblasti. Intuitívny spôsob, ako získať z takejto rovnomernej siete nerovnomernú, je posúvať jej reprezentačné body a následne vytvoriť hranice štvoruholníkových podoblastí. Postup je síce veľmi jednoduchý, no môže so sebou priniest určitú nepresnosť. Druhým spôsobom vytvorenia nerovnomernej siete je posúvanie rohov štvoruholníkov a následné dodefinovanie reprezentačných bodov. Tento spôsob tvorby nerovnomernej siete zachováva reprezentačné body v ťažiskách konečných objemov, na rozdiel od prvého spôsobu vytvárania nerovnomernej siete. Posun rohových bodov však môže skomplikovať ďalšie výpočty. Opisom tvorby oboch druhov nerovnomernej siete, ich pozitívami a negatívami sa zaoberáme v druhej kapitole.

V tretej kapitole sa venujeme bilineárnej interpolácii na nerovnomerných sieťach. Bilineárna interpolácia je potrebná na aproximáciu hodnoty riešenia v rohových uzloch spomenutých štvoruholníkov. Hodnotu riešenia v rohoch konečných objemov potrebujeme uvažovať pre následný výpočet gradientu v reprezentačných bodoch. Keďže nechceme úlohu komplikovať, nebudeme uvažovať riešenia v rohových uzloch ako ďalšie neznáme. Radšej sa pokúsime hodnoty približne určiť. Využitie bilineárnej interpolácie však nie je na nerovnomerných sieťach také jednoduché ako v prípade rovnomerných oblastí. Tretia kapitola preto uvádza dva prístupy využitia interpolácie.

Štvrtá kapitola sa zameriava na dva rôzne spôsoby výpočtu hodnoty gradientu funkcie v reprezentačnom bode štvoruholníkovej podoblasti. Gradient je dôležitým aspektom v metódach uvedených v diplomovej práci. Aj vďaka nemu sme schopní definovať, ako sa bude šíriť pozorovaná veličina v danom rýchlostnom poli z jednej štvoruholníkovej oblasti do druhej. Kapitola odvádza metódu *diamond cell* založenú na tvorbe *diamond cell* buniek

na hranách štvoruholníka s využitím váženého priemeru pre dosiahnutie hodnoty výsledného gradientu. Druhá časť kapitoly sa sústreďí na metódu *least square gradient* využívajúcu metódu najmenších štvorcov. Táto metóda prináša menej náročný postup z hľadiska počtu aritmetických operácií pri dosiahnutí porovnateľnej presnosti. V nami realizovaných experimentoch je dosiahnutá presnosť dokonca lepšia pri riešení istých typov úloh.

Samotné numerické schémy riešiace rovnicu advekcie s využitím metódy konečných objemov a up-wind princípu odvádzame v piatej kapitole. Svoju pozornosť sústredíme najprv na explicitnú schému, jej rád konverencie a stabilitu. Následne nadväzujeme na [6, 7, 8], vyvíjame implicitno-explicitnú metódu pre nerovnomerné siete a jej modifikáciu ústiacu do nepriamej-iteračnej metódy podobne ako v [3]. Prepájame priamu semi-implicitnú metódu s rekonštrukciou riešenia na hranách, pričom využívame myšlienky [2, 3]. Základnou ideou týchto metód je využitie starého časového kroku pre tú časť schémy, ktorá charakterizuje výtok. Časť schémy charakterizujúcu vtok uvažujeme v novom časovom kroku, čím nechávame metódu určiť hodnoty toku pritekajúceho do jednotlivých štvoruholníkových oblastí - konečných objemov.

V poslednej šiestej kapitole testujeme odvodené schémy na konkrétnych úlohách. Odpovedáme na otázky ohľadne konverencie, stability a presnosti všetkých uvedených metód. Číselne i vizuálne porovnáваме metódy so známym presným riešením, no i metódy medzi sebou.

2 Nerovnomerná sieť

Jednotlivé metódy, uvedené ďalej v práci, sú numericky testované na nerovnomerných sieťach. V rámci numerických experimentov využívame dva prístupy na tvorbu nerovnomernej siete. V oboch prípadoch je výsledná sieť logicky štvoruholníková, čiže môžeme využiť rovnakú indexáciu konečných objemov ako v prípade rovnomernej štvoruholníkovej siete. Nerovnomernosť je zabezpečená pripočítavaním náhodného čísla rovnomerného rozdelenia pravdepodobnosti k súradniciam špecifických bodov siete.

2.1 Center shifted sieť

Pri využívaní tohto spôsobu vytvárania nerovnomernej siete začíname s logicky štvoruholníkovou rovnomernou sieťou v 2D. Reprezentačné body všetkých konečných objemov sa v prípade rovnomernej siete nachádzajú v ťažiskách jednotlivých konečných objemov.

Nech je v 2D daná výpočtová oblasť $I = I_1 \times I_2$, $m(I_1)$ nech je dĺžka intervalu I_1 , uvažovaného na osi x , a $m(I_2)$ nech je dĺžka intervalu I_2 , uvažovaného na osi y . Nech N_1 označuje počet konečných objemov výpočtovej oblasti v smere osi x , N_2 nech je počet konečných objemov v smere osi y . Nech je p_1 počet radov konečných objemov reprezentujúcich okrajové podmienky smerom na východ, nech sa smerom na západ nachádza rovnaký počet radov konečných objemov reprezentujúcich okrajové podmienky. Podobne, nech je p_2 počet radov konečných objemov reprezentujúcich okrajové podmienky smerom na sever a nech sa smerom na juh nachádza rovnaký počet radov konečných objemov reprezentujúcich okrajové podmienky. V ďalších častiach práce využívame Dirichletove okrajové podmienky predpisujúce v každom čase hodnotu riešenia. Prvý rad okrajových podmienok zo severu, juhu, východu aj západu sa nachádza vo výpočtovej oblasti I , pričom platí, že reпреzentačné body takýchto konečných objemov sa nachádzajú na príslušnej hranici oblasti. Keďže sa na hranici oblasti nachádzajú reпреzentačné body prvého radu okrajových podmienok a predpokladajúc, že v rovnomernej sieti sú tieto body umiestnené v ťažiskách konečných objemov, k celkovému počtu konečných objemov nachádzajúcich sa vo výpočtovej oblasti musíme pripočítať aj polovice konečných objemov z východnej, západnej, severnej a južnej strany. Tieto polovice definujú časti spomenutých prvých radov okrajových podmienok. Pokiaľ je v schémach potrebné použiť dodatočné

konečné objemy reprezentujúce okrajové podmienky, tak sú tieto doplnkové konečné objemy umiestnené mimo výpočtovej oblasti. Doplnkové konečné objemy využívame pri výpočte gradientu v reprezentačných bodoch tých konečných objemov, ktoré charakterizujú okrajové podmienky.

Potom pre rovnomernú sieť platí, že veľkosť priestorového kroku v smere osi x je definovaná počtom tých konečných objemov, ktoré sa nachádzajú v samotnej výpočtovej oblasti v smere danej osi. V našom prípade tejto podmienke vyhovuje N_1 konečných objemov, ktoré nereprezentujú okrajové podmienky, ale aj časť konečných objemov reprezentujúcich okrajové podmienky. Priestorovú diskretizáciu h_1 v smere osi x môžeme definovať nasledujúcim vzťahom

$$h_1 = \frac{m(I_1)}{N_1 + 1}. \quad (2.1)$$

Veľkosť priestorového kroku h_2 v smere osi y definujeme analogicky

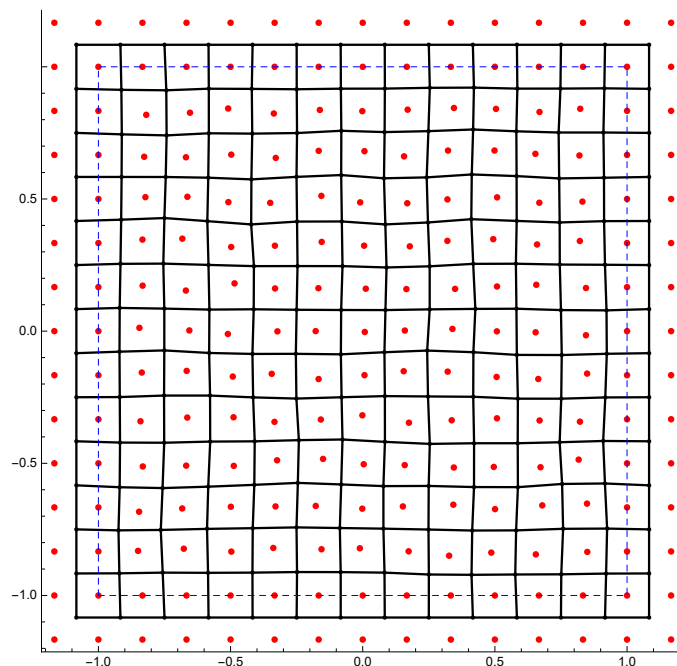
$$h_2 = \frac{m(I_2)}{N_2 + 1}. \quad (2.2)$$

K oboom súradniciam reprezentačných bodov tých konečných objemov, ktoré nedefinujú okrajové podmienky, pripočítame náhodné čísla $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ z rovnomerného rozdelenia pravdepodobnosti $R(-perturb * h_1, perturb * h_1)$, resp. $R(-perturb * h_2, perturb * h_2)$

$$\varepsilon_1 \sim R(-perturb * h_1, perturb * h_1), \quad \varepsilon_2 \sim R(-perturb * h_2, perturb * h_2), \quad (2.3)$$

h_1 zodpovedá definícii (2.1), h_2 zodpovedá definícii (2.2). Premenná *perturb* definuje veľkosť perturbácie, teda umožňuje reguláciu veľkosti náhodného posunutia. Rovnomernú mriežku by sme dosiahli voľbou *perturb* = 0. Pre numerické experimenty uvedené v práci platí *perturb* $\in \{0.001, 0.01, 0.05, 0.1\}$. Z náhodne posunutých reprezentačných bodov sa určia nové rohy konečných objemov ako priemer štyroch okolitých reprezentačných bodov.

Takto vytvorená sieť bude naďalej logicky štvoruholníková, no nerovnomerná. Je dôležité poznamenať, že popísaný postup vytvárania nerovnomernej siete nezachová reprezentačné body v ťažiskách príslušných konečných objemov, čo môže prispieť k nepresnosti numerických schém. Postup vytvárania rohových uzlov, ako priemer okolitých štyroch reprezentačných bodov, výrazne uľahčí aplikáciu metódy *diamond cell* používanú na výpočet gradientu funkcie. Takto vytvorenú nerovnomernú sieť budeme označovať ako *center shifted*. Uvažujme výpočtovú oblasť $I = [-1, 1] \times [-1, 1]$. Príklad nerovnomernej siete vytvorenej hore uvedeným postupom uvádzame na Obrázku 2.1. Obrázok 2.1 demonštruje sieť s dodatočnými konečnými objemami a reprezentačnými bodmi. Modrou prerušovanou čiarou je naznačená hranica výpočtovej oblasti I .



Obr. 2.1: Nerovnomerná sieť vytvorená posunutím reprezentačných bodov s perturbáciou o veľkosti 0.1

Pridanie náhodného čísla k súradniciam reprezentačných bodov určitých konečných objemov zmení rovnomernú sieť na nerovnomernú, v dôsledku čoho sa predĺžia alebo skrátia hrany konečných objemov. Tabuľka 2.1 a Tabuľka 2.2 uvádzajú priemernú dĺžku hrany h^* konečného objemu, hodnotu najdlhšej a najkratšej hrany po vytvorení nerovnomernej siete pre rôzny počet konečných objemov a rozdielne hodnoty perturbácií. Pri vytváraní oboch tabuliek uvažujeme výpočtovú oblasť I . Uvedenú výpočtovú oblasť uvažujeme vo všetkých numerických experimentoch v práci. Platí $N = N_1 = N_2$.

N	20					40				
perturb.	0.1	0.05	0.01	0.001	0.0	0.1	0.05	0.01	0.001	0.0
h^*	0.0952705	0.0952462	0.0952384	0.0952381	0.0952381	0.0487982	0.0487849	0.0487807	0.0487805	0.0487805
h_{min}	0.0873848	0.0913114	0.0944528	0.0951596	0.0952381	0.0445636	0.046672	0.0483588	0.0487383	0.0487805
h_{max}	0.103368	0.0993004	0.0960501	0.0953193	0.0952381	0.052723	0.0507483	0.0491735	0.0488198	0.0487805

Tabuľka 2.1: Priemerná dĺžka hrany h^* , maximálna dĺžka hrany h_{max} , minimálna dĺžka hrany h_{min} konečného objemu pri posunutí reprezentačných bodov konečných objemov pre $N=20$ a $N=40$ s rôzne veľkou perturbáciou

N	80					160				
perturb.	0.1	0.05	0.01	0.001	0.0	0.1	0.05	0.01	0.001	0.0
h^*	0.024701	0.0246938	0.0246915	0.0246914	0.0246914	0.0124274	0.0124236	0.0124224	0.0124224	0.0124224
h_{min}	0.0224385	0.0235616	0.0244649	0.0246687	0.0246914	0.0112737	0.0118412	0.0123051	0.0124106	0.0124224
h_{max}	0.026843	0.0257669	0.0249064	0.0247129	0.0246914	0.0136099	0.013016	0.0125411	0.0124342	0.0124224

Tabuľka 2.2: Pokračovanie Tabuľky 2.1 pre $N=80$ a $N=160$

2.2 Corner shifted sieť

Náš druhý spôsob vytvárania nerovnomernej siete vychádza taktiež z logiky štvoruholníkovej rovnomernej siete v 2D, ktorej reprezentačné body sú umiestnené v ťažiskách konečných objemov.

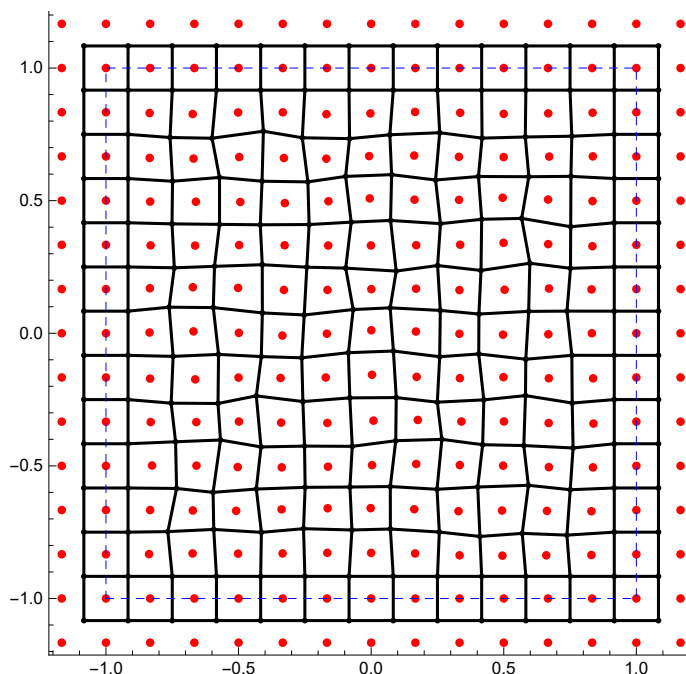
Opäť uvažujeme výpočtovú oblasť $I = I_1 \times I_2$ s dĺžkou $m(I_1)$ intervalu I_1 a s dĺžkou $m(I_2)$ intervalu I_2 . Počet konečných objemov výpočtovej oblasti v smere osi x značíme N_1 , teda rovnako ako v predošlej podkapitole. Analogicky je zachované značenie N_2 pre počet konečných objemov v smere osi y . Ani počet N_1 , ani počet N_2 nezahŕňa okrajové podmienky. Počet radov konečných objemov reprezentujúcich okrajové podmienky smerom na východ je definovaný premennou p_1 , pričom smerom na západ sa nachádza rovnaký počet radov konečných objemov reprezentujúcich okrajové podmienky. Počet radov konečných objemov reprezentujúcich okrajové podmienky smerom na sever označujeme p_2 , pričom smerom na juh sa nachádza opäť rovnaký počet radov konečných objemov reprezentujúcich okrajové podmienky. Analogicky s predchádzajúcou podkapitolou platí, že prvý rad okrajových podmienok zo všetkých štyroch smerov sa nachádza vo výpočtovej oblasti I a ich reprezentačné body sú na hraniciach oblasti. V prípade potreby použitia dodatočných radov okrajových podmienok, sú doplnkové konečné objemy umiestnené mimo výpočtovej oblasti. Opísaná situácia s doplnkovými konečnými objemami sa vyskytuje, podobne ako v prípade center shifted siete, pri výpočte hodnoty gradientu v reprezentačnom bode konečného objemu zastupujúceho okrajovú podmienku. Veľkosť priestorovej diskretizácie v smere osi x je pre rovnomernú mriežku definovaná vzťahom (2.1), pre veľkosť priestorového kroku v smere osi y platí na rovnakej mriežke vzťah (2.2).

K obom súradniciam niektorých bodov rovnomernej siete budeme opäť pripočítavať náhodné čísla rovnomerného rozdelenia pravdepodobnosti R v zmysle vzťahov (2.3), aby sme získali nerovnomernú sieť.

Na rozdiel od prvého opísaného postupu vytvárania nerovnomernej siete, v tomto prípade

pripočítavame náhodné čísla k súradniciam rohových bodov konečných objemov. Rohové body tých konečných objemov, ktoré definujú okrajové podmienky, zostávajú nezmenené. Nové reprezentačné body konečných objemov sa následne určia ako priemer príslušných štyroch posunutých rohových bodov.

Takto vytvorená sieť bude nerovnomerná a naďalej logicky štvoruholníková. Významnou vlastnosťou siete sú reprezentačné body nachádzajúce sa v ťažiskách konečných objemov. Z tohto dôvodu budeme sieť označovať ako *corner shifted*. Nech je daná oblasť $I = [-1, 1] \times [-1, 1]$. Nerovnomerná sieť vytvorená uvedeným postupom na výpočtovej oblasti I je znázornená na Obrázku 2.2. Zobrazené sú aj dodatočné konečné objemy, reprezentačné body a prerušovaná čiara naznačuje hranicu oblasti I .



Obr. 2.2: Nerovnomerná sieť vytvorená posunutím rohových bodov konečných objemov s veľkosťou perturbácie 0.1

Pre výpočtovú oblasť I uvádzame v Tabuľke 2.3 a v Tabuľke 2.4 priemernú mieru, teda priemernú dĺžku h^* , hrany konečného objemu, minimálnu a maximálnu dĺžku hrany pre siete s takými počtami konečných objemov, ktoré využívame aj v ďalších numerických experimentoch. Opäť platí $N = N_1 = N_2$. Uvádzame príklady rôzne perturbovaných sietí.

N	20					40				
perturb.	0.1	0.05	0.01	0.001	0.0	0.1	0.05	0.01	0.001	0.0
h^*	0.0954436	0.0952894	0.0952401	0.0952381	0.0952381	0.0489146	0.048814	0.0487818	0.0487805	0.0487805
h_{min}	0.0773043	0.0861954	0.0934193	0.095056	0.0952381	0.0392465	0.0440103	0.0478261	0.048685	0.0487805
h_{max}	0.114755	0.104824	0.097123	0.0954251	0.0952381	0.0583993	0.0535849	0.049741	0.048877	0.0487805

Tabuľka 2.3: Priemerná dĺžka hrany h^* , maximálna dĺžka hrany h_{max} , minimálna dĺžka hrany h_{min} konečného objemu pri posunutí rohových bodov konečných objemov pre $N=20$ a $N=40$ s rôzne veľkou perturbáciou

N	80					160				
perturb.	0.1	0.05	0.01	0.001	0.0	0.1	0.05	0.01	0.001	0.0
h^*	0.0247671	0.0247103	0.0246921	0.0246914	0.0246914	0.0124623	0.0124323	0.0124228	0.0124224	0.0124224
h_{min}	0.019852	0.0222532	0.0242006	0.024642	0.0246914	0.00998314	0.0111956	0.0121763	0.012397	0.0124224
h_{max}	0.0297047	0.0271389	0.0251772	0.02474	0.0246914	0.0149606	0.0136778	0.0126707	0.012447	0.0124224

Tabuľka 2.4: Pokračovanie Tabuľky 2.3 pre $N=80$ a $N=160$

3 Bilineárna interpolácia pre nerovnomernú sieť

Uvažujme nerovnomernú sieť vytvorenú jedným z dvoch opísaných postupov. Nech je v 2D daný reprezentačný bod $\mathbf{x}_p = (x_p, y_p)$ konečného objemu p , v ktorom sa snažíme aproximovať hodnotu funkcie $u(x, y) : R^2 \rightarrow R$ pomocou bilineárnej interpolácie. Uvažujme interpolačnú funkciu $g(x, y) : R^2 \rightarrow R$ v tvare polynómu

$$g(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy, \quad a_0, a_1, a_2, a_3 \in R. \quad (3.1)$$

Vzťah (3.1) napovedá, že vykonávame lineárnu interpoláciu najprv v smere osi x a následne v smere osi y . K aproximácii hodnoty funkcie u v bode $\mathbf{x}_p$ využijeme známe hodnoty tejto funkcie v reprezentačných bodoch okolitých konečných objemov.

3.1 Bez použitia mapovacej funkcie

Nech sú dané štyri body $\mathbf{x}_{q_1} = (x_{q_1}, y_{q_1})$, $\mathbf{x}_{q_2} = (x_{q_2}, y_{q_2})$, $\mathbf{x}_{q_3} = (x_{q_3}, y_{q_3})$, $\mathbf{x}_{q_4} = (x_{q_4}, y_{q_4})$ na nerovnomernej sieti a nech sú známe hodnoty funkcie u v týchto štyroch bodoch, pričom platí $u_{q_1} = u(\mathbf{x}_{q_1})$, $u_{q_2} = u(\mathbf{x}_{q_2})$, $u_{q_3} = u(\mathbf{x}_{q_3})$, $u_{q_4} = u(\mathbf{x}_{q_4})$. Dosadením súradníc reprezentačných bodov $\mathbf{x}_{q_1}, \mathbf{x}_{q_2}, \mathbf{x}_{q_3}, \mathbf{x}_{q_4}$ a známych hodnôt $u_{q_1}, u_{q_2}, u_{q_3}, u_{q_4}$ do vzťahu (3.1) dostávame sústavu štyroch rovníc s neznámymi koeficientami a_0, a_1, a_2, a_3 .

$$\begin{bmatrix} 1 & x_{q_1} & y_{q_1} & x_{q_1}y_{q_1} \\ 1 & x_{q_2} & y_{q_2} & x_{q_2}y_{q_2} \\ 1 & x_{q_3} & y_{q_3} & x_{q_3}y_{q_3} \\ 1 & x_{q_4} & y_{q_4} & x_{q_4}y_{q_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{q_1} \\ u_{q_2} \\ u_{q_3} \\ u_{q_4} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Riešením systému (3.2) získavame hodnoty koeficientov a_0, a_1, a_2, a_3 . Spätným dosadením týchto hodnôt a súradníc reprezentačného bodu $\mathbf{x}_p$ do (3.1) dostávame výslednú aproximáciu hodnoty $u(\mathbf{x}_p)$. Sústavu (3.2) sme vyriešili analyticky pomocou softvéru *Mathematica* pre všeobecné reprezentačné body $\mathbf{x}_{q_1}, \mathbf{x}_{q_2}, \mathbf{x}_{q_3}, \mathbf{x}_{q_4}$ a hodnoty $u_{q_1}, u_{q_2}, u_{q_3}, u_{q_4}$, aby sme poukázali na veľké množstvo aritmetických operácií, ktoré sa musia vykonať pre vyriešenie daného systému za predpokladu, že k riešeniu nebude použitá žiadna numerická metóda, napríklad *Biconjugate Gradient Method*. Je dôležité poznamenať, že nepresnosť opísanej metódy sa zvyšuje so zväčšujúcou sa vzdialenosťou bodov $\mathbf{x}_{q_1}, \mathbf{x}_{q_2}, \mathbf{x}_{q_3}, \mathbf{x}_{q_4}$ od bodu $\mathbf{x}_p$. Pokiaľ budú spomenuté body príliš ďaleko od seba, nebude možné adekvátne zachytiť priebeh funkcie u medzi nimi.

$$\begin{aligned}
a_0 = & [x_{q_2}(x_{q_3}(y_{q_2}-y_{q_3})(y_{q_1}-y_{q_4})-x_{q_4}(y_{q_1}-y_{q_3})(y_{q_2}-y_{q_4}))+x_{q_1}(x_{q_4}(y_{q_2}-y_{q_3})(y_{q_1}-y_{q_4}) \\
& -x_{q_3}(y_{q_1}-y_{q_3})(y_{q_2}-y_{q_4})+x_{q_2}(y_{q_1}-y_{q_2})(y_{q_3}-y_{q_4}))+x_{q_3}x_{q_4}(y_{q_1}-y_{q_2})(y_{q_3}-y_{q_4})]^{-1} \\
& [-u_{q_2}x_{q_1}x_{q_4}y_{q_1}y_{q_3}+u_{q_2}x_{q_3}x_{q_4}y_{q_1}y_{q_3}+u_{q_1}x_{q_2}x_{q_4}y_{q_2}y_{q_3}-u_{q_1}x_{q_3}x_{q_4}y_{q_2}y_{q_3} \\
& +u_{q_4}(x_{q_2}x_{q_3}y_{q_1}(y_{q_2}-y_{q_3})+x_{q_1}(x_{q_2}(y_{q_1}-y_{q_2})y_{q_3}+x_{q_3}y_{q_2}(-y_{q_1}+y_{q_3}))) \\
& +u_{q_2}x_{q_1}x_{q_3}y_{q_1}y_{q_4}-u_{q_2}x_{q_3}x_{q_4}y_{q_1}y_{q_4}-u_{q_1}x_{q_2}x_{q_3}y_{q_2}y_{q_4}+u_{q_1}x_{q_3}x_{q_4}y_{q_2}y_{q_4} \\
& -u_{q_2}x_{q_1}x_{q_3}y_{q_3}y_{q_4}+u_{q_1}x_{q_2}x_{q_3}y_{q_3}y_{q_4}+u_{q_2}x_{q_1}x_{q_4}y_{q_3}y_{q_4}-u_{q_1}x_{q_2}x_{q_4}y_{q_3}y_{q_4} \\
& +u_{q_3}(x_{q_2}x_{q_4}y_{q_1}(-y_{q_2}+y_{q_4})+x_{q_1}(x_{q_4}y_{q_2}(y_{q_1}-y_{q_4})+x_{q_2}(-y_{q_1}+y_{q_2})y_{q_4})))] \\
\end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}
a_1 = & [x_{q_2}(x_{q_3}(y_{q_2}-y_{q_3})(y_{q_1}-y_{q_4})-x_{q_4}(y_{q_1}-y_{q_3})(y_{q_2}-y_{q_4}))+x_{q_1}(x_{q_4}(y_{q_2}-y_{q_3})(y_{q_1}-y_{q_4}) \\
& -x_{q_3}(y_{q_1}-y_{q_3})(y_{q_2}-y_{q_4})+x_{q_2}(y_{q_1}-y_{q_2})(y_{q_3}-y_{q_4}))+x_{q_3}x_{q_4}(y_{q_1}-y_{q_2})(y_{q_3}-y_{q_4})]^{-1} \\
& [u_{q_2}x_{q_1}y_{q_1}y_{q_3}-u_{q_2}x_{q_3}y_{q_1}y_{q_3}-u_{q_1}x_{q_2}y_{q_2}y_{q_3}+u_{q_1}x_{q_3}y_{q_2}y_{q_3}+u_{q_4}(x_{q_1}y_{q_1}(y_{q_2}-y_{q_3}) \\
& +x_{q_3}(y_{q_1}-y_{q_2})y_{q_3}+x_{q_2}y_{q_2}(-y_{q_1}+y_{q_3}))-u_{q_2}x_{q_1}y_{q_1}y_{q_4}+u_{q_2}x_{q_4}y_{q_1}y_{q_4}+u_{q_1}x_{q_2}y_{q_2}y_{q_4} \\
& -u_{q_1}x_{q_4}y_{q_2}y_{q_4}-u_{q_1}x_{q_3}y_{q_3}y_{q_4}+u_{q_2}x_{q_3}y_{q_3}y_{q_4}+u_{q_1}x_{q_4}y_{q_3}y_{q_4}-u_{q_2}x_{q_4}y_{q_3}y_{q_4} \\
& +u_{q_3}(x_{q_2}y_{q_2}(y_{q_1}-y_{q_4})+x_{q_4}(-y_{q_1}+y_{q_2})y_{q_4}+x_{q_1}y_{q_1}(-y_{q_2}+y_{q_4})))] \\
\end{aligned} \tag{3.4}$$

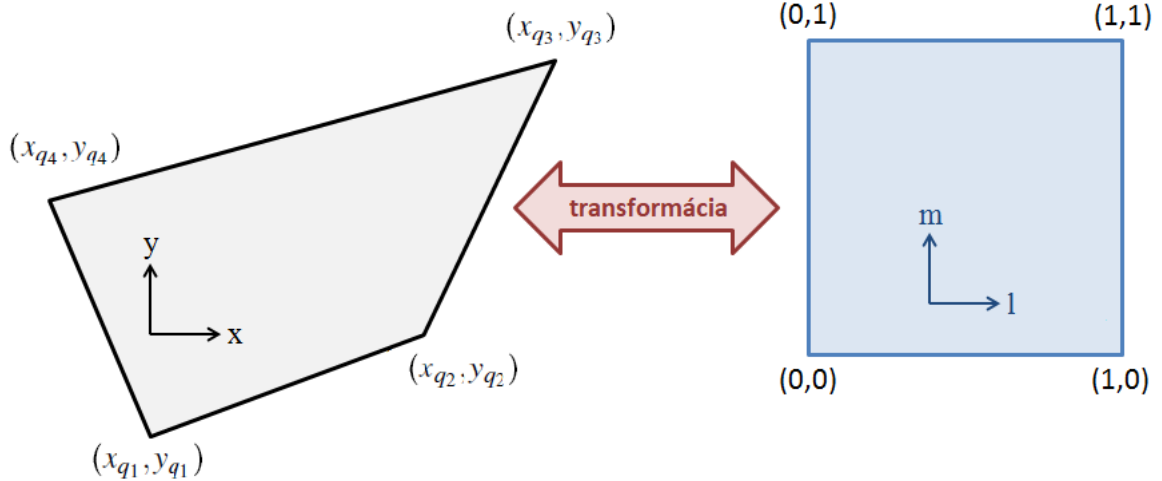
$$\begin{aligned}
a_2 = & [x_{q_2}(x_{q_3}(y_{q_2}-y_{q_3})(y_{q_1}-y_{q_4})-x_{q_4}(y_{q_1}-y_{q_3})(y_{q_2}-y_{q_4}))+x_{q_1}(x_{q_4}(y_{q_2}-y_{q_3})(y_{q_1}-y_{q_4}) \\
& -x_{q_3}(y_{q_1}-y_{q_3})(y_{q_2}-y_{q_4})+x_{q_2}(y_{q_1}-y_{q_2})(y_{q_3}-y_{q_4}))+x_{q_3}x_{q_4}(y_{q_1}-y_{q_2})(y_{q_3}-y_{q_4})]^{-1} \\
& [-u_{q_2}x_{q_1}x_{q_3}y_{q_1}+u_{q_2}x_{q_1}x_{q_4}y_{q_1}+u_{q_1}x_{q_2}x_{q_3}y_{q_2}-u_{q_1}x_{q_2}x_{q_4}y_{q_2}+u_{q_2}x_{q_1}x_{q_3}y_{q_3}-u_{q_1}x_{q_2}x_{q_3}y_{q_3} \\
& +u_{q_1}x_{q_3}x_{q_4}y_{q_3}-u_{q_2}x_{q_3}x_{q_4}y_{q_3}+u_{q_4}(x_{q_2}x_{q_3}(-y_{q_2}+y_{q_3})+x_{q_1}(-x_{q_2}y_{q_1}+x_{q_3}y_{q_1}+x_{q_2}y_{q_2} \\
& -x_{q_3}y_{q_3}))-u_{q_2}x_{q_1}x_{q_4}y_{q_4}+u_{q_1}x_{q_2}x_{q_4}y_{q_4}-u_{q_1}x_{q_3}x_{q_4}y_{q_4}+u_{q_2}x_{q_3}x_{q_4}y_{q_4} \\
& +u_{q_3}(x_{q_2}x_{q_4}(y_{q_2}-y_{q_4})+x_{q_1}(x_{q_2}y_{q_1}-x_{q_4}y_{q_1}-x_{q_2}y_{q_2}+x_{q_4}y_{q_4})))] \\
\end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned}
a_3 = & [x_{q_2}(x_{q_3}(y_{q_2}-y_{q_3})(y_{q_1}-y_{q_4}) - x_{q_4}(y_{q_1}-y_{q_3})(y_{q_2}-y_{q_4})) + x_{q_1}(x_{q_4}(y_{q_2}-y_{q_3})(y_{q_1}-y_{q_4}) \\
& - x_{q_3}(y_{q_1}-y_{q_3})(y_{q_2}-y_{q_4}) + x_{q_2}(y_{q_1}-y_{q_2})(y_{q_3}-y_{q_4})) + x_{q_3}x_{q_4}(y_{q_1}-y_{q_2})(y_{q_3}-y_{q_4})]^{-1} \\
& [(u_{q_4}(-x_{q_1}+x_{q_2}) + u_{q_2}(x_{q_1}-x_{q_4}) + u_{q_1}(-x_{q_2}+x_{q_4}))(x_{q_3}(y_{q_1}-y_{q_2}) + x_{q_1}(y_{q_2}-y_{q_3}) \\
& + x_{q_2}(-y_{q_1}+y_{q_3})) + (u_{q_3}(x_{q_1}-x_{q_2}) + u_{q_1}(x_{q_2}-x_{q_3}) + u_{q_2}(-x_{q_1}+x_{q_3}))(x_{q_4}(y_{q_1}-y_{q_2}) \\
& + x_{q_1}(y_{q_2}-y_{q_4}) + x_{q_2}(-y_{q_1}+y_{q_4})))]
\end{aligned} \tag{3.6}$$

3.2 Mapovaním na jednotkový štvorec

Nech je v 2D opäť daný bod $\mathbf{x}_p = (x_p, y_p)$, v ktorom sa snažíme aproximovať hodnotu funkcie u . Nech sú ďalej známe body $\mathbf{x}_{q_1} = (x_{q_1}, y_{q_1})$, $\mathbf{x}_{q_2} = (x_{q_2}, y_{q_2})$, $\mathbf{x}_{q_3} = (x_{q_3}, y_{q_3})$, $\mathbf{x}_{q_4} = (x_{q_4}, y_{q_4})$ tvoriace všeobecný nerovnomerný štvoruholník. Nech sa bod $\mathbf{x}_p$ nachádza vo vnútri tohto štvoruholníka.

Aproximáciu hodnoty $u(\mathbf{x}_p)$ odvodzame podľa [10]. Všeobecný štvoruholník určený bodmi $\mathbf{x}_{q_1}$, $\mathbf{x}_{q_2}$, $\mathbf{x}_{q_3}$, $\mathbf{x}_{q_4}$ prevedieme pomocou mapovacej funkcie na jednotkový štvorec. Nerovnomerný štvoruholník aj jednotkový štvorec uvádzame na Obrázku 3.1.



Obr. 3.1: Všeobecný štvoruholník a jeho transformácia na jednotkový štvorec

Hľadáme transformáciu medzi bodmi (x, y) pôvodného štvoruholníka a bodmi (l, m) nového jednotkového štvorca

$$(x, y) = f(l, m), \quad l \in [0, 1], m \in [0, 1]. \tag{3.7}$$

Od transformácie navyše požadujeme, aby platilo

$$\begin{aligned}(x_{q_1}, y_{q_1}) &= f(0, 0), \\(x_{q_2}, y_{q_2}) &= f(1, 0), \\(x_{q_3}, y_{q_3}) &= f(1, 1), \\(x_{q_4}, y_{q_4}) &= f(0, 1).\end{aligned}\tag{3.8}$$

Pre nájdenie hľadanej mapovacej funkcie využijeme v oboch súradniciach x aj y pôvodného nerovnomerného štvoruholníka bilineárnu interpoláciu

$$\begin{aligned}x &= \alpha_1 + \alpha_2 l + \alpha_3 m + \alpha_4 lm, \\y &= \beta_1 + \beta_2 l + \beta_3 m + \beta_4 lm.\end{aligned}\tag{3.9}$$

Za pomoci vzťahov (3.8) a bilineárnej interpolácie x -ovej súradnice z (3.9) definujeme sústavu štyroch rovníc, ktorá poukazuje na vzťah medzi x -ovými súradnicami pôvodného štvoruholníka a vektorom neznámych parametrov α

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix}.\tag{3.10}$$

Analogicky zostrojíme sústavu štyroch rovníc, ktorá definuje vzťah medzi y -ovými súradnicami pôvodného štvoruholníka a vektorom neznámych parametrov β

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{Bmatrix}.\tag{3.11}$$

Obe strany rovnice (3.10) vynásobíme zľava maticou inverznou k matici sústavy (3.10)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix}.\tag{3.12}$$

Analogicky pre násobíme obe strany sústavy (3.11) zľava maticou inverznou k matici sústavy

(3.11)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{Bmatrix}. \quad (3.13)$$

Analytickým riešením systému (3.12) dostávame výsledný vektor parametrov α

$$\alpha = \begin{Bmatrix} x_1 \\ -x_1 + x_2 \\ -x_1 + x_4 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \end{Bmatrix}. \quad (3.14)$$

Po analytickom vyriešení sústavy (3.13) získavame výsledný vektor parametrov β

$$\beta = \begin{Bmatrix} y_1 \\ -y_1 + y_2 \\ -y_1 + y_4 \\ y_1 - y_2 + y_3 - y_4 \end{Bmatrix}. \quad (3.15)$$

Keďže sú už všetky zložky vektora α aj vektora β známe, môžeme z prvej rovnice uvedenej v (3.9) vyjadriť jednu z hľadaných súradníc jednotkového štvorca. Vyjadrime vzťah pre prvú zo súradníc štvorca

$$l = \frac{x - \alpha_1 - \alpha_3 m}{\alpha_2 + \alpha_4 m}. \quad (3.16)$$

Dosaďme vzťah (3.16) do vyjadrenia y-ovej súradnice v (3.9)

$$y = \beta_1 + \beta_2 \frac{x - \alpha_1 - \alpha_3 m}{\alpha_2 + \alpha_4 m} + \beta_3 m + \beta_4 \frac{x - \alpha_1 - \alpha_3 m}{\alpha_2 + \alpha_4 m} m. \quad (3.17)$$

Ekvivalentnými úpravami (3.17) dostávame kvadratickú rovnicu premennej m

$$(\alpha_4 \beta_3 - \alpha_3 \beta_4) m^2 + (\alpha_4 \beta_1 - \alpha_1 \beta_4 + \alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2 + x \beta_4 - y \alpha_4) m + (\alpha_2 \beta_1 - \alpha_1 \beta_2 + x \beta_2 - y \alpha_2) = 0. \quad (3.18)$$

Označme členy stojace pri premennej m^i , $i = 0, 1, 2$, v (3.18)

$$\begin{aligned} a &= \alpha_4 \beta_3 - \alpha_3 \beta_4, \\ b &= \alpha_4 \beta_1 - \alpha_1 \beta_4 + \alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2 + x \beta_4 - y \alpha_4, \\ c &= \alpha_2 \beta_1 - \alpha_1 \beta_2 + x \beta_2 - y \alpha_2. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Vyriešením kvadratickej rovnice (3.18) dostávame výsledný vzťah pre druhú súradnicu, m , bodu v jednotkovom štvorci

$$m = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad (3.20)$$

Spätným dosadením vypočítanej hodnoty súradnice m do vzťahu (3.16) určíme súradnicu l , čím sme dostali transformované súradnice (l, m) pôvodného bodu (x, y) .

Opísaným postupom sme získali bod v jednotkovom štvorci. Považujeme za dôležité spomenúť, že pri hľadaní vhodnej mapovacej funkcie sme síce využili transformáciu rohov nerovnomerného štvoruholníka na rohy jednotkového štvorca, no samotná hodnota funkcie u zostáva nezmenená. Platí $u_{q_1} = u(x_{q_1}, y_{q_1}) = u(0, 0)$, $u_{q_2} = u(x_{q_2}, y_{q_2}) = u(1, 0)$, $u_{q_3} = u(x_{q_3}, y_{q_3}) = u(1, 1)$, $u_{q_4} = u(x_{q_4}, y_{q_4}) = u(0, 1)$. Pre hľadanú hodnotu funkcie u v bode $\mathbf{x}_p$ analogicky platí $u(x_p, y_p) = u(l_p, m_p)$.

Pre aproximáciu hodnoty $u(l_p, m_p)$ využijeme opäť bilineárnu interpoláciu. Keďže už pracujeme na jednotkovom štvorci a vieme, že sa funkčná hodnota v jeho vrcholoch po transformácii zachovala, môžeme súradnice vrcholov a ich funkčné hodnoty postupne dosádzať do (3.1). Dostávame systém štyroch rovníc s neznámymi v podobe koeficientov bilineárnej interpolácie

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{q_1} \\ u_{q_2} \\ u_{q_3} \\ u_{q_4} \end{bmatrix}. \quad (3.21)$$

Po vyriešení sústavy (3.21) dostávame vzťah

$$u(l_p, m_p) \approx u_{q_1} + (-u_{q_1} + u_{q_2})l_p + (-u_{q_1} + u_{q_4})m_p + (u_{q_1} - u_{q_2} + u_{q_3} - u_{q_4})l_p m_p. \quad (3.22)$$

Úpravou výrazu na pravej strane v (3.22) dostávame výsledný vzťah pre aproximáciu hľadanej hodnoty

$$u(l_p, m_p) \approx u_{q_1}(1 - l_p)(1 - m_p) + u_{q_2}l_p(1 - m_p) + u_{q_3}l_p m_p + u_{q_4}(1 - l_p)m_p. \quad (3.23)$$

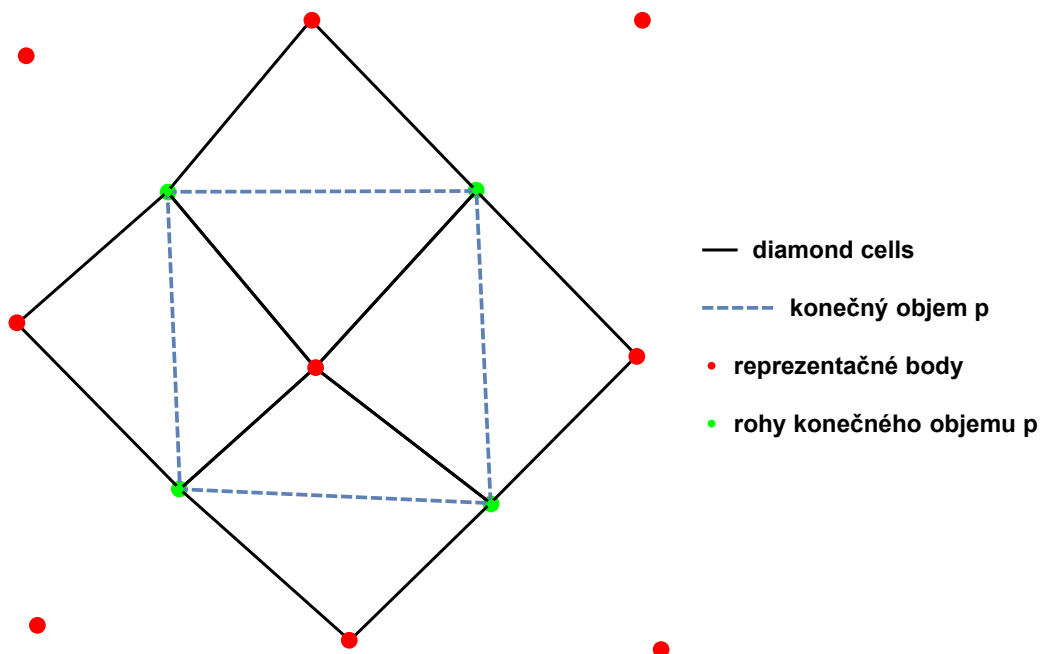
Môžeme si všimnúť, že transformáciou nerovnomerného štvoruholníka na jednotkový štvorec sa výrazne zjednoduší výsledný vzťah pre aproximáciu hodnoty funkcie v známom bode oproti vzťahom uvedeným v predošlej podkapitole.

4 Výpočet gradientu

V práci využívame na výpočet gradientu dve metódy. Metódu *diamond cell* a metódu *least square gradient*. Základné princípy metód uvádzame v časti 4.1 a 4.2.

4.1 Metóda *diamond cell*

Metódu odvodzame v 2D podľa [5, 1]. Nech je daný konečný objem p a nech je e_{pq} hrana konečného objemu p . Nech je q taký konečný objem, ktorý má s konečným objemom p spoločnú hranu e_{pq} . Okolo hrany e_{pq} skonštruujeme bunku *diamond cell* označenú D , ktorej vrcholy sú reprezentačné body konečných objemov p a q a koncové body hrany e_{pq} . Koncové body hrany e_{pq} sú zároveň rohovými bodmi konečného objemu p . Hodnoty v rohových bodoch získame v prípade center shifted siete ako priemer hodnôt v okolitých štyroch reprezentačných bodoch. V prípade corner shifted siete môžeme hodnotu v rohovom bode konečného objemu aproximovať pomocou bilineárnej interpolácie. Popísaná situácia je graficky znázornená na Obrázku 4.1.



Obr. 4.1: Výpočet gradientu na konečnom objeme p pomocou metódy *diamond cell*

Na bunke D budeme gradient $\nabla_D u$ považovať za konštantný. Označme $\overline{\nabla_D u}$ priemernú hodnotu gradientu na bunke D . Nech $m(D)$ je miera D . Potom platí

$$\overline{\nabla_D u} = \frac{1}{m(D)} \int_D \nabla u dx. \quad (4.1)$$

Nech je $\mathbf{n}_D$ jednotkový vektor vonkajšej normály k bunke D . Na vzťah (4.1) aplikujeme Greenovu vetu, čím prevedieme objemový integrál na plošný.

$$\overline{\nabla_D u} = \frac{1}{m(D)} \int_{\partial D} u \mathbf{n}_D ds. \quad (4.2)$$

Nech ∂D označuje hranicu bunky D . Označme σ hranu ∂D , ktorej koncové body sú $N_1(\sigma)$ a $N_2(\sigma)$. Nech sú hodnoty riešenia v bodoch $N_1(\sigma)$, $N_2(\sigma)$ definované ako $u_{N_1(\sigma)}$, $u_{N_2(\sigma)}$. Nech je $m(\sigma)$ dĺžka hrany σ a $\mathbf{n}_\sigma$ je jednotkový vektor vonkajšej normály ku hrane σ . Výsledný konštantný gradient $\nabla_D u$ na bunke D vyjadríme pomocou nasledujúceho vzťahu

$$\nabla_D u = \frac{1}{m(D)} \sum_{\sigma \in \partial D} m(\sigma) \frac{1}{2} (u_{N_1(\sigma)} + u_{N_2(\sigma)}) \mathbf{n}_\sigma. \quad (4.3)$$

Pre výpočet gradientu v reprezentačnom bode $\mathbf{x}_p$ konečného objemu p opakujeme opísaný postup na každej hrane ∂p . Označme takto získané gradienty na hranách ∂p podľa svetových strán $\nabla_{p_n} u$ (z ang. *north* - sever), $\nabla_{p_s} u$ (*south* - juh), $\nabla_{p_w} u$ (*west* - západ), $\nabla_{p_e} u$ (*east* - východ). Váhy, ktorými prispievajú jednotlivé čiastkové gradienty do výsledného gradientu v reprezentačnom bode značíme v rovnakom duchu w_n , w_s , w_w , w_e . Výsledný gradient definujeme ako vážený priemer čiastkových gradientov so zavedenými váhami.

$$\nabla_p u = \frac{w_n \nabla_{p_n} u + w_s \nabla_{p_s} u + w_w \nabla_{p_w} u + w_e \nabla_{p_e} u}{w_n + w_s + w_w + w_e}. \quad (4.4)$$

4.2 Metóda *least square gradient*

Metódu odvodíme v 2D podľa [9, 11]. Gradient $\nabla_p u$ v reprezentačnom bode $\mathbf{x}_p$ konečného objemu p môžeme určiť pomocou metódy najmenších štvorcov [4] (ang. *least square method*) na základe reprezentačných bodov $\mathbf{x}_q$ susedných konečných objemov q a hodnôt riešenia v daných reprezentačných bodoch nasledujúcim vzťahom

$$u_q = u_p + \nabla_p u \cdot (\mathbf{x}_q - \mathbf{x}_p) - \varepsilon_q, \quad (4.5)$$

kde u_p označuje hodnotu riešenia v reprezentačnom bode $\mathbf{x}_p$ konečného objemu p , u_q definuje hodnotu riešenia v susednom reprezentačnom bode $\mathbf{x}_q$ konečného objemu q . Chybu vnesenú do výpočtu aproximáciou označujeme ε_q . Nech pre gradient $\nabla_p u$ v bode $\mathbf{x}_p$ platí

$$\nabla_p u = \begin{bmatrix} \frac{\partial u(\mathbf{x}_p)}{\partial x} \\ \frac{\partial u(\mathbf{x}_p)}{\partial y} \end{bmatrix}. \quad (4.6)$$

Nech pre označenie zložiek reprezentačného bodu konečného objemu p platí $\mathbf{x}_p = (x_p, y_p)$. Analogicky platí $\mathbf{x}_q = (x_q, y_q)$. Nech ďalej pre rozdiel zložiek reprezentačných bodov $\mathbf{x}_q$ a $\mathbf{x}_p$ platí $x_{pq} = x_q - x_p$ a $y_{pq} = y_q - y_p$.

Ekvivalentnými úpravami prevádzame vzťah (4.5) do tvaru

$$u_q - u_p = \nabla_p u \cdot (\mathbf{x}_q - \mathbf{x}_p) - \varepsilon_q. \quad (4.7)$$

V ďalších častiach práce využívame k aproximácii gradientu iba tie susedné konečné objemy q , ktoré majú s konečným objemom p spoločnú hranu. Metóda však nie je obmedzená spomenutou voľbou susedných konečných objemov. Vo všeobecnosti môžeme uvažovať všetky tie konečné objemy, ktoré sa nachádzajú v požadovanej, nami zvolenej, vzdialenosti od konečného objemu p . Metóda má za úlohu minimalizovať sumu štvorcov reziduí. V prípade nami zvolených susedných konečných objemov je suma štvorcov reziduí daná vzťahom

$$\sum_{q \in N(p)} \varepsilon_q^2 = \sum_{q \in N(p)} \left((u_q - u_p - \nabla_p u \cdot (\mathbf{x}_q - \mathbf{x}_p)) \right)^2. \quad (4.8)$$

Pre účely odvádzania ďalších krokov metódy, upravujeme vzťah (4.8) do ekvivalentného, rozšíreného, tvaru

$$\sum_{q \in N(p)} \varepsilon_q^2 = \sum_{q \in N(p)} \left(u_q - u_p - \frac{\partial u(\mathbf{x}_p)}{\partial x} (x_q - x_p) - \frac{\partial u(\mathbf{x}_p)}{\partial y} (y_q - y_p) \right)^2. \quad (4.9)$$

Výraz na pravej strane rovnice (4.9) nazveme účelovou funkciou, pričom nezávislé premenné tejto funkcie sú zložky vektora $\nabla_p u$.

Úlohou metódy najmenších štvorcov je, v prípade aproximácie gradientu, minimalizácia účelovej funkcie v oboch zložkách gradientu $\nabla_p u$

$$\nabla_p u = \arg \min \sum_{q \in N(p)} \left(u_q - u_p - \frac{\partial u(\mathbf{x}_p)}{\partial x} (x_q - x_p) - \frac{\partial u(\mathbf{x}_p)}{\partial y} (y_q - y_p) \right)^2. \quad (4.10)$$

Pre nájdenie minima úlohy (4.10) musíme derivácie účelovej funkcie podľa oboch zložiek gradientu $\nabla_p u$ položiť rovné nule. Derivujme účelovú funkciu podľa prvej zložky vektora gradientu, teda podľa $\frac{\partial u(\mathbf{x}_p)}{\partial x}$, a položíme tento výraz rovný nule.

$$\sum_{q \in N(p)} 2 \left(u_q - u_p - \frac{\partial u(\mathbf{x}_p)}{\partial x} (x_q - x_p) - \frac{\partial u(\mathbf{x}_p)}{\partial y} (y_q - y_p) \right) \left(- (x_q - x_p) \right) = 0. \quad (4.11)$$

Roznásobme členy ľavej strany rovnice (4.11) a preved'me na súčet troch samostatných sumácií

$$- \sum_{q \in N(p)} (u_q - u_p) (x_q - x_p) + \sum_{q \in N(p)} \frac{\partial u(\mathbf{x}_p)}{\partial x} (x_q - x_p)^2 + \sum_{q \in N(p)} \frac{\partial u(\mathbf{x}_p)}{\partial y} (y_q - y_p) (x_q - x_p) = 0. \quad (4.12)$$

V poslednom kroku prevedieme na pravú stranu rovnice člen obsahujúci hodnoty riešenia v konečných objemoch p a q , čím dostávame prvú podmienku pre minimum v tvare rovnice

$$\sum_{q \in N(p)} \frac{\partial u(\mathbf{x}_p)}{\partial x} (x_q - x_p)^2 + \sum_{q \in N(p)} \frac{\partial u(\mathbf{x}_p)}{\partial y} (y_q - y_p) (x_q - x_p) = \sum_{q \in N(p)} (u_q - u_p) (x_q - x_p). \quad (4.13)$$

Analogicky derivujeme účelovú funkciu podľa druhej zložky vektora gradientu, čiže podľa $\frac{\partial u(\mathbf{x}_p)}{\partial y}$, a pokladáme deriváciu rovnú nule.

$$\sum_{q \in N(p)} \frac{\partial u(\mathbf{x}_p)}{\partial x} (x_q - x_p) (y_q - y_p) + \sum_{q \in N(p)} \frac{\partial u(\mathbf{x}_p)}{\partial y} (y_q - y_p)^2 = \sum_{q \in N(p)} (u_q - u_p) (y_q - y_p). \quad (4.14)$$

Dostali sme druhú podmienku pre minimum v tvare rovnice. Pre nájdenie aproximácie gradientu $\nabla_p u$ pomocou metódy najmenších štvorcov musíme vyriešiť sústavu dvoch rovníc. Systém rovníc môžeme zapísať v maticovom tvare

$$\begin{bmatrix} \sum_{q \in N(p)} (x_q - x_p)^2 & \sum_{q \in N(p)} (x_q - x_p) (y_q - y_p) \\ \sum_{q \in N(p)} (x_q - x_p) (y_q - y_p) & \sum_{q \in N(p)} (y_q - y_p)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u(\mathbf{x}_p)}{\partial x} \\ \frac{\partial u(\mathbf{x}_p)}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{q \in N(p)} (u_q - u_p) (x_q - x_p) \\ \sum_{q \in N(p)} (u_q - u_p) (y_q - y_p) \end{bmatrix}. \quad (4.15)$$

Nech $\mathbf{C}_p$ označuje maticu sústavy (4.15) a nech $\mathbf{d}_p$ definuje pravú stranu tejto sústavy. Systém (4.15) môžeme zapísať v maticovom tvare

$$\mathbf{C}_p \nabla_p u = \mathbf{d}_p, \quad (4.16)$$

odkiaľ dostávame výsledný vzťah pre aproximovaný gradient

$$\nabla_p u = \mathbf{C}_p^{-1} \mathbf{d}_p. \quad (4.17)$$

5 Numerické schémy

Nech je daná ohraničená polygonálna oblasť $\Omega \subset R^2$ a časový interval $[0, T]$, $T \in R^+$. Nech p označuje konečný objem s mierou m_p . Nech q definuje konečný objem susediaci s konečným objemom p tak, že miera neprázdnej množiny $\partial p \cap \partial q$ je jednodimenziálna, pričom ∂p a ∂q sú hranice konečných objemov p, q . Nech je prienikom $\partial p \cap \partial q$ hrana e_{pq} . Ďalej nech $N(p)$ definuje množinu všetkých konečných objemov susediacich s konečným objemom p , $\mathbf{n}_{pq}$ označuje jednotkový vektor vonkajšej normály ku hrane e_{pq} s ohľadom ku konečnému objemu p . Nech $\mathbf{x}_p$ označuje reprezentačný bod konečného objemu p , $\mathbf{x}_q$ označuje reprezentačný bod konečného objemu q . Nech $\mathbf{x}_{pq}$ označuje bod reprezentujúci stred hrany e_{pq} . Nech u_p označuje hodnotu riešenia vypočítanú numerickou schémou. Nech $\bar{u}_p$ reprezentuje konštantnú rekonštrukciu hodnoty riešenia na konečnom objeme p . Analogicky, $\bar{u}_{pq}$ označuje konštantnú rekonštrukciu riešenia na hrane e_{pq} . Nech je dané vektorové pole $\mathbf{v}$.

Numerické schémy uvedené v tejto kapitole odvodzame pre úlohu riešenia rovnice advekcie podľa [8, 2]

$$u_t + \mathbf{v} \cdot \nabla u = 0. \quad (5.1)$$

Pri ďalšom odvodzaní využívame ekvivalentný tvar rovnice (5.1)

$$u_t + \nabla \cdot (\mathbf{v}u) - u \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (5.2)$$

Vo všetkých ďalej uvedených schémach budeme využívať princíp metódy konečných objemov, preto obe strany rovnice (5.2) integrujeme cez konečný objem p

$$\int_p u_t dx + \int_p \nabla \cdot (\mathbf{v}u) dx - \int_p u \nabla \cdot \mathbf{v} dx = 0. \quad (5.3)$$

Hodnotu riešenia na konečnom objeme p rekonštruujeme konštantnou hodnotou $\bar{u}_p$, teda platí

$$\int_p u_t dx + \int_p \nabla \cdot (\mathbf{v}u) dx - \bar{u}_p \int_p \nabla \cdot \mathbf{v} dx = 0. \quad (5.4)$$

Na druhý a tretí člen ľavej strany rovnice (5.4) aplikujeme Greenovu vetu

$$\int_p u_t dx + \sum_{q \in N(p)} \int_{e_{pq}} u \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{pq} ds - \bar{u}_p \sum_{q \in N(p)} \int_{e_{pq}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{pq} ds = 0. \quad (5.5)$$

Hodnotu riešenia na hrane e_{pq} nahrádzame konštantnou rekonštrukciou $\bar{u}_{pq}$

$$\int_p u_t dx + \sum_{q \in N(p)} \bar{u}_{pq} \int_{e_{pq}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{pq} ds - \bar{u}_p \sum_{q \in N(p)} \int_{e_{pq}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{pq} ds = 0. \quad (5.6)$$

Nech $\bar{v}_{pq}$ definuje integrál z tokov v smere vnútornej normály ku konečnému objemu p

$$\bar{v}_{pq} = - \int_{e_{pq}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{pq} ds. \quad (5.7)$$

Dosadením vzťahu (5.7) do rovnice (5.6) dostávame

$$\int_p u_t dx + \sum_{q \in N(p)} \bar{v}_{pq} (\bar{u}_p - \bar{u}_{pq}) = 0. \quad (5.8)$$

Ďalej zavádzame koeficienty a_{pq}^{in} a a_{pq}^{out} rozlišujúce vtok (ang. *inflow*) a výtok (ang. *outflow*)

$$a_{pq}^{in} = \max(\bar{v}_{pq}, 0), \quad a_{pq}^{out} = \min(\bar{v}_{pq}, 0). \quad (5.9)$$

Členy a_{pq}^{in} , a_{pq}^{out} sú závislé výhradne od známeho vektorového poľa. Ak sa vektorové pole v čase nemení, resp. sa v čase nevyvíja ani výpočtová sieť, koeficienty stačí vypočítat iba raz pre danú výpočtovú oblasť. Nech M označuje celkový počet časových krokov. Na aproximáciu časovej derivácie u_t využijeme časovú diferenciu s rovnomerným časovým krokom τ

$$u_t = \frac{\bar{u}_p^n - \bar{u}_p^{n-1}}{\tau}, \quad (5.10)$$

pričom n definuje aktuálny časový krok pre $n = 1, 2, \dots, M$. Pre $n = 1$ je predošlým časovým krokom počiatočná podmienka úlohy. Využitím vzťahov (5.9), (5.10) dostávame rovnicu

$$\frac{\bar{u}_p^n - \bar{u}_p^{n-1}}{\tau} m_p + \sum_{q \in N(p)} a_{pq}^{in} (\bar{u}_p^m - \bar{u}_{pq}^m) + \sum_{q \in N(p)} a_{pq}^{out} (\bar{u}_p^m - \bar{u}_{pq}^m) = 0. \quad (5.11)$$

Za parameter m volíme buď starý časový krok $n - 1$, alebo nový časový krok n , v závislosti od konkrétnej schémy. Hodnotu $\bar{u}_p^m$ rekonštruujeme pomocou hodnoty u_p^m

$$\bar{u}_p^m = u_p^m. \quad (5.12)$$

K rekonštrukcii hodnoty $\bar{u}_{pq}^m$ použijeme *up-wind* princíp. Nech $\nabla_p u$ označuje gradient v reprezentačnom bode $\mathbf{x}_p$ konečného objemu p . Analogicky, nech $\nabla_q u$ označuje gradient v reprezentačnom bode $\mathbf{x}_q$ konečného objemu q . Potom definujeme

$$\begin{aligned} \bar{u}_{pq}^m &= u_q^m + \nabla_q u^m \cdot (\mathbf{x}_{pq} - \mathbf{x}_q), \quad \bar{v}_{pq} > 0, \\ \bar{u}_{pq}^m &= u_p^m + \nabla_p u^m \cdot (\mathbf{x}_{pq} - \mathbf{x}_p), \quad \bar{v}_{pq} < 0. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Použitím (5.12) a *up-wind* princípu (5.13) dostávame schému

$$\begin{aligned} \frac{u_p^n - u_p^{n-1}}{\tau} m_p + \sum_{q \in N(p)} a_{pq}^{in} (u_p^m - u_q^m - \nabla_q u^m \cdot (\mathbf{x}_{pq} - \mathbf{x}_q)) \\ + \sum_{q \in N(p)} a_{pq}^{out} (u_p^m - u_p^m - \nabla_p u^m \cdot (\mathbf{x}_{pq} - \mathbf{x}_p)) = 0. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Po úprave (5.14) získavame výslednú rovnicu

$$\frac{u_p^n - u_p^{n-1}}{\tau} m_p + \sum_{q \in N(p)} a_{pq}^{in} (u_p^m - u_q^m - \nabla_q u^m \cdot (\mathbf{x}_{pq} - \mathbf{x}_q)) - \sum_{q \in N(p)} a_{pq}^{out} (\nabla_p u^m \cdot (\mathbf{x}_{pq} - \mathbf{x}_p)) = 0. \quad (5.15)$$

Z výslednej rovnice (5.15) budú vychádzať všetky numerické schémy uvedené v diplomovej práci. Rozdiel v jednotlivých schémach bude predovšetkým vo voľbe aktuálneho, resp. predošlého, časového kroku v spojitosti s hodnotou riešenia na konečnom objeme a hodnotou gradientu v reprezentačnom bode konečného objemu. Rozlišovať budeme taktiež spôsob, akým bola nerovnomerná sieť vytvorená. Na rôzne vytvorených sieťach využívame rozdielne spôsoby aproximácie gradientu.

Schéma (5.15) je aplikovateľná na ľubovoľnú nerovnomernú sieť. Uvažujme (5.15) pre logicky štvoruholníkovú nerovnomernú sieť. Nech $i = 1, 2, \dots, (N_1 + 2p_1)$ a $j = 1, 2, \dots, (N_2 + 2p_2)$. Nech $b, c \in \{-1, 0, 1\}$, pričom $|b| + |c| = 1$. Potom konečné objemy susediace s konečným objemom $p_{i,j}$ označujeme ako $p_{i+b,j+c}$. Ďalej nech $u_{i,j}$ označuje numerické riešenie na konečnom objeme $p_{i,j}$ a $u_{i+b,j+c}$ nech označuje numerické riešenie na susednom konečnom objeme $p_{i+b,j+c}$. Miera konečného objemu $p_{i,j}$ nech je $m_{i,j}$. Gradient v bode $\mathbf{x}_{p_{i,j}}$ konečného objemu $p_{i,j}$ nech je označený ako $\nabla_{p_{i,j}} u$. Analogicky nech $\nabla_{p_{i+b,j+c}} u$ označuje gradient v bode $\mathbf{x}_{p_{i+b,j+c}}$ konečného objemu $p_{i+b,j+c}$. V zmysle zavedeného označenia môžeme vzťah (5.15) previesť do tvaru

$$\begin{aligned} \frac{u_{i,j}^n - u_{i,j}^{n-1}}{\tau} m_{i,j} + \sum_{\substack{p_{i+b,j+c} \in N(p_{i,j}) \\ |b|+|c|=1}} a_{p_{i,j}p_{i+b,j+c}}^{in} (u_{i,j}^m - u_{i+b,j+c}^m - \nabla_{p_{i+b,j+c}} u^m \cdot (\mathbf{x}_{p_{i,j}} - \mathbf{x}_{p_{i+b,j+c}})) \\ - \sum_{\substack{p_{i+b,j+c} \in N(p_{i,j}) \\ |b|+|c|=1}} a_{p_{i,j}p_{i+b,j+c}}^{out} (\nabla_{p_{i,j}} u^m \cdot (\mathbf{x}_{p_{i,j}} - \mathbf{x}_{p_{i+b,j+c}})) = 0. \end{aligned} \quad (5.16)$$

5.1 Explicitná schéma

V prípade explicitnej schémy budeme uvažovať všetky tie hodnoty riešenia, ktoré nesúvisia s časovou diferenciou, v predošlom časovom kroku $n-1$. Hodnotu gradientov budeme taktiež uvažovať z predchádzajúceho časového kroku. Vzťah (5.13) prechádza do tvaru

$$\begin{aligned} \bar{u}_{pq}^{n-1} &= u_q^{n-1} + \nabla_q u^{n-1} \cdot (\mathbf{x}_{pq} - \mathbf{x}_q), \quad \bar{v}_{pq} > 0, \\ \bar{u}_{pq}^{n-1} &= u_p^{n-1} + \nabla_p u^{n-1} \cdot (\mathbf{x}_{pq} - \mathbf{x}_p), \quad \bar{v}_{pq} < 0. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Z rovnice (5.15) dostávame explicitnú schému

$$u_p^n = u_p^{n-1} + \frac{\tau}{m_p} \sum_{q \in N(p)} a_{pq}^{out} (\nabla_p u^{n-1} \cdot (\mathbf{x}_{pq} - \mathbf{x}_p)) - \frac{\tau}{m_p} \sum_{q \in N(p)} a_{pq}^{in} (u_p^{n-1} - u_q^{n-1} - \nabla_q u^{n-1} \cdot (\mathbf{x}_{pq} - \mathbf{x}_q)). \quad (5.18)$$

Úpravou (5.18) získavame výsledný tvar explicitnej schémy

$$u_p^n = (1 - \frac{\tau}{m_p} \sum_{q \in N(p)} a_{pq}^{in}) u_p^{n-1} + \frac{\tau}{m_p} \sum_{q \in N(p)} a_{pq}^{out} (\nabla_p u^{n-1} \cdot (\mathbf{x}_{pq} - \mathbf{x}_p)) + \frac{\tau}{m_p} \sum_{q \in N(p)} a_{pq}^{in} (u_q^{n-1} + \nabla_q u^{n-1} \cdot (\mathbf{x}_{pq} - \mathbf{x}_q)). \quad (5.19)$$

Pre $i = 1, 2, \dots, (N_1 + 2p_1)$, $j = 1, 2, \dots, (N_2 + 2p_2)$, $n = 1, 2, \dots, M$ má explicitná schéma uvažovaná na logicky štvoruholníkovej nerovnomernej sieti tvar

$$u_{i,j}^n = (1 - \frac{\tau}{m_{i,j}} \sum_{\substack{p_{i+b,j+c} \in N(p_{i,j}) \\ |b|+|c|=1}} a_{p_{i,j}p_{i+b,j+c}}^{in}) u_{i,j}^{n-1} + \frac{\tau}{m_{i,j}} \sum_{\substack{p_{i+b,j+c} \in N(p_{i,j}) \\ |b|+|c|=1}} a_{p_{i,j}p_{i+b,j+c}}^{out} (\nabla_{p_{i,j}} u^{n-1} \cdot (\mathbf{x}_{p_{i,j}p_{i+b,j+c}} - \mathbf{x}_{p_{i,j}})) + \frac{\tau}{m_{i,j}} \sum_{\substack{p_{i+b,j+c} \in N(p_{i,j}) \\ |b|+|c|=1}} a_{p_{i,j}p_{i+b,j+c}}^{in} (u_{i+b,j+c}^{n-1} + \nabla_{p_{i+b,j+c}} u^{n-1} \cdot (\mathbf{x}_{p_{i,j}p_{i+b,j+c}} - \mathbf{x}_{p_{i+b,j+c}})). \quad (5.20)$$

Explicitné schémy bývajú vo všeobecnosti pomerne rýchle a jednoducho implementovateľné, v porovnaní s inými schémami, no nie sú bezpodmienečne stabilné. Rovnako tak je aj stabilita našej explicitnej schémy závislá od voľby časového kroku, resp. od voľby pomeru časového kroku a priemernej dĺžky hrany. Dokázať, pri akej voľbe časového kroku je schéma stabilná je netriviálna úloha kvôli gradientnému členu. Stabilitu metódy môžeme odhadovať experimentálne. Intuitívne platí, že za jeden časový krok by vtekajúca časť nemala zároveň vyteciť z konečného objemu a to ani v smere osi x , ani v smere osi y . Vhodnou voľbou časového kroku je napríklad τ spĺňajúce podmienku

$$\frac{1}{2} v_x \tau + \frac{1}{2} v_y \tau < h^*, \quad (5.21)$$

kde v_x, v_y sú zložky vektora rýchlosti.

5.2 Inflow-implicit/outflow-explicit schéma

Priama inflow-implicit/outflow-explicit schéma, ďalej iba IIOE, rozlišuje *inflow* časť (z ang. vtok) v novom časovom kroku n a *outflow* časť (z ang. výtok) v starom časovom

kroku $n - 1$. Vzt'ah (5.13) nadobúda pre implicitno-explicitnú schému tvar

$$\begin{aligned}\bar{u}_{pq}^n &= u_q^n + \nabla_q u^n \cdot (\mathbf{x}_{pq} - \mathbf{x}_q), & \bar{v}_{pq} &> 0, \\ \bar{u}_{pq}^{n-1} &= u_p^{n-1} + \nabla_p u^{n-1} \cdot (\mathbf{x}_{pq} - \mathbf{x}_p), & \bar{v}_{pq} &< 0.\end{aligned}\quad (5.22)$$

Z rovnice (5.15) dostávame implicitno-explicitnú schému

$$u_p^n + \frac{\tau}{m_p} \sum_{q \in N(p)} a_{pq}^{in} (u_p^n - u_q^n - \nabla_q u^n \cdot (\mathbf{x}_{pq} - \mathbf{x}_q)) = u_p^{n-1} - \frac{\tau}{m_p} \sum_{q \in N(p)} a_{pq}^{out} (-\nabla_p u^{n-1} \cdot (\mathbf{x}_{pq} - \mathbf{x}_p)). \quad (5.23)$$

Uvádzame taktiež ekvivalentný tvar rovnice (5.23), z ktorého budeme vychádzať pri tvorbe matice systému

$$\begin{aligned}(1 + \frac{\tau}{m_p} \sum_{q \in N(p)} a_{pq}^{in}) u_p^n - \frac{\tau}{m_p} \sum_{q \in N(p)} a_{pq}^{in} (u_q^n + \nabla_q u^n \cdot (\mathbf{x}_{pq} - \mathbf{x}_q)) = \\ u_p^{n-1} + \frac{\tau}{m_p} \sum_{q \in N(p)} a_{pq}^{out} (\nabla_p u^{n-1} \cdot (\mathbf{x}_{pq} - \mathbf{x}_p)).\end{aligned}\quad (5.24)$$

Nech $i = 1, 2, \dots, (N_1 + 2p_1)$, $j = 1, 2, \dots, (N_2 + 2p_2)$, $n = 1, 2, \dots, M$. Priama semi-implicitná schéma (5.24) má pre logicky štvoruholníkovú nerovnomernú sieť tvar

$$\begin{aligned}(1 + \frac{\tau}{m_{i,j}} \sum_{\substack{p_{i+b,j+c} \in N(p_{i,j}) \\ |b|+|c|=1}} a_{p_{i,j}p_{i+b,j+c}}^{in}) u_{i,j}^n \\ - \frac{\tau}{m_{i,j}} \sum_{\substack{p_{i+b,j+c} \in N(p_{i,j}) \\ |b|+|c|=1}} a_{p_{i,j}p_{i+b,j+c}}^{in} (u_{i+b,j+c}^n + \nabla_{p_{i+b,j+c}} u^n \cdot (\mathbf{x}_{p_{i,j}p_{i+b,j+c}} - \mathbf{x}_{p_{i+b,j+c}})) = \\ u_{i,j}^{n-1} + \frac{\tau}{m_{i,j}} \sum_{\substack{p_{i+b,j+c} \in N(p_{i,j}) \\ |b|+|c|=1}} a_{p_{i,j}p_{i+b,j+c}}^{out} (\nabla_{p_{i,j}} u^{n-1} \cdot (\mathbf{x}_{p_{i,j}p_{i+b,j+c}} - \mathbf{x}_{p_{i,j}})).\end{aligned}\quad (5.25)$$

K takto vytvorenému systému rovníc sa dá explicitne vyjadriť matica sústavy. Matica systému bude navyše závislá iba od geometrie mriežky, preto ju v prípade časovo nevyvíjajúcej sa oblasti stačí vypočítať iba raz pre danú úlohu.

5.2.1 IIOE na center shifted sieti

V nasledujúcej časti práce sa zameriavame na vytváranie nerovnomernej siete spôsobom opísaným v časti 2.1. Pokladáme za dôležité pripomenúť, že reprezentačné body konečných objemov nebudú v tomto prípade umiestnené v ťažiskách konečných objemov. Rohové uzly konečných objemov sú definované ako priemery štyroch okolitých reprezentačných bodov, teda môžeme pri počítaní *diamond cell* v implicitnej časti metódy jednoducho nahradiť neznáme rohové hodnoty riešenia pomocou hodnôt v okolitých reprezentačných bodoch.

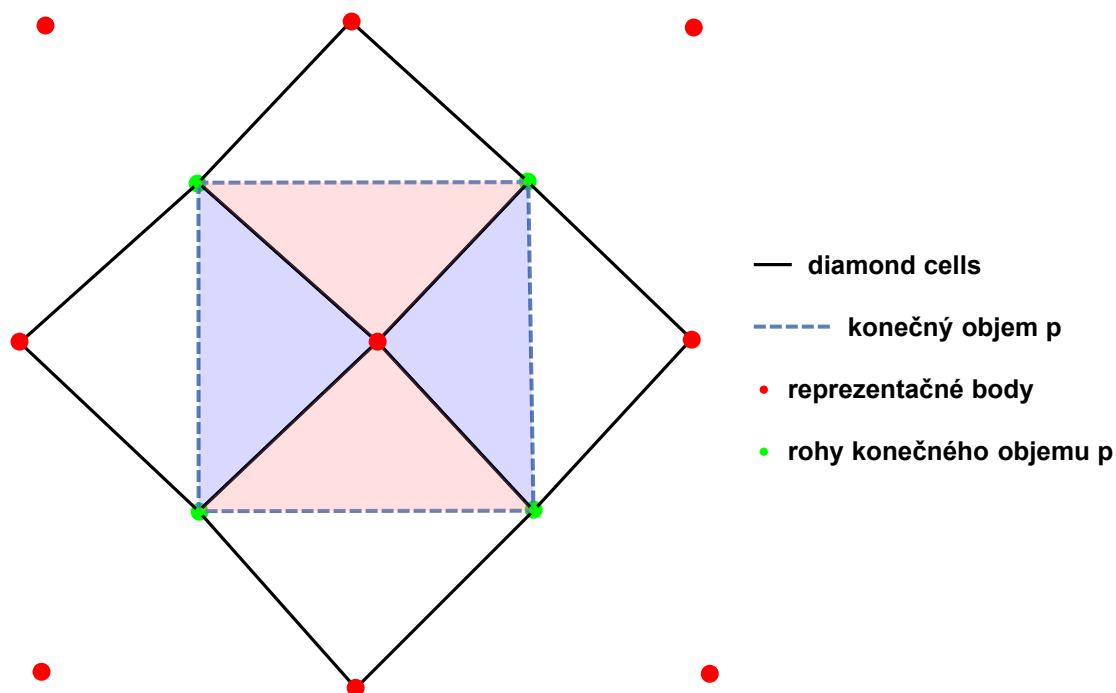
Gradient v reprezentačných bodoch konečných objemov je definovaný ako vážený priemer gradientov *diamond cell* buniek na jednotlivých hranách. Ukazuje sa však, že výberom váh priemeru môžeme ovplyvniť presnosť metódy. V nasledujúcich častiach práce uvádzame tri rôzne príklady voľby váh.

Nech $\nabla_{p_n} u$ (z ang. "north" – sever) označuje gradient vypočítaný *diamond cell* metódou v strede severnej hrany konečného objemu p . Analogicky nech $\nabla_{p_s} u$ (z ang. "south" – juh), $\nabla_{p_e} u$ (z ang. "east" – východ), $\nabla_{p_w} u$ (z ang. "west" – západ) definujú gradienty určené pomocou *diamond cell* metódy v strede príslušnej hrany konečného objemu.

5.2.1.1 Plochy trojuholníkov

Prienik konečného objemu p a každej jeho príslušnej *diamond cell* bunky je tvorený trojuholníkom s plochou A . Jednotlivé plochy rozlišujeme pomocou indexov zodpovedajúcich svetovým stranám podobne ako v prípade gradientov - A_n, A_s, A_e, A_w .

Na Obrázku 5.1 uvádzame vyššie opísanú situáciu konečného objemu p s jeho *diamond cell* bunkami a spomenutými trojuholníkmi znázornenými modrými a ružovými plochami.



Obr. 5.1: Konečný objem p , *diamond cell* bunky na jeho hranách a trojuholníkové plochy definujúce váhy v priemerovaní gradientov na hranách

Výsledný gradient konečného objemu p je v tomto prípade definovaný ako vážený priemer gradientov určených na jeho hranách s váhami rovnými veľkostiam príslušných

trojuholníkových plôch

$$\nabla_p u = \frac{A_n \nabla_{p_n} u + A_s \nabla_{p_s} u + A_e \nabla_{p_e} u + A_w \nabla_{p_w} u}{A_n + A_s + A_e + A_w}. \quad (5.26)$$

Opísaný spôsob váženého priemerovania je síce intuitívny, no znamená, že čím ďalej sa daná hrana konečného objemu nachádza od reprezentačného bodu, v ktorom sa snažíme vyčísliť výsledný gradient, tým väčšiu váhu príslušný "čiastkový" gradient má. V skutočnosti však potrebujeme presný opak.

5.2.1.2 Prevrátené hodnoty plôch

V predchádzajúcom spôsobe priemerovania gradientov sme poukázali na fakt, že váha hrán by sa nemala zväčšovať s pribúdajúcou vzdialenosťou od reprezentačného bodu príslušného konečného objemu.

Druhým spôsobom, akým je možné získať výsledný gradient, je využiť spomínané obsahy trojuholníkových plôch inak. Váhy budú tentokrát prevrátené hodnoty plôch trojuholníkov. Touto úpravou zaistíme, aby sa váha daného čiastkového gradientu zmenšovala so zväčšujúcou sa vzdialenosťou od reprezentačného bodu, resp. naopak.

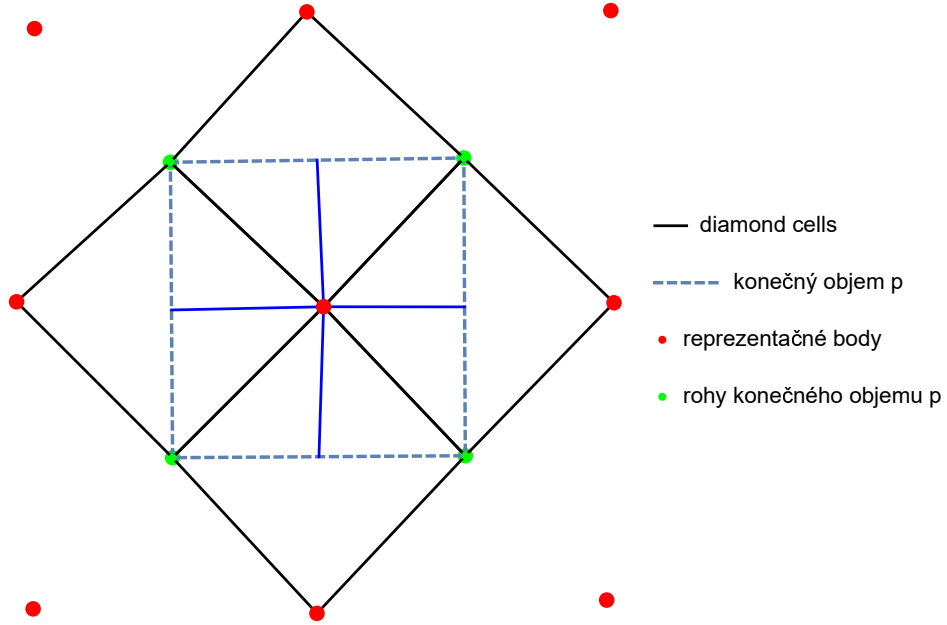
Zachovávajúc značenie z predchádzajúcej časti definujeme výsledný gradient na konečnom objeme p

$$\nabla_p u = \frac{\frac{1}{A_n} \nabla_{p_n} u + \frac{1}{A_s} \nabla_{p_s} u + \frac{1}{A_e} \nabla_{p_e} u + \frac{1}{A_w} \nabla_{p_w} u}{\frac{1}{A_n} + \frac{1}{A_s} + \frac{1}{A_e} + \frac{1}{A_w}}. \quad (5.27)$$

5.2.1.3 Prevrátené hodnoty vzdialeností

Nech d_n reprezentuje vzdialenosť stredu severnej hrany konečného objemu p od jeho reprezentačného bodu. Podobne definujeme aj zvyšné štyri vzdialenosti stredov hrán od reprezentačného bodu konečného objemu p - d_s , d_e , d_w , v zmysle svetových strán. Opísanú situáciu zobrazuje Obrázok 5.2 s modrými úsečkami znázorňujúcimi vzdialenosti stredov hrán od reprezentačného bodu.

Definované vzdialenosti však nemôžeme priamo využiť ako váhy gradientov určených na hranách konečného objemu pomocou *diamond cell* metódy, pretože by opäť platil vzťah - čím väčšia vzdialenosť hrany od reprezentačného bodu, tým väčšia váha. Uplatníme teda rovnakú modifikáciu ako v predošlej časti práce. Jednotlivé váhy čiastkových gradientov definujeme ako prevrátené hodnoty daných vzdialeností.



Obr. 5.2: Konečný objem p , *diamond cell* bunky zostrojené na jeho hranách a úsečky definujúce vzdialenosť stredu hrany a reprezentačného bodu

Pre výsledný gradient, konštantný na celom konečnom objeme p , definujeme vzťah

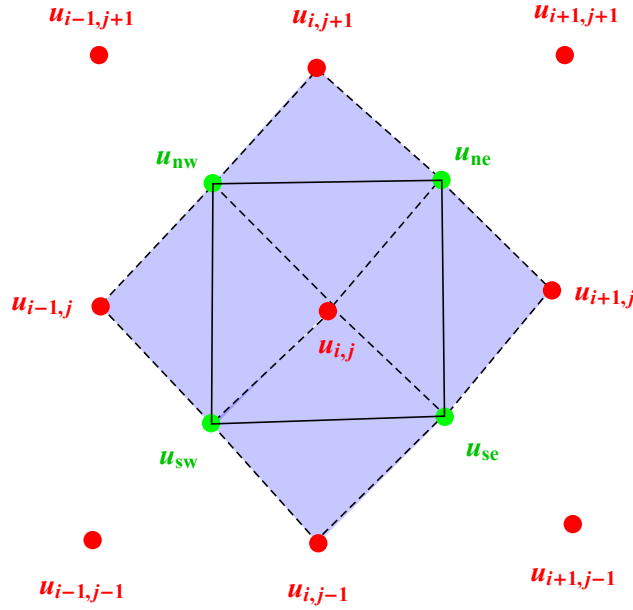
$$\nabla_p u = \frac{\frac{1}{d_n} \nabla_{p_n} u + \frac{1}{d_s} \nabla_{p_s} u + \frac{1}{d_e} \nabla_{p_e} u + \frac{1}{d_w} \nabla_{p_w} u}{\frac{1}{d_n} + \frac{1}{d_s} + \frac{1}{d_e} + \frac{1}{d_w}}. \quad (5.28)$$

5.2.1.4 Matica systému

V dôsledku vytvárania nerovnomernej siete posunom reprezentačných bodov a následným umiestnením rohových uzlov do ťažísk okolitých reprezentačných bodov, nahrádzame aj hodnotu riešenia v rohových uzloch konečných objemov priemerom hodnôt riešenia v štyroch okolitých reprezentačných bodoch. Nech je $\mathbf{r}_{nw}$ (z ang. "north-west" – severozápad) ľavý horný rohový bod konečného objemu $p_{i,j}$. Analogicky nech je $\mathbf{r}_{ne}$ (z ang. "north-east" – severovýchod) pravý horný rohový bod, $\mathbf{r}_{sw}$ (z ang. "south-west" – juhozápad) ľavý dolný rohový bod a $\mathbf{r}_{se}$ (z ang. "south-east" – juhovýchod) pravý dolný rohový bod konečného objemu $p_{i,j}$. Nech u_{nw} označuje hodnotu riešenia v rožnom bode $\mathbf{r}_{nw}$. Podobne nech sú u_{ne} , u_{sw} , u_{se} hodnoty riešenia v rožných bodoch $\mathbf{r}_{ne}$, $\mathbf{r}_{sw}$, $\mathbf{r}_{se}$.

Obrázok 5.3 znázorňuje plnou čiernou čiarou hranicu konečného objemu $p_{i,j}$ a prerušovanou čiarou hranice *diamond cell* buniek zostrojených okolo každej hrany objemu $p_{i,j}$. Vidíme, že k určeniu gradientov v stredoch jednotlivých hrán potrebujeme reprezentačný bod konečného objemu $p_{i,j}$, reprezentačné body susedných konečných

objemov $p_{i+b,j+c}$, ale aj rohové body konečného objemu $p_{i,j}$.



Obr. 5.3: Konečný objem $p_{i,j}$ so svojimi *diamond cell* bunkami a hodnotami potrebnými k určení gradientu $\nabla_{p_{i,j}} u$

Predpokladajme, že poznáme súradnice rohových uzlov konečných objemov, ale nepoznáme počiatkové hodnoty v týchto bodoch, teda ani za pomoci odvodenej schémy nebudeme vedieť určiť hodnoty riešenia v ďalších časových krokoch v rohoch konečných objemov. Uvažujeme, že hodnoty riešenia v rohoch konečných objemov nechceme pridať do systému ako ďalšie premenné. Nerovnomernú sieť sme však vytvárali posunom reprezentačných bodov a rohové body vznikli priemerom okolitých štyroch reprezentačných bodov. Na základe tejto vlastnosti siete môžeme nahradiť hodnoty riešenia v rohoch konečných objemov pomocou reprezentačných bodov

$$\begin{aligned}
 u_{ne} &= \frac{1}{4}(u_{i,j} + u_{i+1,j} + u_{i+1,j+1} + u_{i,j+1}), \\
 u_{nw} &= \frac{1}{4}(u_{i,j} + u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j}), \\
 u_{sw} &= \frac{1}{4}(u_{i,j} + u_{i-1,j} + u_{i-1,j-1} + u_{i,j-1}), \\
 u_{se} &= \frac{1}{4}(u_{i,j} + u_{i+1,j} + u_{i+1,j-1} + u_{i,j-1}).
 \end{aligned} \tag{5.29}$$

Značenie vo vzťahoch (5.29) zodpovedá značeniu na Obrázku 5.3.

Vidíme, že k výpočtu výsledného gradientu v bode každého konečného objemu $p_{i,j}$ pre $i = 1, 2, \dots (N_1 + 2p_1)$ a $j = 1, 2, \dots (N_2 + 2p_2)$ potrebujeme hodnotu iba deviatich reprezentačných bodov.

Nech je $\mathbf{n}_{n_1}$ jednotkový vektor vonkajšej normály ku hrane *diamond cell* bunky zostrojenej na severnej hrane konečného objemu $p_{i,j}$, pričom vektor je kolmý na hranu tvorenú bodmi $\mathbf{x}_{p_{i,j+1}}$ a $\mathbf{r}_{ne}$. Zvyšné vonkajšie jednotkové normály ku hranám tej istej *diamond cell* bunky sú zostrojené analogicky a označené $\mathbf{n}_{n_2}, \mathbf{n}_{n_3}, \mathbf{n}_{n_4}$, pričom ich značíme proti smeru hodinových ručičiek voči $\mathbf{n}_{n_1}$. Mieru tejto bunky označíme D_n . Rovnakým postupom pokračujeme pri vytváraní normál ku hranám zvyšných *diamond cell* buniek, začínajúc vždy pravou hornou hranou *diamond cell* bunky. Miery jednotlivých buniek indexujeme vzhľadom k svetovým stranám D_s, D_w, D_e . Vyjadríme gradienty v stredoch hrán konečného objemu p získané *diamond cell* metódou v zmysle postupu uvedeného v časti 4.1

$$\nabla_{p_n} u = \frac{1}{D_n} \left(|\mathbf{x}_{p_{i,j+1}} - \mathbf{r}_{ne}| \cdot \mathbf{n}_{n_1} \frac{u_{i,j+1} + u_{ne}}{2} + |\mathbf{x}_{p_{i,j+1}} - \mathbf{r}_{nw}| \cdot \mathbf{n}_{n_2} \frac{u_{i,j+1} + u_{nw}}{2} + |\mathbf{r}_{nw} - \mathbf{x}_{p_{i,j}}| \cdot \mathbf{n}_{n_3} \frac{u_{i,j} + u_{nw}}{2} + |\mathbf{r}_{ne} - \mathbf{x}_{p_{i,j}}| \cdot \mathbf{n}_{n_4} \frac{u_{i,j} + u_{ne}}{2} \right), \quad (5.30)$$

$$\nabla_{p_s} u = \frac{1}{D_s} \left(|\mathbf{x}_{p_{i,j}} - \mathbf{r}_{se}| \cdot \mathbf{n}_{s_1} \frac{u_{i,j} + u_{se}}{2} + |\mathbf{x}_{p_{i,j}} - \mathbf{r}_{sw}| \cdot \mathbf{n}_{s_2} \frac{u_{i,j} + u_{sw}}{2} + |\mathbf{r}_{sw} - \mathbf{x}_{p_{i,j-1}}| \cdot \mathbf{n}_{s_3} \frac{u_{i,j-1} + u_{sw}}{2} + |\mathbf{r}_{se} - \mathbf{x}_{p_{i,j-1}}| \cdot \mathbf{n}_{s_4} \frac{u_{i,j-1} + u_{se}}{2} \right), \quad (5.31)$$

$$\nabla_{p_w} u = \frac{1}{D_w} \left(|\mathbf{r}_{nw} - \mathbf{x}_{p_{i,j}}| \cdot \mathbf{n}_{w_1} \frac{u_{i,j} + u_{nw}}{2} + |\mathbf{r}_{nw} - \mathbf{x}_{p_{i-1,j}}| \cdot \mathbf{n}_{w_2} \frac{u_{i-1,j} + u_{nw}}{2} + |\mathbf{x}_{p_{i-1,j}} - \mathbf{r}_{sw}| \cdot \mathbf{n}_{w_3} \frac{u_{i-1,j} + u_{sw}}{2} + |\mathbf{x}_{p_{i,j}} - \mathbf{r}_{sw}| \cdot \mathbf{n}_{w_4} \frac{u_{i,j} + u_{sw}}{2} \right), \quad (5.32)$$

$$\nabla_{p_e} u = \frac{1}{D_e} \left(|\mathbf{r}_{ne} - \mathbf{x}_{p_{i+1,j}}| \cdot \mathbf{n}_{e_1} \frac{u_{i+1,j} + u_{ne}}{2} + |\mathbf{r}_{ne} - \mathbf{x}_{p_{i,j}}| \cdot \mathbf{n}_{e_2} \frac{u_{i,j} + u_{ne}}{2} + |\mathbf{x}_{p_{i,j}} - \mathbf{r}_{se}| \cdot \mathbf{n}_{e_3} \frac{u_{i,j} + u_{se}}{2} + |\mathbf{x}_{p_{i+1,j}} - \mathbf{r}_{se}| \cdot \mathbf{n}_{e_4} \frac{u_{i+1,j} + u_{se}}{2} \right). \quad (5.33)$$

Na elimináciu hodnôt riešenia v rohoch konečného objemu využijeme vzťahy (5.29). Je dôležité si uvedomiť, že tento krok by sme nemohli urobiť v prípade vytvárania siete posunom rohových bodov a následným dourčením reprezentačných bodov, nakoľko by sa rohové body nedali vyjadriť ako priemer okolitých reprezentačných bodov. V tomto zmysle je využitie center shifted sietí veľmi výhodné. (5.29) postupne dosádzame do (5.30), (5.31),

(5.32), (5.33). Dostávame

$$\begin{aligned}\nabla_{p_n} u = & \frac{1}{D_n} \left(|\mathbf{x}_{p_{i,j+1}} - \mathbf{r}_{ne}| \cdot \mathbf{n}_{n1} \left(\frac{u_{i,j+1}}{2} + \frac{1}{8} (u_{i,j} + u_{i+1,j} + u_{i+1,j+1} + u_{i,j+1}) \right) \right. \\ & + |\mathbf{x}_{p_{i,j+1}} - \mathbf{r}_{nw}| \cdot \mathbf{n}_{n2} \left(\frac{u_{i,j+1}}{2} + \frac{1}{8} (u_{i,j} + u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j}) \right) \\ & + |\mathbf{r}_{nw} - \mathbf{x}_{p_{i,j}}| \cdot \mathbf{n}_{n3} \left(\frac{u_{i,j}}{2} + \frac{1}{8} (u_{i,j} + u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j}) \right) \\ & \left. + |\mathbf{r}_{ne} - \mathbf{x}_{p_{i,j}}| \cdot \mathbf{n}_{n4} \left(\frac{u_{i,j}}{2} + \frac{1}{8} (u_{i,j} + u_{i+1,j} + u_{i+1,j+1} + u_{i,j+1}) \right) \right),\end{aligned}\quad (5.34)$$

$$\begin{aligned}\nabla_{p_s} u = & \frac{1}{D_s} \left(|\mathbf{x}_{p_{i,j}} - \mathbf{r}_{se}| \cdot \mathbf{n}_{s1} \left(\frac{u_{i,j}}{2} + \frac{1}{8} (u_{i,j} + u_{i+1,j} + u_{i+1,j-1} + u_{i,j-1}) \right) \right. \\ & + |\mathbf{x}_{p_{i,j}} - \mathbf{r}_{sw}| \cdot \mathbf{n}_{s2} \left(\frac{u_{i,j}}{2} + \frac{1}{8} (u_{i,j} + u_{i-1,j} + u_{i-1,j-1} + u_{i,j-1}) \right) \\ & + |\mathbf{r}_{sw} - \mathbf{x}_{p_{i,j-1}}| \cdot \mathbf{n}_{s3} \left(\frac{u_{i,j-1}}{2} + \frac{1}{8} (u_{i,j} + u_{i-1,j} + u_{i-1,j-1} + u_{i,j-1}) \right) \\ & \left. + |\mathbf{r}_{se} - \mathbf{x}_{p_{i,j-1}}| \cdot \mathbf{n}_{s4} \left(\frac{u_{i,j-1}}{2} + \frac{1}{8} (u_{i,j} + u_{i+1,j} + u_{i+1,j-1} + u_{i,j-1}) \right) \right),\end{aligned}\quad (5.35)$$

$$\begin{aligned}\nabla_{p_w} u = & \frac{1}{D_w} \left(|\mathbf{r}_{nw} - \mathbf{x}_{p_{i,j}}| \cdot \mathbf{n}_{w1} \left(\frac{u_{i,j}}{2} + \frac{1}{8} (u_{i,j} + u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j}) \right) \right. \\ & + |\mathbf{r}_{nw} - \mathbf{x}_{p_{i-1,j}}| \cdot \mathbf{n}_{w2} \left(\frac{u_{i-1,j}}{2} + \frac{1}{8} (u_{i,j} + u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j}) \right) \\ & + |\mathbf{x}_{p_{i-1,j}} - \mathbf{r}_{sw}| \cdot \mathbf{n}_{w3} \left(\frac{u_{i-1,j}}{2} + \frac{1}{8} (u_{i,j} + u_{i-1,j} + u_{i-1,j-1} + u_{i,j-1}) \right) \\ & \left. + |\mathbf{x}_{p_{i,j}} - \mathbf{r}_{sw}| \cdot \mathbf{n}_{w4} \left(\frac{u_{i,j}}{2} + \frac{1}{8} (u_{i,j} + u_{i-1,j} + u_{i-1,j-1} + u_{i,j-1}) \right) \right),\end{aligned}\quad (5.36)$$

$$\begin{aligned}\nabla_{p_e} u = & \frac{1}{D_e} \left(|\mathbf{r}_{ne} - \mathbf{x}_{p_{i+1,j}}| \cdot \mathbf{n}_{e1} \left(\frac{u_{i+1,j}}{2} + \frac{1}{8} (u_{i,j} + u_{i+1,j} + u_{i+1,j+1} + u_{i,j+1}) \right) \right. \\ & + |\mathbf{r}_{ne} - \mathbf{x}_{p_{i,j}}| \cdot \mathbf{n}_{e2} \left(\frac{u_{i,j}}{2} + \frac{1}{8} (u_{i,j} + u_{i+1,j} + u_{i+1,j+1} + u_{i,j+1}) \right) \\ & + |\mathbf{x}_{p_{i,j}} - \mathbf{r}_{se}| \cdot \mathbf{n}_{e3} \left(\frac{u_{i,j}}{2} + \frac{1}{8} (u_{i,j} + u_{i+1,j} + u_{i+1,j-1} + u_{i,j-1}) \right) \\ & \left. + |\mathbf{x}_{p_{i+1,j}} - \mathbf{r}_{se}| \cdot \mathbf{n}_{e4} \left(\frac{u_{i+1,j}}{2} + \frac{1}{8} (u_{i,j} + u_{i+1,j} + u_{i+1,j-1} + u_{i,j-1}) \right) \right).\end{aligned}\quad (5.37)$$

Zo vzťahov (5.34), (5.35), (5.36), (5.37) zatiaľ nie je úplne jasné, ako sa dokáže zjednodušiť výpočet gradientov v strede jednotlivých hrán konečného objemu p . Upravíme ich preto do ekvivalentných tvarov, ktoré budú explicitne poukazovať na využitie spomenutých deviatich hodnôt riešenia, ktoré sú zobrazené aj na Obrázku 5.3. Táto úprava nám taktiež pomôže poukázať na dôležitú vlastnosť koeficientov stojacich pri okolitých hodnotách riešenia. Koeficienty sú závislé výhradne od geometrie siete. Tento fakt umožňuje napočítať čiastkové gradienty iba jediný raz pre danú úlohu

$$\begin{aligned}
\nabla_{p_n} u = & \frac{1}{D_n} \left(u_{i-1,j+1} \left(\frac{|\mathbf{x}_{p_{i,j+1}} - \mathbf{r}_{nw}| \cdot \mathbf{n}_{n2}}{8} + \frac{|\mathbf{r}_{nw} - \mathbf{x}_{p_{i,j}}| \cdot \mathbf{n}_{n3}}{8} \right) \right. \\
& + u_{i-1,j} \left(\frac{|\mathbf{x}_{p_{i,j+1}} - \mathbf{r}_{nw}| \cdot \mathbf{n}_{n2}}{8} + \frac{|\mathbf{r}_{nw} - \mathbf{x}_{p_{i,j}}| \cdot \mathbf{n}_{n3}}{8} \right) \\
& + u_{i,j+1} \left(\frac{5|\mathbf{x}_{p_{i,j+1}} - \mathbf{r}_{ne}| \cdot \mathbf{n}_{n1}}{8} + \frac{5|\mathbf{x}_{p_{i,j+1}} - \mathbf{r}_{nw}| \cdot \mathbf{n}_{n2}}{8} + \frac{|\mathbf{r}_{nw} - \mathbf{x}_{p_{i,j}}| \cdot \mathbf{n}_{n3}}{8} + \frac{|\mathbf{r}_{ne} - \mathbf{x}_{p_{i,j}}| \cdot \mathbf{n}_{n4}}{8} \right) \\
& + u_{i,j} \left(\frac{|\mathbf{x}_{p_{i,j+1}} - \mathbf{r}_{ne}| \cdot \mathbf{n}_{n1}}{8} + \frac{|\mathbf{x}_{p_{i,j+1}} - \mathbf{r}_{nw}| \cdot \mathbf{n}_{n2}}{8} + \frac{5|\mathbf{r}_{nw} - \mathbf{x}_{p_{i,j}}| \cdot \mathbf{n}_{n3}}{8} + \frac{5|\mathbf{r}_{ne} - \mathbf{x}_{p_{i,j}}| \cdot \mathbf{n}_{n4}}{8} \right) \\
& + u_{i+1,j+1} \left(\frac{|\mathbf{x}_{p_{i,j+1}} - \mathbf{r}_{ne}| \cdot \mathbf{n}_{n1}}{8} + \frac{|\mathbf{r}_{ne} - \mathbf{x}_{p_{i,j}}| \cdot \mathbf{n}_{n4}}{8} \right) \\
& \left. + u_{i+1,j} \left(\frac{|\mathbf{x}_{p_{i,j+1}} - \mathbf{r}_{ne}| \cdot \mathbf{n}_{n1}}{8} + \frac{|\mathbf{r}_{ne} - \mathbf{x}_{p_{i,j}}| \cdot \mathbf{n}_{n4}}{8} \right) \right),
\end{aligned} \tag{5.38}$$

$$\begin{aligned}
\nabla_{p_s} u = & \frac{1}{D_s} \left(u_{i-1,j} \left(\frac{|\mathbf{x}_{p_{i,j}} - \mathbf{r}_{sw}| \cdot \mathbf{n}_{s2}}{8} + \frac{|\mathbf{r}_{sw} - \mathbf{x}_{p_{i,j-1}}| \cdot \mathbf{n}_{s3}}{8} \right) \right. \\
& + u_{i-1,j-1} \left(\frac{|\mathbf{x}_{p_{i,j}} - \mathbf{r}_{sw}| \cdot \mathbf{n}_{s2}}{8} + \frac{|\mathbf{r}_{sw} - \mathbf{x}_{p_{i,j-1}}| \cdot \mathbf{n}_{s3}}{8} \right) \\
& + u_{i,j} \left(\frac{5|\mathbf{x}_{p_{i,j}} - \mathbf{r}_{se}| \cdot \mathbf{n}_{s1}}{8} + \frac{5|\mathbf{x}_{p_{i,j}} - \mathbf{r}_{sw}| \cdot \mathbf{n}_{s2}}{8} + \frac{|\mathbf{r}_{sw} - \mathbf{x}_{p_{i,j-1}}| \cdot \mathbf{n}_{s3}}{8} + \frac{|\mathbf{r}_{se} - \mathbf{x}_{p_{i,j-1}}| \cdot \mathbf{n}_{s4}}{8} \right) \\
& + u_{i,j-1} \left(\frac{|\mathbf{x}_{p_{i,j}} - \mathbf{r}_{se}| \cdot \mathbf{n}_{s1}}{8} + \frac{|\mathbf{x}_{p_{i,j}} - \mathbf{r}_{sw}| \cdot \mathbf{n}_{s2}}{8} + \frac{5|\mathbf{r}_{sw} - \mathbf{x}_{p_{i,j-1}}| \cdot \mathbf{n}_{s3}}{8} + \frac{5|\mathbf{r}_{se} - \mathbf{x}_{p_{i,j-1}}| \cdot \mathbf{n}_{s4}}{8} \right) \\
& + u_{i+1,j} \left(\frac{|\mathbf{x}_{p_{i,j}} - \mathbf{r}_{se}| \cdot \mathbf{n}_{s1}}{8} + \frac{|\mathbf{r}_{se} - \mathbf{x}_{p_{i,j-1}}| \cdot \mathbf{n}_{s4}}{8} \right) \\
& \left. + u_{i+1,j-1} \left(\frac{|\mathbf{x}_{p_{i,j}} - \mathbf{r}_{se}| \cdot \mathbf{n}_{s1}}{8} + \frac{|\mathbf{r}_{se} - \mathbf{x}_{p_{i,j-1}}| \cdot \mathbf{n}_{s4}}{8} \right) \right),
\end{aligned} \tag{5.39}$$

$$\begin{aligned}
\nabla_{p_w} u = & \frac{1}{D_w} \left(u_{i-1,j+1} \left(\frac{|\mathbf{r}_{nw} - \mathbf{x}_{p_{i,j}}| \cdot \mathbf{n}_{w1}}{8} + \frac{|\mathbf{r}_{nw} - \mathbf{x}_{p_{i-1,j}}| \cdot \mathbf{n}_{w2}}{8} \right) \right. \\
& + u_{i,j+1} \left(\frac{|\mathbf{r}_{nw} - \mathbf{x}_{p_{i,j}}| \cdot \mathbf{n}_{w1}}{8} + \frac{|\mathbf{r}_{nw} - \mathbf{x}_{p_{i-1,j}}| \cdot \mathbf{n}_{w2}}{8} \right) \\
& + u_{i-1,j} \left(\frac{|\mathbf{r}_{nw} - \mathbf{x}_{p_{i,j}}| \cdot \mathbf{n}_{w1}}{8} + \frac{5|\mathbf{r}_{nw} - \mathbf{x}_{p_{i-1,j}}| \cdot \mathbf{n}_{w2}}{8} + \frac{5|\mathbf{x}_{p_{i-1,j}} - \mathbf{r}_{sw}| \cdot \mathbf{n}_{w3}}{8} + \frac{|\mathbf{x}_{p_{i,j}} - \mathbf{r}_{sw}| \cdot \mathbf{n}_{w4}}{8} \right) \\
& + u_{i,j} \left(\frac{5|\mathbf{r}_{nw} - \mathbf{x}_{p_{i,j}}| \cdot \mathbf{n}_{w1}}{8} + \frac{|\mathbf{r}_{nw} - \mathbf{x}_{p_{i-1,j}}| \cdot \mathbf{n}_{w2}}{8} + \frac{|\mathbf{x}_{p_{i-1,j}} - \mathbf{r}_{sw}| \cdot \mathbf{n}_{w3}}{8} + \frac{5|\mathbf{x}_{p_{i,j}} - \mathbf{r}_{sw}| \cdot \mathbf{n}_{w4}}{8} \right) \\
& + u_{i-1,j-1} \left(\frac{|\mathbf{x}_{p_{i-1,j}} - \mathbf{r}_{sw}| \cdot \mathbf{n}_{w3}}{8} + \frac{|\mathbf{x}_{p_{i,j}} - \mathbf{r}_{sw}| \cdot \mathbf{n}_{w4}}{8} \right) \\
& \left. + u_{i,j-1} \left(\frac{|\mathbf{x}_{p_{i-1,j}} - \mathbf{r}_{sw}| \cdot \mathbf{n}_{w3}}{8} + \frac{|\mathbf{x}_{p_{i,j}} - \mathbf{r}_{sw}| \cdot \mathbf{n}_{w4}}{8} \right) \right),
\end{aligned} \tag{5.40}$$

$$\begin{aligned}
\nabla_{p_e} u = & \frac{1}{D_e} \left(u_{i,j+1} \left(\frac{|\mathbf{r}_{ne} - \mathbf{x}_{p_{i+1,j}}| \cdot \mathbf{n}_{e1}}{8} + \frac{|\mathbf{r}_{ne} - \mathbf{x}_{p_{i,j}}| \cdot \mathbf{n}_{e2}}{8} \right) \right. \\
& + u_{i+1,j+1} \left(\frac{|\mathbf{r}_{ne} - \mathbf{x}_{p_{i+1,j}}| \cdot \mathbf{n}_{e1}}{8} + \frac{|\mathbf{r}_{ne} - \mathbf{x}_{p_{i,j}}| \cdot \mathbf{n}_{e2}}{8} \right) \\
& + u_{i,j} \left(\frac{|\mathbf{r}_{ne} - \mathbf{x}_{p_{i+1,j}}| \cdot \mathbf{n}_{e1}}{8} + \frac{5|\mathbf{r}_{ne} - \mathbf{x}_{p_{i,j}}| \cdot \mathbf{n}_{e2}}{8} + \frac{5|\mathbf{x}_{p_{i,j}} - \mathbf{r}_{se}| \cdot \mathbf{n}_{e3}}{8} + \frac{|\mathbf{x}_{p_{i+1,j}} - \mathbf{r}_{se}| \cdot \mathbf{n}_{e4}}{8} \right) \\
& + u_{i+1,j} \left(\frac{5|\mathbf{r}_{ne} - \mathbf{x}_{p_{i+1,j}}| \cdot \mathbf{n}_{e1}}{8} + \frac{|\mathbf{r}_{ne} - \mathbf{x}_{p_{i,j}}| \cdot \mathbf{n}_{e2}}{8} + \frac{|\mathbf{x}_{p_{i,j}} - \mathbf{r}_{se}| \cdot \mathbf{n}_{e3}}{8} + \frac{5|\mathbf{x}_{p_{i+1,j}} - \mathbf{r}_{se}| \cdot \mathbf{n}_{e4}}{8} \right) \\
& + u_{i,j-1} \left(\frac{|\mathbf{x}_{p_{i,j}} - \mathbf{r}_{se}| \cdot \mathbf{n}_{e3}}{8} + \frac{|\mathbf{x}_{p_{i+1,j}} - \mathbf{r}_{se}| \cdot \mathbf{n}_{e4}}{8} \right) \\
& \left. + u_{i+1,j-1} \left(\frac{|\mathbf{x}_{p_{i,j}} - \mathbf{r}_{se}| \cdot \mathbf{n}_{e3}}{8} + \frac{|\mathbf{x}_{p_{i+1,j}} - \mathbf{r}_{se}| \cdot \mathbf{n}_{e4}}{8} \right) \right).
\end{aligned} \tag{5.41}$$

V predošlých častiach práce sme poukázali na dôležitosť vhodného výberu priemerovania gradientov z hrán konečného objemu pre získanie výsledného gradientu v prípade center shifted sietí. Nech sú teraz dané všeobecné váhy w_1, w_2, w_3, w_4 a nech W označuje ich súčet

$$W = w_1 + w_2 + w_3 + w_4. \tag{5.42}$$

Výsledný gradient v bode konečného objemu $p_{i,j}$ vyjadrujeme všeobecným vzťahom

$$\nabla_{p_{i,j}} u = \frac{w_1 \nabla_{p_n} u + w_2 \nabla_{p_s} u + w_3 \nabla_{p_w} u + w_4 \nabla_{p_e} u}{W}. \tag{5.43}$$

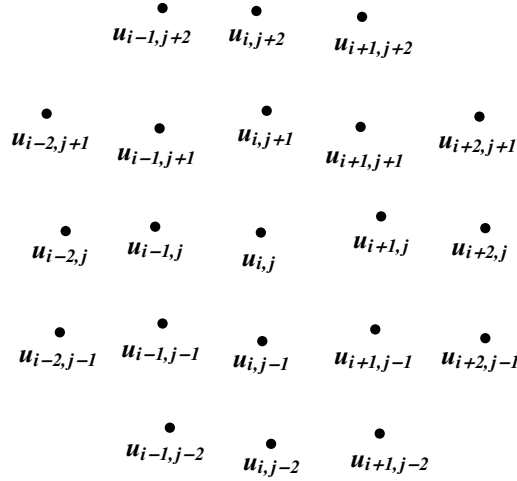
Do definície (5.43) dosadíme vyjadrenia gradientov $\nabla_{p_n} u, \nabla_{p_s} u, \nabla_{p_w} u, \nabla_{p_e} u$ určené vzťahmi (5.38), (5.39), (5.40), (5.41) a opäť ich upravíme tak, aby sme videli deväť hodnôt riešenia a koeficienty stojace pri nich

$$\begin{aligned}
\nabla_{p_{i,j}} u = & u_{i-1,j+1} \left(\frac{w_1}{WD_n} \left(\frac{|\mathbf{x}_{p_{i,j+1}} - \mathbf{r}_{nw}| \cdot \mathbf{n}_{n2}}{8} + \frac{|\mathbf{r}_{nw} - \mathbf{x}_{p_{i,j}}| \cdot \mathbf{n}_{n3}}{8} \right) \right. \\
& \left. + \frac{w_3}{WD_w} \left(\frac{|\mathbf{r}_{nw} - \mathbf{x}_{p_{i,j}}| \cdot \mathbf{n}_{w1}}{8} + \frac{|\mathbf{r}_{nw} - \mathbf{x}_{p_{i-1,j}}| \cdot \mathbf{n}_{w2}}{8} \right) \right) \\
& + u_{i,j+1} \left(\frac{w_3}{WD_w} \left(\frac{|\mathbf{r}_{nw} - \mathbf{x}_{p_{i,j}}| \cdot \mathbf{n}_{w1}}{8} + \frac{|\mathbf{r}_{nw} - \mathbf{x}_{p_{i-1,j}}| \cdot \mathbf{n}_{w2}}{8} \right) \right. \\
& + \frac{w_4}{WD_e} \left(\frac{|\mathbf{r}_{ne} - \mathbf{x}_{p_{i+1,j}}| \cdot \mathbf{n}_{e1}}{8} + \frac{|\mathbf{r}_{ne} - \mathbf{x}_{p_{i,j}}| \cdot \mathbf{n}_{e2}}{8} \right) \\
& + \frac{w_1}{WD_n} \left(\frac{5|\mathbf{x}_{p_{i,j+1}} - \mathbf{r}_{ne}| \cdot \mathbf{n}_{n1}}{8} + \frac{5|\mathbf{x}_{p_{i,j+1}} - \mathbf{r}_{nw}| \cdot \mathbf{n}_{n2}}{8} + \frac{|\mathbf{r}_{nw} - \mathbf{x}_{p_{i,j}}| \cdot \mathbf{n}_{n3}}{8} \right. \\
& \left. + \frac{|\mathbf{r}_{ne} - \mathbf{x}_{p_{i,j}}| \cdot \mathbf{n}_{n4}}{8} \right) \left. \right) \\
& + u_{i+1,j+1} \left(\frac{w_1}{WD_n} \left(\frac{|\mathbf{x}_{p_{i,j+1}} - \mathbf{r}_{ne}| \cdot \mathbf{n}_{n1}}{8} + \frac{|\mathbf{r}_{ne} - \mathbf{x}_{p_{i,j}}| \cdot \mathbf{n}_{n4}}{8} \right) \right. \\
& \left. + \frac{w_4}{WD_e} \left(\frac{|\mathbf{r}_{ne} - \mathbf{x}_{p_{i+1,j}}| \cdot \mathbf{n}_{e1}}{8} + \frac{|\mathbf{r}_{ne} - \mathbf{x}_{p_{i,j}}| \cdot \mathbf{n}_{e2}}{8} \right) \right)
\end{aligned} \tag{5.44}$$

$$\begin{aligned}
& +u_{i-1,j} \left(\frac{w_1}{WD_n} \left(\frac{|\mathbf{x}_{p_{i,j+1}} - \mathbf{r}_{nw}| \cdot \mathbf{n}_{n_2}}{8} + \frac{|\mathbf{r}_{nw} - \mathbf{x}_{p_{i,j}}| \cdot \mathbf{n}_{n_3}}{8} \right) \right. \\
& \quad + \frac{w_2}{WD_s} \left(\frac{|\mathbf{x}_{p_{i,j}} - \mathbf{r}_{sw}| \cdot \mathbf{n}_{s_2}}{8} + \frac{|\mathbf{r}_{sw} - \mathbf{x}_{p_{i,j-1}}| \cdot \mathbf{n}_{s_3}}{8} \right) \\
& \quad + \frac{w_3}{WD_w} \left(\frac{|\mathbf{r}_{nw} - \mathbf{x}_{p_{i,j}}| \cdot \mathbf{n}_{w_1}}{8} + \frac{5|\mathbf{r}_{nw} - \mathbf{x}_{p_{i-1,j}}| \cdot \mathbf{n}_{w_2}}{8} + \frac{5|\mathbf{x}_{p_{i-1,j}} - \mathbf{r}_{sw}| \cdot \mathbf{n}_{w_3}}{8} \right. \\
& \quad \quad \left. \left. + \frac{|\mathbf{x}_{p_{i,j}} - \mathbf{r}_{sw}| \cdot \mathbf{n}_{w_4}}{8} \right) \right) \\
& +u_{i,j} \left(\frac{w_1}{WD_n} \left(\frac{|\mathbf{x}_{p_{i,j+1}} - \mathbf{r}_{ne}| \cdot \mathbf{n}_{n_1}}{8} + \frac{|\mathbf{x}_{p_{i,j+1}} - \mathbf{r}_{nw}| \cdot \mathbf{n}_{n_2}}{8} + \frac{5|\mathbf{r}_{nw} - \mathbf{x}_{p_{i,j}}| \cdot \mathbf{n}_{n_3}}{8} \right. \right. \\
& \quad \quad \left. \left. + \frac{5|\mathbf{r}_{ne} - \mathbf{x}_{p_{i,j}}| \cdot \mathbf{n}_{n_4}}{8} \right) \right. \\
& \quad + \frac{w_2}{WD_s} \left(\frac{5|\mathbf{x}_{p_{i,j}} - \mathbf{r}_{se}| \cdot \mathbf{n}_{s_1}}{8} + \frac{5|\mathbf{x}_{p_{i,j}} - \mathbf{r}_{sw}| \cdot \mathbf{n}_{s_2}}{8} + \frac{|\mathbf{r}_{sw} - \mathbf{x}_{p_{i,j-1}}| \cdot \mathbf{n}_{s_3}}{8} \right. \\
& \quad \quad \left. \left. + \frac{|\mathbf{r}_{se} - \mathbf{x}_{p_{i,j-1}}| \cdot \mathbf{n}_{s_4}}{8} \right) \right. \\
& \quad + \frac{w_3}{WD_w} \left(\frac{5|\mathbf{r}_{nw} - \mathbf{x}_{p_{i,j}}| \cdot \mathbf{n}_{w_1}}{8} + \frac{|\mathbf{r}_{nw} - \mathbf{x}_{p_{i-1,j}}| \cdot \mathbf{n}_{w_2}}{8} + \frac{|\mathbf{x}_{p_{i-1,j}} - \mathbf{r}_{sw}| \cdot \mathbf{n}_{w_3}}{8} \right. \\
& \quad \quad \left. \left. + \frac{5|\mathbf{x}_{p_{i,j}} - \mathbf{r}_{sw}| \cdot \mathbf{n}_{w_4}}{8} \right) \right. \\
& \quad + \frac{w_4}{WD_e} \left(\frac{|\mathbf{r}_{ne} - \mathbf{x}_{p_{i+1,j}}| \cdot \mathbf{n}_{e_1}}{8} + \frac{5|\mathbf{r}_{ne} - \mathbf{x}_{p_{i,j}}| \cdot \mathbf{n}_{e_2}}{8} + \frac{5|\mathbf{x}_{p_{i,j}} - \mathbf{r}_{se}| \cdot \mathbf{n}_{e_3}}{8} \right. \\
& \quad \quad \left. \left. + \frac{|\mathbf{x}_{p_{i+1,j}} - \mathbf{r}_{se}| \cdot \mathbf{n}_{e_4}}{8} \right) \right) \\
& +u_{i+1,j} \left(\frac{w_1}{WD_n} \left(\frac{|\mathbf{x}_{p_{i,j+1}} - \mathbf{r}_{ne}| \cdot \mathbf{n}_{n_1}}{8} + \frac{|\mathbf{r}_{ne} - \mathbf{x}_{p_{i,j}}| \cdot \mathbf{n}_{n_4}}{8} \right) \right. \\
& \quad + \frac{w_2}{WD_s} \left(\frac{|\mathbf{x}_{p_{i,j}} - \mathbf{r}_{se}| \cdot \mathbf{n}_{s_1}}{8} + \frac{|\mathbf{r}_{se} - \mathbf{x}_{p_{i,j-1}}| \cdot \mathbf{n}_{s_4}}{8} \right) \\
& \quad + \frac{w_4}{WD_e} \left(\frac{5|\mathbf{r}_{ne} - \mathbf{x}_{p_{i+1,j}}| \cdot \mathbf{n}_{e_1}}{8} + \frac{|\mathbf{r}_{ne} - \mathbf{x}_{p_{i,j}}| \cdot \mathbf{n}_{e_2}}{8} + \frac{|\mathbf{x}_{p_{i,j}} - \mathbf{r}_{se}| \cdot \mathbf{n}_{e_3}}{8} \right. \\
& \quad \quad \left. \left. + \frac{5|\mathbf{x}_{p_{i+1,j}} - \mathbf{r}_{se}| \cdot \mathbf{n}_{e_4}}{8} \right) \right) \\
& +u_{i-1,j-1} \left(\frac{w_2}{WD_s} \left(\frac{|\mathbf{x}_{p_{i,j}} - \mathbf{r}_{sw}| \cdot \mathbf{n}_{s_2}}{8} + \frac{|\mathbf{r}_{sw} - \mathbf{x}_{p_{i,j-1}}| \cdot \mathbf{n}_{s_3}}{8} \right) \right. \\
& \quad \quad \left. + \frac{w_3}{WD_w} \left(\frac{|\mathbf{x}_{p_{i-1,j}} - \mathbf{r}_{sw}| \cdot \mathbf{n}_{w_3}}{8} + \frac{|\mathbf{x}_{p_{i,j}} - \mathbf{r}_{sw}| \cdot \mathbf{n}_{w_4}}{8} \right) \right) \\
& +u_{i,j-1} \left(\frac{w_3}{WD_w} \left(\frac{|\mathbf{x}_{p_{i-1,j}} - \mathbf{r}_{sw}| \cdot \mathbf{n}_{w_3}}{8} + \frac{|\mathbf{x}_{p_{i,j}} - \mathbf{r}_{sw}| \cdot \mathbf{n}_{w_4}}{8} \right) \right. \\
& \quad + \frac{w_4}{WD_e} \left(\frac{|\mathbf{x}_{p_{i,j}} - \mathbf{r}_{se}| \cdot \mathbf{n}_{e_3}}{8} + \frac{|\mathbf{x}_{p_{i+1,j}} - \mathbf{r}_{se}| \cdot \mathbf{n}_{e_4}}{8} \right) \\
& \quad + \frac{w_2}{WD_s} \left(\frac{|\mathbf{x}_{p_{i,j}} - \mathbf{r}_{se}| \cdot \mathbf{n}_{s_1}}{8} + \frac{|\mathbf{x}_{p_{i,j}} - \mathbf{r}_{sw}| \cdot \mathbf{n}_{s_2}}{8} + \frac{5|\mathbf{r}_{sw} - \mathbf{x}_{p_{i,j-1}}| \cdot \mathbf{n}_{s_3}}{8} \right. \\
& \quad \quad \left. \left. + \frac{5|\mathbf{r}_{se} - \mathbf{x}_{p_{i,j-1}}| \cdot \mathbf{n}_{s_4}}{8} \right) \right)
\end{aligned}$$

$$+u_{i+1,j-1} \left(\frac{w_2}{WD_s} \left(\frac{|\mathbf{x}_{p_{i,j}} - \mathbf{r}_{se}| \cdot \mathbf{n}_{s_1}}{8} + \frac{|\mathbf{r}_{se} - \mathbf{x}_{p_{i,j-1}}| \cdot \mathbf{n}_{s_4}}{8} \right) \right. \\ \left. + \frac{w_4}{WD_e} \left(\frac{|\mathbf{x}_{p_{i,j}} - \mathbf{r}_{se}| \cdot \mathbf{n}_{e_3}}{8} + \frac{|\mathbf{x}_{p_{i+1,j}} - \mathbf{r}_{se}| \cdot \mathbf{n}_{e_4}}{8} \right) \right).$$

Pre výpočet gradientu v bode konečného objemu $p_{i,j}$ potrebujeme hodnotu riešenia v deviatich reprezentačných bodoch. Rovnako by sme postupovali pri výpočte gradientov $\nabla_{p_{i+b,j+c}} u$ v bodoch susedných konečných objemov $p_{i+b,j+c}$. Po dosadení takto určených gradientov $\nabla_{p_{i,j}} u$, $\nabla_{p_{i+b,j+c}} u$ do rovnice (5.25) vidíme, že pre konečný objem $p_{i,j}$ vystupuje v rovnici spolu 21 hodnôt riešenia v najbližších reprezentačných bodoch, pričom koeficienty vystupujúce pri týchto členoch závisia výhradne od geometrie mriežky. Spomenutých 21 hodnôt riešenia je zobrazených na Obrázku 5.4.



Obr. 5.4: Neznáme hodnoty riešenia vystupujúce v rovnici (5.25) pre konečný objem $p_{i,j}$

Matica systému $\mathbf{A}$, typu $(N_1 + 2p_1)(N_2 + 2p_2) \times (N_1 + 2p_1)(N_2 + 2p_2)$, je teda závislá výhradne od geometrie diskretizovanej výpočtovej oblasti a známeho rýchlostného vektorového pol'a. Pokiaľ sa výpočtová oblasť v čase nevyvíja, stačí koeficienty matice napočítat iba raz pre všetky časové kroky danej úlohy. Tento fakt platí bez ohľadu na výber spôsobu priemerovania gradientov na hranách konečného objemu, keďže sme výsledné gradienty odvádzali pre všeobecné váhy.

Označme pravú stranu riešeného lineárneho systému $\mathbf{f}$. Vektor $\mathbf{f}$ je typu $(N_1 + 2p_1)(N_2 + 2p_2) \times 1$. Ďalej nech vektor $\mathbf{u}$, typu $(N_1 + 2p_1)(N_2 + 2p_2) \times 1$, definuje vektor neznámych hodnôt riešenia. Potom v každom časovom kroku $n = 1, 2, \dots, M$ riešime lineárny systém

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{f}. \quad (5.45)$$

V numerických experimentoch uvedených v práci používame na riešenie systému (5.45) metódu *Biconjugate Gradient*.

5.2.2 HIOE na corner shifted sieti

Aj v prípade aplikácie priamej implicitno-explicitnej metódy na corner shifted siete vieme zostrojiť maticu systému. Navyše bude tiež platiť, že matica je závislá iba od geometrie mriežky, čím sa značne zjednoduší konštrukcia matice sústavy rovníc. Treba mať však na pamäti spôsob, akým corner shifted sieť vznikla. Keďže sme pridávali náhodné čísla k súradniciam rohových uzlov, reprezentačné body síce sú v ťažiskách konečných objemov, no rohové body už nedokážeme vyjadriť ako ich priemer.

Metódu *diamond cell* samozrejme použiť môžeme, v spojitosti s bilineárnou interpoláciou, no k odvodeniu matice systému by sme museli použiť komplikované vzťahy (3.3)-(3.6). Oveľ a jednoduchšie riešenie poskytuje metóda *least square gradient*.

5.2.2.1 Matica systému

K zostrojeniu matice potrebujeme vzťah definujúci výpočet gradientu v reprezentačnom bode. Za predpokladu použitia metódy *least square gradient* je výsledný gradient určený vzťahom (4.17). Označme zložky matice $\mathbf{C}_p^{-1}$

$$\mathbf{C}_p^{-1} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}. \quad (5.46)$$

Za pomoci softvéru *Mathematica* vyjadríme jednotlivé členy matice

$$c_{11} = \frac{\sum_{q \in N(p)} (y_q - y_p)^2}{-\left(\sum_{q \in N(p)} (x_q - x_p)(y_q - y_p)\right)^2 + \sum_{q \in N(p)} (x_q - x_p)^2 \sum_{q \in N(p)} (y_q - y_p)^2}, \quad (5.47)$$

$$c_{12} = c_{21} = \frac{-\sum_{q \in N(p)} (x_q - x_p)(y_q - y_p)}{-\left(\sum_{q \in N(p)} (x_q - x_p)(y_q - y_p)\right)^2 + \sum_{q \in N(p)} (x_q - x_p)^2 \sum_{q \in N(p)} (y_q - y_p)^2}, \quad (5.48)$$

$$c_{22} = \frac{\sum_{q \in N(p)} (x_q - x_p)^2}{-\left(\sum_{q \in N(p)} (x_q - x_p)(y_q - y_p)\right)^2 + \sum_{q \in N(p)} (x_q - x_p)^2 \sum_{q \in N(p)} (y_q - y_p)^2}. \quad (5.49)$$

K určeniu gradientu v tomto prípade využívame iba tie susedné objemy q , ktoré majú s konečným objemom p spoločnú hranu. Nech $\mathbf{x}_n = (x_n, y_n)$ označuje reprezentačný bod

severného susedného konečného objemu v zmysle svetových strán. Analogicky $\mathbf{x}_w = (x_w, y_w)$, $\mathbf{x}_e = (x_e, y_e)$, $\mathbf{x}_s = (x_s, y_s)$ definujú reprezentačné body západného, východného a južného susedného konečného objemu. Nech ďalej platí $u_n = u(\mathbf{x}_n)$, $u_w = u(\mathbf{x}_w)$, $u_e = u(\mathbf{x}_e)$, $u_s = u(\mathbf{x}_s)$, $u_p = u(\mathbf{x}_p)$, pričom $\mathbf{x}_p = (x_p, y_p)$ označuje reprezentačný bod, v ktorom sa snažíme vyčíslit' gradient.

Uvažujme prvú zložku vektora $\mathbf{d}_p$

$$\sum_{q \in N(p)} (u_q - u_p)(x_q - x_p) = (u_n - u_p)(x_n - x_p) + (u_w - u_p)(x_w - x_p) + (u_e - u_p)(x_e - x_p) + (u_s - u_p)(x_s - x_p). \quad (5.50)$$

Pre potreby ďalšieho odvodenia budeme využívať ekvivalentný tvar (5.50)

$$\sum_{q \in N(p)} (u_q - u_p)(x_q - x_p) = u_n(x_n - x_p) + u_w(x_w - x_p) + u_e(x_e - x_p) + u_s(x_s - x_p) - u_p[(x_n - x_p) + (x_w - x_p) + (x_e - x_p) + (x_s - x_p)]. \quad (5.51)$$

Rovnako by sme postupovali pri úprave druhej zložky vektora pravej strany

$$\sum_{q \in N(p)} (u_q - u_p)(y_q - y_p) = u_n(y_n - y_p) + u_w(y_w - y_p) + u_e(y_e - y_p) + u_s(y_s - y_p) - u_p[(y_n - y_p) + (y_w - y_p) + (y_e - y_p) + (y_s - y_p)]. \quad (5.52)$$

K vytvoreniu matice sústavy potrebujeme uvažovať implicitno-explicitnú schému na logicky štvoruholníčkovej sieti. Nech $i = 1, 2, \dots, (N_1 + 2p_1)$ a $j = 1, 2, \dots, (N_2 + 2p_2)$. V zmysle zavedeného značenia nadobúdajú vzt'ahy (5.47)-(5.49) v diskretizovanej podobe tvar

$$c_{11} = \left[\sum_{\substack{p_{i+b,j+c} \in N(p_{i,j}) \\ |b|+|c|=1}} (y_{p_{i+b,j+c}} - y_{p_{i,j}})^2 \right] \left[- \left(\sum_{\substack{p_{i+b,j+c} \in N(p_{i,j}) \\ |b|+|c|=1}} (x_{p_{i+b,j+c}} - x_{p_{i,j}})(y_{p_{i+b,j+c}} - y_{p_{i,j}}) \right)^2 \right. \\ \left. + \sum_{\substack{p_{i+b,j+c} \in N(p_{i,j}) \\ |b|+|c|=1}} (x_{p_{i+b,j+c}} - x_{p_{i,j}})^2 \sum_{\substack{p_{i+b,j+c} \in N(p_{i,j}) \\ |b|+|c|=1}} (y_{p_{i+b,j+c}} - y_{p_{i,j}})^2 \right]^{-1}, \quad (5.53)$$

$$c_{12} = c_{21} = \left[- \sum_{\substack{p_{i+b,j+c} \in N(p_{i,j}) \\ |b|+|c|=1}} (x_{p_{i+b,j+c}} - x_{p_{i,j}})(y_{p_{i+b,j+c}} - y_{p_{i,j}}) \right] \\ \left[- \left(\sum_{\substack{p_{i+b,j+c} \in N(p_{i,j}) \\ |b|+|c|=1}} (x_{p_{i+b,j+c}} - x_{p_{i,j}})(y_{p_{i+b,j+c}} - y_{p_{i,j}}) \right)^2 \right. \\ \left. + \sum_{\substack{p_{i+b,j+c} \in N(p_{i,j}) \\ |b|+|c|=1}} (x_{p_{i+b,j+c}} - x_{p_{i,j}})^2 \sum_{\substack{p_{i+b,j+c} \in N(p_{i,j}) \\ |b|+|c|=1}} (y_{p_{i+b,j+c}} - y_{p_{i,j}})^2 \right]^{-1}, \quad (5.54)$$

$$\begin{aligned}
c_{22} = & \left[\sum_{\substack{p_{i+b,j+c} \in N(p_{i,j}) \\ |b|+|c|=1}} (x_{p_{i+b,j+c}} - x_{p_{i,j}})^2 \right] \left[- \left(\sum_{\substack{p_{i+b,j+c} \in N(p_{i,j}) \\ |b|+|c|=1}} (x_{p_{i+b,j+c}} - x_{p_{i,j}})(y_{p_{i+b,j+c}} - y_{p_{i,j}}) \right)^2 \right. \\
& \left. + \sum_{\substack{p_{i+b,j+c} \in N(p_{i,j}) \\ |b|+|c|=1}} (x_{p_{i+b,j+c}} - x_{p_{i,j}})^2 \sum_{\substack{p_{i+b,j+c} \in N(p_{i,j}) \\ |b|+|c|=1}} (y_{p_{i+b,j+c}} - y_{p_{i,j}})^2 \right]^{-1}.
\end{aligned} \tag{5.55}$$

Prvá zložka gradientu, ktorá vznikne vynásobením príslušných členov matice $\mathbf{C}_p^{-1}$ a vektora pravej strany $\mathbf{d}_p$ má v diskretizovanej forme tvar

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u(\mathbf{x}_{p_{i,j}})}{\partial x} = & c_{11} [u_{i,j+1}(x_{p_{i,j+1}} - x_{p_{i,j}}) + u_{i-1,j}(x_{p_{i-1,j}} - x_{p_{i,j}}) + u_{i+1,j}(x_{p_{i+1,j}} - x_{p_{i,j}}) \\
& + u_{i,j-1}(x_{p_{i,j-1}} - x_{p_{i,j}}) - u_{i,j} [(x_{p_{i,j+1}} - x_{p_{i,j}}) + (x_{p_{i-1,j}} - x_{p_{i,j}}) + (x_{p_{i+1,j}} - x_{p_{i,j}}) \\
& + (x_{p_{i,j-1}} - x_{p_{i,j}})] \\
& + c_{12} [u_{i,j+1}(y_{p_{i,j+1}} - y_{p_{i,j}}) + u_{i-1,j}(y_{p_{i-1,j}} - y_{p_{i,j}}) \\
& + u_{i+1,j}(y_{p_{i+1,j}} - y_{p_{i,j}}) + u_{i,j-1}(y_{p_{i,j-1}} - y_{p_{i,j}}) - u_{i,j} [(y_{p_{i,j+1}} - y_{p_{i,j}}) \\
& + (y_{p_{i-1,j}} - y_{p_{i,j}}) + (y_{p_{i+1,j}} - y_{p_{i,j}}) + (y_{p_{i,j-1}} - y_{p_{i,j}})]].
\end{aligned} \tag{5.56}$$

Uvedený vzťah upravíme tak, aby bolo lepšie vidieť, ktoré hodnoty riešenia potrebujeme k definovaniu prvej zložky gradientu a aby bolo zrejmé, od čoho závisia koeficienty stojace pri príslušných hodnotách riešenia

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u(\mathbf{x}_{p_{i,j}})}{\partial x} = & u_{i,j+1} (c_{11}(x_{p_{i,j+1}} - x_{p_{i,j}}) + c_{12}(y_{p_{i,j+1}} - y_{p_{i,j}})) \\
& + u_{i-1,j} (c_{11}(x_{p_{i-1,j}} - x_{p_{i,j}}) + c_{12}(y_{p_{i-1,j}} - y_{p_{i,j}})) \\
& + u_{i+1,j} (c_{11}(x_{p_{i+1,j}} - x_{p_{i,j}}) + c_{12}(y_{p_{i+1,j}} - y_{p_{i,j}})) \\
& + u_{i,j-1} (c_{11}(x_{p_{i,j-1}} - x_{p_{i,j}}) + c_{12}(y_{p_{i,j-1}} - y_{p_{i,j}})) \\
& - u_{i,j} \left(c_{11} ((x_{p_{i,j+1}} - x_{p_{i,j}}) + (x_{p_{i-1,j}} - x_{p_{i,j}}) + (x_{p_{i+1,j}} - x_{p_{i,j}}) + (x_{p_{i,j-1}} - x_{p_{i,j}})) \right. \\
& \left. + c_{12} ((y_{p_{i,j+1}} - y_{p_{i,j}}) + (y_{p_{i-1,j}} - y_{p_{i,j}}) + (y_{p_{i+1,j}} - y_{p_{i,j}}) + (y_{p_{i,j-1}} - y_{p_{i,j}})) \right).
\end{aligned} \tag{5.57}$$

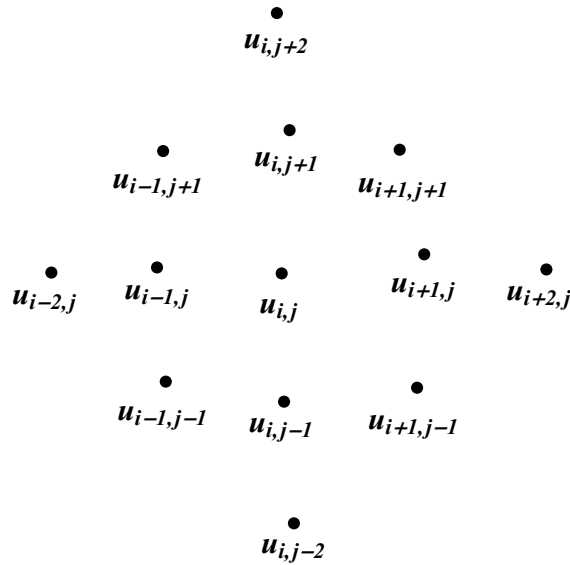
Vidíme, že spomenuté koeficienty sú závislé výhradne od geometrie diskretizovanej siete. Navyše platí, že tieto koeficienty sú tvorené iba súradnicami reprezentačných bodov najbližších susedných konečných objemov, teda využívame iba severného, južného, západného, východného suseda a samotný konečný objem $p_{i,j}$. Spolu potrebujeme hodnotu iba v piatich konečných objemoch, čo je podstatne menej, ako v prípade tvorby matice pre center shifted siete.

Analogickým postupom by sme získali druhú zložku diskretizovaného gradientu v bode

$\mathbf{x}_{p_{i,j}}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(\mathbf{x}_{p_{i,j}})}{\partial y} = & u_{i,j+1} (c_{21} (x_{p_{i,j+1}} - x_{p_{i,j}}) + c_{22} (y_{p_{i,j+1}} - y_{p_{i,j}})) \\ & + u_{i-1,j} (c_{21} (x_{p_{i-1,j}} - x_{p_{i,j}}) + c_{22} (y_{p_{i-1,j}} - y_{p_{i,j}})) \\ & + u_{i+1,j} (c_{21} (x_{p_{i+1,j}} - x_{p_{i,j}}) + c_{22} (y_{p_{i+1,j}} - y_{p_{i,j}})) \\ & + u_{i,j-1} (c_{21} (x_{p_{i,j-1}} - x_{p_{i,j}}) + c_{22} (y_{p_{i,j-1}} - y_{p_{i,j}})) \\ & - u_{i,j} \left(c_{21} ((x_{p_{i,j+1}} - x_{p_{i,j}}) + (x_{p_{i-1,j}} - x_{p_{i,j}}) + (x_{p_{i+1,j}} - x_{p_{i,j}}) + (x_{p_{i,j-1}} - x_{p_{i,j}})) \right. \\ & \left. + c_{22} ((y_{p_{i,j+1}} - y_{p_{i,j}}) + (y_{p_{i-1,j}} - y_{p_{i,j}}) + (y_{p_{i+1,j}} - y_{p_{i,j}}) + (y_{p_{i,j-1}} - y_{p_{i,j}})) \right). \end{aligned} \quad (5.58)$$

Pre druhú zložku gradientu by sme mohli vyvodit' rovnaké závery ako pre prvú. Z implicitno-explicitnej schémy vyplýva, že pre dané i a j sa v rovnici vyskytuje celkovo trinásť neznámych hodnôt riešenia a rovnaký počet súradníc reprezentačných bodov. Spomenutých trinásť neznámych hodnôt uvádzame na Obrázku 5.5.



Obr. 5.5: Neznáme vystupujúce v rovnici (5.25) pre konečný objem $p_{i,j}$ pri použití corner shifted siete a metódy *least square gradient*

Aj v prípade corner shifted sietí platí, že matica systému je závislá výhradne od geometrie diskretizovanej siete a teda sa pre danú úlohu počíta iba raz. Zachovávajúc značenie z predošlej časti práce, opäť pre každý časový krok riešime rovnicu (5.45). Numerická metóda využitá v diplomovej práci pre riešenie systému rovníc je aj pre corner shifted siete *Biconjugate Gradient Method*.

5.3 Nepriama-iteračná inflow-implicit/outflow-explicit metóda

Nepriama-iteračná implicitno-explicitná schéma vychádza z priamej semi-implicitnej schémy (5.24). V každom časovom kroku $n = 1, 2, \dots, M$ však vykonávame vnútorné iterácie označené indexom k . Tieto vnútorné iterácie majú dopomôcť k presnejšiemu určeniu gradientu v novom časovom kroku n .

Myšlienka iteračnej inflow-implicit/outflow-explicit schémy je vychádzať zo starej hodnoty gradientu, ktorá bola vypočítaná v kroku $n - 1$, a vnútornými iteráciami zlepšovať jej hodnotu v novom časovom kroku pri zvolenej presnosti. Schéma (5.24) prechádza pre $n = 1, 2, \dots, M$ do tvaru

$$\begin{aligned} u_p^{n,k} + \frac{\tau}{m_p} \sum_{q \in N(p)} a_{pq}^{in} (u_p^{n,k} - u_q^{n,k} - \nabla_q u^{n,k-1} \cdot (\mathbf{x}_{pq} - \mathbf{x}_q)) = \\ u_p^{n-1} + \frac{\tau}{m_p} \sum_{q \in N(p)} a_{pq}^{out} (\nabla_p u^{n-1} \cdot (\mathbf{x}_{pq} - \mathbf{x}_p)), \quad k = 1, 2, \dots, k_{max}. \end{aligned} \quad (5.59)$$

Úpravou (5.59) sme vytvorili lineárny systém riešiteľný numerickými metódami, napríklad *Biconjugate Gradient* alebo *Successive Overrelaxation Method*

$$\begin{aligned} (1 + \frac{\tau}{m_p} \sum_{q \in N(p)} a_{pq}^{in}) u_p^{n,k} - \frac{\tau}{m_p} \sum_{q \in N(p)} a_{pq}^{in} u_q^{n,k} = \\ u_p^{n-1} + \frac{\tau}{m_p} \sum_{q \in N(p)} a_{pq}^{out} (\nabla_p u^{n-1} \cdot (\mathbf{x}_{pq} - \mathbf{x}_p)) + \frac{\tau}{m_p} \sum_{q \in N(p)} a_{pq}^{in} (\nabla_q u^{n,k-1} \cdot (\mathbf{x}_{pq} - \mathbf{x}_q)), \end{aligned} \quad (5.60)$$

$$k = 1, 2, \dots, k_{max}.$$

Pre $i = 1, 2, \dots, (N_1 + 2p_1)$, $j = 1, 2, \dots, (N_2 + 2p_2)$, $n = 1, 2, \dots, M$, $k = 1, 2, \dots, k_{max}$ dostávame diskretizovaný systém rovníc

$$\begin{aligned} (1 + \frac{\tau}{m_{i,j}} \sum_{\substack{p_{i+b,j+c} \in N(p_{i,j}) \\ |b|+|c|=1}} a_{p_{i,j}p_{i+b,j+c}}^{in}) u_{i,j}^{n,k} - \frac{\tau}{m_{i,j}} \sum_{\substack{p_{i+b,j+c} \in N(p_{i,j}) \\ |b|+|c|=1}} a_{p_{i,j}p_{i+b,j+c}}^{in} u_{i+b,j+c}^{n,k} = \\ u_{i,j}^{n-1} + \frac{\tau}{m_{i,j}} \sum_{\substack{p_{i+b,j+c} \in N(p_{i,j}) \\ |b|+|c|=1}} a_{p_{i,j}p_{i+b,j+c}}^{out} (\nabla_{p_{i,j}} u^{n-1} \cdot (\mathbf{x}_{p_{i,j}p_{i+b,j+c}} - \mathbf{x}_{p_{i,j}})) \\ + \frac{\tau}{m_{i,j}} \sum_{\substack{p_{i+b,j+c} \in N(p_{i,j}) \\ |b|+|c|=1}} a_{p_{i,j}p_{i+b,j+c}}^{in} (\nabla_{p_{i+b,j+c}} u^{n,k-1} \cdot (\mathbf{x}_{p_{i,j}p_{i+b,j+c}} - \mathbf{x}_{p_{i+b,j+c}})). \end{aligned} \quad (5.61)$$

Vnútorný cyklus cez parameter k môže byť ukončený buď dosiahnutím maximálneho stanoveného počtu iterácií k_{max} , alebo dosiahnutím vopred danej presnosti reziduí.

6 Numerické experimenty

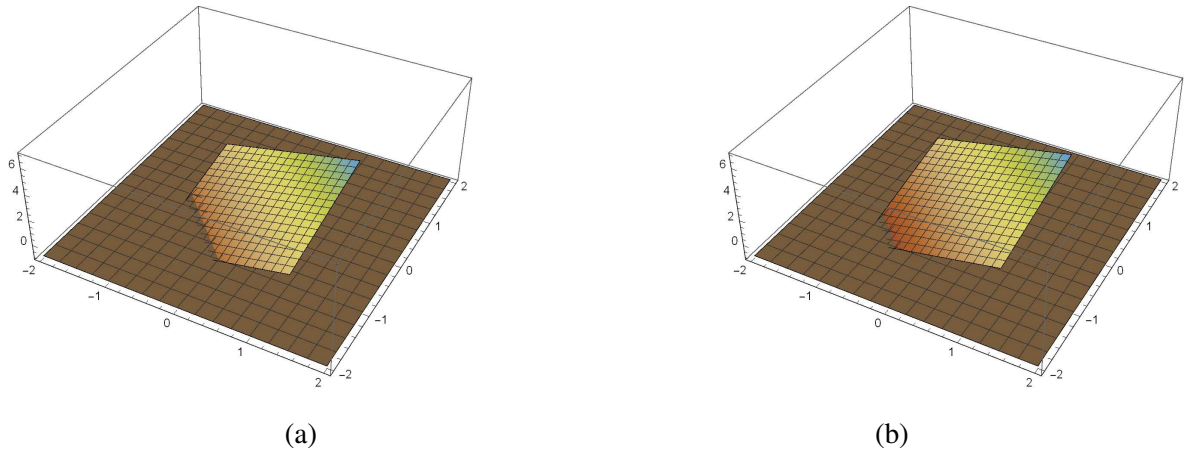
Druhá časť práce sa zameriava na numerické experimenty všetkých odvodených schém. Presnosť a efektívnosť jednotlivých metód môžeme porovnávať z hľadiska viacerých kritérií. Schémy aplikujeme na corner shifted aj center shifted mriežky a určíme ich chybu v L_1 norme. Táto norma je pre rovnicu advekcie postačujúca. V prípade, ak pre vybranú úlohu nebude riešenie presné, určíme aj experimentálny rád konverencie, ďalej len EOC. Keďže sú úlohy definované na nerovnomerných sieťach, k výpočtu EOC používame priemerné dĺžky hrán uvedené v Tabuľkách 2.1, 2.2, 2.3 a 2.4. Očakávame, že sa výsledky numerických experimentov budú líšiť taktiež podľa toho, aký spôsob počítania gradientu zvolíme. V neposlednom rade môžeme k porovnaniu výsledkov využiť aj grafické výstupy.

Nech je daná výpočtová oblasť $I = [-1, 1] \times [-1, 1]$. Všetky ďalej opísané úlohy riešime na zavedenej oblasti I . Nech pre všetky úlohy ďalej platí $p_1 = 2$, $p_2 = 2$, $N = N_1 = N_2$ v zmysle zavedeného značenia. Tie úlohy, ktorých vektorové pole predstavuje transláciu, riešime na časovom intervale $[0, 1]$. Pokiaľ vektorové pole zastupuje rotáciu, časový interval úlohy je $[0, \pi]$. Nech M označuje celkový počet časových krokov a τ veľkosť rovnomerného časového kroku. Odvodené numerické schémy budeme testovať na úlohách (6.1), (6.2), (6.3), (6.4).

Nech je daná lineárna funkcia

$$u(x, y) = x + y. \quad (6.1)$$

a nech sú v každom čase dané Dirichletove okrajové podmienky rovné presnému riešeniu. Nech je ďalej dané konštantné vektorové pole $\mathbf{v} = (-1, 0.5)$. Obrázok 6.1 ukazuje stav opísanej úlohy v čase $t = 0$ a $T = 1$.

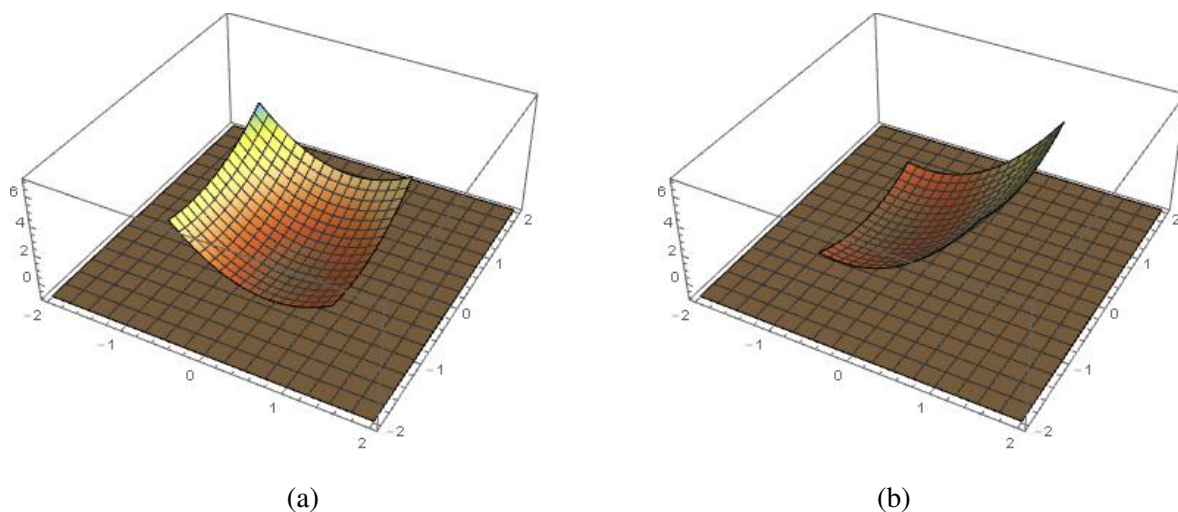


Obr. 6.1: Počiatočný stav (a) a koncový stav (b) úlohy (6.1) pre $N=80$

Nech je daná kvadratická funkcia

$$u(x, y) = 2x^2 + y^2 - x + y - 0.25. \quad (6.2)$$

v rýchlostnom vektorovom poli $\mathbf{v} = (-1, 0.5)$. Na konečných objemoch reprezentujúcich okrajové podmienky je pre každý uvažovaný čas dané presné riešenie. Obrázok 6.2 ukazuje úlohu v čase $t = 0$ a v čase $T = 1$.



Obr. 6.2: Počiatočná podmienka (a) úlohy (6.2) a riešenie v koncovom čase $T = 1$ (b), $N = 80$

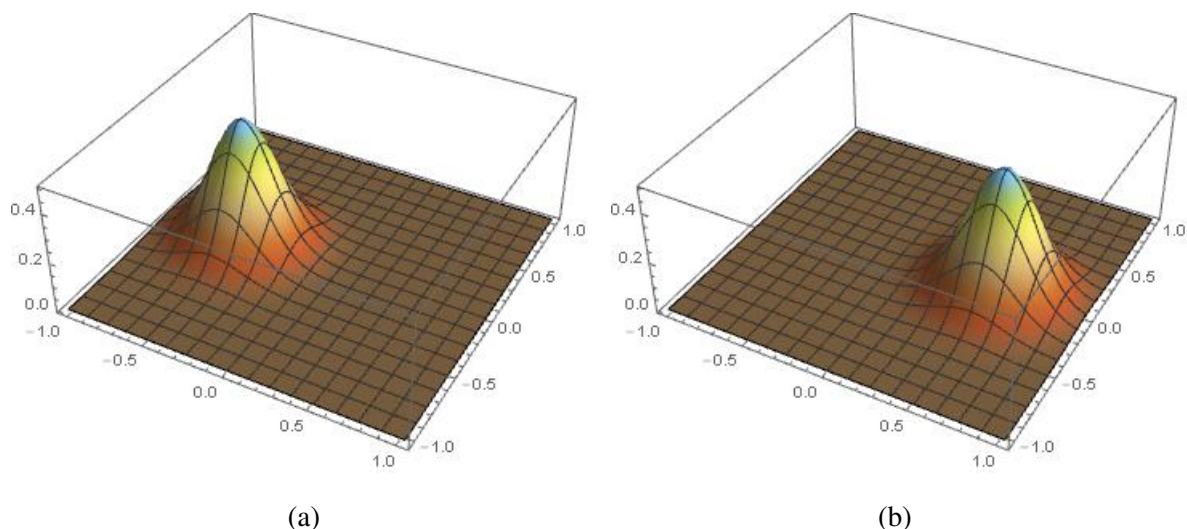
Nech je daná Gaussova funkcia so stredom v bode $(-0.5, 0)$

$$u(x, y) = 0.5e^{-\frac{(x+0.5)^2}{2(0.2)^2} - \frac{y^2}{2(0.2)^2}} \quad (6.3)$$

a Dirichletove okrajové podmienky, ktoré pre každý časový krok predpisujú hodnotu rovnú presnému riešeniu. Nech je ďalej dané vektorové pole

1. $\mathbf{v} = (1, 0)$ predstavujúce transláciu iba v smere osi x ,
2. $\mathbf{v} = (-1, 0.5)$ charakterizujúce všeobecný posun,
3. $\mathbf{v} = (-y, x)$ zastupujúce rotáciu okolo bodu $(0, 0)$.

Na Obrázku 6.3 uvádzame grafický výstup úlohy (6.3) v začiatočnom čase $t = 0$ a v koncom čase $T = 1$, pričom bolo využité rýchlostné vektorové pole $\mathbf{v} = (1, 0)$ a $N = 80$.

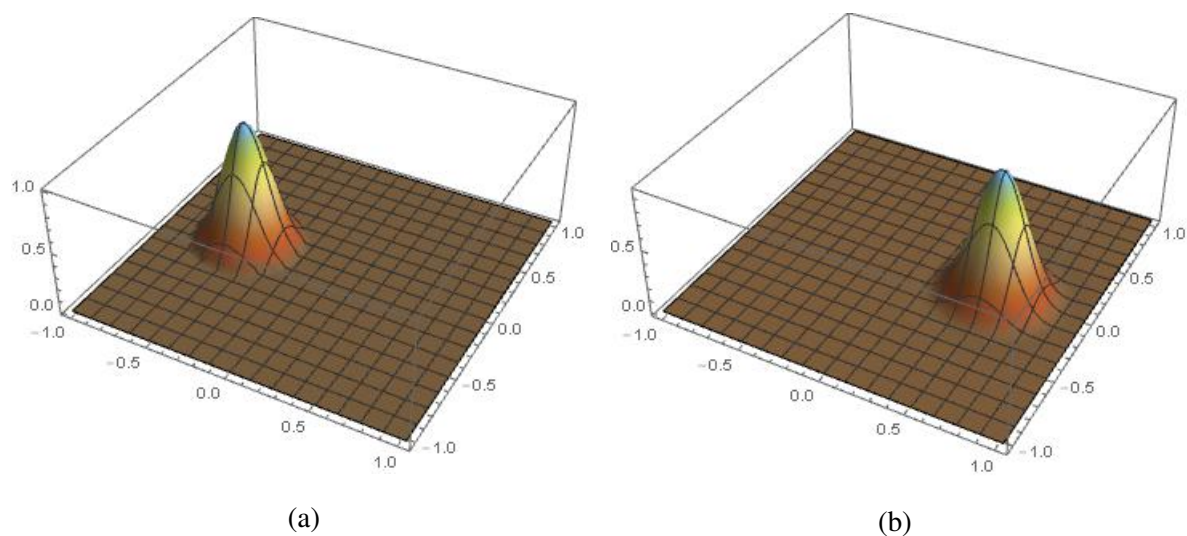


Obr. 6.3: Počiatočná podmienka (a) a koncový stav (b) úlohy (6.3) v spojitosti s vektorovým poľom $\mathbf{v} = (1, 0)$, pričom $N = 80$

Nech je daná hladká funkcia

$$u(x, y) = \cos^5(\pi\sqrt{(x+0.5)^2 + y^2}) \quad (6.4)$$

vo vnútri kruhu s polomerom o veľkosti 0.333 a so stredom v bode $(-0.5, 0)$. Nech je daná nulová funkcia všade mimo tohto kruhu, teda aj na konečných objemoch definujúcich okrajové podmienky. Nech je dané rýchlostné vektorové pole $(-y, x)$ charakterizujúce rotáciu. Počiatočný stav aj riešenie opísanej úlohy v čase $T = \pi$ uvádzame v grafickej podobe na Obrázku 6.4.



Obr. 6.4: Úloha (6.4) v čase $t = 0$ (a) a výsledné riešenie (b) v čase $T = \pi$ pre $N = 80$

6.1 Explicitná metóda na corner shifted sieti

V nasledujúcich numerických experimentoch aplikujeme odvodenú explicitnú schému (5.20) na rôzne funkcie a vektorové polia reprezentujúce posunutie aj rotáciu.

Explicitné schémy bývajú vo všeobecnosti iba prvého rádu presnosti. Naša priestorová diskretizácia siete evokuje dojem vyššej presnosti, no samotnú časovú deriváciu sme aproximovali časovou diferenciou prvého rádu presnosti. V dôsledku tohto faktu očakávame, že explicitná schéma bude aj v našom prípade iba prvého rádu presnosti.

V diplomovej práci sme uviedli dva rôzne spôsoby, ktorými môžeme určiť gradient v bode corner shifted siete. *Diamond cell* metódu v kombinácii s bilineárnou interpoláciou a metódu *least square gradient*. Numerické experimenty preto vykonávame na schémach, ktoré využívajú jeden aj druhý prístup.

6.1.1 *Diamond cell*

Gradients sú v tomto prípade určené pomocou *diamond cell* metódy. Hodnoty riešenia v rohových uzloch aproximujeme pomocou bilineárnej interpolácie bez mapovacej funkcie. V práci sme síce uviedli variant bilineárnej interpolácie s mapovacou funkciou, no numericky dostávame veľmi podobné výstupy.

N	τ	M	perturb. 0.1	perturb. 0.05	perturb. 0.01	perturb. 0.001
20	0.1	10	2.20979×10^{-11}	2.96212×10^{-11}	2.01339×10^{-11}	2.22305×10^{-11}
40	0.05	20	2.14354×10^{-7}	1.89988×10^{-7}	2.12085×10^{-7}	1.57345×10^{-7}
80	0.025	40	3.05758	2.64539	2.84680	2.87140
160	0.0125	80	1.96892×10^{14}	1.61788×10^{14}	1.77179×10^{14}	1.38984×10^{14}

Tabuľka 6.1: L_1 normy chýb pre lineárnu úlohu (6.1), na ktorú bola aplikovaná explicitná metóda, využívajúca *diamond cell* metódu, s daným časovým krokom, uvažujúc rôzne perturbované a rôzne veľké corner shifted siete

N	τ	M	perturb. 0.1	perturb. 0.05	perturb. 0.01	perturb. 0.001
20	0.05	20	8.684×10^{-13}	7.084×10^{-13}	8.111×10^{-13}	8.110×10^{-13}
40	0.025	40	7.26794×10^{-11}	5.22882×10^{-11}	6.86811×10^{-11}	6.16013×10^{-11}
80	0.0125	80	2.78939×10^{-7}	3.12966×10^{-7}	3.80294×10^{-7}	3.29459×10^{-7}
160	0.00625	160	2.93250	2.129199	2.47699	2.37285

Tabuľka 6.2: Analógia s Tabuľkou 6.1, ale veľkosť časového kroku sa rovná polovici časového kroku použitého v Tabuľke 6.1

N	τ	M	perturb. 0.1	perturb. 0.05	perturb. 0.01	perturb. 0.001
20	0.025	40	3.020×10^{-13}	3.143×10^{-13}	3.143×10^{-13}	3.133×10^{-13}
40	0.0125	80	5.0202×10^{-12}	5.0890×10^{-12}	4.9452×10^{-12}	4.6865×10^{-12}
80	0.00625	160	9.94730×10^{-11}	1.04398×10^{-10}	9.82453×10^{-11}	1.02838×10^{-10}
160	0.003125	320	6.33481×10^{-9}	6.12126×10^{-9}	5.83412×10^{-9}	6.00498×10^{-9}

Tabuľka 6.3: Analógia s Tabuľkou 6.1, no veľkosť použitého časového kroku je rovná štvrtine časového kroku uvedeného v Tabuľke 6.1

N	τ	M	perturb. 0.1	perturb. 0.05	perturb. 0.01	perturb. 0.001
20	0.0125	80	2.396×10^{-13}	2.411×10^{-13}	2.534×10^{-13}	2.365×10^{-13}
40	0.00625	160	3.7362×10^{-12}	3.7194×10^{-12}	3.7323×10^{-12}	3.5703×10^{-12}
80	0.003125	320	6.33767×10^{-11}	6.48699×10^{-11}	6.20109×10^{-11}	6.26077×10^{-11}
160	0.0015625	640	1.10247×10^{-9}	1.06872×10^{-9}	1.07439×10^{-9}	1.04731×10^{-9}

Tabuľka 6.4: Analógia s Tabuľkou 6.1, ale veľkosť časového kroku sa rovná osmine časového kroku použitého v Tabuľke 6.1

N	τ	M	perturb. 0.1	perturb. 0.05	perturb. 0.01	perturb. 0.001
20	0.00625	160	1.895×10^{-13}	2.188×10^{-13}	2.222×10^{-13}	2.050×10^{-13}
40	0.003125	320	3.3745×10^{-12}	3.4154×10^{-12}	3.3663×10^{-12}	3.0958×10^{-12}
80	0.0015625	640	5.61953×10^{-11}	5.79262×10^{-11}	5.57274×10^{-11}	5.54829×10^{-11}
160	7.8125×10^{-4}	1280	9.74475×10^{-10}	9.39572×10^{-10}	9.48839×10^{-10}	9.14325×10^{-10}

Tabuľka 6.5: Analógia s Tabuľkou 6.1, no veľkosť použitého časového kroku je rovná jednej šestnástine časového kroku uvedeného v Tabuľke 6.1

Tabuľky 6.1-6.5 ukazujú chyby explicitnej schémy v L_1 norme pre lineárnu úlohu (6.1) s použitím rôzne veľkých časových krokov. Môžeme si všimnúť, že voľba časového kroku skutočne ovplyvňuje stabilitu schémy. Pre najväčšie použité siete s $N = 160$ je metóda stabilná až pri použití rovnomerného časového kroku $\tau = \frac{1}{2N}$, pričom sa vykoná $M = N$ časových krokov. Metódu považujeme za presnú v prípade, ak je L_1 norma chyby rádovo 1×10^{-13} alebo menšia. Pre najväčšiu uvažovanú sieť poukazuje prechod medzi Tabuľkami 6.1 a 6.2 na rýchlo klesajúcu chybu so zmenšujúcou sa veľkosťou časového kroku. Naopak, prechod medzi Tabuľkami 6.3-6.5 ukazuje len veľmi pomalé klesanie chyby metódy pre siete s počtom konečných objemov $N = 40$, $N = 80$, $N = 160$.

N	τ	M	perturb. 0.1	perturb. 0.05	perturb. 0.01	perturb. 0.001
20	0.1	10	1.67450×10^{-1}	1.59353×10^{-1}	1.55559×10^{-1}	1.55351×10^{-1}
40	0.05	20	5.27999	2.54979	5.18846×10^{-1}	7.46612×10^{-2}
80	0.025	40	1.26952×10^6	5.80569×10^5	1.13525×10^5	1.13594×10^4
160	0.0125	80	1.64272×10^{18}	6.64667×10^{17}	1.23936×10^{17}	1.23483×10^{16}

Tabuľka 6.6: L_1 normy chýb úlohy (6.3) Gaussovej funkcie s rýchlostným polom opísaným v časti 2. tejto úlohy, na ktorú bola aplikovaná explicitná metóda, využívajúca *diamond cell* metódu, s daným časovým krokom pre rôzne veľké a rôzne perturbované corner shifted siete

N	τ	M	perturb. 0.1	perturb. 0.05	perturb. 0.01	perturb. 0.001
20	0.05	20	1.94428×10^{-2}	1.95183×10^{-2}	1.95541×10^{-2}	1.95591×10^{-2}
40	0.025	40	8.536596×10^{-3}	8.39291×10^{-3}	8.31115×10^{-3}	8.30133×10^{-3}
80	0.0125	80	6.65796×10^{-2}	3.54537×10^{-2}	9.99212×10^{-3}	4.44298×10^{-3}
160	0.00625	160	5.81304×10^3	2.79203×10^3	5.52109×10^2	5.52025×10^1

Tabuľka 6.7: Analógia s Tabuľkou 6.6, no veľkosť použitého časového kroku je rovná polovici časového kroku uvedeného v Tabuľke 6.6

N	τ	M	perturb. 0.1	EOC	perturb. 0.05	EOC	perturb. 0.01	EOC	perturb. 0.001	EOC
20	0.025	40	6.29937×10^{-3}	-	6.31091×10^{-3}	-	6.31422×10^{-3}	-	6.31425×10^{-3}	-
40	0.0125	80	3.55557×10^{-3}	0.86	3.55246×10^{-3}	0.86	3.55067×10^{-3}	0.86	3.55034×10^{-3}	0.86
80	0.00625	160	1.86100×10^{-3}	0.95	1.862498×10^{-3}	0.95	1.86297×10^{-3}	0.95	1.86299×10^{-3}	0.95
160	0.003125	320	9.481496×10^{-4}	0.98	9.48298×10^{-4}	0.98	9.48371×10^{-4}	0.98	9.48380×10^{-4}	0.98

Tabuľka 6.8: Analógia s Tabuľkou 6.6, ale veľkosť časového kroku sa rovná štvrtine časového kroku použitého v Tabuľke 6.6

Tabuľky 6.6, 6.7, 6.8 riešili úlohu (6.3) Gaussovej funkcie s rýchlostným vektorovým pol'om opísaným v časti 2. tejto úlohy, v rôznom počte celkových časových krokov a s rozdielne veľkými časovými krokmi. Voľba veľkosti časového kroku sa opäť ukázala ako zásadný faktor v otázke stability explicitnej schémy. Zatiaľ čo v prípade lineárnej funkcie stačil časový krok $\tau = \frac{1}{2N}$ k vytvoreniu stabilných výpočtových schém, v prípade hladkej Gaussovej funkcie sme museli zvoliť ešte o polovicu menší časový krok. Po vytvorení stabilnej schémy si môžeme všimnúť očakávaný prvý rád konverencie.

N	τ	M	perturb. 0.1	perturb. 0.05	perturb. 0.01	perturb. 0.001
20	0.31416	10	1.14855×10^4	1.10046×10^4	1.08411×10^4	1.08229×10^4
40	0.15708	20	3.53642×10^{11}	3.09403×10^{11}	2.98522×10^{11}	2.98102×10^{11}
80	0.07854	40	6.58637×10^{26}	5.19962×10^{26}	4.79183×10^{26}	4.70935×10^{26}
160	0.03927	80	1.30368×10^{58}	6.15813×10^{57}	4.165197×10^{57}	3.97910×10^{57}

Tabuľka 6.9: L_1 normy chýb úlohy (6.4) hladkej funkcie, na ktorú bola aplikovaná explicitná schéma, využívajúca *diamond cell* metódu, s daným časovým krokom pre rôzne veľké a rôzne perturbované corner shifted siete

N	τ	M	perturb. 0.1	perturb. 0.05	perturb. 0.01	perturb. 0.001
20	0.15708	20	3.84712×10^4	3.38022×10^4	3.31268×10^4	3.31192×10^4
40	0.07854	40	1.43802×10^{13}	7.62507×10^{12}	5.56110×10^{12}	5.34596×10^{12}
80	0.03927	80	2.39411×10^{30}	1.12361×10^{30}	8.08722×10^{29}	1.15377×10^{30}
160	0.01963	160	3.14334×10^{66}	8.42550×10^{65}	3.00125×10^{66}	2.90075×10^{65}

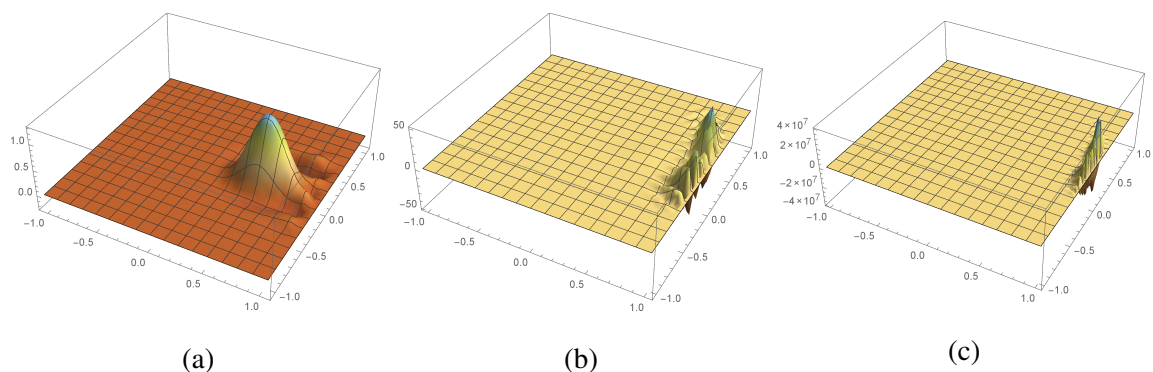
Tabuľka 6.10: Analógia s Tabuľkou 6.9, ale veľkosť časového kroku sa rovná polovici časového kroku použitého v Tabuľke 6.9

N	τ	M	perturb. 0.1	perturb. 0.05	perturb. 0.01	perturb. 0.001
20	0.07854	40	9.52562	8.94814	8.59581	8.53168
40	0.03927	80	6.84989×10^5	4.87276×10^5	4.12846×10^5	4.04745×10^5
80	0.01963	160	1.67929×10^{18}	1.43871×10^{18}	1.32157×10^{18}	1.20258×10^{18}
160	0.00982	320	8.70321×10^{43}	4.04276×10^{43}	4.27444×10^{43}	4.37551×10^{43}

Tabuľka 6.11: Analógia s Tabuľkou 6.9, no veľkosť použitého časového kroku je rovná štvrtine časového kroku uvedeného v Tabuľke 6.9

N	τ	M	perturb. 0.1	perturb. 0.05	perturb. 0.01	perturb. 0.001
20	0.03927	80	1.56966×10^{-1}	1.55850×10^{-1}	1.55435×10^{-1}	1.55432×10^{-1}
40	0.01963	160	1.02146×10^{-1}	1.02265×10^{-1}	1.02444×10^{-1}	1.02484×10^{-1}
80	0.00982	320	1.39001	1.40823	1.43775	9.57829×10^{-1}
160	0.00491	640	1.65415×10^5	1.26922×10^5	1.21859×10^5	1.21057×10^5

Tabuľka 6.12: Analógia s Tabuľkou 6.9, no veľkosť použitého časového kroku je rovná osmine časového kroku uvedeného v Tabuľke 6.9



Obr. 6.5: Riešenie úlohy (6.4) explicitnou schémou, využívajúcou *diamond cell* metódu, s časovým krokom $\tau = \frac{\pi}{4N}$ v čase $T = \pi$ na sieťach s $N = 40$ (a), $N = 80$ (b), $N = 160$ (c) s $perturb.=0.001$

N	τ	M	perturb. 0.1	EOC	perturb. 0.05	EOC	perturb. 0.01	EOC	perturb. 0.001	EOC
20	0.01963	160	1.21115×10^{-1}	-	1.20531×10^{-1}	-	1.20521×10^{-1}	-	1.20545×10^{-1}	-
40	0.00982	320	4.58226×10^{-2}	1.45	4.58491×10^{-2}	1.44	4.57764×10^{-2}	1.45	4.57679×10^{-2}	1.45
80	0.00491	640	2.39158×10^{-2}	0.96	2.38631×10^{-2}	0.96	2.38450×10^{-2}	0.96	2.38738×10^{-2}	0.96
160	0.00245	1280	1.28179×10^{-2}	0.91	1.27367×10^{-2}	0.91	1.27425×10^{-2}	0.91	1.27451×10^{-2}	0.91

Tabuľka 6.13: Analógia s Tabuľkou 6.9, no veľkosť použitého časového kroku je rovná osmine časového kroku uvedeného v Tabuľke 6.9

Tabuľky 6.9-6.13 poukazujú na stabilitu, resp. nestabilitu, explicitnej schémy aplikovanej na hladkú funkciu s nulovými okrajovými podmienkami. Oproti úlohe s lineárnou a Gaussovou funkciou sme pre dosiahnutie stability museli podstatne zmenšiť veľkosť časového kroku. Nestabilita sa v tomto prípade prejavovala oveľa väčšími osciláciami než v predošlých dvoch úlohách. Po dosiahnutí stability si môžeme opäť všimnúť prvý rád presnosti. Obrázok 6.5 je grafickým výstupom riešenia poukazujúcim na veľkosť nestability. Konkrétne Obrázok 6.5 (a) má v blízkosti funkcie viditeľné oscilácie napriek tomu, že numerický výsledok schémy bol už rádovo 10^{-1} . Tento fakt je dôležitým poznatkom pre kontrolu výstupov aj v číselnej forme.

6.1.2 *Least square gradient*

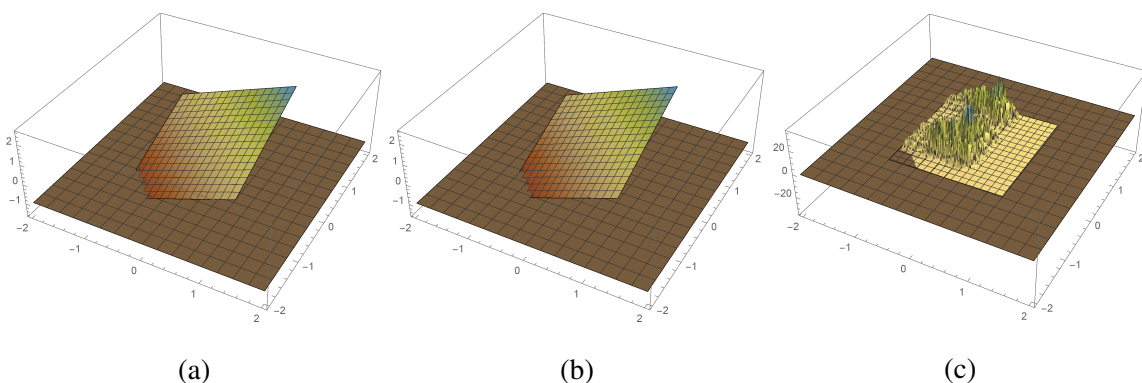
V druhej časti tejto podkapitoly riešime dané úlohy odvodenou explicitnou schémou, ktorá využíva k výpočtu gradientu metódu najmenších štvorcov. Oproti *diamond cell* metóde s bilineárnou interpoláciou manipuluje *least square gradient* s oveľa menším počtom aritmetických operácií, čo by mohlo prispieť k zvýšeniu jej presnosti.

N	τ	M	perturb. 0.1	perturb. 0.05	perturb. 0.01	perturb. 0.001
20	0.1	10	6.35×10^{-14}	5.6×10^{-14}	5.19×10^{-14}	6.27×10^{-14}
40	0.05	20	1.32974×10^{-10}	1.437597×10^{-10}	1.54750×10^{-10}	1.36267×10^{-10}
80	0.025	40	3.38772×10^{-3}	2.38159×10^{-3}	3.042298×10^{-3}	2.48511×10^{-3}
160	0.0125	80	2.39492×10^{12}	1.96652×10^{12}	2.07466×10^{12}	1.95165×10^{12}

Tabuľka 6.14: L_1 normy chýb pre úlohu lineárnej funkcie (6.1), na ktorú bola aplikovaná explicitná metóda, využívajúca *least square gradient*, s daným časovým krokom, uvažujúc rôzne perturbované a rôzne veľké corner shifted siete

N	τ	M	perturb. 0.1	perturb. 0.05	perturb. 0.01	perturb. 0.001
20	0.05	20	2.1×10^{-15}	2.0×10^{-15}	1.6×10^{-15}	1.8×10^{-15}
40	0.025	40	1.120×10^{-13}	8.50×10^{-14}	8.88×10^{-14}	7.15×10^{-14}
80	0.0125	80	1.43674×10^{-9}	9.08951×10^{-10}	1.21588×10^{-9}	1.19891×10^{-9}
160	0.00625	160	4.72552×10^{-1}	4.69390×10^{-1}	4.18783×10^{-1}	3.45063×10^{-1}

Tabuľka 6.15: Analógia s Tabuľkou 6.14, ale veľkosť časového kroku sa rovná polovici časového kroku použitého v Tabuľke 6.14



Obr. 6.6: Riešenie úlohy (6.1) v čase $T = 1$ explicitnou schémou s použitím *least square gradient* metódy, s časovým krokom $\tau = \frac{1}{N}$ na sieťach s $N = 40$ (a), $N = 80$ (b), $N = 160$ (c) s $\text{perturb.}=0.001$

N	τ	M	perturb. 0.1	perturb. 0.05	perturb. 0.01	perturb. 0.001
20	0.025	40	7×10^{-16}	7×10^{-16}	7×10^{-16}	7×10^{-16}
40	0.0125	80	1.2×10^{-15}	1.2×10^{-15}	1.2×10^{-15}	1.1×10^{-15}
80	0.00625	160	3.6×10^{-15}	3.4×10^{-15}	3.6×10^{-15}	3.5×10^{-15}
160	0.003125	340	2.355×10^{-13}	2.383×10^{-13}	2.413×10^{-13}	2.434×10^{-13}

Tabuľka 6.16: Analógia s Tabuľkou 6.14, no veľkosť použitého časového kroku je rovná štvrtine časového kroku uvedeného v Tabuľke 6.14

Ani metóda najmenších štvorcov použitá pre výpočet gradientu nedokáže vytvoriť z explicitnej schémy bezpodmienečne stabilnú schému. Hodnota gradientu by síce zohrávala úlohu pri dôkaze stability, no kľúčovým faktorom k odstráneniu oscilácií zostáva pomer veľkosti časového kroku a priemernej dĺžky hrany konečného objemu. Na Obrázku

6.6 vizuálne poukazujeme na vzájomnú závislosť veľkosti zvoleného časového kroku a veľkosti priemernej dĺžky hrany. Po zvolení vhodného pomeru časového kroku a veľkosti hrany je explicitná schéma pre takto zadanú úlohu s lineárnou funkciou exaktná.

Prechod medzi Tabuľkami 6.14-6.16 poukazuje na veľmi rýchlo klesajúcu numerickú chybu metódy a to pre všetky veľkosti sietí, na ktorých sme testovali explicitnú schému.

Môžeme si všimnúť, že na odstránenie nestability aj z najväčšej uvažovanej siete nám stačil časový krok $\tau = \frac{1}{2N}$ ako v prípade použitia diamond cell metódy a bilineárnej interpolácie, no k dosiahnutiu exaktného numerického riešenia pre všetky uvažované veľkosti sietí nám stačí v prípade *least square gradient* metódy väčší časový krok.

N	τ	M	perturb. 0.1	perturb. 0.05	perturb. 0.01	perturb. 0.001
20	0.1	10	2.51798×10^{-1}	1.98994×10^{-1}	1.80833×10^{-1}	1.81181×10^{-1}
40	0.05	20	60.20914	29.16206	5.76304	5.92376×10^{-1}
80	0.025	40	1.23943×10^8	5.66537×10^7	1.09805×10^7	1.09591×10^6
160	0.0125	80	1.87435×10^{22}	8.07659×10^{21}	1.54448×10^{21}	1.542797×10^{20}

Tabuľka 6.17: L_1 normy chýb úlohy Gaussovej funkcie (6.3) s rýchlostným pol'om opísaným v časti 2. tejto úlohy, na ktorú bola aplikovaná explicitná metóda, využívajúca *least square gradient*, s daným časovým krokom pre rôzne veľké a rôzne perturbované corner shifted siete

N	τ	M	perturb. 0.1	perturb. 0.05	perturb. 0.01	perturb. 0.001
20	0.05	20	2.14859×10^{-2}	2.14378×10^{-2}	2.14392×10^{-2}	2.14428×10^{-2}
40	0.025	40	2.47502×10^{-2}	1.58198×10^{-2}	9.54415×10^{-3}	8.45678×10^{-3}
80	0.0125	80	28.17971	14.30951	2.89047	2.92043×10^{-1}
160	0.00625	160	9.83572×10^8	4.85717×10^8	9.69919×10^7	9.70651×10^6

Tabuľka 6.18: Analógia s Tabuľkou 6.17, no veľkosť použitého časového kroku je rovná polovici časového kroku uvedeného v Tabuľke 6.17

N	τ	M	perturb. 0.1	EOC	perturb. 0.05	EOC	perturb. 0.01	EOC	perturb. 0.001	EOC
20	0.025	40	6.67370×10^{-3}	-	6.68290×10^{-3}	-	6.68531×10^{-3}	-	6.68498×10^{-3}	-
40	0.0125	80	3.61125×10^{-3}	0.92	3.60620×10^{-3}	0.92	3.60363×10^{-3}	0.92	3.60324×10^{-3}	0.92
80	0.00625	160	1.86799×10^{-3}	0.97	1.86882×10^{-3}	0.97	1.86913×10^{-3}	0.96	1.86916×10^{-3}	0.96
160	0.003125	340	1.04172×10^{-3}	0.85	9.82269×10^{-4}	0.94	9.50553×10^{-4}	0.98	9.49106×10^{-4}	0.99

Tabuľka 6.19: Analógia s Tabuľkou 6.17, ale veľkosť použitého časového kroku je rovná štvrtine časového kroku uvedeného v Tabuľke 6.17

Tabuľky 6.17 a 6.18 znovu dokazujú, že pri nevhodnom pomere veľkosti časového kroku a veľkosti hrany konečného objemu vzniká nestabilita. So znižujúcim sa časovým krokom sa aj pre túto úlohu pomerne rýchlo znižuje chyba výpočtu a to pre všetky veľkosti sietí. Tabuľka 6.19 overila predpoklad prvého rádu presnosti explicitnej schémy.

Aj v tomto prípade považujeme za dôležité poukázať na rozdiel medzi *diamond cell* metódou, resp. bilineárnou interpoláciou, a *least square gradient* metódou. Nielenže sme vďaka metode najmenších štvorcov dosiahli stabilitu pri väčšom časovom kroku, teda pri menšom počte časových krokov, ale uvedené normy chýb sú dokonca menšie ako v prípade *diamond cell* metódy pri aplikácii rovnakého časového kroku.

N	τ	M	perturb. 0.1	perturb. 0.05	perturb. 0.01	perturb. 0.001
20	0.31416	10	2.44930×10^4	2.39567×10^4	2.38081×10^4	2.38022×10^4
40	0.15708	20	6.50153×10^{11}	5.95254×10^{11}	5.98506×10^{11}	6.02378×10^{11}
80	0.07854	40	5.14781×10^{27}	4.56059×10^{27}	4.330099×10^{27}	4.34489×10^{27}
160	0.03927	80	1.81443×10^{60}	1.52027×10^{60}	1.39641×10^{60}	1.38894×10^{60}

Tabuľka 6.20: L_1 normy chýb úlohy hladkej funkcie (6.4), na ktorú bola aplikovaná explicitná metóda, využívajúca *least square gradient*, s daným časovým krokom pre rôzne veľké a rôzne perturbované corner shifted siete

N	τ	M	perturb. 0.1	perturb. 0.05	perturb. 0.01	perturb. 0.001
20	0.15708	20	5.32389×10^5	4.99107×10^5	4.82710×10^5	4.79967×10^5
40	0.07854	40	1.23824×10^{15}	1.01732×10^{15}	8.59572×10^{14}	8.36039×10^{14}
80	0.03927	80	5.80864×10^{35}	5.03709×10^{35}	4.59533×10^{35}	4.53761×10^{35}
160	0.01963	160	5.24618×10^{77}	2.02703×10^{77}	1.86064×10^{77}	1.84560×10^{77}

Tabuľka 6.21: Analógia s Tabuľkou 6.20, no veľkosť použitého časového kroku je rovná polovici časového kroku uvedeného v Tabuľke 6.20

N	τ	M	perturb. 0.1	perturb. 0.05	perturb. 0.01	perturb. 0.001
20	0.07854	40	217.85273	210.04364	206.40976	205.89688
40	0.03927	80	1.97561×10^9	1.71573×10^9	1.63763×10^9	1.63874×10^9
80	0.01963	160	8.71010×10^{25}	$686438. \times 10^{25}$	5.933698×10^{25}	5.51783×10^{25}
160	0.00982	340	3.71125×10^{60}	1.77849×10^{60}	1.54362×10^{60}	1.53122×10^{60}

Tabuľka 6.22: Analógia s Tabuľkou 6.20, no veľkosť použitého časového kroku je rovná štvrtine časového kroku uvedeného v Tabuľke 6.20

N	τ	M	perturb. 0.1	perturb. 0.05	perturb. 0.01	perturb. 0.001
20	0.03927	80	1.66735×10^{-1}	1.65872×10^{-1}	1.65341×10^{-1}	1.65308×10^{-1}
40	0.01963	160	1.22121×10^{-1}	1.23269×10^{-1}	1.23955×10^{-1}	1.24111×10^{-1}
80	0.00982	320	17.10502	17.05005	17.06074	21.45247
160	0.00491	540	6.52803×10^7	9.31701×10^7	9.45936×10^7	9.56135×10^7

Tabuľka 6.23: Analógia s Tabuľkou 6.20, no veľkosť použitého časového kroku je rovná osmine časového kroku uvedeného v Tabuľke 6.20

N	τ	M	perturb. 0.1	EOC	perturb. 0.05	EOC	perturb. 0.01	EOC	perturb. 0.001	EOC
20	0.01963	160	1.13960×10^{-1}	-	1.13350×10^{-1}	-	1.13247×10^{-1}	-	1.13255×10^{-1}	-
40	0.00982	320	4.60915×10^{-2}	1.35	4.63058×10^{-2}	1.34	4.62767×10^{-2}	1.34	4.62707×10^{-2}	1.34
80	0.00491	640	2.41002×10^{-2}	0.95	2.40769×10^{-2}	0.96	2.40681×10^{-2}	0.96	2.40652×10^{-2}	0.96
160	0.00245	1280	1.3151×10^{-2}	0.88	1.32483×10^{-2}	0.87	1.32844×10^{-2}	0.87	1.32929×10^{-2}	0.86

Tabuľka 6.24: Analógia s Tabuľkou 6.20, no veľkosť použitého časového kroku je rovná jednej šestnástine časového kroku uvedeného v Tabuľke 6.20

Posledný numerický experiment v Tabuľke 6.24 dokazuje prvý rád konvergenzie metódy pre zvolený časový krok. V Tabuľkách 6.20-6.23 si môžeme všimnúť veľkú nestabilitu v podobe veľmi vysokej hodnoty L_1 normy chyby.

6.2 IIOE metóda

Od priamej inflow-implicit/outflow-explicit metódy využitej na nerovnomernej sieti očakávame druhý rád presnosti, ktorý sa snažíme overiť nasledujúcimi numerickými experimentami.

6.2.1 IIOE na center shifted sieti

V prípade priamej semi-implicitnej schémy aplikovanej na center shifted siete riešime systém lineárnych rovníc, pričom pri vytváraní matice sústavy postupujeme podľa odvodu v časti (5.2.1.4) diplomovej práce. Pripomíname, že výsledný gradient v bode konečného objemu dostaneme váženým priemerom gradientov na hranách tohto objemu. Voľba váh môže ovplyvniť výslednú presnosť. V práci sme uviedli tri rôzne spôsoby váženého priemerovania, ktoré teraz overíme aj prakticky.

Systém riešime metódou *Biconjugate Gradient* s maximálnym počtom iterácií 1000 a toleranciou 1×10^{-12} .

6.2.1.1 Plochy trojuholníkov

Považujeme za dôležité pripomenúť, že voľba váh v podobe trojuholníkových plôch nie je úplne korektná, nakoľko sa jednotlivé váhy môžu zväčšovať s rastúcou vzdialenosťou príslušnej hrany konečného objemu od jeho reprezentačného bodu.

N	τ	M	perturb. 0.1	perturb. 0.05	perturb. 0.01	perturb. 0.001
20	0.1	10	1.5×10^{-15}	1.5×10^{-15}	1.6×10^{-15}	1.6×10^{-15}
40	0.05	20	2.0×10^{-15}	2.4×10^{-15}	2.0×10^{-15}	2.1×10^{-15}
80	0.025	40	2.9×10^{-15}	3.3×10^{-15}	2.8×10^{-15}	2.8×10^{-15}

Tabuľka 6.25: L_1 normy chýb pre lineárnu úlohu (6.1), na ktorú bola aplikovaná priama IIOE metóda, využívajúca hodnoty trojuholníkových plôch, s daným časovým krokom, uvažujúc rôzne perturbované a rôzne veľké center shifted siete

Z Tabuľky 6.25 vidíme, že priama semi-implicitná schéma je pre úlohu (6.1), teda pre transláciu lineárnej funkcie, exaktná aj pre voľbu pomerne veľkého časového kroku a to v prípade všetkých uvažovaných veľkostí sietí.

N	τ	M	perturb. 0.1	EOC	perturb. 0.05	EOC	perturb. 0.01	EOC	perturb. 0.001	EOC
20	0.1	10	9.50846×10^{-3}	-	4.745196×10^{-3}	-	9.48517×10^{-4}	-	9.48516×10^{-5}	-
40	0.05	20	2.78432×10^{-3}	1.84	1.38679×10^{-3}	1.84	2.76868×10^{-4}	1.84	2.76805×10^{-5}	1.84
80	0.025	40	7.32672×10^{-4}	1.96	3.64793×10^{-4}	1.96	7.28328×10^{-5}	1.96	7.28194×10^{-6}	1.96

Tabuľka 6.26: EOC a L_1 normy chýb kvadratickej úlohy (6.2), na ktorú bola aplikovaná priama IIOE metóda, využívajúca hodnoty trojuholníkových plôch, s daným časovým krokom, uvažujúc rôzne perturbované a rôzne veľké center shifted siete

N	τ	M	perturb. 0.1	EOC	perturb. 0.05	EOC	perturb. 0.01	EOC	perturb. 0.001	EOC
20	0.05	20	6.74262×10^{-3}	-	3.36573×10^{-3}	-	6.73081×10^{-4}	-	6.73185×10^{-5}	-
40	0.025	40	1.98922×10^{-3}	1.82	9.90079×10^{-4}	1.83	1.97586×10^{-4}	1.83	1.97531×10^{-5}	1.83
80	0.0125	80	5.23744×10^{-4}	1.96	2.60649×10^{-4}	1.96	5.20266×10^{-5}	1.96	5.20160×10^{-6}	1.96

Tabuľka 6.27: Analógia s Tabuľkou 6.26, no veľkosť použitého časového kroku je rovná polovici časového kroku uvedeného v Tabuľke 6.26

Tabuľky 6.26 a 6.27 poukazujú na stabilitu semi-implicitnej schémy pri voľbe rôzne veľkých časových krokov a na druhý rád presnosti tejto metódy aplikovanej na danú kvadratickú úlohu s Dirichletovými okrajovými podmienkami.

N	τ	M	perturb. 0.1	EOC	perturb. 0.05	EOC	perturb. 0.01	EOC	perturb. 0.001	EOC
20	0.1	10	1.52010×10^{-2}	-	1.47331×10^{-2}	-	1.44962×10^{-2}	-	1.44838×10^{-2}	
40	0.05	20	3.15422×10^{-3}	2.35	2.96765×10^{-3}	2.39	2.89741×10^{-3}	2.41	2.89449×10^{-3}	2.41
80	0.025	40	5.44160×10^{-4}	2.58	4.55786×10^{-4}	2.75	4.13773×10^{-4}	2.86	4.11475×10^{-4}	2.87

Tabuľka 6.28: EOC a L_1 normy chýb úlohy Gaussovej funkcie (6.3) s rýchlostným pol'om opísaným v časti 1. tejto úlohy, na ktorú bola aplikovaná priama IIOE metóda, využívajúca hodnoty trojuholníkových plôch, s daným časovým krokom pre rôzne veľké a rôzne perturbované center shifted siete

N	τ	M	perturb. 0.1	EOC	perturb. 0.05	EOC	perturb. 0.01	EOC	perturb. 0.001	EOC
20	0.05	20	1.16379×10^{-2}	-	1.13352×10^{-2}	-	1.12098×10^{-2}	-	1.11989×10^{-2}	-
40	0.025	40	2.61133×10^{-3}	2.23	2.48156×10^{-3}	2.27	2.431496×10^{-3}	2.28	2.42896×10^{-3}	2.28
80	0.0125	80	5.71853×10^{-4}	2.23	5.024248×10^{-4}	2.35	5.04278×10^{-4}	2.31	5.03302×10^{-4}	2.31

Tabuľka 6.29: Analógia s Tabuľkou 6.28, no veľkosť použitého časového kroku je rovná polovici časového kroku uvedeného v Tabuľke 6.28

Tabuľky 6.28 a 6.29 opäť ukazujú absenciu nestability a to aj pri rôzne veľkých časových krokoch. Tabuľky taktiež potvrdzujú očakávaný druhý rád konvergenzie pre prípad hladkej Gaussovej funkcie s Dirichletovými okrajovými podmienkami.

N	τ	M	perturb. 0.1	EOC	perturb. 0.05	EOC	perturb. 0.01	EOC	perturb. 0.001	EOC
20	0.31416	10	2.35186×10^{-1}	-	2.35456×10^{-1}	-	2.36289×10^{-1}	-	2.36076×10^{-1}	-
40	0.15708	20	8.87592×10^{-2}	1.46	8.83918×10^{-2}	1.46	8.816498×10^{-2}	1.47	8.814999×10^{-2}	1.47
80	0.07854	40	2.45329×10^{-2}	1.89	2.44554×10^{-2}	1.89	2.44387×10^{-2}	1.88	2.44298×10^{-2}	1.88

Tabuľka 6.30: EOC a L_1 normy chýb úlohy hladkej funkcie (6.4), na ktorú bola aplikovaná priama IIOE metóda, využívajúca hodnoty trojuholníkových plôch, s daným časovým krokom pre rôzne veľké a rôzne perturbované center shifted siete

N	τ	M	perturb. 0.1	EOC	perturb. 0.05	EOC	perturb. 0.01	EOC	perturb. 0.001	EOC
20	0.15708	20	1.66686×10^{-1}	-	1.67078×10^{-1}	-	1.67751×10^{-1}	-	1.67714×10^{-1}	-
40	0.07854	40	5.19482×10^{-2}	1.74	5.15204×10^{-2}	1.76	5.13554×10^{-2}	1.77	5.13300×10^{-2}	1.77
80	0.03927	80	1.24227×10^{-2}	2.10	1.23709×10^{-2}	2.1	1.23459×10^{-2}	2.09	1.23409×10^{-2}	2.09

Tabuľka 6.31: Analógia s Tabuľkou 6.30, ale bol použitý polovičný časový krok voči časovému kroku uvedenému v Tabuľke 6.30

Aj v prípade poslednej spojitej funkcie, na ktorú sme aplikovali priamu semi-implicitnú schému, vidíme druhý rád presnosti metódy a to aj napriek faktu, že nami zvolené váhy neboli celkom správne. Porovnaním Tabuľky 6.30 a 6.31 si môžeme všimnúť nielen stabilitu metódy, ale aj znižujúcu sa normu chyby pri zmenšení časového kroku.

6.2.1.2 Prevrátené hodnoty plôch

V nasledujúcich numerických experimentoch budeme taktiež využívať trojuholníkové plochy vo váhach gradientov určených na hraniciach konečného objemu. Na rozdiel

od predošlej časti však nepoužijeme váhy priamo, ale použijeme ich prevrátené hodnoty, aby sme zabezpečili, že sa váhy budú zmenšovať so zväčšujúcou sa vzdialenosťou hrany od reprezentačného bodu daného konečného objemu.

Od tohto spôsobu priemerovania neočakávame, že zmení predpokladanú konvergenciu schémy. Očakávame iba zlepšenie výsledkov experimentov vo forme menšej chyby voči prvému uvedenému spôsobu priemerovania. Taktiež predpokladáme, že sa výsledné chyby budú zmenšovať so zmenšujúcim sa časovým krokom.

N	τ	M	perturb. 0.1	perturb. 0.05	perturb. 0.01	perturb. 0.001
20	0.1	10	1.5×10^{-15}	1.6×10^{-15}	1.5×10^{-15}	1.6×10^{-15}
40	0.05	20	2.0×10^{-15}	2.6×10^{-15}	1.9×10^{-15}	2.1×10^{-15}
80	0.025	40	3.2×10^{-15}	3.2×10^{-15}	2.8×10^{-15}	2.7×10^{-15}

Tabuľka 6.32: L_1 normy chýb pre úlohu lineárnej funkcie (6.1), na ktorú bola aplikovaná priama IIOE metóda, využívajúca prevrátené hodnoty trojuholníkových plôch, s daným časovým krokom, uvažujúc rôzne perturbované a rôzne veľké center shifted siete

I v prípade druhého uvedeného spôsobu počítania výsledného gradientu je schéma exaktná pre transláciu lineárnej funkcie.

N	τ	M	perturb. 0.1	EOC	perturb. 0.05	EOC	perturb. 0.01	EOC	perturb. 0.001	EOC
20	0.1	10	8.19708×10^{-3}	-	4.10069×10^{-3}	-	8.19956×10^{-4}	-	8.19874×10^{-5}	-
40	0.05	20	2.41557×10^{-3}	1.83	1.20854×10^{-3}	1.83	2.41446×10^{-4}	1.83	2.41336×10^{-5}	1.83
80	0.025	40	6.35128×10^{-4}	1.96	3.17822×10^{-4}	1.96	6.35484×10^{-5}	1.96	6.35378×10^{-6}	1.96

Tabuľka 6.33: EOC a L_1 normy chýb úlohy kvadratickej funkcie (6.2), na ktorú bola aplikovaná priama IIOE metóda, využívajúca prevrátené hodnoty trojuholníkových plôch, s daným časovým krokom, uvažujúc rôzne perturbované a rôzne veľké center shifted siete

N	τ	M	perturb. 0.1	EOC	perturb. 0.05	EOC	perturb. 0.01	EOC	perturb. 0.001	EOC
20	0.05	20	5.39692×10^{-3}	-	2.70274×10^{-3}	-	5.40744×10^{-4}	-	5.40687×10^{-5}	-
40	0.025	40	1.61187×10^{-3}	1.81	8.06505×10^{-4}	1.81	1.61097×10^{-4}	1.81	1.61013×10^{-5}	1.81
80	0.0125	80	4.24465×10^{-4}	1.96	2.124796×10^{-4}	1.96	4.24946×10^{-5}	1.96	4.24883×10^{-6}	1.96

Tabuľka 6.34: Analógia s Tabuľkou 6.33, no veľkosť použitého časového kroku je rovná polovici časového kroku uvedeného v Tabuľke 6.33

Tabuľky 6.33 a 6.34 poukazujú na štyri významné poznatky. Schéma je skutočne stabilná aj pre kvadratickú funkciu. Priama implicitno-explicitná metóda je aj v tomto prípade druhého rádu presnosti. Chyby sa skutočne zmenšujú so zmenšujúcim sa krokom. Posledným veľmi dôležitým faktom je, že použitím tohto spôsobu získavania výsledného gradientu skutočne získavame presnejšie výsledky než pri prvom opísanom spôsobe, ktorý sme označili za nie úplne korektný.

N	τ	M	perturb. 0.1	EOC	perturb. 0.05	EOC	perturb. 0.01	EOC	perturb. 0.001	EOC
20	0.1	10	1.48928×10^{-2}	-	1.46465×10^{-2}	-	1.44910×10^{-2}	-	1.44838×10^{-2}	-
40	0.05	20	3.06411×10^{-3}	2.36	2.94176×10^{-3}	2.4	2.89626×10^{-3}	2.41	2.89447×10^{-3}	2.41
80	0.025	40	5.27302×10^{-4}	2.58	4.49875×10^{-4}	2.76	4.13444×10^{-4}	2.86	4.11473×10^{-4}	2.87

Tabuľka 6.35: EOC a L_1 normy chýb úlohy hladkej Gaussovej funkcie (6.3) s rýchlostným poľom opísaným v časti 1. tejto úlohy, na ktorú bola aplikovaná priama IIOE schéma, využívajúca prevrátené hodnoty trojuholníkových plôch, s daným časovým krokom pre rôzne veľké a rôzne perturbované center shifted siete

N	τ	M	perturb. 0.1	EOC	perturb. 0.05	EOC	perturb. 0.01	EOC	perturb. 0.001	EOC
20	0.05	20	1.15962×10^{-2}	-	1.13179×10^{-2}	-	1.12087×10^{-2}	-	1.11989×10^{-2}	-
40	0.025	40	2.63917×10^{-3}	2.21	2.48623×10^{-3}	2.26	2.43173×10^{-3}	2.28	2.42897×10^{-3}	2.28
80	0.0125	80	5.90806×10^{-4}	2.2	5.28922×10^{-4}	2.27	5.04456×10^{-4}	2.31	5.03301×10^{-4}	2.31

Tabuľka 6.36: Analógia s Tabuľkou 6.35, no veľkosť použitého časového kroku je rovná polovici časového kroku uvedeného v Tabuľke 6.35

Tabuľky 6.35 a 6.36 aj v prípade Gaussovej funkcie ukazujú stabilitu priamej semi-implicitnej metódy a jej očakávaný druhý rád konvergenzie.

N	τ	M	perturb. 0.1	EOC	perturb. 0.05	EOC	perturb. 0.01	EOC	perturb. 0.001	EOC
20	0.31416	10	2.32328×10^{-1}	-	2.34669×10^{-1}	-	2.36243×10^{-1}	-	2.36074×10^{-1}	-
40	0.15708	20	8.64533×10^{-2}	1.48	8.78193×10^{-2}	1.47	8.8146×10^{-2}	1.47	8.81503×10^{-2}	1.47
80	0.07854	40	2.34126×10^{-2}	1.92	2.41740×10^{-2}	1.89	2.44297×10^{-2}	1.88	2.44299×10^{-2}	1.88

Tabuľka 6.37: EOC a L_1 normy chýb úlohy hladkej funkcie (6.4), na ktorú bola aplikovaná priama IIOE metóda, využívajúca prevrátené hodnoty trojuholníkových plôch, s daným časovým krokom pre rôzne veľké a rôzne perturbované center shifted siete

N	τ	M	perturb. 0.1	EOC	perturb. 0.05	EOC	perturb. 0.01	EOC	perturb. 0.001	EOC
20	0.15708	20	1.66028×10^{-1}	-	1.66847×10^{-1}	-	1.677299×10^{-1}	-	1.67713×10^{-1}	-
40	0.07854	40	5.19373×10^{-2}	1.74	5.15153×10^{-2}	1.76	5.13535×10^{-2}	1.77	5.13298×10^{-2}	1.77
80	0.03927	80	1.25505×10^{-2}	2.09	1.23989×10^{-2}	2.09	1.23479×10^{-2}	2.09	1.23411×10^{-2}	2.09

Tabuľka 6.38: Analógia s Tabuľkou 6.37, no veľkosť použitého časového kroku je rovná polovici časového kroku uvedeného v Tabuľke 6.37

Aj posledné Tabuľky 6.37 a 6.38 dokazujú stabilitu priamej implicitno-explicitnej schémy použitej na hladkú funkciu a druhý rád konvergenzie tejto metódy.

6.2.1.3 Prevrátené hodnoty vzdialeností

Posledným spôsobom váženého priemerovania pre získanie gradientu v bode center shifted siete, ktorý bol uvedený v teoretickej časti diplomovej práce, je využitie vzdialenosti stredu hrany konečného objemu od jeho reprezentačného bodu. Nepoužijeme však túto vzdialenosť priamo ako váhu. Opäť použijeme jej prevrátenú hodnotu z dôvodov spomenutých aj v predošlej časti práce. Pripomíname, že nami vybrané spôsoby váženého priemerovania nie sú jediné, ktoré možno použiť. Dala by sa využiť napríklad prevrátená hodnota štvorca opísanej vzdialenosti a mnohé ďalšie.

Od numerických experimentov v tejto časti práce očakávame potvrdenie stability priamej semi-implicitnej schémy použitej na dané úlohy a jej konvergenciu druhého rádu. Taktiež očakávame, že metóda je s použitím daného spôsobu výpočtu gradientu exaktná pre lineárnu funkciu.

N	τ	M	perturb. 0.1	perturb. 0.05	perturb. 0.01	perturb. 0.001
20	0.1	10	1.3×10^{-15}	1.4×10^{-15}	1.5×10^{-15}	1.6×10^{-15}
40	0.05	20	2.1×10^{-15}	2.0×10^{-15}	2.1×10^{-15}	2.2×10^{-15}
80	0.025	40	3.3×10^{-15}	3.4×10^{-15}	2.9×10^{-15}	2.9×10^{-15}
160	0.0125	80	4.5×10^{-15}	4.8×10^{-15}	4.6×10^{-15}	4.3×10^{-15}

Tabuľka 6.39: L_1 normy chýb pre úlohu lineárnej funkcie (6.1), na ktorú bola aplikovaná priama IIOE metóda, využívajúca prevrátené hodnoty vzdialeností stredov hrán od reprezentačných bodov, s daným časovým krokom, uvažujúc rôzne perturbované a rôzne veľké center shifted siete

Tabuľka 6.39 potvrdzuje predpoklad stability metódy pre daný časový krok. Metóda je pre úlohu posunu lineárnej funkcie skutočne exaktná.

N	τ	M	perturb. 0.1	EOC	perturb. 0.05	EOC	perturb. 0.01	EOC	perturb. 0.001	EOC
20	0.1	10	8.19091×10^{-3}	-	4.09518×10^{-3}	-	8.18684×10^{-4}	-	8.18569×10^{-5}	-
40	0.05	20	2.41019×10^{-3}	1.83	1.20575×10^{-3}	1.83	2.40888×10^{-4}	1.83	2.40779×10^{-5}	1.83
80	0.025	40	6.33902×10^{-4}	1.96	3.17204×10^{-4}	1.96	6.34287×10^{-5}	1.96	6.34196×10^{-6}	1.96
160	0.0125	80	1.68672×10^{-4}	1.93	8.44511×10^{-5}	1.93	1.68986×10^{-5}	1.93	1.68993×10^{-6}	1.93

Tabuľka 6.40: EOC a L_1 normy chýb kvadratickej úlohy (6.2), na ktorú bola aplikovaná priama IIOE metóda, využívajúca prevrátené hodnoty vzdialeností stredov hrán od reprezentačných bodov, uvažujúc rôzne perturbované a rôzne veľké center shifted siete

N	τ	M	perturb. 0.1	EOC	perturb. 0.05	EOC	perturb. 0.01	EOC	perturb. 0.001	EOC
20	0.05	20	5.3899×10^{-3}	-	2.69717×10^{-3}	-	5.39344×10^{-4}	-	5.393496×10^{-5}	-
40	0.025	40	1.60663×10^{-3}	1.81	8.03628×10^{-4}	1.81	1.60497×10^{-4}	1.81	1.60414×10^{-5}	1.81
80	0.0125	80	4.23198×10^{-4}	1.96	2.11841×10^{-4}	1.96	4.23652×10^{-5}	1.96	4.23599×10^{-6}	1.96

Tabuľka 6.41: Analógia s Tabuľkou 6.40, no veľkosť použitého časového kroku je rovná polovici časového kroku uvedeného v Tabuľke 6.40

Tabuľky 6.40 a 6.41 sú opäť dôkazom stability priamej semi-implicitnej schémy. Poukazujú na druhý rád konverencie tejto metódy a fakt, že chyby sa znižujú so znižovaním veľkosti časového kroku.

N	τ	M	perturb. 0.1	EOC	perturb. 0.05	EOC	perturb. 0.01	EOC	perturb. 0.001	EOC
20	0.1	10	1.48893×10^{-2}	-	1.46454×10^{-2}	-	1.44907×10^{-2}	-	1.44838×10^{-2}	-
40	0.05	20	3.06315×10^{-3}	2.36	2.941598×10^{-3}	2.4	2.89626×10^{-3}	2.41	2.89447×10^{-3}	2.41
80	0.025	40	5.27132×10^{-4}	2.58	4.49811×10^{-4}	2.76	4.13441×10^{-4}	2.86	4.11473×10^{-4}	2.87

Tabuľka 6.42: EOC a L_1 normy chýb úlohy hladkej Gaussovej funkcie (6.3) s rýchlostným polom opísaným v časti 1. tejto úlohy, na ktorú bola aplikovaná priama IIOE schéma, využívajúca prevrátené hodnoty vzdialeností stredov hrán od reprezentačných bodov, s daným časovým krokom pre rôzne veľké a rôzne perturbované center shifted siete

N	τ	M	perturb. 0.1	EOC	perturb. 0.05	EOC	perturb. 0.01	EOC	perturb. 0.001	EOC
20	0.05	20	1.15917×10^{-2}	-	1.13162×10^{-2}	-	1.12085×10^{-2}	-	1.11988×10^{-2}	-
40	0.025	40	2.63828×10^{-3}	2.21	2.48599×10^{-3}	2.26	2.43173×10^{-3}	2.28	2.42897×10^{-3}	2.28
80	0.0125	80	5.90754×10^{-4}	2.2	5.28924×10^{-4}	2.27	5.04457×10^{-4}	2.31	5.03301×10^{-4}	2.31

Tabuľka 6.43: Analógia s Tabuľkou 6.42, no veľkosť použitého časového kroku je rovná polovici časového kroku uvedeného v Tabuľke 6.42

Tabuľky 6.42 a 6.43 znovu dokazujú druhý rád konvergenzie priamej semi-implicitnej metódy a jej stabilitu pre rôzne voľby časového kroku.

N	τ	M	perturb. 0.1	EOC	perturb. 0.05	EOC	perturb. 0.01	EOC	perturb. 0.001	EOC
20	0.31416	10	2.32451×10^{-1}	-	2.34716×10^{-1}	-	2.36251×10^{-1}	-	2.36075×10^{-1}	-
40	0.15708	20	8.64097×10^{-2}	1.48	8.78078×10^{-2}	1.47	8.81452×10^{-2}	1.47	8.81502×10^{-2}	1.47
80	0.07854	40	2.34016×10^{-2}	1.92	2.41703×10^{-2}	1.89	2.44294×10^{-2}	1.88	2.44299×10^{-2}	1.88

Tabuľka 6.44: EOC a L_1 normy chýb úlohy hladkej funkcie (6.4), na ktorú bola aplikovaná priama IIOE metóda, využívajúca prevrátené hodnoty vzdialeností stredov hrán od reprezentčných bodov, s daným časovým krokom pre rôzne veľké a rôzne perturbované center shifted siete

N	τ	M	perturb. 0.1	EOC	perturb. 0.05	EOC	perturb. 0.01	EOC	perturb. 0.001	EOC
20	0.15708	20	1.66029×10^{-1}	-	1.66857×10^{-1}	-	1.67733×10^{-1}	-	1.67713×10^{-1}	-
40	0.07854	40	5.19208×10^{-2}	1.74	5.15123×10^{-2}	1.76	5.13538×10^{-2}	1.77	5.13299×10^{-2}	1.77
80	0.03927	80	1.25466×10^{-2}	2.09	1.23977×10^{-2}	2.09	1.23478×10^{-2}	2.09	1.23411×10^{-2}	2.09

Tabuľka 6.45: Analógia s Tabuľkou 6.44, no veľkosť použitého časového kroku je rovná polovici časového kroku uvedeného v Tabuľke 6.44

Tabuľky 6.44 a 6.45 poukazujú opäť na stabilitu priamej implicitno-explicitnej schémy a jej druhý rád konvergenzie. So znižujúcim sa časovým krokom sa znižuje aj L_1 norma chyby výpočtu.

6.2.2 IIOE na corner shifted sieti

Explicitná metóda aplikovaná na úlohy, ktoré uvažovali corner shifted siete, bola iba prvého rádu presnosti. Jej významným nedostatkom bola taktiež nestabilita v prípade nevhodne zvoleného časového kroku. V časti (5.2.2) diplomovej práce sme sa ale zamerali

na priamu implicitno-explicitnú metódu operujúcu na corner shifted sieťach. Podarilo sa nám dokonca ukázať, že metóda dokáže explicitne zostaviť matica systému závislú výhradne od geometrie mriežky, za predpokladu využitia *least square gradient* metódy pre výpočet hodnoty gradientu. Semi-implicitné schémy sú vo všeobecnosti stabilné a dosahujú vyšší než prvý rád presnosti. V nasledujúcich numerických experimentoch preto upriamime svoju pozornosť na využitie odvodenej priamej semi-implicitnej schémy v rôznych úlohách definovaných na corner shifted sieťach.

Systém riešime metódou *Biconjugate Gradient* s maximálnym počtom iterácií 100 a toleranciou 1×10^{-12} .

N	τ	M	perturb. 0.1	perturb. 0.05	perturb. 0.01	perturb. 0.001
20	0.1	10	4.90×10^{-14}	9.29×10^{-14}	9.95×10^{-14}	6.03×10^{-14}
40	0.05	20	7.73×10^{-14}	6.83×10^{-14}	4.51×10^{-14}	2.80×10^{-14}
80	0.025	40	4.49×10^{-14}	6.11×10^{-14}	1.70×10^{-14}	1.74×10^{-14}
160	0.0125	80	1.60×10^{-14}	2.26×10^{-14}	1.02×10^{-14}	7.1×10^{-15}

Tabuľka 6.46: L_1 normy chýb pre úlohu lineárnej funkcie (6.1), na ktorú bola aplikovaná priama IIOE schéma, využívajúca *least square gradient*, s daným časovým krokom, uvažujúc rôzne perturbované a rôzne veľké corner shifted siete

N	τ	M	perturb. 0.1	perturb. 0.05	perturb. 0.01	perturb. 0.001
20	0.05	20	8.72×10^{-14}	1.177×10^{-13}	1.039×10^{-13}	1.374×10^{-13}
40	0.025	40	1.289×10^{-13}	7.60×10^{-14}	6.55×10^{-14}	4.36×10^{-14}
80	0.0125	80	1.409×10^{-13}	4.78×10^{-14}	1.92×10^{-14}	1.97×10^{-14}
160	0.00625	160	7.03×10^{-14}	2.95×10^{-14}	3.01×10^{-14}	1.36×10^{-14}

Tabuľka 6.47: Analógia s Tabuľkou 6.46, ale pre polovičný časový krok než je časový krok v Tabuľke 6.46

Tabuľky 6.46 a 6.47 ukazujú, že priama implicitno-explicitná metóda, využívajúca *least square gradient*, je nielen stabilná pre danú úlohu, ale dokonca dosahuje exaktné výsledky.

N	τ	M	perturb. 0.1	EOC	perturb. 0.05	EOC	perturb. 0.01	EOC	perturb. 0.001	EOC
20	0.1	10	5.81672×10^{-3}	-	5.79056×10^{-3}	-	5.78049×10^{-3}	-	5.77938×10^{-3}	-
40	0.05	20	1.20539×10^{-3}	2.35	1.19682×10^{-3}	2.36	1.19306×10^{-3}	2.36	1.19267×10^{-3}	2.36
80	0.025	40	2.34261×10^{-4}	2.41	2.29649×10^{-4}	2.42	2.28157×10^{-4}	2.43	2.28083×10^{-4}	2.43
160	0.0125	80	5.02569×10^{-5}	2.24	4.91465×10^{-5}	2.24	4.87738×10^{-5}	2.25	4.87575×10^{-5}	2.25

Tabuľka 6.48: EOC a L_1 normy chýb úlohy hladkej Gaussovej funkcie (6.3) s rýchlostným pol'om opísaným v časti 2. tejto úlohy, na ktorú bola aplikovaná priama HIOE schéma, využívajúca *least square gradient*, s daným časovým krokom pre rôzne veľké a rôzne perturbované corner shifted siete

N	τ	M	perturb. 0.1	EOC	perturb. 0.05	EOC	perturb. 0.01	EOC	perturb. 0.001	EOC
20	0.05	20	3.39618×10^{-3}	-	3.35023×10^{-3}	-	3.32915×10^{-3}	-	3.32619×10^{-3}	-
40	0.025	40	6.90166×10^{-4}	2.38	6.78508×10^{-4}	2.39	6.74608×10^{-4}	2.39	6.74355×10^{-4}	2.39
80	0.0125	80	1.60181×10^{-4}	2.15	1.55353×10^{-4}	2.17	1.53629×10^{-4}	2.17	1.53520×10^{-4}	2.17
160	0.00625	160	4.11046×10^{-5}	1.98	4.02725×10^{-5}	1.97	3.99752×10^{-5}	1.96	3.99620×10^{-5}	1.96

Tabuľka 6.49: Analógia s Tabuľkou 6.48, no veľkosť použitého časového kroku je rovná polovici časového kroku uvedeného v Tabuľke 6.48

N	τ	M	perturb. 0.1	EOC	perturb. 0.05	EOC	perturb. 0.01	EOC	perturb. 0.001	EOC
20	0.025	40	2.89391×10^{-3}	-	2.84749×10^{-3}	-	2.82497×10^{-3}	-	2.82191×10^{-3}	-
40	0.0125	80	6.96842×10^{-4}	2.13	6.87538×10^{-4}	2.12	6.84634×10^{-4}	2.12	6.84473×10^{-4}	2.12
80	0.00625	160	1.86855×10^{-4}	1.93	1.83476×10^{-4}	1.94	1.82341×10^{-4}	1.94	1.82274×10^{-4}	1.94
160	0.003125	320	4.93328×10^{-5}	1.94	4.86155×10^{-5}	1.93	4.83594×10^{-5}	1.93	4.83467×10^{-5}	1.93

Tabuľka 6.50: Analógia s Tabuľkou 6.48, ale veľkosť časového kroku sa rovná štvrtine časového kroku použitého v Tabuľke 6.48

V prípade úlohy s danou hladkou Gaussovou funkciou ilustrujú Tabuľky 6.48, 6.49, 6.50 očakávaný druhý rád presnosti priamej semi-implicitnej metódy. Pre ktorýkoľvek z uvedených časových krokov je metóda stabilná. Môžeme si navyše všimnúť, že so zmenšovaním časového kroku sa znižuje aj chyba výpočtu. Túto vlastnosť by sme intuitívne očakávali od vhodne navrhutej metódy. Z hľadiska presnosti sa nám podarilo získať aj pri voľbe najväčšieho uvedeného časového kroku v Tabuľke 6.48 presnejšie číselné výstupy, než v prípade stabilnej varianty explicitnej schémy pri rovnakej úlohe.

N	τ	M	perturb. 0.1	EOC	perturb. 0.05	EOC	perturb. 0.01	EOC	perturb. 0.001	EOC
20	0.31416	10	2.27953×10^{-1}	-	2.28155×10^{-1}	-	2.28416×10^{-1}	-	2.28257×10^{-1}	-
40	0.15708	20	8.4591×10^{-2}	1.48	8.46285×10^{-2}	1.48	8.45367×10^{-2}	1.49	8.4566×10^{-2}	1.48
80	0.07854	40	2.35963×10^{-2}	1.88	2.36004×10^{-2}	1.88	2.35986×10^{-2}	1.87	2.36492×10^{-2}	1.87

Tabuľka 6.51: EOC a L_1 normy chýb úlohy rotujúcej hladkej funkcie (6.4), na ktorú bola aplikovaná priama HIOE schéma, využívajúca *least square gradient*, s daným časovým krokom pre rôzne veľké a rôzne perturbované corner shifted siete

N	τ	M	perturb. 0.1	EOC	perturb. 0.05	EOC	perturb. 0.01	EOC	perturb. 0.001	EOC
20	0.15708	20	1.55174×10^{-1}	-	1.55237×10^{-1}	-	1.55460×10^{-1}	-	1.55411×10^{-1}	-
40	0.07854	40	4.63742×10^{-2}	1.81	4.61206×10^{-2}	1.81	4.602396×10^{-2}	1.82	4.60409×10^{-2}	1.82
80	0.03927	80	1.14127×10^{-2}	2.06	1.13795×10^{-2}	2.06	1.13643×10^{-2}	2.05	1.13921×10^{-2}	2.05
160	0.01963	160	5.00906×10^{-3}	1.2	5.01492×10^{-3}	1.19	5.01445×10^{-3}	1.19	5.01499×10^{-3}	1.19

Tabuľka 6.52: Analógia s Tabuľkou 6.51, no veľkosť použitého časového kroku je rovná polovici časového kroku uvedeného v Tabuľke 6.51

N	τ	M	perturb. 0.1	EOC	perturb. 0.05	EOC	perturb. 0.01	EOC	perturb. 0.001	EOC
20	0.07854	40	1.35147×10^{-1}	-	1.34944×10^{-1}	-	1.35056×10^{-1}	-	1.35092×10^{-1}	-
40	0.03927	80	4.20298×10^{-2}	1.75	4.18168×10^{-2}	1.75	4.17751×10^{-2}	1.75	4.17869×10^{-2}	1.75
80	0.01963	160	1.17588×10^{-2}	1.87	1.1722×10^{-2}	1.87	1.17060×10^{-2}	1.87	1.17198×10^{-2}	1.87
160	0.00982	320	5.39176×10^{-3}	1.14	5.39662×10^{-3}	1.13	5.39655×10^{-3}	1.13	5.39681×10^{-3}	1.13

Tabuľka 6.53: Analógia s Tabuľkou 6.48, ale veľkosť časového kroku sa rovná štvrtine časového kroku použitého v Tabuľke 6.48

Aj v prípade rotácie hladkej funkcie dostávame na základe L_1 noriem chýb výpočtu presnosť metódy druhého rádu a stabilitu vzhľadom k rôzne voleným časovým krokom. Opäť platí, že so zmenšujúcim sa časovým krokom sa zmenšuje chyba výpočtu.

6.3 Nepriama-iteračná HIOE metóda na corner shifted sieti

V predchádzajúcej podkapitole sme poukázali na priamu semi-implicitnú schému, ktorá bola pre uvažované úlohy skutočne stabilná a dosahovala druhý rád presnosti, teda konvergenciu druhého rádu. Priamu implicitno-explicitnú metódu sme využili pre úlohy definované na center shifted aj corner shifted sieťach. V poslednej časti tejto kapitoly zameriavame svoju pozornosť iba na corner shifted siete.

Samotná implicitno-explicitná metóda uvedená v časti (5.2.2) našej práce si vyžadovala tvorbu matice celého systému rovníc. Existujú však aplikácie, ktoré preferujú riešenie úloh bez potreby tvorby celkovej matice. Sústava rovníc je síce stále prítomná, no matica modifikovaného systému rovníc je podstatne jednoduchšie skonštruovaná. Z tohto dôvodu sme vyvinuli nepriamu-iteračnú metódu, ktorá využíva vnútorné iterácie pre spresnenie gradientu až do považovanej presnosti a jeho následné využitie.

Systém riešime metódou *Biconjugate Gradient* s maximálnym počtom iterácií 100 a toleranciou 1×10^{-12} . Maximálny počet vnútorných iterácií je taktiež 100 a tolerancia 1×10^{-12} .

6.3.1 *Diamond cell*

Ako sme už niekoľkokrát v práci uviedli, k výpočtu hodnoty gradientu na corner shifted sieťach môžeme pristupovať dvomi spôsobmi. V nasledujúcich numerických experimentoch sa zameriame na *diamond cell* metódu, pričom hodnoty riešenia v rohových uzloch aproximujeme bilineárnou interpoláciou bez využitia mapovacej funkcie.

N	τ	M	perturb. 0.1	k^*	perturb. 0.05	k^*	perturb. 0.01	k^*	perturb. 0.001	k^*
20	0.1	10	3.156×10^{-13}	100	3.507×10^{-13}	100	3.256×10^{-13}	100	3.467×10^{-13}	100
40	0.05	20	4.7838×10^{-12}	100	4.9090×10^{-12}	100	4.7962×10^{-12}	100	4.5739×10^{-12}	100
80	0.025	40	8.04136×10^{-11}	100	8.19461×10^{-11}	100	8.00458×10^{-11}	100	7.88140×10^{-11}	100

Tabuľka 6.54: L_1 normy chýb úlohy lineárnej funkcie (6.1), na ktorú bola aplikovaná iteračná IIOE schéma, využívajúca *diamond cell* metódu, s daným časovým krokom pre rôzne veľké a rôzne perturbované corner shifted siete a priemerný počet vnútorných iterácií

N	τ	M	perturb. 0.1	k^*	perturb. 0.05	k^*	perturb. 0.01	k^*	perturb. 0.001	k^*
20	0.05	20	3.527×10^{-13}	100	3.933×10^{-13}	100	3.514×10^{-13}	100	3.565×10^{-13}	100
40	0.025	40	4.3315×10^{-12}	100	4.3698×10^{-12}	100	4.3330×10^{-12}	100	4.0488×10^{-12}	100
80	0.0125	80	7.88140×10^{-11}	100	7.29351×10^{-11}	100	7.25398×10^{-11}	100	7.13039×10^{-11}	100

Tabuľka 6.55: Analógia s Tabuľkou 6.54, ale veľkosť časového kroku sa rovná polovici časového kroku použitého v Tabuľke 6.54

N	τ	M	perturb. 0.1	k^*	perturb. 0.05	k^*	perturb. 0.01	k^*	perturb. 0.001	k^*
20	0.025	40	4.845×10^{-13}	95	5.056×10^{-13}	93	5.174×10^{-13}	86	4.501×10^{-13}	91
40	0.0125	80	3.9004×10^{-12}	100	4.0303×10^{-12}	100	3.8215×10^{-12}	100	3.6546×10^{-12}	100
80	0.00625	160	6.40668×10^{-11}	100	6.67032×10^{-11}	100	6.37371×10^{-11}	100	6.42435×10^{-11}	100

Tabuľka 6.56: Analógia s Tabuľkou 6.54, no veľkosť použitého časového kroku je rovná štvrtine časového kroku uvedeného v Tabuľke 6.54

Z Tabuliek 6.54, 6.55, 6.56 vidíme, že v prípade takmer všetkých uvedených veľkostí časového kroku a všetkých uvedených veľkostí corner shifted sietí, je pri stanovenej presnosti potrebné vykonať maximálny počet povolených vnútorných iterácií. Ani pri vykonaní spomenutého vysokého počtu iterácií nie sme schopní dosiahnuť exaktné riešenie pre úlohu translácie lineárnej funkcie na oblastiach s $N > 20$.

N	τ	M	perturb. 0.1	k^*	EOC	perturb. 0.05	k^*	EOC	perturb. 0.01	k^*	EOC	perturb. 0.001	k^*	EOC
20	0.05	10	6.1158×10^{-3}	17	-	6.12199×10^{-3}	16	-	6.12556×10^{-3}	16	-	6.12612×10^{-3}	16	-
40	0.025	20	1.27637×10^{-3}	79	2.34	1.276496×10^{-3}	79	2.34	1.27611×10^{-3}	79	2.34	1.27595×10^{-3}	81	2.34
80	0.0125	40	2.43004×10^{-4}	100	2.44	2.41065×10^{-4}	100	2.45	2.40483×10^{-4}	100	2.45	2.40454×10^{-4}	100	2.45

Tabuľka 6.57: Priemerný počet vnútorných iterácií, EOC a L_1 normy chýb úlohy hladkej Gaussovej funkcie (6.3) s rýchlostným pol'om opísaným v časti 2. tejto úlohy, na ktorú bola aplikovaná iteračná HIOE schéma, využívajúca *diamond cell* metódu, s daným časovým krokom pre rôzne veľké a rôzne perturbované corner shifted siete

N	τ	M	perturb. 0.1	k^*	EOC	perturb. 0.05	k^*	EOC	perturb. 0.01	k^*	EOC	perturb. 0.001	k^*	EOC
20	0.05	20	3.74193×10^{-3}	12	-	3.72832×10^{-3}	12	-	3.71944×10^{-3}	12	-	3.71805×10^{-3}	12	-
40	0.025	40	7.46958×10^{-4}	49	2.41	7.41782×10^{-4}	49	2.41	7.40223×10^{-4}	54	2.41	7.40149×10^{-4}	55	2.41
80	0.0125	80	1.68017×10^{-4}	100	2.19	1.63740×10^{-4}	100	2.22	1.62292×10^{-4}	100	2.23	1.62202×10^{-4}	100	2.23

Tabuľka 6.58: Analógia s Tabuľkou 6.57, no veľkosť použitého časového kroku je rovná polovici časového kroku uvedeného v Tabuľke 6.57

N	τ	M	perturb. 0.1	k^*	EOC	perturb. 0.05	k^*	EOC	perturb. 0.01	k^*	EOC	perturb. 0.001	k^*	EOC
20	0.025	40	3.15346×10^{-3}	9	-	3.13213×10^{-3}	9	-	3.12022×10^{-3}	9	-	3.11831×10^{-3}	9	-
40	0.0125	80	7.254496×10^{-4}	9	2.2	7.188496×10^{-4}	10	2.2	7.16755×10^{-4}	9	2.2	7.16672×10^{-4}	10	2.2
80	0.00625	160	1.89276×10^{-4}	100	1.97	1.85659×10^{-4}	100	1.99	1.84435×10^{-4}	100	1.99	1.84363×10^{-4}	100	1.99

Tabuľka 6.59: Analógia s Tabuľkou 6.57, ale veľkosť časového kroku sa rovná štvrtine časového kroku použitého v Tabuľke 6.57

Z Tabuliek 6.57, 6.58, 6.59 vidíme, že počet vykonaných iterácií pre danú veľkosť siete klesá so znižujúcim sa časovým krokom, čo je veľmi pozitívny fakt. So znižujúcim sa časovým krokom taktiež klesá chyba výpočtu pre danú diskretizovanú sieť. Metóda je očividne stabilná vo všetkých uvedených voľbách časového kroku a veľkosti mriežky. Potvrdil sa aj druhý rád presnosti metódy využitej k riešeniu danej úlohy.

N	τ	M	perturb. 0.1	k^*	EOC	perturb. 0.05	k^*	EOC	perturb. 0.01	k^*	EOC	perturb. 0.001	k^*	EOC
20	0.31416	10	2.35662×10^{-1}	31	-	2.36066×10^{-1}	26	-	2.36285×10^{-1}	26	-	2.36105×10^{-1}	26	-
40	0.15708	20	8.78949×10^{-2}	100	1.48	8.81384×10^{-2}	100	1.47	8.81162×10^{-2}	100	1.47	8.81484×10^{-2}	100	1.47
80	0.07854	40	2.42155×10^{-2}	100	1.89	2.43389×10^{-2}	100	1.89	2.43775×10^{-2}	100	1.89	2.44274×10^{-2}	100	1.88

Tabuľka 6.60: Priemerný počet vnútorných iterácií, EOC a L_1 normy chýb úlohy hladkej funkcie (6.4), na ktorú bola aplikovaná iteračná PIOE schéma využívajúca, *diamond cell* metódu, s daným časovým krokom pre rôzne veľké a rôzne perturbované corner shifted siete

N	τ	M	perturb. 0.1	k^*	EOC	perturb. 0.05	k^*	EOC	perturb. 0.01	k^*	EOC	perturb. 0.001	k^*	EOC
20	0.15708	20	1.67435×10^{-1}	20	-	1.67600×10^{-1}	20	-	1.67800×10^{-1}	20	-	1.67734×10^{-1}	205	-
40	0.07854	40	5.15062×10^{-2}	93	1.76	5.13621×10^{-2}	88	1.77	5.13089×10^{-2}	93	1.77	5.13268×10^{-2}	90	1.77
80	0.03927	80	1.23367×10^{-2}	100	2.1	1.23172×10^{-2}	100	2.1	1.23081×10^{-2}	100	2.1	1.23397×10^{-2}	100	2.09

Tabuľka 6.61: Analógia s Tabuľkou 6.60, ale veľkosť časového kroku sa rovná polovici časového kroku použitého v Tabuľke 6.60

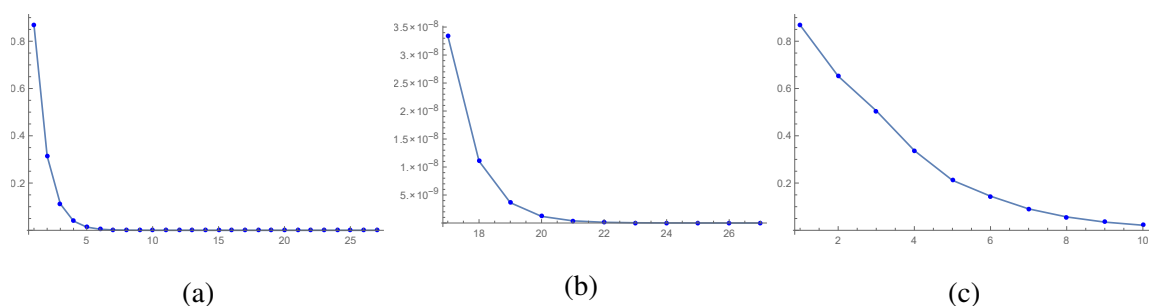
N	τ	M	perturb. 0.1	k^*	EOC	perturb. 0.05	k^*	EOC	perturb. 0.01	k^*	EOC	perturb. 0.001	k^*	EOC
20	0.07854	40	1.46407×10^{-1}	15	-	1.46321×10^{-1}	15	-	1.46471×10^{-1}	15	-	1.46503×10^{-1}	15	-
40	0.03927	80	4.60407×10^{-2}	57	1.73	4.58116×10^{-2}	56	1.74	4.57699×10^{-2}	67	1.74	4.57808×10^{-2}	59	1.74
80	0.01963	160	1.23633×10^{-2}	100	1.93	1.22990×10^{-2}	100	1.93	1.22753×10^{-2}	100	1.93	1.22944×10^{-2}	100	1.93

Tabuľka 6.62: Analógia s Tabuľkou 6.60, no veľkosť použitého časového kroku je rovná štvrtine časového kroku uvedeného v Tabuľke 6.60

Posledné Tabuľky 6.60, 6.61, 6.62 tejto časti práce uvažujú úlohu rotácie hladkej funkcie s nulovými Dirichletovými okrajovými podmienkami. Aj pre takúto úlohu je odvodená nepriama semi-implicitná metóda, využívajúca *diamond cell* prístup, stabilná a vykazuje druhý rád presnosti. So znižujúcim sa časovým krokom opäť klesá pre danú veľkosť mriežky chyba výpočtu aj celkový potrebný počet vnútorných iterácií.

Uvažujme riešenie úlohy (6.4) s $N = 20$, $M = 10$, $perturb.=0.1$, na ktorú bola použitá iteračná semi-implicitná metóda využívajúca *diamond cell* metódu pre určenie hodnoty

gradientu v reprezentačnom bode konečného objemu. Obrázok 6.7 ilustruje konvergenciu odmocniny vnútorných reziduí v rámci prvého časového kroku a konvergenciu prvej vnútornej iterácie uvažujúc všetky časové kroky danej úlohy. Na spomenutých obrázkoch môžeme vidieť, že sa reziduá s rastúcim počtom vnútorných iterácií znižujú. Navyše vidíme, že reziduá sa v prvej iterácii $k = 1$ znižujú v každom nasledujúcom časovom kroku.



Obr. 6.7: Odmocniny reziduí úlohy (6.4), využívajúc *diamond cell* metódu, v prvom časovom kroku (a), priblíženie posledných jedenástich vnútorných iterácií v prvom časovom kroku (b), odmocniny reziduí prvej vnútornej iterácie vo všetkých časových krokoch (c), pre $N = 20$, $M = 10$, $perturb.=0.1$

6.3.2 Least square gradient

Diamond cell metóda skombinovaná s bilineárnou interpoláciou nebola v prípade translácie lineárnej funkcie efektívna. Vyžadovala maximálny povolený počet iterácií a ani po ich uskutočnení sme nezískali exaktné riešenie. Pri vysvetľovaní použitia bilineárnej interpolácie na nerovnomerných sieťach sme poukázali na veľkú aritmetickú náročnosť tejto interpolácie. Hodnotu gradientu však dokážeme určiť aj metódou *least square gradient*, ktorá sa ukazuje ako presnejšia a jednoduchšia z hľadiska počtu aritmetických operácií. Očakávame preto, že nasledujúce numerické experimenty overia na daných úlohách stabilitu a konvergenciu druhého rádu presnosti nepriamej semi-implicitnej schémy s využitím metódy najmenších štvorcov.

N	τ	M	perturb. 0.1	k^*	perturb. 0.05	k^*	perturb. 0.01	k^*	perturb. 0.001	k^*
20	0.1	10	2.72×10^{-14}	1	4.13×10^{-14}	1	2.36×10^{-14}	1	4.22×10^{-14}	1
40	0.05	20	7.72×10^{-14}	1	8.7×10^{-14}	1	5.2×10^{-14}	1	4.85×10^{-14}	1
80	0.025	40	9.72×10^{-14}	1	1.342×10^{-13}	1	7.07×10^{-14}	1	3.75×10^{-14}	1

Tabuľka 6.63: Priemerný počet vnútorných iterácií, L_1 normy chýb úlohy lineárnej funkcie (6.1), na ktorú bola aplikovaná iteračná IIOE schéma, využívajúca *least square gradient*, s daným časovým krokom pre rôzne veľké a rôzne perturbované corner shifted siete

N	τ	M	perturb. 0.1	k^*	perturb. 0.05	k^*	perturb. 0.01	k^*	perturb. 0.001	k^*
20	0.05	20	1.165×10^{-13}	1	1.457×10^{-13}	1	8.31×10^{-14}	1	1.224×10^{-13}	1
40	0.025	40	1.088×10^{-13}	1	8.1×10^{-14}	1	5.98×10^{-14}	1	1.044×10^{-13}	1
80	0.0125	80	1.688×10^{-13}	1	1.837×10^{-13}	1	9.76×10^{-14}	1	8.42×10^{-14}	1

Tabuľka 6.64: Analógia s Tabuľkou 6.63, ale veľkosť časového kroku sa rovná polovici časového kroku použitého v Tabuľke 6.63

N	τ	M	perturb. 0.1	k^*	perturb. 0.05	k^*	perturb. 0.01	k^*	perturb. 0.001	k^*
20	0.025	40	3.103×10^{-13}	1	2.966×10^{-13}	1	2.975×10^{-13}	1	2.295×10^{-13}	1
40	0.0125	80	2.108×10^{-13}	1	2.083×10^{-13}	1	9.17×10^{-14}	1	1.006×10^{-13}	1
80	0.00625	160	2.606×10^{-13}	1	2.273×10^{-13}	1	4.23×10^{-14}	1	6.65×10^{-14}	1

Tabuľka 6.65: Analógia s Tabuľkou 6.63, no veľkosť použitého časového kroku je rovná štvrtine časového kroku uvedeného v Tabuľke 6.63

Tabuľky 6.63, 6.64, 6.65 ukazujú významný rozdiel medzi využitím metódy najmenších štvorcov a metódou *diamond cell* pre výpočet hodnoty gradientu. V tomto prípade sme dosiahli exaktné riešenie pre úlohu lineárnej funkcie a to s každým zvoleným časovým krokom na všetkých uvažovaných veľkostiach corner shifted siete. K dosiahnutiu presného riešenia sme pritom potrebovali vždy iba jednu vnútornú iteráciu. Nepriama semi-implicitná metóda zostala stabilnou pre všetky voľby časového kroku.

N	τ	M	perturb. 0.1	k^*	EOC	perturb. 0.05	k^*	EOC	perturb. 0.01	k^*	EOC	perturb. 0.001	k^*	EOC
20	0.05	10	5.81672×10^{-3}	19	-	5.79056×10^{-3}	18	-	5.78049×10^{-3}	18	-	5.77938×10^{-3}	18	-
40	0.025	20	1.20539×10^{-3}	18	2.35	1.19682×10^{-3}	18	2.36	1.19306×10^{-3}	17	2.36	1.19267×10^{-3}	16	2.36
80	0.0125	40	2.34261×10^{-4}	18	2.41	2.29649×10^{-4}	18	2.42	2.28157×10^{-4}	17	2.43	2.28083×10^{-4}	15	2.43

Tabuľka 6.66: Priemerný počet vnútorných iterácií, EOC a L_1 normy chýb úlohy hladkej Gaussovej funkcie (6.3) s rýchlostným pol'om opísaným v časti 2. tejto úlohy, na ktorú bola aplikovaná iteračná IIOE schéma, využívajúca *least square gradient*, s daným časovým krokom pre rôzne veľké a rôzne perturbované corner shifted siete

N	τ	M	perturb. 0.1	k^*	EOC	perturb. 0.05	k^*	EOC	perturb. 0.01	k^*	EOC	perturb. 0.001	k^*	EOC
20	0.05	20	3.39618×10^{-3}	14	-	3.35023×10^{-3}	14	-	3.32915×10^{-3}	14	-	3.32619×10^{-3}	14	-
40	0.025	40	6.90166×10^{-4}	14	2.38	6.78508×10^{-4}	13	2.39	6.74608×10^{-4}	12	2.39	6.74355×10^{-4}	12	2.39
80	0.0125	80	1.60181×10^{-4}	14	2.15	1.55353×10^{-4}	13	2.17	1.53629×10^{-4}	12	2.17	1.53520×10^{-4}	11	2.18

Tabuľka 6.67: Analógia s Tabuľkou 6.66, no veľkosť použitého časového kroku je rovná polovici časového kroku uvedeného v Tabuľke 6.66

N	τ	M	perturb. 0.1	k^*	EOC	perturb. 0.05	k^*	EOC	perturb. 0.01	k^*	EOC	perturb. 0.001	k^*	EOC
20	0.025	40	2.89391×10^{-3}	11	-	2.84749×10^{-3}	11	-	2.82497×10^{-3}	11	-	2.82191×10^{-3}	11	-
40	0.0125	80	6.96842×10^{-4}	11	2.13	6.87538×10^{-4}	10	2.12	6.84634×10^{-4}	10	2.12	6.84473×10^{-4}	9	2.12
80	0.00625	160	1.86855×10^{-4}	11	1.93	1.83476×10^{-4}	10	1.94	1.82341×10^{-4}	9	1.94	1.82274×10^{-4}	8	1.94

Tabuľka 6.68: Analógia s Tabuľkou 6.66, ale veľkosť časového kroku sa rovná štvrtine časového kroku použitého v Tabuľke 6.66

Tabuľky 6.66, 6.67 a 6.68 opäť dokazujú, že pri využití *least square gradient* metódy v iteračnej implicitno-explicitnej metóde určenej pre corner shifted siete postačuje k dosiahnutiu zvolenej presnosti menší počet vnútorných iterácií než pri využití bilineárnej interpolácie. Môžeme si taktiež všimnúť, že počet vykonaných vnútorných iterácií je v rámci jedného časového kroku, resp. jednej tabuľky, len veľmi málo rozdielny. Metóda zostala stabilná pre uvažované časové kroky a nezmenil sa ani očakávaný druhý rád presnosti. S klesajúcou veľkosťou časového kroku naďalej klesá chyba výpočtu.

N	τ	M	perturb. 0.1	k^*	EOC	perturb. 0.05	k^*	EOC	perturb. 0.01	k^*	EOC	perturb. 0.001	k^*	EOC
20	0.31416	10	2.27953×10^{-1}	29	-	2.28155×10^{-1}	29	-	2.28416×10^{-1}	29	-	2.28257×10^{-1}	29	-
40	0.15708	20	8.459097×10^{-2}	29	1.48	8.46285×10^{-2}	29	1.48	8.45367×10^{-2}	28	1.49	8.456599×10^{-2}	29	1.48
80	0.07854	40	2.35963×10^{-2}	29	1.88	2.36004×10^{-2}	29	1.88	2.35986×10^{-2}	28	1.87	2.36492×10^{-2}	28	1.87

Tabuľka 6.69: Priemerný počet vnútorných iterácií, EOC a L_1 normy chýb úlohy hladkej funkcie (6.4), na ktorú bola aplikovaná iteračná IIOE schéma, využívajúca *least square gradient*, s daným časovým krokom pre rôzne veľké a rôzne perturbované corner shifted siete

N	τ	M	perturb. 0.1	k^*	EOC	perturb. 0.05	k^*	EOC	perturb. 0.01	k^*	EOC	perturb. 0.001	k^*	EOC
20	0.15708	20	1.55174×10^{-1}	22	-	1.55237×10^{-1}	22	-	1.55460×10^{-1}	22	-	1.55412×10^{-1}	22	-
40	0.07854	40	4.63742×10^{-2}	22	1.81	4.61206×10^{-2}	22	1.81	4.602396×10^{-2}	21	1.82	4.60409×10^{-2}	21	1.82
80	0.03927	80	1.14127×10^{-2}	21	2.06	1.13795×10^{-2}	21	2.06	1.13643×10^{-2}	20	2.05	1.13921×10^{-2}	19	2.05

Tabuľka 6.70: Analógia s Tabuľkou 6.69, no veľkosť použitého časového kroku je rovná polovici časového kroku uvedeného v Tabuľke 6.69

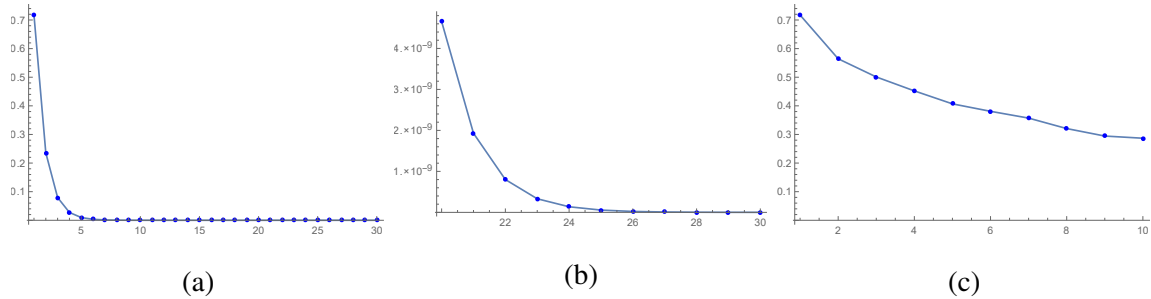
N	τ	M	perturb. 0.1	k^*	EOC	perturb. 0.05	k^*	EOC	perturb. 0.01	k^*	EOC	perturb. 0.001	k^*	EOC
20	0.07854	40	1.35147×10^{-1}	17	-	1.34944×10^{-1}	17	-	1.35056×10^{-1}	17	-	1.35092×10^{-1}	17	-
40	0.03927	80	4.20298×10^{-2}	16	1.75	4.18168×10^{-2}	16	1.75	4.17751×10^{-2}	15	1.75	4.17869×10^{-2}	15	1.75
80	0.01963	160	1.17588×10^{-2}	15	1.87	1.1722×10^{-2}	15	1.87	1.17060×10^{-2}	14	1.87	1.17198×10^{-2}	13	1.87

Tabuľka 6.71: Analógia s Tabuľkou 6.69, no veľkosť použitého časového kroku je rovná polovici časového kroku uvedeného v Tabuľke 6.69

Posledné Tabuľky 6.69, 6.70, 6.71 uvedené v tejto kapitole opäť poukazujú na stabilitu iteračnej implicitno-explicitnej metódy v rámci všetkých uvažovaných časových krokov. Tabuľky potvrdzujú očakávanú konvergenciu druhého rádu tejto metódy a to aj v prípade rotácie hladkej funkcie. Znovu platí, že sa počet vnútorných iterácií veľmi nelíši v rámci jednej tabuľky, čiže pre daný časový krok na rôzne veľkých corner shifted siet'ach. So znižujúcim sa časovým krokom sa znižuje aj počet priemerných vnútorných iterácií. Platným zostáva aj fakt, že so zmenšujúcou sa veľkosťou časového kroku sa zmenšuje chyba riešenia úlohy.

Uvažujme poslednú uvedenú úlohu (6.4) s $N = 20$, $M = 10$, $perturb.=0.1$. Na úlohu aplikujeme iteračnú implicitno-explicitnú metódu využívajúcu *least square gradient* pre vyčíslenie gradientu v reprezentačnom bode konečného objemu. Obrázok 6.8 zobrazuje konvergenciu odmocniny reziduí vo vnútorných iteráciách v rámci prvého časového kroku a

konvergenciu odmocniny reziduí v prvej vnútornej iterácii uvažujúc všetky časové kroky danej úlohy. Obrázky ukazujú, že sa reziduá znižujú v každej nasledujúcej vnútornej iterácii. Vidíme, že reziduá sa v prvej iterácii $k = 1$ znižujú s každým nasledujúcim časovým krokom.



Obr. 6.8: Odmocniny reziduí úlohy (6.4), využívajúc *least square gradient*, v prvom časom kroku (a), priblíženie posledných jedenástich vnútorných iterácií v prvom časovom kroku (b), odmocniny reziduí prvej vnútornej iterácie vo všetkých časových krokoch (c), pre $N = 20$, $M = 10$, $perturb.=0.1$

7 Záver

V diplomovej práci sme využili dva rôzne spôsoby tvorby logicky štvoruholníkovej nerovnomernej siete v 2D. Opísali sme taktiež viacero spôsobov získania hodnoty gradientu v reprezentačnom bode konečného objemu na báze *diamond cell* a *least square gradient* metódy, ktoré významne prispeli k odhaleniu efektivity metód s nimi spojenými.

V rámci práce sme vyvinuli tri metódy pre riešenie rovnice advekcie uvažovanej na nerovnomernej doméne v dvojrozmernom priestore. Pri výskume všetkých troch metód bola využitá metóda konečných objemov.

Explicitná metóda bola síce pomerne rýchla aj na bežne dostupnej technike, no bola značne nestabilná pri nesprávnej voľbe časového kroku, resp. pri voľbe nesprávneho pomeru časového kroku a priemernej dĺžky hrany konečného objemu. Nevýhodou metódy bol aj jej nízky rád konvergencie. Odvođené explicitné schémy využité pre riešenie konkrétnych modelových úloh poukazovali iba na prvý rád presnosti.

Druhou odvođenou metódou bola priama implicitno-explicitná metóda. Túto metódu sme vyvinuli v dvoch variantoch. Prvý sa zameriaval na nerovnomerné siete vzniknuté posunom reprezentačných bodov a následným dodefinovaním rohových uzlov konečných objemov. Poukázali sme na dôležitosť výberu vhodného spôsobu váženého priemerovania potrebného k vyčísleniu hodnoty gradientu v reprezentačnom bode. Tento variant bol exaktný pre úlohu translácie lineárnej funkcie a druhého rádu presnosti pre ostatné uvedené modelové úlohy. Numerické experimenty potvrdili predpoklad stability schémy. Podarilo sa nám taktiež ukázať, koľko neznámych hodnôt vystupuje v jednej rovnici vzniknutého systému. Druhý variant priamej semi-implicitnej schémy sa sústredil na, v praxi často využívané, corner shifted siete. V tomto prípade sme k výpočtu hodnoty gradientu zvolili metódu najmenších štvorcov. Naša voľba sa ukázala byť veľmi prospešnou v časti tvorby matice systému. Zistili sme, že v každej rovnici výsledného systému vystupuje podstatne menej neznámych hodnôt riešenia než v prvom variante priamej implicitno-explicitnej metódy. Aj takto odvođená schéma bola vo všetkých uvažovaných úlohách stabilná. Opäť platilo, že pre posun lineárnej funkcie je metóda presná a pre zvyšné uvažované úlohy je druhého rádu presnosti.

Poslednou vyvíjanou metódou bola nepriama-iteračná metóda. Iteračná metóda bola modifikáciou priamej implicitno-explicitnej metódy. V tomto prípade sme zamerali svoju pozornosť výhradne na corner shifted siete. Iteračnú metódu sme sa rozhodli preskúmať

z dvoch hľadísk. Najprv sme odskúšali vyriešiť úlohy iteračne pomocou semi-implicitnej metódy využívajúcej *diamond cell* metódu a bilineárnu interpoláciu. Vo väčšine úloh sa ukázalo, že bolo potrebné využiť maximálny povolený počet vnútorných iterácií. Druhým prístupom k skúmaniu iteračnej metódy bolo využitie metódy *least square gradient* pre získanie hodnoty gradientu. Druhý variant vykazoval vyššiu mieru efektivity. Takto stavaná metóda bola časovo aj výpočtovo menej náročná a zároveň si dokázala zachovať druhý rád konvergenzie a stabilitu.

Diplomová práca splnila svoj cieľ prepojením priamej implicitno-explicitnej metódy s rekonštrukciou riešenia na hranách za pomoci určenia gradientu metódou najmenších štvorcov. Práca poukázala na výhody i nevýhody troch rôznych odvodených metód aj s ich variantmi.

Literatúra

- [1] Coudiere, Y., Vila, J. P., Villedieu, P., Convergence rate of a finite volume scheme for a two-dimensional convection-diffusion problem, *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 33, 493-516 (1999).
- [2] Frolkovič, P., Mikula, K., Urban, J., Semi-implicit finite volume level set method for advective motion of interfaces in normal direction, *Applied Numerical Mathematics*, Vol. 95, pp. 214-228 (2015).
- [3] Hahn, J., Mikula, K., Frolkovič, P., Basara, B., Semi-implicit Level Set Method with Inflow-Based Gradient in a Polyhedron Mesh. In: Cances C., Omnes P. (eds) *Finite Volumes for Complex Applications VIII - Hyperbolic, Elliptic and Parabolic Problems. FVCA 2017. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics*, vol 200. Springer, Cham, pp. 81-89 (2017)
- [4] Kristek, J., Numerické metódy matematiky I: Aproximácie funkcií - metóda najmenších štvorcov. FMFI UK, 2014-2017, [cit. 26.03.2018]. Dostupné na webovskej stránke (world wide web):
http://www.fyzikazeme.sk/mainpage/stud_mat/menm/prednaska10.pdf
- [5] Krivá, Z., Mikula, K., Stašová, O., Spracovanie obrazu: Vybrané kapitoly z prednášok, Bratislava: Vydavateľstvo STU, ISBN 978-80-227-4535-2 (2016).
- [6] Mikula, K., Ohlberger, M., A new level set method for motion in normal direction based on a semi-implicit forward-backward diffusion approach, *SIAM Journal on Scientific Computing*, Vol. 32, No. 3, pp. 1527-1544 (2010)
- [7] Mikula, K., Ohlberger, M., Inflow-Implicit/Outflow-Explicit Scheme for Solving Advection Equations, in *Finite Volumes in Complex Applications VI, Problems & Perspectives*, Eds. J.Fořt et al. (Proceedings of the Sixth International Conference on Finite Volumes in Complex Applications, Prague, June 6-10, 2011), Springer Verlag, pp. 683-692 (2011).
- [8] Mikula, K., Ohlberger, M., Urbán, J., Inflow-implicit/outflow-explicit finite volume methods for solving advection equations, *Applied Numerical Mathematics*, Vol. 85, Elsevier, pp. 16-37 (2014).

- [9] Niceno, B., A three dimensional finite volume method for incompressible Navier-Stokes equations on unstructured, staggered grids, European Conference on Computational Fluid Dynamics, ECCOMAS CFD (2006).
- [10] Particle In Cell Consulting LLC: Interpolation using an arbitrary quadrilateral. www.particleincell.com, 04.06., 2012, [cit. 02.03.2018]. Dostupné na webovskej stránke (world wide web):
<https://www.particleincell.com/2012/quad-interpolation/>
- [11] Sozer, E., Brehm, Ch., Kiris., C. C., Gradient Calculation Methods on Arbitrary Polyhedral Unstructured Meshes for Cell-Centered CFD Solvers, 52nd Aerospace Sciences Meeting, AIAA SciTech Forum, National Harbor, Maryland, DOI 10.2514/6.2014-1440 (2014).
- [12] Wikipedia Contributors, Bilinear interpolation, Wikipedia, The Free Encyclopedia, 10.11., 2017, [cit. 05.03.2018]. Dostupné na webovskej stránke (world wide web):
https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Bilinear_interpolation&oldid=809623103