Slovenská technická univerzita v Bratislave
Stavebná fakulta

Evidenčné číslo: SvF-5342-81233

Modelovanie membránových konštrukcií pomocou MKP s kvadratickými elementami

Bakalárska práca

2018
Lucia Baránková

Slovenská technická univerzita v Bratislave
Stavebná fakulta

Evidenčné číslo: SvF-5342-81233

Modelovanie membránových konštrukcií pomocou MKP s kvadratickými elementami

Bakalárska práca

Študijný program:	Matematicko-počítačové modelovanie
Študijný odbor:	9.1.9. aplikovaná matematika
Školiace pracovisko:	Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie
Vedúci práce:	Ing. Mgr. Lukáš Tomek, PhD.

Bratislava 2018
Lucia Baránková

Slovenská technická univerzita v Bratislave
Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie

Stavebná fakulta
Akademický rok: 2017/2018
Evidenčné číslo: SvF-5342-81233

ZADANIE BAKALÁRSKEJ PRÁCE

Študentka:	**Lucia Baránková**
ID študenta:	81233
Študijný program:	matematicko-počítačové modelovanie
Študijný odbor:	9.1.9. aplikovaná matematika
Vedúci práce:	Ing. Mgr. Lukáš Tomek, PhD.

Názov práce: **Modelovanie membránových konštrukcií pomocou MKP s kvadratickými elementami**

Jazyk, v ktorom sa práca vypracuje: slovenský jazyk

Špecifikácia zadania:

Úlohou je v softvéri Mathematica naprogramovať MKP v 2D pre kvadratické elementy a riešiť úlohu o priehybe membrány. Najprv sa budú riešiť jednoduchšie prípady, pre ktoré existuje analytické riešenie, budú sa skúmať chyby a experimentálny rád konvergencie. Potom sa budú modelovať rôzne strechy – membránové konštrukcie podopreté stĺpmi (google: membrane structures), prípadne zaťažené bodovými či plošnými silami.

Riešenie zadania práce od: 24. 01. 2018
Dátum odovzdania práce: 03. 05. 2018

Lucia Baránková
študentka

prof. RNDr. Radko Mesiar, DrSc.
vedúci pracoviska

prof. RNDr. Karol Mikula, DrSc.
garant študijného programu

POKYNY
na vypracovanie bakalárskej práce

Úvodné ustanovenie

V zmysle zákona č. 131/2002 Z. z. o vysokých školách a o zmene a doplnení niektorých zákonov v znení neskorších predpisov je súčasťou štúdia podľa každého študijného programu aj záverečná práca. Jej obhajoba patrí medzi štátne skúšky. Záverečnou prácou pri štúdiu podľa bakalárskeho študijného programu je bakalárska práca. Podkladom na vypracovanie bakalárskej práce je zadanie bakalárskej práce

Štruktúra záverečnej práce

- titulný list,
- zadanie záverečnej práce,
- pokyny na vypracovanie,
- vyhlásenie autora,
- názov a abstrakt v slovenskom a v anglickom jazyku (spolu v rozsahu jednej strany),
- obsah s očíslovaním kapitol,
- zoznam príloh,
- zoznam skratiek a značiek,
- text samotnej práce (odporúčané členenie),
  - úvod,
  - súčasný stav problematiky,
  - ciele záverečnej práce,
  - vlastné riešenie členené na kapitoly podľa charakteru práce,
  - zhodnotenie dosiahnutých výsledkov resp. navrhnutých riešení,
  - záver,
- resumé v slovenskom jazyku v rozsahu spravidla 10 % rozsahu ZP (len pre práce vypracované v cudzom jazyku),
- zoznam použitej literatúry,
- prílohy (výkresy, tabuľky, mapy, náčrty) vrátane postera s rozmermi 1000x700 mm.

Rozsah a forma

1. Obsah a forma záverečnej práce musí byť spracovaná v zmysle vyhlášky MŠVVaŠ SR č. 233/2011 Z. z., ktorou sa vykonávajú niektoré ustanovenia zákona č. 131/2002 Z. z. a v zmysle Metodického usmernenia č. 56/2011 o náležitostiach záverečných prác.
2. Vyžadovaný rozsah bakalárskej práce je 20 až 30 strán. Odovzdáva sa v dvoch vyhotoveniach. Jedno vyhotovenie musí byť viazané v pevnej väzbe (nie hrebeňovej) tak, aby sa jednotlivé listy nedali vyberať. Rozsiahle grafické prílohy možno v prípade súhlasu vedúceho práce odovzdať v jednom vyhotovení.
3. Autor práce je povinný vložiť prácu v elektronickej forme do akademického informačného systému. Autor zodpovedá za zhodu listinného aj elektronického vyhotovenia.

4. Po vložení záverečnej práce do informačného systému, predloží autor fakulte ním podpísaný návrh licenčnej zmluvy. Návrh licenčnej zmluvy je vytvorený akademickým informačným systémom.
5. Odporúčaný typ písma je Times New Roman, veľkosť 12 a je jednotný v celej práci. Odporúčané nastavenie strany - riadkovanie 1,5, okraj vnútorný 3,5 cm, vonkajší 2 cm, zhora a zdola 2,5 cm, orientácia na výšku, formát A4.
6. Obrázky a vzorce sa číslujú v rámci jednotlivých kapitol (napr. obr. 3.1 je obrázok č. 1 v kapitole 3). Vzorce sa číslujú na pravom okraji riadku v okrúhlych zátvorkách - napr. (3.1).
7. Všetky výpočty musia byť usporiadané tak, aby bolo možné preveriť ich správnosť.
8. Pri všetkých prevzatých vzorcoch, tabuľkách, citovaných častiach textu musí byť uvedený prameň.
9. Citovanie literatúry vrátane elektronických materiálov sa uvádza podľa STN ISO 690 (01 0197): 2012. *Informácie a dokumentácia. Návod na tvorbu bibliografických odkazov na informačné pramene a ich citovanie.*
10. Príklad zoznamu bibliografických odkazov:
    ABELOVIČ, J. a kol.: *Meranie v geodetických sieťach.* Bratislava: Alfa 1990. 104 s. ISBN 0-1554-9173.
    MICHALČÁK, O. – ADLER, E.: Výskum stability dunajských hrádzí. In: *Zborník vedeckých prác Stavebnej fakulty SVŠT.* Bratislava: Edičné stredisko SVŠT 1976, s. 17-28. ISBN 0-3552-5214.
    ŠÜTTI, J.: Určovanie priestorových posunov stavebných objektov. *Geodetický kartografický obzor*. 2000, roč. 2, č. 3, s. 8-16. ISSN 0811-6900.
    Article 18. Technical Cooperation. http://www.lac.uk/iso/tc456 (2013-09-28)
11. Za jazykovú a terminologickú správnosť záverečnej práce zodpovedá študent.
12. Formu postera (elektronická alebo aj tlačená) určí garant študijného programu.
13. Vzor pre poster je uvedený na dokumentovom serveri v akademickom informačnom systéme univerzity.

....
podpis garanta študijného programu

Ustanovenia týchto pokynov som vzal na vedomie. Som si vedomý(á), že ak nebude moja bakalárska práca vypracovaná v súlade s týmito pokynmi, nebude prijatá na obhajobu.

V Bratislave ....
podpis študenta

Čestné vyhlásenie

Čestne vyhlasujem, že bakalársku prácu s názvom: „Modelovanie membránových konštrukcií pomocou MKP s kvadratickými elementami“ som vypracovala samostatne, na základe konzultácií a s použitím uvedených informačných zdrojov a literatúry.

V Bratislave 3. 5. 2018

. . . .

podpis autora práce

Poďakovanie:
Na tomto mieste by som chcela poďakovať vedúcemu práce, Ing. Mgr. Lukášovi Tomekovi, PhD., za trpezlivý prístup, cenné rady a podnetné pripomienky, ktoré mi veľmi pomohli pri tvorbe tejto práce.

Abstrakt

Membránové konštrukcie sú stavby zastrešení pokryté membránou. Membrána je materiál, ktorého hrúbka je oproti ostatným rozmerom zanedbateľne malá. V práci sa zaoberáme riešením viacerých úloh pomocou metódy konečných prvkov s kvadratickými elementami. Najprv je skonštruovaný matematický model priehybu membrány, na ktorý sa potom aplikuje algoritmus metódy konečných prvkov. Ten je následne implementovaný v softvéri Wolfram Mathematica a použitý na riešenie modelového príkladu a dvoch modelov reálnych konštrukcií.

Kľúčové slová: membránové konštrukcie, priehyb membrány, metóda konečných prvkov, MKP

Abstract

Membrane structures are roofings covered with membrane, which is a material with thickness negligibly small in comparison with other dimensions. In this thesis we deal with solving multiple problems by finite element method with quadratic elements. First, we construct mathematical model of membrane deflection and next we apply algorithm of the finite element method. Then it is implemented in Wolfram Mathematica software, and used for solving a model example and two examples of real constructions.

Keywords: membrane structures, membrane deflection, finite element method, FEM

Predhovor

Táto práca sa zaoberá použitím metódy konečných prvkov (ďalej len MKP) s kvadratickými trojuholníkovými elementami na riešenie 2D úlohy o priehybe membrány. Cieľom je v softvéri Wolfram Mathematica naprogramovať MKP a riešiť pomocou nej niekoľko príkladov. Jedným z nich je modelový príklad priehybu membrány, pre ktorý existuje presné analytické riešenie a na ňom bude našou úlohou skúmať chyby a experimentálny rád konvergencie metódy. Ďalším cieľom je namodelovať reálne konštrukcie, ktoré sú zaťažené vonkajšou silou, či podopreté stĺpmi.

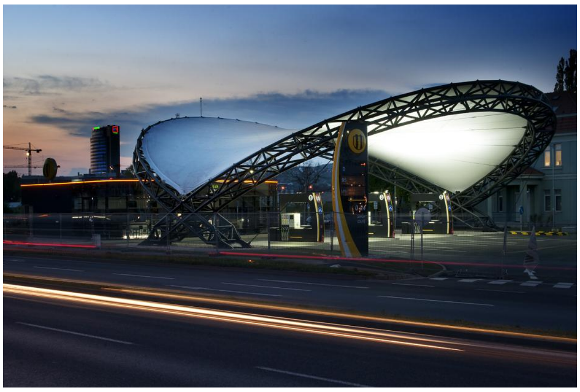
V úvode (kapitola 1) popisujeme membránové konštrukcie, typy membrán a ich využitie v architektúre a stavebníctve. V kapitole 2 konštruujeme matematický model diferenciálnej rovnice priehybu membrány. Ďalej v kapitole 3 popisujeme algoritmus MKP s kvadratickými trojuholníkovými elementami a v poslednej kapitole 4, ku ktorej boli vytvorené aj programy v softvéri Wolfram Mathematica, najskôr na modelovom príklade ukazujeme použitie MKP, vplyv zaťaženia a podopretia membrány stĺpom v jednom bode. Následne v časti 4.2.1 vytvárame model reálnej konštrukcie stanu podopretého stĺpmi a v poslednej časti 4.2.2 navrhujeme membránovú konštrukciu s pôdorysom s krivočiarou hranicou slúžiacu na prekrytie pódia.

Obsah

Kapitola 1

Úvod – Membránové konštrukcie

Membrána v stavebnom priemysle predstavuje súbor materiálov, ktorých hrúbka je voči ostatným rozmerom zanedbateľná (častokrát sa pohybuje v rozmedzí 50 μm – 500 μm). Sú to teda aj kvôli tejto vlastnosti veľmi ľahké materiály (v porovnaní so sklom sú náklady na ich inštaláciu práve preto častokrát až o 70 % nižšie [10]). Využívajú sa najmä na stavby rôznych prekrytí ako sú pumpy či pódiá alebo napríklad na obzvláštnenie štadiónov či iných budov, pozri obrázky 1.1 a 1.2.



Obr. 1.1: Membránové zastrešenie Slovnaft pumpy v Bratislave [17].

Obr. 1.2: Allianz Arena v Mníchove ukazuje použitie fóliových vankúšov plnených vzduchom [11].

Do skupiny membránových materiálov patria textílie (nazývané membrány), na povrchu potiahnuté materiálom, ktorý ich má chrániť pred vplyvmi počasia, najmä pred dažďom, či slnkom, ktoré môže napríklad ovplyvniť farebnosť použitej textílie. V kapitole 4 spomenieme membránovú textíliu nazývanú Valmex FR700 Universal, používanú napríklad firmou Kayam [5] na stavbu veľkoplošných stanov. Ďalšími zo skupiny membrán sú fólie, ktorými sa síce v práci nebudeme zaoberať, spomeňme však aspoň na ilustráciu materiál nazývaný ETFE (ethylen-tetrafluorethylen [10]), používaný najmä v priehľadnej verzii, pozri obr. 1.3. Fólie sa väčšinou kvôli zlepšeniu tepelno-izolačných vlastností používajú vo viacerých vrstvách, z ktorých následne vznikne tzv. vankúš, ktorý sa v konštrukcii neustále dopĺňa vzduchom tak, aby v ňom bol stály tlak (tieto vankúše môžme vidieť aj na obrázkoch 1.2 a 1.3).

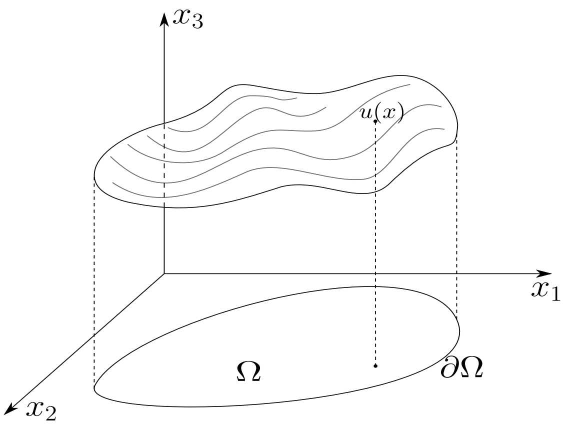
Obr. 1.3: Eden Project v meste Cornwall v Anglicku. Na zastrešenia bola použitá priesvitná ETFE fólia [12].

Konštrukcia membránových zastrešení je však komplikovaná a to najmä preto, že membrány sa prispôsobujú tomu, ako sú na okrajoch, či niekde vnútri plochy, upevnené. Tvar membrány sa prirodzene ustáli v stave, v ktorom má minimálnu plochu a práve tento stav budeme v práci ďalej viackrát skúmať a popisovať. Nebudeme však riešiť problém minimálnej plochy presne, pretože v kapitole 2, v ktorej vytvoríme matematický model použijeme linearizáciu, vďaka ktorej získame lineárnu diferenciálnu rovnicu a budeme úlohu vedieť ľahšie riešiť.

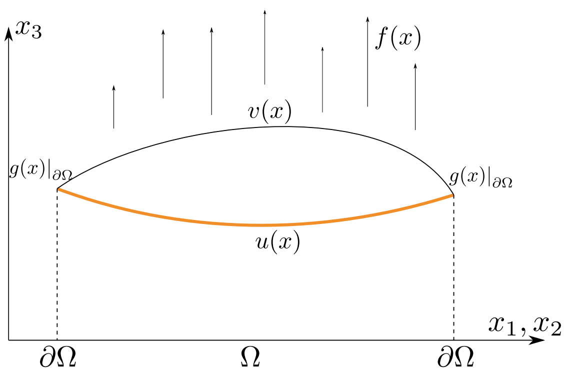
Kapitola 2

Tvorba matematického modelu

Tvar membrány budeme na oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ modelovať v rovnovážnom stave opísanom funkciou dvoch premenných $u(x_1, x_2)$, pozri obr. 2.1. Pre jednoduchosť zaveďme označenie $x = (x_1, x_2) \in \Omega$.



Obr. 2.1: Náčrt membrány nad oblasťou $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.



Obr. 2.2: Náčrt vychýlenia membrány z rovnovážneho stavu $u(x)$ do vychýleného stavu $v(x)$.

Hodnota $u(x)$ vyjadruje posunutia membrány v zvislom smere (smer osi x_3) v bode x. V tom istom smere uvažujeme pôsobenie vonkajších síl, ktoré vyjadríme ich výslednicou $f(x)$, pozri obr. 2.2.

Keďže uvažujeme upevnenú membránu, na jej hranici $\partial\Omega$ zadáme Dirichletovu okrajovú podmienku a to

$$u(x) = g(x), \qquad x \in \partial\Omega, \tag{2.1}$$

kde $g(x)$ je funkcia popisujúca posunutie membrány na hranici $\partial\Omega$.

Ďalej v kapitole čerpáme z [3] a pomocou zákona zachovania energie, ktorý hovorí o tom, že celková práca je rovná rozdielu potenciálnej energie vo vychýlenej polohe $U(v)$ a v rovnovážnej polohe $U(u)$

$$W = U(v) - U(u),$$

zostrojíme matematický model. Najprv nájdeme integrálny tvar zákona zachovanie energie a z neho potom odvodíme diferenciálnu rovnicu pre priehyby membrány.

2.1 Celková práca

Vyjadrime najskôr celkovú prácu W potrebnú na zmenu tvaru membrány z rovnovážnej polohy $u(x)$ do nového stavu $v(x)$, kde $v(x)$ má okrajovú podmienku rovnú podmienke (2.1) definovanej pre $u(x)$.

Celková práca W je súčtom dvoch prác,

$$W = W_1 + W_2,$$

kde W_1 je *práca proti sile* f pôsobiacej na membránu zvonku a W_2 je *práca vynaložená na zmenu celkovej plochy membrány*, čiže práca proti vnútorným silám.

2.1.1 Práca proti vonkajšej sile

Práca je fyzikálnou veličinou, ktorá vyjadruje pôsobenie sily na teleso po určitej dráhe. Prácu, ktorú vykoná sila f, pri zmene tvaru membrány z rovnovážnej polohy u do novej polohy v (pozri obr. 2.2) vieme vyjadriť pomocou integrálu

$$\int_\Omega \left(\int_u^v f \, dx_3 \right) dx.$$

Nami vykonaná práca je s opačným znamienkom a teda

$$W_1 = - \int_\Omega \left(\int_u^v f \, dx_3 \right) dx,$$

kde $dx = dx_1 dx_2$. Po integrácii a úprave dostaneme konečnú prácu W_1 v tvare

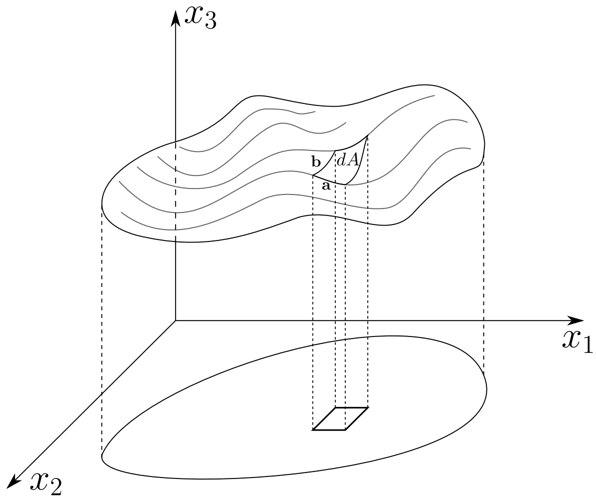
$$W_1 = \int_\Omega f \, (u - v) \, dx. \tag{2.2}$$

2.1.2 Práca vynaložená na zmenu plochy membrány

Keďže potrebujeme vypočítať celkovú plochu membrány, najprv si vezmeme len malú časť dA, zobrazenú na obr. 2.3. Plochu dA získame z veľkosti vektora, ktorý je výsledkom vektorového súčinu vektorov $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} &= (dx_1, 0, u(x_1 + dx_1, x_2) - u(x_1, x_2)) = (1, 0, \partial_{x_1} u) \, dx_1, \\
\mathbf{b} &= (0, 1, \partial_{x_2} u) \, dx_2.
\end{aligned}$$

Označenie $\partial_{x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}$ budeme používať pre parciálnu deriváciu podľa x_i.



Obr. 2.3: Náčrt malej časti dA.

Vektorový súčin týchto dvoch vektorov potom bude

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) = (-\partial x_1 u, -\partial x_2 u, 1)\, dx_1 dx_2$$

a veľkosť plochy dA

$$dA = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \sqrt{(\partial x_1 u)^2 + (\partial x_2 u)^2 + (1)^2} dx_1 dx_2 = \sqrt{1 + ||\nabla u||^2} dx.$$

Keďže potrebujeme zistiť celkovú plochu A nad oblasťou Ω, musíme už vypočítanú plochu dA zintegrovať cez celú oblasť Ω. Celková plocha A bude

$$A = \int_\Omega \sqrt{1 + ||\nabla u||^2}\, dx. \tag{2.3}$$

Práca potrebná na zmenu plochy membrány následne bude rozdiel plochy membrány vo vychýlenom stave opísanom funkciou v a jej plochy v rovnovážnom stave prenásobený konštantou tuhosti membrány μ

$$W_2 = \int_\Omega \mu \left(\sqrt{1 + ||\nabla v||^2} - \sqrt{1 + ||\nabla u||^2} \right) dx. \tag{2.4}$$

Linearizácia

V tejto práci budeme používať linearizovanú verziu vzťahu (2.3), vďaka čomu nakoniec dostaneme lineárnu diferenciálnu rovnicu. Budeme teda predpokladať, že priehyby u, v a ich gradienty ∇u, ∇v sú len veľmi malé. Môžme teda pristúpiť k aproximácii funkcie $h(\varepsilon) = \sqrt{1 + \varepsilon}$, kde $\varepsilon = ||\nabla u||^2$, resp. $\varepsilon = ||\nabla v||^2$ pomocou Taylorovho rozvoja

$$h(\varepsilon) = \sqrt{1 + \varepsilon} \approx h(0) + h'(0)\varepsilon = 1 + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon}}\bigg|_{\varepsilon=0} \varepsilon = 1 + \frac{1}{2}\varepsilon. \tag{2.5}$$

Po využití (2.5) v (2.4) dostaneme

$$W_2 \approx \int_\Omega \mu \left[\left(1 + \frac{1}{2}||\nabla v||^2 \right) - \left(1 + \frac{1}{2}||\nabla u||^2 \right) \right] dx = \frac{1}{2} \int_\Omega \mu \left(||\nabla v||^2 - ||\nabla u||^2 \right) dx. \tag{2.6}$$

Celková práca

Po použití všetkých predpokladov a odvodených prác potrebných na zmenu tvaru membrány dostávame celkovú prácu

$$W = W_1 + W_2 = \int_\Omega f\,(u-v)\;dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \mu\left(||\nabla v||^2 - ||\nabla u||^2\right)\;dx$$

a po úprave

$$W = \frac{1}{2}\int_\Omega \mu\left(||\nabla v||^2 - ||\nabla u||^2\right) + 2f(u-v)\,dx. \tag{2.7}$$

2.2 Potenciálna energia

Z princípu minima potenciálnej energie vyplýva, že v rovnovážnej polohe u je potenciálna energia najmenšia a teda

$$U(v) \geq U(u),$$

musí platiť pre ľubovoľný vychýlený tvar v. Celkovú prácu už podľa (2.7) poznáme, vyjadríme teda potenciálnu energiu vo vychýlenej polohe

$$U(v) = U(u) + W = U(u) + \frac{1}{2}\int_\Omega \mu\left(||\nabla v||^2 - ||\nabla u||^2\right) + 2f(u-v)\,dx. \tag{2.8}$$

2.3 Nutná podmienka minima

Ľubovoľnú vychýlenú polohu v vieme vyjadriť ako

$$v = u + tw, \tag{2.9}$$

kde t je ľubovoľné reálne číslo a w je ľubovoľná vychýlená poloha, pre ktorú platí nulová Dirichletova okrajová podmienka

$$w(x) = 0, \qquad x \in \partial\Omega. \tag{2.10}$$

Rovnica (2.8) za použitia (2.9) nadobudne tvar

$$U(u+tw) = U(u) + \frac{1}{2}\int_\Omega \mu\big(||\nabla(u+tw)||^2 - ||\nabla u||^2\big) + 2f\big(u-(u+tw)\big)\,dx.$$

Po úprave a za použitia

$$||\nabla(u+tw)|| = ||\nabla u+t\nabla w|| = (\nabla u+t\nabla w, \nabla u+t\nabla w) = ||\nabla u||^2+2t\nabla u\cdot\nabla w+t^2||\nabla w||^2,$$

získame

$$U(v) = U(u+tw) = U(u)-t\int_\Omega fw\,dx+t\int_\Omega \mu\nabla u\cdot\nabla w\,dx+\frac{1}{2}t^2\int_\Omega \mu||\nabla w||^2\,dx. \tag{2.11}$$

Keďže $U(u)$ je potenciálna energia rovnovážneho stavu výraz $U(u+tw)$ nadobúda minimum pre $t=0$ a preto musí platiť

$$\left.\frac{dU(u+tw)}{dt}\right|_{t=0} = 0.$$

Po derivovaní (2.11) podľa premennej t v bode $t=0$ dostávame

$$\left.\left(-\int_\Omega fw\,dx + \int_\Omega \mu\nabla u\cdot\nabla w\,dx + t\int_\Omega \mu||\nabla w||^2\,dx\right)\right|_{t=0} = \\ -\int_\Omega fw\,dx + \int_\Omega \mu\nabla u\cdot\nabla w\,dx = 0$$

a z toho integrálny tvar zákonu zachovania energie

$$\int_\Omega \mu\nabla u\cdot\nabla w\,dx = \int_\Omega fw\,dx, \tag{2.12}$$

v ktorom je nutné, aby existovali prvé derivácie funkcií u a w. Rovnica (2.12) sa zvykne nazývať aj **slabá formulácia** problému na celej výpočtovej oblasti Ω. Pre získanie diferenciálnej rovnice ďalej rovnicu upravíme

$$\mu\nabla u\cdot\nabla w = \nabla\cdot\big(\mu(\nabla u)w\big) - \nabla\cdot(\mu\nabla u)w$$

a dosadením do (2.12) získame

$$\int_\Omega \nabla\cdot\big(\mu(\nabla u)w\big)\,dx - \int_\Omega \nabla\cdot(\mu\nabla u)w\,dx = \int_\Omega fw\,dx.$$

V prvom integráli použijeme Greenovu vetu (pozri [1]), pomocou ktorej prepíšeme plošný integrál na integrál po hranici,

$$\int_\Omega \nabla\cdot\mathbf{F}\,dx = \int_{\partial\Omega} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds, \tag{2.13}$$

keď za $\mathbf{F}$ vezmeme výraz $\big(\mu(\nabla u)w\big)$ dostávame

$$\int_\Omega \nabla\cdot\big(\mu(\nabla u)w\big)\,dx = \int_{\partial\Omega}\big(\mu(\nabla u)w\big)\cdot\mathbf{n}\,ds = 0.$$

Tento integrál je nulový, pretože pre funkciu w platí (2.10) a teda po úprave dostávame

$$\int_\Omega \big(-\nabla\cdot(\mu\nabla u) - f\big)w\,dx = 0.$$

Keďže, ako už bolo spomenuté, w môže byť ľubovoľná funkcia (nie nutne nulová), musí platiť

$$-\nabla\cdot(\mu\nabla u) - f = 0.$$

Z toho už priamo dostávame **diferenciálnu rovnicu** pre priehyb membrány

$$-\nabla\cdot(\mu\nabla u) = f, \tag{2.14}$$

ktorá je zároveň aj **silnou formuláciou**, v ktorej je na rozdiel od slabej formulácie potrebná existencia druhej derivácie funkcie u.

Kapitola 3

MKP pre 2D úlohy s kvadratickými elementami

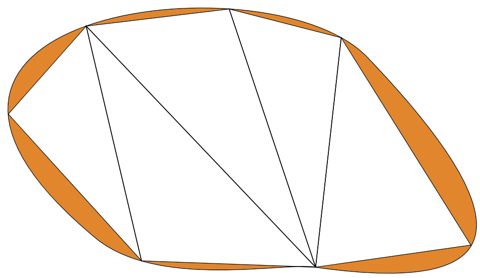
V tejto kapitole podrobne popíšeme algoritmus metódy konečných prvkov. Jednotlivé kroky prispôsobíme konkrétne prípadu kvadratických elementov, ktoré budeme používať na riešenie rovnice priehybu membrány (2.14).

3.1 Diskretizácia výpočtovej oblasti na elementy

Sledovanú výpočtovú oblasť Ω aproximujeme množinou N konečných prvkov, tzv. elementov Ω_e, kde $e = 1, \ldots, N$.

$$\Omega \approx \bigcup_{e=1}^{N} \Omega_e$$

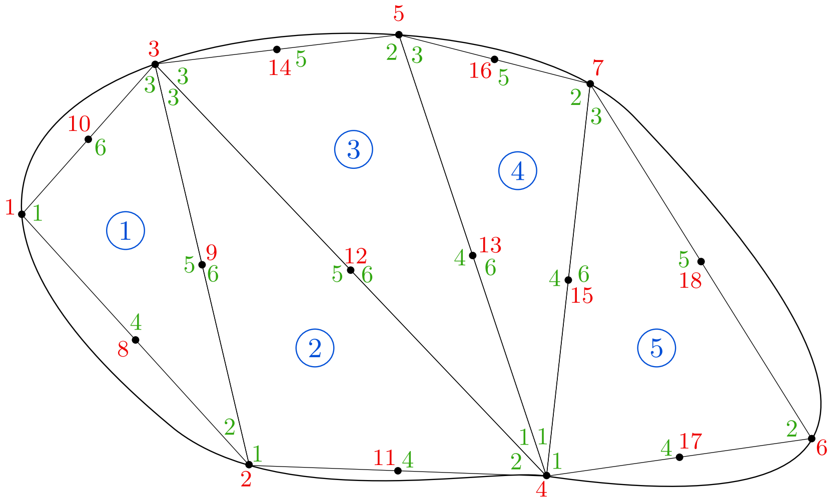
Vo všeobecnosti zjednotením týchto Ω_e dochádza k diskretizačnej chybe zvýraznenej na obr. 3.1 oranžovou farbou. Diskretizačnú chybu však vieme minimalizovať napríklad správnym zvolením tvaru jednotlivých elementov ako sú elementy s krivočiarymi hranami a najmä zjemňovaním siete.



Obr. 3.1: Diskretizačná chyba (vyznačená oranžovou), ktorá vznikla aproximáciou oblasti Ω.

Pri tvorbe siete je tiež vhodné dodržiavať zásady ako je postupný prechod hustoty elementov, tvorba hranice elementov na hranici nespojitosti materiálových vlastností, či vyhýbanie sa elementom s veľmi ostrými uhlami. Elementy sa tiež nesmú prekrývať, môžu mať spoločný len jeden vrchol či jednu hranu.

Keďže uvažujeme 2D trojuholníkové kvadratické elementy s rovnými hranami, tvorba uzlových bodov siete a ich očíslovanie potrebné v následnej implementácii metódy môže vyzerať ako na obr. 3.2, kde sú globálne čísla napísané červenou, lokálne čísla zelenou a čísla elementov modrou farbou.



Obr. 3.2: Globálne číslovanie uzlových bodov (červenou), lokálne číslovanie uzlových bodov (zelenou) a číslovanie elementov siete (modrou).

Následne tvoríme tzv. conectivity matrix B, kde prvok B_{ei} je globálne číslo i-teho uzlového bodu na e-tom elemente. Pre ilustráciu conectivity matrix pre oblasť z obr. 3.2 nadobudne tvar

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 4 & 3 & 11 & 12 & 9 \\ 4 & 5 & 3 & 13 & 14 & 12 \\ 4 & 7 & 5 & 15 & 16 & 13 \\ 4 & 6 & 7 & 17 & 18 & 15 \end{bmatrix}$$

3.2 Zostrojenie sústavy rovníc na elemente

3.2.1 Zostrojenie slabej formulácie diferenciálnej rovnice

Zvolíme si jeden konkrétny element Ω_e. Diferenciálnu rovnicu (2.14), ktorej riešenie hľadáme, prenásobíme váhovou funkciou $w = w(x_1, x_2) = w(x)$, ktorá bude v nasledujúcom texte predstavovať jednu z lokálnych aproximačných funkcií

$$\big(\nabla \cdot (-\mu \nabla u)\big) w = f w.$$

Rovnicu zintegrujeme cez element Ω_e

$$\int_{\Omega_e} \big(\nabla \cdot (-\mu \nabla u)\big) w \, dx = \int_{\Omega_e} f w \, dx.$$

Použitím vzťahu

$$(\nabla \cdot \mathbf{G}) w = \nabla \cdot (\mathbf{G} w) - \mathbf{G} \cdot \nabla w,$$

kde $\mathbf{G} = -\mu \nabla u$ dostávame

$$\int_{\Omega_e} \nabla \cdot \big((-\mu \nabla u) w\big) \, dx + \int_{\Omega_e} (\mu \nabla u) \cdot \nabla w \, dx = \int_{\Omega_e} f w \, dx. \tag{3.1}$$

V prvom člene použijeme Greenovu vetu (2.13) pre element Ω_e, kde za $\mathbf{F}$ dosadíme $\big((-\mu\nabla u)w\big)$, takže (2.13) prejde na tvar

$$\int_{\Omega_e} \nabla \cdot \big(-\mu(\nabla u)w\big)\, dx = \int_{\partial\Omega_e} \big(-\mu(\nabla u)w\big) \cdot \mathbf{n}\, ds. \tag{3.2}$$

Po dosadení (3.2) do (3.1) a úprave získame **slabú formuláciu**

$$\int_{\Omega_e} \mu\nabla u \cdot \nabla w\, dx = \int_{\Omega_e} fw\, dx + \int_{\partial\Omega_e} \big((\mu\nabla u)\cdot\mathbf{n}\big)w\, ds,$$

ktorá má tvar podobný (2.12), teraz však v rovnici vystupuje hraničný člen, ktorý sa v (2.12) nevyskytuje kvôli Dirichletovej okrajovej podmienke (2.10). V prípade 2D úlohy platí $\nabla u = (\partial_{x_1}u, \partial_{x_2}u)$ a $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ a podintegrálne výrazy majú tvar

$$\begin{aligned} \mu\nabla u \cdot \nabla w &= \mu\partial_{x_1}u\partial_{x_1}w + \mu\partial_{x_2}u\partial_{x_2}w \\ \big((\mu\nabla u)\cdot\mathbf{n}\big)w &= \mu\partial_{x_1}u\, n_1 w + \mu\partial_{x_2}u\, n_2 w. \end{aligned}$$

Dostávame teda **slabú formuláciu** v tvare

$$\int_{\Omega_e} \mu\partial_{x_1}u\partial_{x_1}w + \mu\partial_{x_2}u\partial_{x_2}w\, dx = \int_{\Omega_e} fw\, dx + \int_{\partial\Omega_e} \mu\partial_{x_1}u\, n_1 w + \mu\partial_{x_2}u\, n_2 w\, ds, \tag{3.3}$$

v ktorej stačí, ak existujú iba prvé derivácie funkcií u a w, na rozdiel od silnej formulácie, v ktorej je potrebná druhá derivácia funkcie u.

3.2.2 Zostrojenie aproximačných funkcií

Približné riešenie $U^e(x)$ na elemente Ω_e, pri použití kvadratických trojuholníkových elementov, hľadáme v tvare úplnej polynomickej funkcie

$$U^e(x) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_1x_2 + a_4x_1^2 + a_5x_2^2. \tag{3.4}$$

Obsahuje teda nulové koeficienty a_i iba pri mocninách premenných x_1 a x_2 vyšších ako dva a to práve kvôli použitiu kvadratických elementov. Počet koeficientov a_i musí zároveň byť rovný počtu uzlových bodov elementu. Funkcie $U^e(x)$ tiež musia mať vo všeobecnosti nenulové derivácie stupňa potrebného v slabej formulácii (3.3) a teda nenulové prvé derivácie. Túto podmienku $U^e(x)$ v tvare (3.4) spĺňa.

Požiadavkami pri hľadaní koeficientov a_i sú interpolačné podmienky

$$U^e(x_1^e) = u_1^e,\ U^e(x_2^e) = u_2^e,\ U^e(x_3^e) = u_3^e,\ U^e(x_4^e) = u_4^e,\ U^e(x_5^e) = u_5^e,\ U^e(x_6^e) = u_6^e,$$

čiže hodnota celkového približného riešenia $U^e(x_i^e)$ v i-tom uzlovom bode elementu Ω_e je rovná hodnote približného riešenia na elemente v i-tom uzlovom bode u_i^e.

Po dosadení jednotlivých uzlových bodov x_i^e do funkcie približného riešenia $U^e(x)$ a využití interpolačných podmienok získame sústavu šiestich rovníc so šiestimi neznámymi koeficientmi a_i

$$
\begin{aligned}
U^e(x_1^e) &= a_0 + a_1 x_{11}^e + a_2 x_{12}^e + a_3 x_{11}^e x_{12}^e + a_4 (x_{11}^e)^2 + a_5 (x_{12}^e)^2 = u_1^e,\\
U^e(x_2^e) &= a_0 + a_1 x_{21}^e + a_2 x_{22}^e + a_3 x_{21}^e x_{22}^e + a_4 (x_{21}^e)^2 + a_5 (x_{22}^e)^2 = u_2^e,\\
U^e(x_3^e) &= a_0 + a_1 x_{31}^e + a_2 x_{32}^e + a_3 x_{31}^e x_{32}^e + a_4 (x_{31}^e)^2 + a_5 (x_{32}^e)^2 = u_3^e,\\
U^e(x_4^e) &= a_0 + a_1 x_{41}^e + a_2 x_{42}^e + a_3 x_{41}^e x_{42}^e + a_4 (x_{41}^e)^2 + a_5 (x_{42}^e)^2 = u_4^e,\\
U^e(x_5^e) &= a_0 + a_1 x_{51}^e + a_2 x_{52}^e + a_3 x_{51}^e x_{52}^e + a_4 (x_{51}^e)^2 + a_5 (x_{52}^e)^2 = u_5^e,\\
U^e(x_6^e) &= a_0 + a_1 x_{61}^e + a_2 x_{62}^e + a_3 x_{61}^e x_{62}^e + a_4 (x_{61}^e)^2 + a_5 (x_{62}^e)^2 = u_6^e,
\end{aligned}
$$

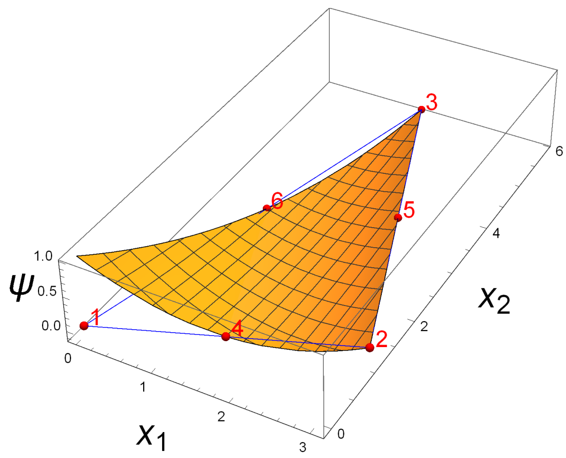
kde (x_{i1}^e, x_{i2}^e) sú súradnice uzlového bodu x_i^e. Z tejto sústavy rovníc vieme koeficienty a_i vyjadriť a po ich dosadení do (3.4) a úprave získame **Galerkinov rozklad**. Ten je lineárnou kombináciou aproximačných funkcií $\psi_j^e(x)$ s koeficientami rovnými neznámym hodnotám riešenia v uzlových bodoch elementu U_j^e

$$
U^e(x) = u_1^e \psi_1^e(x) + u_2^e \psi_2^e(x) + u_3^e \psi_3^e(x) + u_4^e \psi_4^e(x) + u_5^e \psi_5^e(x) + u_6^e \psi_6^e(x). \tag{3.5}
$$

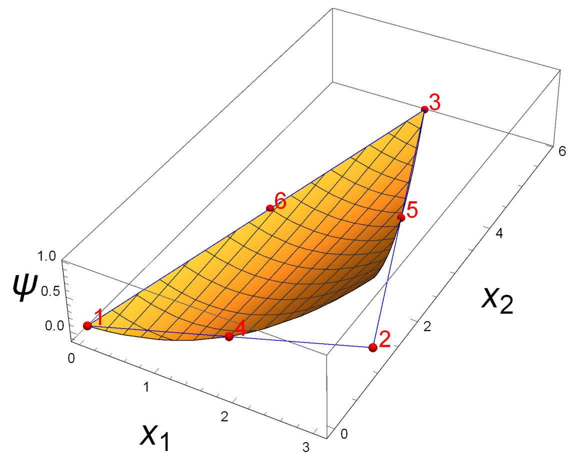
Funkcie $\psi_j^e(x)$ majú podľa [2] tvar

$$
\begin{aligned}
\psi_1^e(x,y) &= \frac{(x_{23}(y-y_3) - y_{23}(x-x_3))(x_{46}(y-y_6) - y_{46}(x-x_6))}{(x_{23}y_{13} - y_{23}x_{13})(x_{46}y_{16} - y_{46}x_{16})},\\
\psi_2^e(x,y) &= \frac{(x_{31}(y-y_1) - y_{31}(x-x_1))(x_{54}(y-y_4) - y_{54}(x-x_4))}{(x_{31}y_{21} - y_{31}x_{21})(x_{54}y_{24} - y_{54}x_{24})},\\
\psi_3^e(x,y) &= \frac{(x_{21}(y-y_1) - y_{21}(x-x_1))(x_{56}(y-y_6) - y_{56}(x-x_6))}{(x_{21}y_{31} - y_{21}x_{31})(x_{56}y_{36} - y_{56}x_{36})},\\
\psi_4^e(x,y) &= \frac{(x_{31}(y-y_1) - y_{31}(x-x_1))(x_{23}(y-y_3) - y_{23}(x-x_3))}{(x_{31}y_{41} - y_{31}x_{41})(x_{23}y_{43} - y_{23}x_{43})},\\
\psi_5^e(x,y) &= \frac{(x_{31}(y-y_1) - y_{31}(x-x_1))(x_{21}(y-y_1) - y_{21}(x-x_1))}{(x_{31}y_{51} - y_{31}x_{51})(x_{21}y_{51} - y_{21}x_{51})},\\
\psi_6^e(x,y) &= \frac{(x_{21}(y-y_1) - y_{21}(x-x_1))(x_{23}(y-y_3) - y_{23}(x-x_3))}{(x_{21}y_{61} - y_{21}x_{61})(x_{23}y_{63} - y_{23}x_{63})},
\end{aligned}
$$

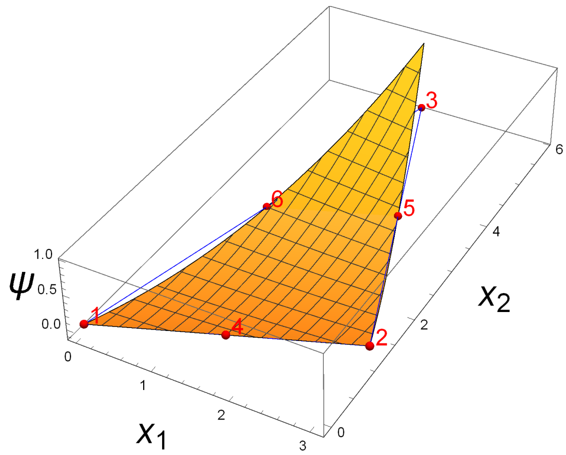
kde používame zjednodušené označenie premenných $x_1 = x$, $x_2 = y$, uzlových bodov $x_j = x_{j1}^e$, $y_j = x_{j2}^e$ a ich rozdielu $x_{kl} = (x_k - x_l)$ a $y_{kl} = (y_k - y_l)$. Vidíme, že i-ta aproximačná funkcia je vo všetkých uzlových bodoch elementu okrem i-teho rovná nule. Túto vlastnosť je dobre vidieť aj na obrázkoch 3.3 až 3.8.



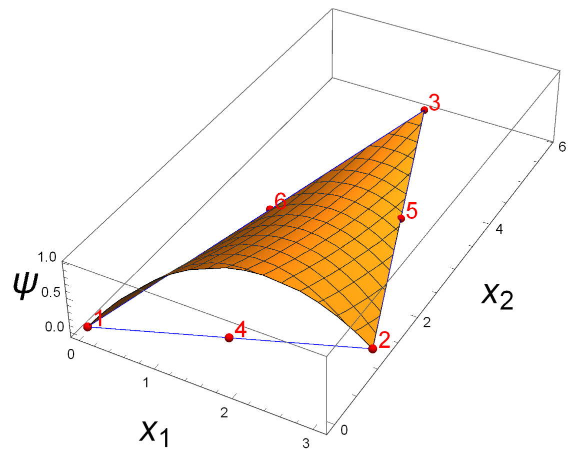
Obr. 3.3: Aproximačná funkcia ψ_1.



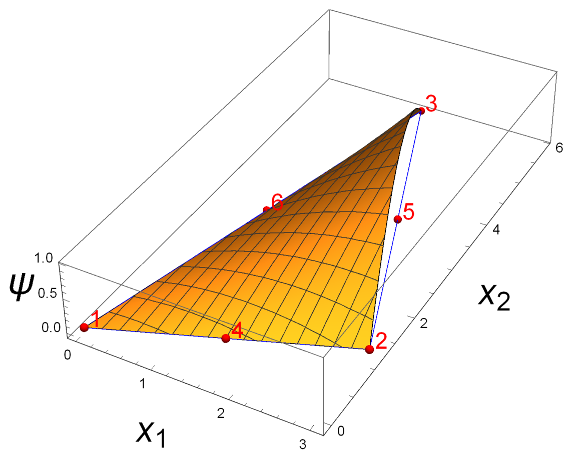
Obr. 3.4: Aproximačná funkcia ψ_2.



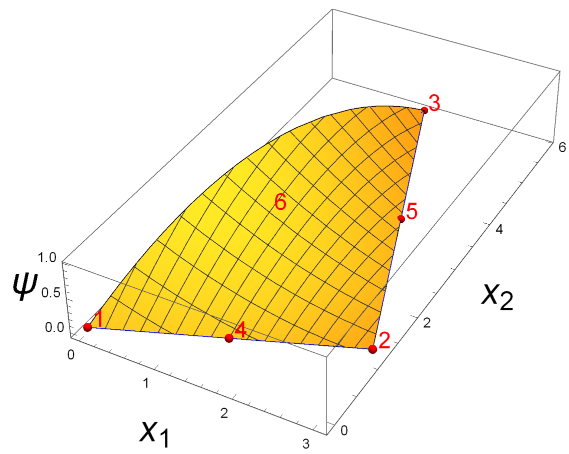
Obr. 3.5: Aproximačná funkcia ψ_3.



Obr. 3.6: Aproximačná funkcia ψ_4.



Obr. 3.7: Aproximačná funkcia ψ_5.



Obr. 3.8: Aproximačná funkcia ψ_6.

3.2.3 Zostrojenie sústavy rovníc na elemente

Zostrojenie sústavy rovníc spočíva v dosadení Galerkinovho rozkladu $U^e(x)$, teda vzťahu (3.5) za $u(x)$ do slabej formulácie (3.3) a postupnom dosádzaní aproximačných funkcií $\psi_j^e(x)$ za váhovú funkciu $w(x)$.

Po dosadení Galerkinovho rozkladu vznikne rovnica

$$\sum_{i=1}^{6} u_i^e \int_{\Omega_e} \mu \Big(\frac{\partial \psi_i^e}{\partial x_1}\frac{\partial w}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_i^e}{\partial x_2}\frac{\partial w}{\partial x_2}\Big)\, dx = \int_{\Omega_e} f w \, dx + \int_{\partial\Omega_e} \big((\mu \nabla u)\cdot \mathbf{n}\big) w \, ds.$$

Po následnom postupnom dosadení aproximačných funkcií ψ_j^e, $j = 1, \ldots, 6$ za $w(x)$ dostaneme

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{6} u_i^e \int_{\Omega_e} \mu \left(\frac{\partial \psi_i^e}{\partial x_1}\frac{\partial \psi_1^e}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_i^e}{\partial x_2}\frac{\partial \psi_1^e}{\partial x_2}\right) dx &= \int_{\Omega_e} f \psi_1^e \, dx + Q_1^e,\\
\sum_{i=1}^{6} u_i^e \int_{\Omega_e} \mu \left(\frac{\partial \psi_i^e}{\partial x_1}\frac{\partial \psi_2^e}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_i^e}{\partial x_2}\frac{\partial \psi_2^e}{\partial x_2}\right) dx &= \int_{\Omega_e} f \psi_2^e \, dx + Q_2^e,\\
\sum_{i=1}^{6} u_i^e \int_{\Omega_e} \mu \left(\frac{\partial \psi_i^e}{\partial x_1}\frac{\partial \psi_3^e}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_i^e}{\partial x_2}\frac{\partial \psi_3^e}{\partial x_2}\right) dx &= \int_{\Omega_e} f \psi_3^e \, dx + Q_3^e,\\
\sum_{i=1}^{6} u_i^e \int_{\Omega_e} \mu \left(\frac{\partial \psi_i^e}{\partial x_1}\frac{\partial \psi_4^e}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_i^e}{\partial x_2}\frac{\partial \psi_4^e}{\partial x_2}\right) dx &= \int_{\Omega_e} f \psi_4^e \, dx + Q_4^e,\\
\sum_{i=1}^{6} u_i^e \int_{\Omega_e} \mu \left(\frac{\partial \psi_i^e}{\partial x_1}\frac{\partial \psi_5^e}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_i^e}{\partial x_2}\frac{\partial \psi_5^e}{\partial x_2}\right) dx &= \int_{\Omega_e} f \psi_5^e \, dx + Q_5^e,\\
\sum_{i=1}^{6} u_i^e \int_{\Omega_e} \mu \left(\frac{\partial \psi_i^e}{\partial x_1}\frac{\partial \psi_6^e}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_i^e}{\partial x_2}\frac{\partial \psi_6^e}{\partial x_2}\right) dx &= \int_{\Omega_e} f \psi_6^e \, dx + Q_6^e,
\end{aligned}$$

kde sme zaviedli označenie

$$Q_j^e = \int_{\partial\Omega_e} \mu \nabla u \cdot \mathbf{n} \psi_j^e \, ds.$$

Kvôli zjednodušeniu zápisu a výpočtov označme

$$K_{ij}^e = \int_{\Omega_e} \mu \left(\frac{\partial \psi_i^e}{\partial x_1}\frac{\partial \psi_j^e}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_i^e}{\partial x_2}\frac{\partial \psi_j^e}{\partial x_2}\right) dx, \quad f_i^e = \int_{\Omega_e} f \psi_i^e \, dx \tag{3.6}$$

a zaveďme maticový zápis sústavy rovníc. Systém rovníc pre element Ω_e potom bude

$$\begin{aligned}
K_{11}^e u_1^e + K_{12}^e u_2^e + K_{13}^e u_3^e + K_{14}^e u_4^e + K_{15}^e u_5^e + K_{16}^e u_6^e &= f_1^e + Q_1^e,\\
K_{21}^e u_1^e + K_{22}^e u_2^e + K_{23}^e u_3^e + K_{24}^e u_4^e + K_{25}^e u_5^e + K_{26}^e u_6^e &= f_2^e + Q_2^e,\\
K_{31}^e u_1^e + K_{32}^e u_2^e + K_{33}^e u_3^e + K_{34}^e u_4^e + K_{35}^e u_5^e + K_{36}^e u_6^e &= f_3^e + Q_3^e,\\
K_{41}^e u_1^e + K_{42}^e u_2^e + K_{43}^e u_3^e + K_{44}^e u_4^e + K_{45}^e u_5^e + K_{46}^e u_6^e &= f_4^e + Q_4^e,\\
K_{51}^e u_1^e + K_{52}^e u_2^e + K_{53}^e u_3^e + K_{54}^e u_4^e + K_{55}^e u_5^e + K_{56}^e u_6^e &= f_5^e + Q_5^e,\\
K_{61}^e u_1^e + K_{62}^e u_2^e + K_{63}^e u_3^e + K_{64}^e u_4^e + K_{65}^e u_5^e + K_{66}^e u_6^e &= f_6^e + Q_6^e.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Sústava rovníc zapísaná maticovo, nadobudne tvar

$$\begin{bmatrix} K^e_{11} & K^e_{12} & K^e_{13} & K^e_{14} & K^e_{15} & K^e_{16} \\ K^e_{21} & K^e_{22} & K^e_{23} & K^e_{24} & K^e_{25} & K^e_{26} \\ K^e_{31} & K^e_{32} & K^e_{33} & K^e_{34} & K^e_{35} & K^e_{36} \\ K^e_{41} & K^e_{42} & K^e_{43} & K^e_{44} & K^e_{45} & K^e_{46} \\ K^e_{51} & K^e_{52} & K^e_{53} & K^e_{54} & K^e_{55} & K^e_{56} \\ K^e_{61} & K^e_{62} & K^e_{63} & K^e_{64} & K^e_{65} & K^e_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u^e_1 \\ u^e_2 \\ u^e_3 \\ u^e_4 \\ u^e_5 \\ u^e_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f^e_1 \\ f^e_2 \\ f^e_3 \\ f^e_4 \\ f^e_5 \\ f^e_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q^e_1 \\ Q^e_2 \\ Q^e_3 \\ Q^e_4 \\ Q^e_5 \\ Q^e_6 \end{bmatrix}$$

a zjednodušene

$$K^e \cdot u^e = f^e + Q^e.$$

Na každom elemente takto získame lokálnu sústavu 6 rovníc s 12 neznámymi, ktoré predstavujú stĺpcové vektory u^e a Q^e. Pri počte N elementov by sme takúto sústavu rovníc získali pre každý z elementov a teda celkovo by sme mali 6 N rovníc s 12 N neznámymi. Keďže túto sústavu ešte nevieme riešiť, pristúpime k ďalším krokom, aby sme znížili celkový počet neznámych.

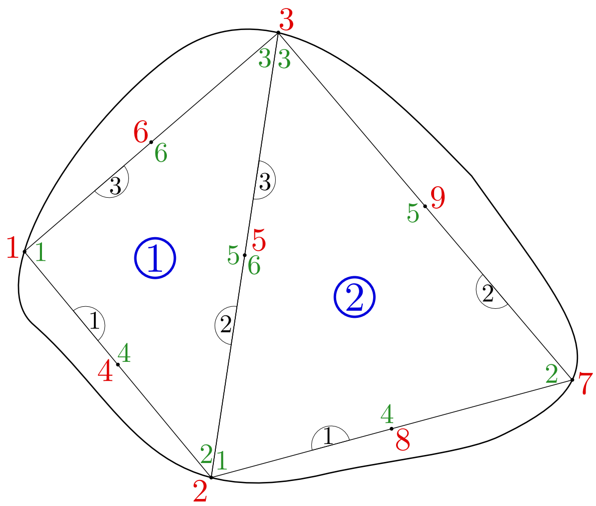
3.3 Spojenie elementových sústav rovníc do globálneho systému

Pri tvorbe globálneho systému rovníc využívame dva princípy a to *spojitosť riešenia na styku elementov* a *bilanciu síl.*

3.3.1 Spojitosť riešenia na styku elementov

Princíp spojitosti riešenia znamená, že riešenie na hrane patriacej dvom elementom musí byť spojité. Použitím globálneho číslovania uzlových bodov a rovnosti riešenia v nich zabezpečíme aj rovnosť riešenia na hranách elementov. Spojitosť riešenia v prípade ilustrovanom na obr. 3.9 zaistíme rovnicami

$$\begin{aligned} &U_1 = u^1_1, && U_2 = u^1_2 = u^2_1, \\ &U_3 = u^1_3 = u^2_3, && U_4 = u^1_4, \\ &U_5 = u^1_5 = u^2_6, && U_6 = u^1_6, \\ &U_7 = u^2_2, && U_8 = u^2_4, \\ &U_9 = u^2_5, \end{aligned}$$



Obr. 3.9: Číslovanie uzlových bodov a hrán dvoch elementov (lokálne – zelenou, globálne – červenou, elementy – modrou, hrany – čiernou).

3.3.2 Bilancia síl

Integrály označené Q_i^e vieme rozdeliť na súčet integrálov po jednotlivých hranách. Integrál po hrane Γ_j^e označíme

$$Q_{ij}^e \equiv \int_{\Gamma_j^e} \big((\mu\nabla u)\cdot \mathbf{n}\big)\psi_i^e \, ds.$$

Vieme, že tieto integrály sú pre niektoré i a j rovné nule, a to kvôli vlastnostiam nulovosti aproximačných funkcií ψ_i^e vo všetkých lokálnych uzlových bodoch rôznych od i a teda aj na niektorých hranách, pozri obr. 3.3 až 3.8.

Bilancia síl v prípade 2D úlohy priehybu membrány predstavuje vzájomne pôsobenie síl medzi dvoma susednými elementami. V našom prípade ju vyjadríme pomocou síl v uzlových bodoch, ktoré sú spoločné pre oba elementy

$$\begin{aligned} Q_{22}^1 + Q_{13}^2 &= 0, \\ Q_{32}^1 + Q_{33}^2 &= 0, \\ Q_{52}^1 + Q_{63}^2 &= 0. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Následne prepíšeme elementové rovnice (3.7) pre prípad z ilustračného obrázku 3.9 na tvar s globálnym číslovaním a silami medzi jednotlivými hranami elementu. Rovnice vyzerajú pre prvý element nasledovne

$$\begin{aligned}
K_{11}^1U_1 + K_{12}^1U_2 + K_{13}^1U_3 + K_{14}^1U_4 + K_{15}^1U_5 + K_{16}^1U_6 &= f_1^1 + Q_{11}^1 + Q_{13}^1, \\
K_{21}^1U_1 + K_{22}^1U_2 + K_{23}^1U_3 + K_{24}^1U_4 + K_{25}^1U_5 + K_{26}^1U_6 &= f_2^1 + Q_{21}^1 + Q_{22}^1, \\
K_{31}^1U_1 + K_{32}^1U_2 + K_{33}^1U_3 + K_{34}^1U_4 + K_{35}^1U_5 + K_{36}^1U_6 &= f_3^1 + Q_{32}^1 + Q_{33}^1, \\
K_{41}^1U_1 + K_{42}^1U_2 + K_{43}^1U_3 + K_{44}^1U_4 + K_{45}^1U_5 + K_{46}^1U_6 &= f_4^1 + Q_{41}^1, \\
K_{51}^1U_1 + K_{52}^1U_2 + K_{53}^1U_3 + K_{54}^1U_4 + K_{55}^1U_5 + K_{56}^1U_6 &= f_5^1 + Q_{52}^1, \\
K_{61}^1U_1 + K_{62}^1U_2 + K_{63}^1U_3 + K_{64}^1U_4 + K_{65}^1U_5 + K_{66}^1U_6 &= f_6^1 + Q_{63}^1
\end{aligned}$$

a pre druhý element podobne

$$\begin{aligned}
K_{11}^2U_2 + K_{12}^2U_7 + K_{13}^2U_3 + K_{14}^2U_8 + K_{15}^2U_9 + K_{16}^2U_5 &= f_1^2 + Q_{11}^2 + Q_{13}^2, \\
K_{21}^2U_2 + K_{22}^2U_7 + K_{23}^2U_3 + K_{24}^2U_8 + K_{25}^2U_9 + K_{26}^2U_5 &= f_2^2 + Q_{21}^2 + Q_{22}^2, \\
K_{31}^2U_2 + K_{32}^2U_7 + K_{33}^2U_3 + K_{34}^2U_8 + K_{35}^2U_9 + K_{36}^2U_5 &= f_3^2 + Q_{32}^2 + Q_{33}^2, \\
K_{41}^2U_2 + K_{42}^2U_7 + K_{43}^2U_3 + K_{44}^2U_8 + K_{45}^2U_9 + K_{46}^2U_5 &= f_4^2 + Q_{41}^2, \\
K_{51}^2U_2 + K_{52}^2U_7 + K_{53}^2U_3 + K_{54}^2U_8 + K_{55}^2U_9 + K_{56}^2U_5 &= f_5^2 + Q_{52}^2, \\
K_{61}^2U_2 + K_{62}^2U_7 + K_{63}^2U_3 + K_{64}^2U_8 + K_{65}^2U_9 + K_{66}^2U_5 &= f_6^2 + Q_{63}^2.
\end{aligned}$$

Pre zníženie počtu neznámych premenných sčítame rovnice prislúchajúce rovnakým globálnym uzlovým bodom. Pre náš ilustračný prípad sčítame

- 2. rovnicu na elemente Ω_1 s 1. rovnicou na elemente Ω_2 (obe prislúchajú globálnemu uzlu číslo 2),
- 3. rovnicu na elemente Ω_1 s 3. rovnicou na elemente Ω_2 (obe prislúchajú globálnemu uzlu číslo 3),
- 5. rovnicu na elemente Ω_1 so 6. rovnicou na elemente Ω_2 (obe prislúchajú globálnemu uzlu číslo 5)

a využijeme princíp bilancie síl (3.8). Získame tak jeden systém rovníc (zoradený podľa globálneho číslovania uzlových bodov)

1) $K^1_{11}U_1 + K^1_{12}U_2 + K^1_{13}U_3 + K^1_{14}U_4 + K^1_{15}U_5 + K^1_{16}U_6 = f^1_1 + Q^1_{11} + Q^1_{13}$,

2) $K^1_{21}U_1 + (K^1_{22} + K^2_{11})U_2 + (K^1_{23} + K^2_{13})U_3 + K^1_{24}U_4+$
$(K^1_{25} + K^2_{16})U_5 + K^1_{26}U_6 + K^2_{12}U_7 + K^2_{14}U_8 + K^2_{15}U_9 = f^1_2 + f^2_1 + Q^1_{21} + Q^2_{11}$,

3) $K^1_{31}U_1 + (K^1_{32} + K^2_{31})U_2 + (K^1_{33} + K^2_{33})U_3 + K^1_{34}U_4+$
$(K^1_{35} + K^2_{36})U_5 + K^1_{36}U_6 + K^2_{32}U_7 + K^2_{34}U_8 + K^2_{35}U_9 = f^1_3 + f^2_3 + Q^1_{33} + Q^2_{32}$,

4) $K^1_{41}U_1 + K^1_{42}U_2 + K^1_{43}U_3 + K^1_{44}U_4 + K^1_{45}U_5 + K^1_{46}U_6 = f^1_4 + Q^1_{41}$,

5) $K^1_{51}U_1 + (K^1_{52} + K^2_{61})U_2 + (K^1_{53} + K^2_{63})U_3 + K^1_{54}U_4+$
$(K^1_{55} + K^2_{66})U_5 + K^1_{56}U_6 + K^2_{62}U_7 + K^2_{64}U_8 + K^2_{65}U_9 = f^1_5 + f^2_6$,

6) $K^1_{61}U_1 + K^1_{62}U_2 + K^1_{63}U_3 + K^1_{64}U_4 + K^1_{65}U_5 + K^1_{66}U_6 = f^1_6 + Q^1_{63}$,

7) $K^2_{21}U_2 + K^2_{23}U_3 + K^2_{26}U_5 + K^2_{22}U_7 + K^2_{24}U_8 + K^2_{25}U_9 = f^2_2 + Q^2_{21} + Q^2_{22}$,

8) $K^2_{41}U_2 + K^2_{43}U_3 + K^2_{46}U_5 + K^2_{42}U_7 + K^2_{44}U_8 + K^2_{45}U_9 = f^2_4 + Q^2_{41}$,

9) $K^2_{51}U_2 + K^2_{53}U_3 + K^2_{56}U_5 + K^2_{52}U_7 + K^2_{54}U_8 + K^2_{55}U_9 = f^2_5 + Q^2_{52}$.

Systém vieme zapísať maticovo

$$K \cdot U = F,$$

kde K je globálna matica tuhosti,

$$K = \begin{bmatrix} K^1_{11} & K^1_{12} & K^1_{13} & K^1_{14} & K^1_{15} & K^1_{16} & 0 & 0 & 0 \\ K^1_{21} & (K^1_{22} + K^2_{11}) & (K^1_{23} + K^2_{13}) & K^1_{24} & (K^1_{25} + K^2_{16}) & K^1_{26} & K^2_{12} & K^2_{14} & K^2_{15} \\ K^1_{31} & (K^1_{32} + K^2_{31}) & (K^1_{33} + K^2_{33}) & K^1_{34} & (K^1_{35} + K^2_{36}) & K^1_{36} & K^2_{32} & K^2_{34} & K^2_{35} \\ K^1_{41} & K^1_{42} & K^1_{43} & K^1_{44} & K^1_{45} & K^1_{46} & 0 & 0 & 0 \\ K^1_{51} & (K^1_{52} + K^2_{61}) & (K^1_{53} + K^2_{63}) & K^1_{54} & (K^1_{55} + K^2_{66}) & K^1_{56} & K^2_{62} & K^2_{64} & K^2_{65} \\ K^1_{61} & K^1_{62} & K^1_{63} & K^1_{64} & K^1_{65} & K^1_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K^2_{21} & K^2_{23} & 0 & K^2_{26} & 0 & K^2_{22} & K^2_{24} & K^2_{25} \\ 0 & K^2_{41} & K^2_{43} & 0 & K^2_{46} & 0 & K^2_{42} & K^2_{44} & K^2_{45} \\ 0 & K^2_{51} & K^2_{53} & 0 & K^2_{56} & 0 & K^2_{52} & K^2_{54} & K^2_{55} \end{bmatrix},$$

U vektor globálnych neznámych,

$$U = \Big[U_1, U_2, U_3, U_4, U_5, U_6, U_7, U_8, U_9\Big]^T,$$

a F globálna pravá strana,

$$F = \begin{bmatrix} f_1^1 + Q_{11}^1 + Q_{13}^1 \\ f_2^1 + f_1^2 + Q_{21}^1 + Q_{11}^2 \\ f_3^1 + f_3^2 + Q_{33}^1 + Q_{32}^2 \\ f_4^1 + Q_{41}^1 \\ f_5^1 + f_6^2 \\ f_6^1 + Q_{63}^1 \\ f_2^2 + Q_{21}^2 + Q_{22}^2 \\ f_4^2 + Q_{41}^2 \\ f_5^2 + Q_{52}^2 \end{bmatrix}.$$

V tomto systéme 9 rovníc máme 9 primárnych neznámych U_i, kde $i = 1, \dots, 9$ a 12 sekundárnych neznámych Q_{ij}^e, nevieme ho teda ešte stále vyriešiť a preto pristúpime k ďalších krokom na zníženie počtu neznámych pridaním rovníc z okrajových podmienok úlohy.

3.3.3 Zahrnutie okrajových podmienok

Keďže uvažujeme Dirichletové okrajové podmienky definované v (2.1), vieme pridať rovnice $U_i = g(x_i) = g_i$, kde i je globálne číslo uzlového bodu ležiaceho na hranici diskretizovanej oblasti Ω.

V našom prípade máme okrajové podmienky

$$U_1 = g_1, \quad U_2 = g_2, \quad U_3 = g_3, \quad U_4 = g_4, \quad U_6 = g_6, \quad U_7 = g_7, \quad U_8 = g_8, \quad U_9 = g_9.$$

Po dosadení za rovnice prislúchajúce i-tym uzlovým bodom do systému získame

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{51}^1 & (K_{52}^1 + K_{61}^2) & (K_{53}^1 + K_{63}^2) & K_{54}^1 & (K_{55}^1 + K_{66}^2) & K_{56}^1 & K_{62}^2 & K_{64}^2 & K_{65}^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$F = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \\ f_5^1 + f_6^2 \\ g_6 \\ g_7 \\ g_8 \\ g_9 \end{bmatrix}.$$

Dostali sme konečný systém 9 rovníc o 9 neznámych U_i, kde $i = 1, \ldots, 9$, ktorý už vieme riešiť pomocou vhodnej metódy na riešenie systémov lineárnych rovníc. Vo všeobecnosti by sme rovnakým postupom dostali systém n rovníc s n neznámymi, kde n je počet uzlových bodov.

Kapitola 4

Numerické riešenie

V tejto kapitole najskôr v časti 4.1 popíšeme modelový príklad, na ktorom budeme analyzovať rád presnosti metódy konečných prvkov a sledovať zaťaženie vonkajšou silou, či podopretie stĺpmi. Následne v časti 4.2.1 namodelujeme reálny príklad membránovej štruktúry stanu, na ktorý aplikujeme aj zaťaženie vlastnou tiažou a ďalej v časti 4.2.2 navrhneme membránovú štruktúru na prekrytie pódia, taktiež zaťaženú vlastnou tiažou.

4.1 Modelová úloha

Za modelový príklad volíme membránu nad plochou Ω v tvare obdĺžnika so šírkou $h_1 = 2\,\mathrm{m}$ a výškou $h_2 = 1,5\,\mathrm{m}$ a s vrcholmi v bodoch $A = (a_1, b_1)$, $B = (a_2, b_1)$, $C = (a_1, b_2)$ a $D = (a_2, b_2)$, kde $a_1 = 0$, $a_2 = a_1 + h_1$, $b_1 = 0$ a $b_2 = b_1 + h_2$.

Keďže v tomto prípade ide o modelový príklad, zvoľme tuhosť membrány $\mu(x_1, x_2) = 1\,\mathrm{N\,m^{-1}}$, vplyv vonkajších síl zatiaľ neuvažujeme, takže ich intenzita bude nulová $f(x_1, x_2) = 0\,\mathrm{N\,m^{-2}}$. Na hraniciach máme zadané okrajové podmienky v tvare

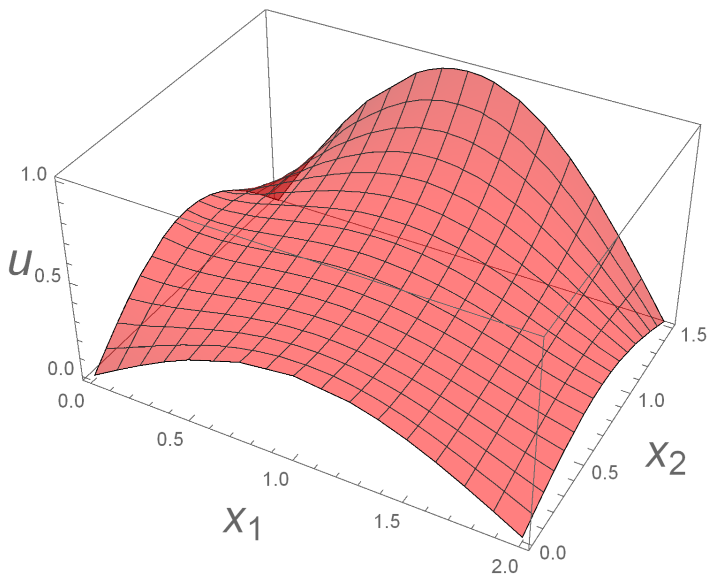
Obr. 4.1: Výpočtová oblasť modelového príkadu.

$$
\begin{aligned}
g(x_1, b_1) &= 0.4 \sin\left(\frac{\pi(x_1 - a_1)}{a_2 - a_1}\right), && x_1 \in [a_1, a_2],\\
g(a_2, x_2) &= 0.2 \sin\left(\frac{\pi(x_2 - b_1)}{b_2 - b_1}\right), && x_2 \in [b_1, b_2],\\
g(x_1, b_2) &= \sin\left(\frac{\pi(x_1 - a_1)}{a_2 - a_1}\right), && x_1 \in [a_1, a_2],\\
g(a_1, x_2) &= 0.4 \sin\left(\frac{\pi(x_2 - b_1)}{b_2 - b_1}\right), && x_2 \in [b_1, b_2].
\end{aligned}
$$

Vieme, že pre takto zadanú úlohu existuje presné analytické riešenie[1] $u_A(x_1, x_2)$ v tvare

$$u_A(x_1,x_2) = \frac{\sinh\left(\frac{\pi(b_2-x_2)}{a_2-a_1}\right) g(x_1,b_1)}{\sinh\left(\frac{\pi(b_2-b_1)}{a_2-a_1}\right)} + \frac{\sinh\left(\frac{\pi(x_1-a_1)}{b_2-b_1}\right) g(a_2,x_2)}{\sinh\left(\frac{\pi(a_2-a_1)}{b_2-b_1}\right)} + \frac{\sinh\left(\frac{\pi(x_2-b_1)}{a_2-a_1}\right) g(x_1,b_2)}{\sinh\left(\frac{\pi(b_2-b_1)}{a_2-a_1}\right)} + \frac{\sinh\left(\frac{\pi(a_2-x_1)}{b_2-b_1}\right) g(a_1,x_2)}{\sinh\left(\frac{\pi(a_2-a_1)}{b_2-b_1}\right)}$$

a je zobrazené na obr. 4.2.

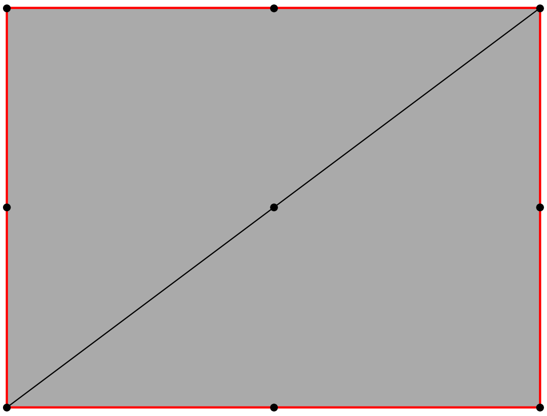


Obr. 4.2: Presné riešenie modelového príkladu.

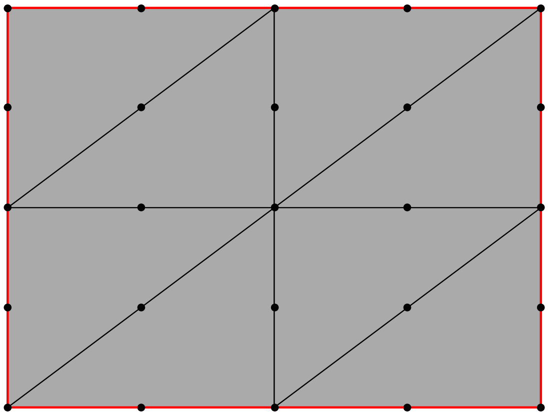
Pristúpme ku krokom metódy konečných prvkov, popísaným v kapitole 3. Oblasť Ω najprv diskretizujeme pomocou kvadratických trojuholníkových elementov tak, že ju rozdelíme na $nx_1 \times nx_2$ zhodných obdĺžnikov, následne každý z nich rozdelíme diagonálne na dva trojuholníky a doplníme uzlové body do stredov strán. Týmito krokmi získame hotovú sieť tvorenú $2\,(nx_1 \times nx_2)$ trojuholníkovými elementami. V našom prípade volíme $nx_1 = nx_2 = 2^i$, kde $i = 0, \ldots, 5$. Všetky siete, ktoré uvažujeme, sú zobrazené na obr. 4.3 až 4.8.

Diskretizovať však musíme aj okrajové podmienky, a tak pre každý z uzlových bodov ležiacich na hranici oblasti Ω zadefinujeme okrajovú podmienku, ktorú neskôr zahrnieme do výpočtu. Tvorba lokálnej matice tuhosti a vektora pravej strany prebieha jednoducho. Vektor pravej strany je v tomto prípade nulový, a teda pre každý z elementov vypočítame iba hodnotu integrálu K^e_{ij} definovanú v (3.6). Následne presne podľa krokov z časti 3.3 definujeme globálnu maticu tuhosti a zahrnieme okrajové podmienky. Vyriešime systém a dostaneme riešenie modelovej úlohy zobrazené na obr. 4.9 až 4.20.

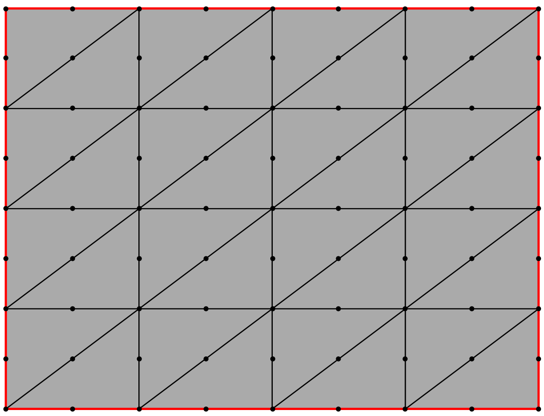
[1] Toto presné riešenie sa dá získať Fourierovou metódou separácie premenných [8].



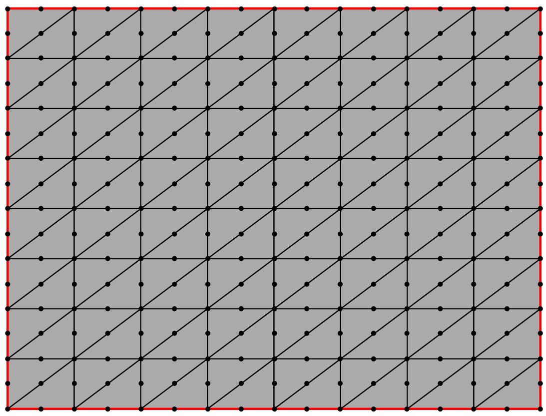
Obr. 4.3: Sieť modelového príkladu tvorená 2 elementami.



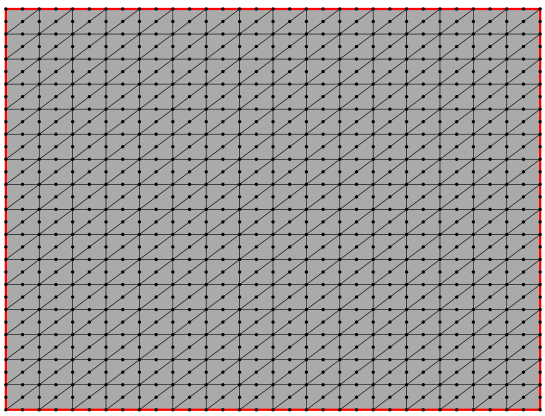
Obr. 4.4: Sieť modelového príkladu tvorená 8 elementami.



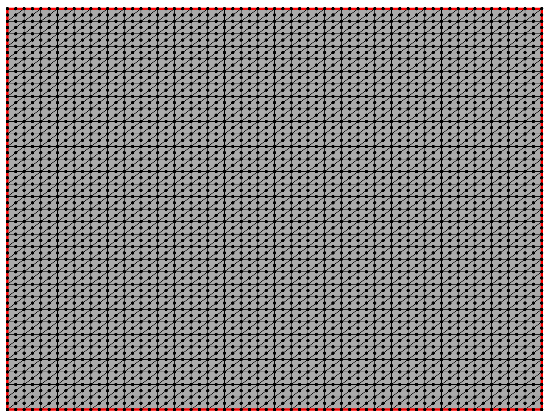
Obr. 4.5: Sieť modelového príkladu tvorená 32 elementami.



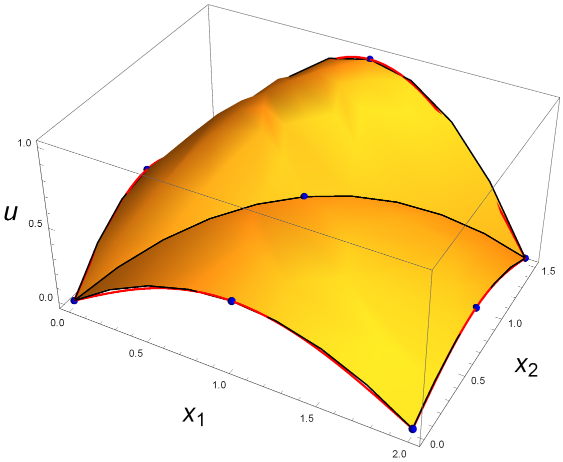
Obr. 4.6: Sieť modelového príkladu tvorená 128 elementami.



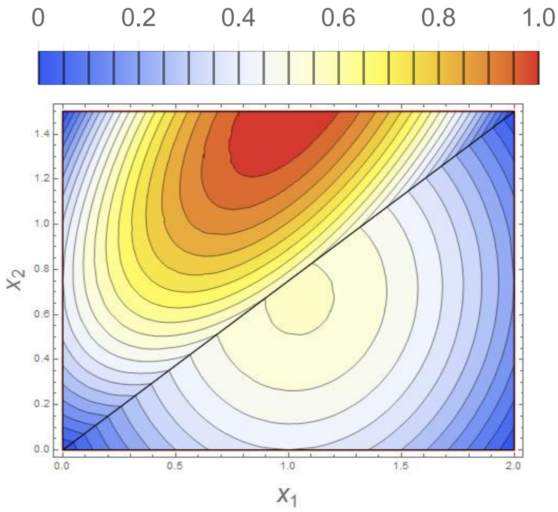
Obr. 4.7: Sieť modelového príkladu tvorená 512 elementami.



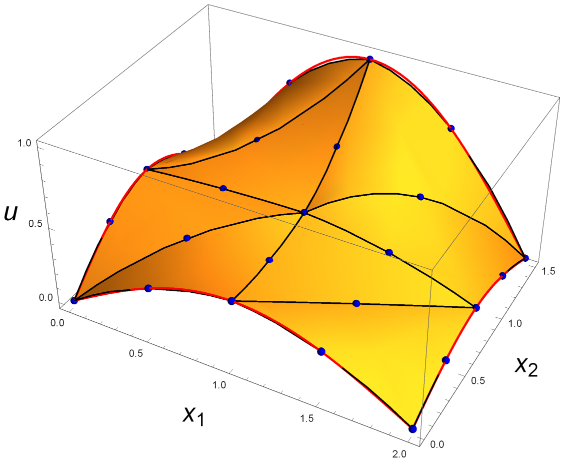
Obr. 4.8: Sieť modelového príkladu tvorená 2048 elementami.



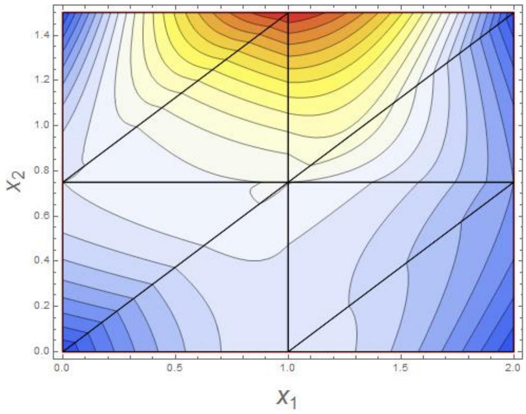
Obr. 4.9: Riešenie modelovej úlohy so sieťou tvorenou 2 elementami.



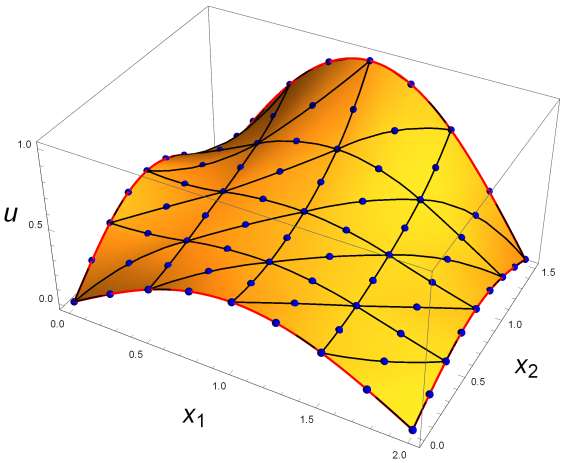
Obr. 4.10: Graf s vrstevnicami riešenia modelovej úlohy so sieťou tvorenou 2 elementami.



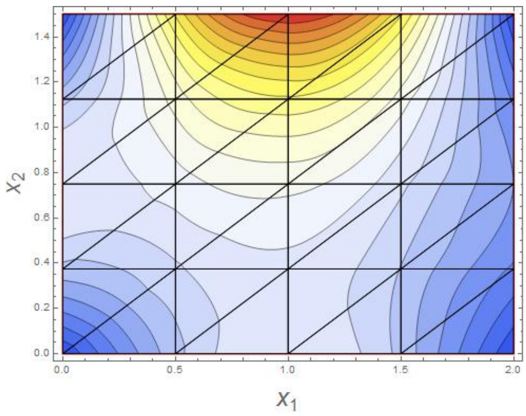
Obr. 4.11: Riešenie modelovej úlohy so sieťou tvorenou 8 elementami.



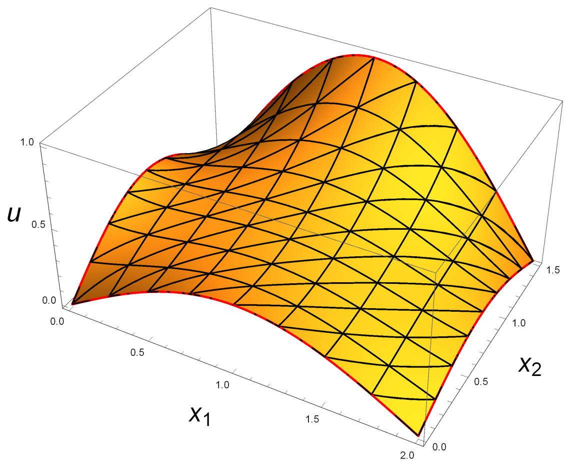
Obr. 4.12: Graf s vrstevnicami riešenia modelovej úlohy so sieťou tvorenou 8 elementami.



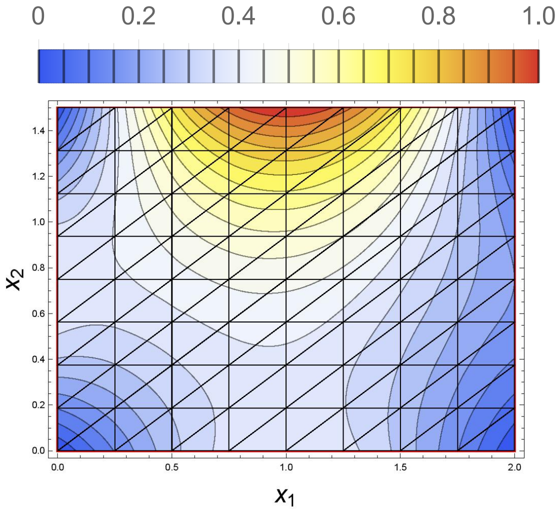
Obr. 4.13: Riešenie modelovej úlohy so sieťou tvorenou 32 elementami.



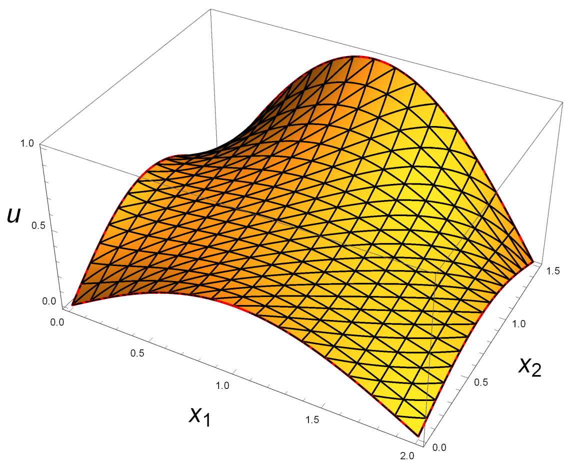
Obr. 4.14: Graf s vrstevnicami riešenia modelovej úlohy so sieťou tvorenou 32 elementami.



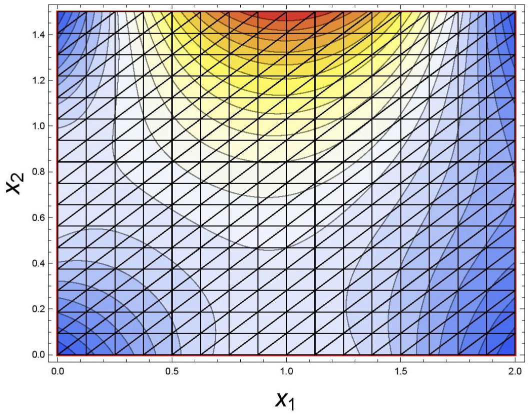
Obr. 4.15: Riešenie modelovej úlohy so sieťou tvorenou 128 elementami.



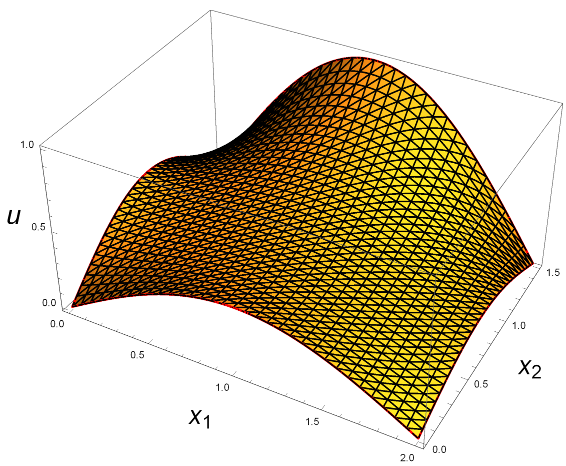
Obr. 4.16: Graf s vrstevnicami riešenia modelovej úlohy so sieťou tvorenou 128 elementami.



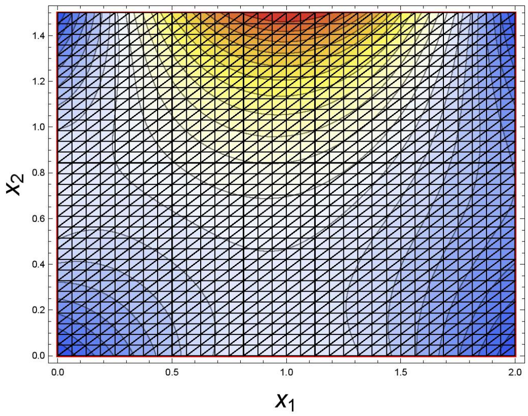
Obr. 4.17: Riešenie modelovej úlohy so sieťou tvorenou 512 elementami.



Obr. 4.18: Graf s vrstevnicami riešenia modelovej úlohy so sieťou tvorenou 512 elementami.



Obr. 4.19: Riešenie modelovej úlohy so sieťou tvorenou 2048 elementami.



Obr. 4.20: Graf s vrstevnicami riešenia modelovej úlohy so sieťou tvorenou 2048 elementami.

4.1.1 Skúmanie chýb metódy a experimentálneho rádu konvergencie

V metóde konečných prvkov sa môže riešenie úlohy od presného riešenia líšiť v závislosti od rôznych druhov chýb. Jednou z nich je diskretizačná chyba, ktorú sme už komentovali v kapitole 3.1, v našom modelovom prípade k nej však nedochádza z dôvodu presnej aproximácie oblasti Ω, pozri obr. 4.3 až 4.8 a preto sa jej v tejto časti nebudeme bližšie venovať.

Druhým typom chýb sú numerické chyby a to napríklad chyby spôsobené výpočtami v počítači, kde dochádza k zaokrúhľovacím chybám, ktoré sa prenášajú do ďalších výpočtov. Ďalšími z numerických chýb sú chyby spôsobené numerickým počítaním integrálov.

Tretí typ, ktorému sa budeme venovať, je chyba spôsobená aproximáciou riešenia. Celkové riešenie $u(x)$ totiž aproximujeme pomocou funkcie $u_h(x)$, ktorá vyjadruje diskretizované riešenie, a teda

$$u(x) \approx u_h(x) = \sum_{e=1}^{N} \sum_{i=1}^{6} u_i^e \psi_i^e(x),$$

kde N je počet elementov siete. Touto aproximáciu sa dopúšťame chyby, ktorú budeme sledovať a počítame ju ako rozdiel presného a diskrétneho riešenia

$$\varepsilon(x) = u(x) - u_h(x). \tag{4.1}$$

Experimentálny rád konvergencie metódy skúmame dvomi spôsobmi a to prostredníctvom *chyby v energetickej norme* a *chyby v L_2 norme*. Označíme ho EOC (*Experimental Order of Convergence*) a počítame ho pomocou

$$EOC = \log_2 \left(\frac{ch_i}{ch_{i+1}} \right),$$

kde ch_i označujú už vypočítané chyby v jednej z použitých noriem pre $i = 1, \dots, 5$.

Chyba v energetickej norme

Energetický skalárny súčin dvoch funkcií $v(x)$ a $w(x)$, označeným $(v, w)_A$ vypočítame pomocou

$$(v, w)_A = \int_\Omega \mu \nabla v \cdot \nabla w \, dx.$$

Energetická norma funkcie v je norma indukovaná týmto skalárnym súčinom

$$(v, v)_A = \int_\Omega \mu (\nabla v)^2 \, dx = ||v||_A^2,$$

a teda

$$||v||_A = \left(\int_\Omega \mu (\nabla v)^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Energetickú normu teraz vieme aplikovať na (4.1) a dostávame

$$||\varepsilon||_A = \sqrt{\int_\Omega \mu\big(\nabla u(x) - \nabla u_h(x)\big)^2 \, dx}.$$

Chyba v L_2 norme

Definíciu priestoru L_2 čerpáme z knihy [1]. Priestorom $L_2(G)$ nazývame priestor funkcií $v(x)$ takých, že sú v priestore G integrovateľné s druhou mocninou a teda takých funkcií $v(x)$, pre ktoré existujú a sú konečné integrály

$$\int_G v(x)\, dx, \qquad \int_G v(x)^2\, dx.$$

Skalárny súčin funkcií v a w v priestore $L_2(G)$ je definovaný integrálom

$$(v, w)_{L_2} = \int_G v\, w\, dx$$

a z toho norma

$$||v||_{L_2} = \sqrt{(v, v)_{L_2}} = \sqrt{\int_G v^2\, dx}.$$

Po aplikácii na (4.1) získame

$$||\varepsilon||_{L_2} = \sqrt{\int_\Omega (u(x) - u_h(x))^2\, dx}.$$

Výpočet a vyhodnotenie výsledkov

Očakávame, že MKP bude mať pre kvadratické elementy v L_2 norme presnosť rádu 3 a v energetickej norme presnosť rádu 2, tieto údaje môžme nájsť napríklad v [4]. Po testovaní pomocou voľby stále vyššieho počtu elementov v smeroch osi x_1 aj x_2 sme získali riešenia modelového príkladu, zobrazené na obr. 4.9 až 4.20. Výsledky výpočtov chýb aj rádu presnosti v oboch normách sú uvedené v tabuľke č. 4.1. Môžme v nej vidieť, že so zjemňovaním siete sa aj chyba riešenia naozaj zmenšuje. Pri L_2 norme sa chyba pri zjemnení siete zmenšuje približne tretím rádom, teda $2^3 = 8$-násobne. Experimentálny rád presnosti, označený v tabuľke ako L_2 EOC sa teda blíži k očakávanej hodnote.

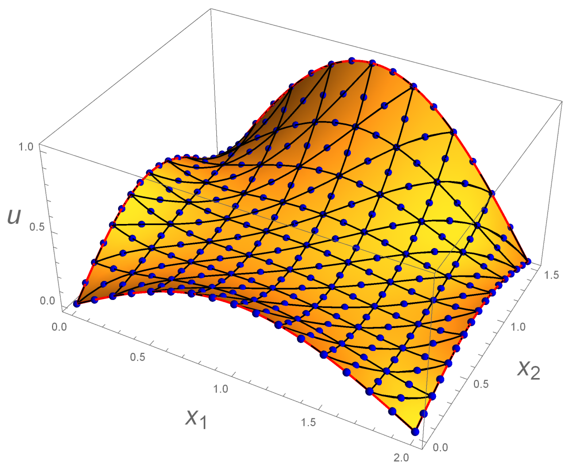
Podobne môžme sledovať výsledky v energetickej norme, kde sa so zjemňovaním siete chyba zmenšuje približne druhým rádom a teda $2^2 = 4$-násobne, čo môžme dobre vidieť v stĺpci označenom Energ. EOC, v ktorom je vypočítaný experimentálny rád konvergencie, ktorý sa taktiež blíži k očakávanej hodnote.

Tabuľka 4.1: Tabuľka zobrazuje výsledky výpočtov L_2 a energetickej normy chyby a experimentálny rád konvergencie metódy v L_2 a energetickej norme pre rôzny počet uzlových bodov n a počet elementov N.

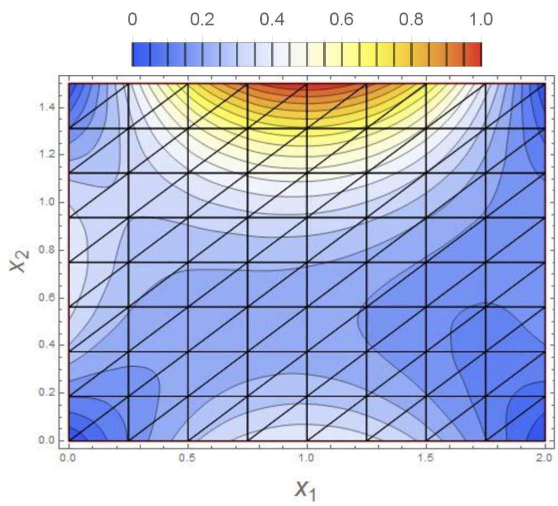
nx_1	nx_2	n	N	L_2 chyba	L_2 EOC	Energ. chyba	Energ. EOC
1	1	9	2	0.2577		0.9596	
2	2	25	8	0.03531	2.8676	0.2940	1.7064
4	4	81	32	0.004413	3.0003	0.07816	1.9113
8	8	289	128	0.0005473	3.0111	0.01989	1.9742
16	16	1089	512	0.00006821	3.0042	0.004997	1.9930
32	32	4225	2048	0.000008520	3.0011	0.001250	1.9982

4.1.2 Pridanie zaťaženia vonkajšou silou

V modelovom príklade teraz uvažujme pôsobenie vonkajšej sily. Zvolíme teda intenzitu vonkajších síl $f(x_1, x_2) = -1\,\mathrm{N\,m^{-2}}$. Algoritmus MKP v tomto prípade samozrejme prebieha rovnako, len s tým rozdielom, že vektor lokálnej pravej strany teraz nie je rovný nule a tak okrem matice K_{ij}^e musíme v tomto prípade počítať aj integrály f_i^e taktiež definované v (3.6). Po týchto výpočtoch pokračujeme ďalej, až vyriešime systém a získame výsledné riešenie zobrazené na obr. 4.21 a 4.22, na nich môžme sledovať vplyv vonkajších síl, a teda že membrána je v porovnaní s riešením modelového príkladu bez zaťaženia teraz preliačená.



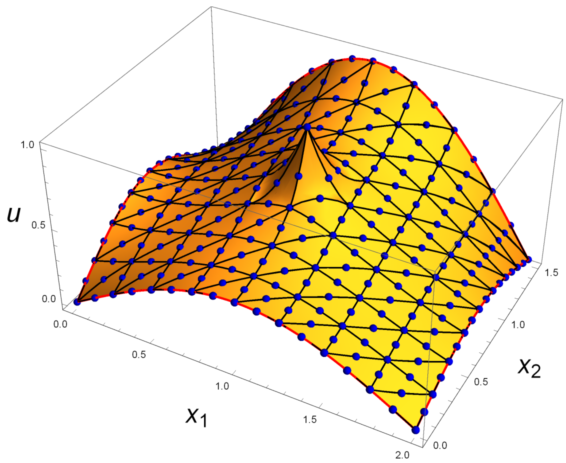
Obr. 4.21: Riešenie modelového príkladu zaťaženého vonkajšou silou.



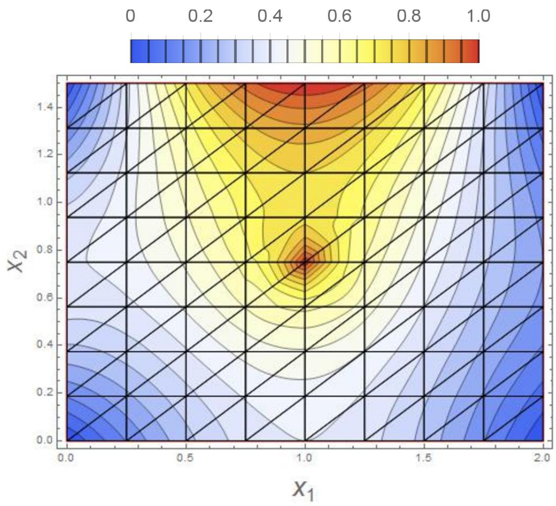
Obr. 4.22: Graf s vrstevnicami riešenia modelového príkladu zaťaženého vonkajšou silou.

4.1.3 Pridanie stĺpa

Ako ďalšiu ukážku na modelovom príklade zvolíme membránu podopretú v jednom mieste stĺpom. Pôsobenie vonkajších síl neuvažujeme, a teda $f(x_1, x_2) = 0\,\mathrm{N\,m^{-2}}$. Ukotvenie stĺpa bude v strede membrány, a teda v bode so súradnicami $S = \left(a_1 + \frac{h_1}{2}, b_1 + \frac{h_2}{2}\right)$ vo výške 1 m. Rozdielom vo výpočtoch bude zahrnutie Dirichletovej podmienky v mieste upevnenia stĺpu. V globálnom systéme rovníc sa teda objaví zmena v rovnici prislúchajúcej uzlovému bodu S. Pravá strana bude rovná výške 1 m a na ľavej strane, v matici tuhosti, budú v prislúchajúcom riadku všade nuly okrem jednotky na diagonále. Po vyriešení systému rovníc získame riešenie zobrazujúce priehyb membrány podopretej jedným stĺpom, pozri obr. 4.23 a 4.24.



Obr. 4.23: Riešenie modelového príkladu podopretého stĺpom v strede membrány do výšky 1 m.



Obr. 4.24: Graf s vrstevnicami riešenia modelového príkladu podopretého stĺpom v strede membrány do výšky 1 m.

4.2 Modelovanie reálnych konštrukcií

V tejto časti sa budeme venovať modelovaniu reálnych konštrukcií. V časti 4.2.1 popíšeme a namodelujeme reálnu konštrukciu stanu, nazvaného Kayam, konštruovaného firmou Kayam [5] a následne v časti 4.2.2 navrhneme membránovú konštrukciu použitú na prekrytie pódia.

4.2.1 Stan podopretý stĺpmi

Reálna konštrukcia v tomto prípade predstavuje stan Kayam, ktorý sa každoročne objavuje aj na festivale Pohoda, zobrazený je na obrázkoch z festivalu 4.25 a 4.26. Technické údaje stanu sme čerpali z [6] a [7].

Pôdorys stanu má tvar štvorca so stranou dlhou $a = 40\,\mathrm{m}$. Membrána je vytvorená z materiálu Valmex FR700 Universal, ktorého plošná hustota je $\rho_S = 0.69\,\mathrm{kg\,m^{-2}}$. Tuhosť membrány uvažujeme $\mu(x_1, x_2) = 2000\,\mathrm{N\,m^{-1}}$. Gravitačné zrýchlenie sa v oblasti

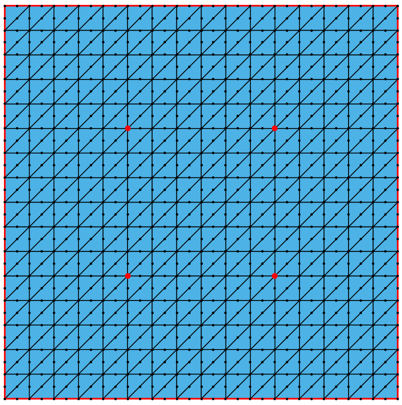
Obr. 4.25: Prvá ukážka Kayam stanu od firmy Kayam z festivalu Pohoda [15].

Obr. 4.26: Druhá ukážka Kayam stanu od firmy Kayam z festivalu Pohoda [16].

Slovenskej republiky udáva na $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$. Intenzitu vonkajších síl vieme vypočítať ako $f(x_1, x_2) = -\rho_S\, g = -6.7689\,\mathrm{N\,m^{-2}}$. V tomto prípade prestavuje vlastnú tiaž membrány.

Okrajové podmienky sú definované ako výška ukotvenia na okrajoch konštrukcie membrány v metroch a teda

$$
\begin{aligned}
g(x_1, 0) &= 4.5, \quad x_1 \in [0, a],\\
g(a, x_2) &= 4.5, \quad x_2 \in [0, a],\\
g(x_1, a) &= 4.5, \quad x_1 \in [0, a],\\
g(0, x_2) &= 4.5, \quad x_2 \in [0, a].
\end{aligned}
$$

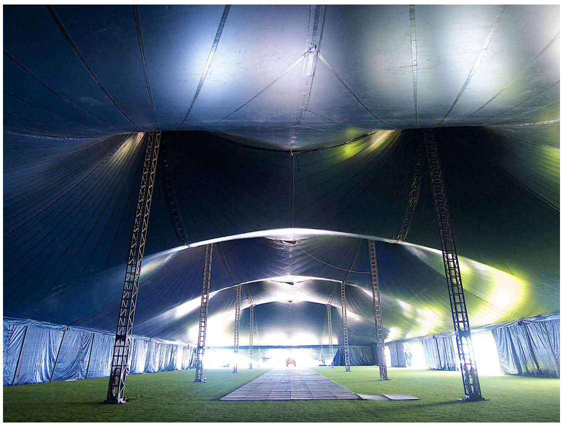


Obr. 4.27: Sieť tvorená 512 elementami pre model Kayam stanu

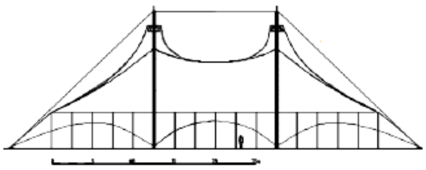
Reálnu konštrukciu modelujeme vytvorením 256 rovnako veľkých štvorcov (v každom smere tvoríme 16 štvorcov) so stranou dlhou 2.5 m, každý z nich následne rozdelíme diagonálne na dva trojuholníky a pridáme uzlové body do stredov strán jednotlivých trojuholníkov. Vznikne nám tak sieť tvorená 512 elementami zobrazená na obr. 4.27.

Po vytvorení siete pridáme Dirichletove okrajové podmienky do 4 miest, v ktorých sa nachádzajú stĺpy reálnej konštrukcie, teda do bodov so súradnicami $(12.5, 12.5)$, $(27.5, 12.5)$, $(12.5, 27.5)$, $(27.5, 27.5)$, na obr. 4.27 sú zobrazené červenou farbou. Ako výšku upevnenia na stĺpy zadáme 15 m. Vyriešime úlohu a získame riešenie zobrazené na obr. 4.32, 4.33, 4.36, 4.37 a 4.39. Pre porovnanie výsledkov si všimnime miesta upevnenia hlavných stĺpov v reálnom stane na obr. 4.28 a 4.29 a v nami vytvorenom modeli na obr. 4.32. Spôsob a miesta uchopenia bočných stĺpikov reálneho stanu môžme vidieť na obr. 4.30 a 4.31, uchopenie v modeli zobrazuje obr. 4.33. Podľa obrázkov 4.34 až 4.39 vidíme, že namodelovaný stan má tvar veľmi blízky reálnej konštrukcii, v okolí stĺpov však nie je úplne presný. Aj napriek tomu ale môžme skonštatovať, že model dáva uspokojivé výsledky. Presnejšie riešenie by sme však mohli získať zahrnutím Dirichletovej podmienky na kružnici okolo bodu upevnenia stĺpa. Firma Kayam napríklad využíva upevňovacie obruče, na ktoré je membrána prichytená, pozri obr. 4.31.

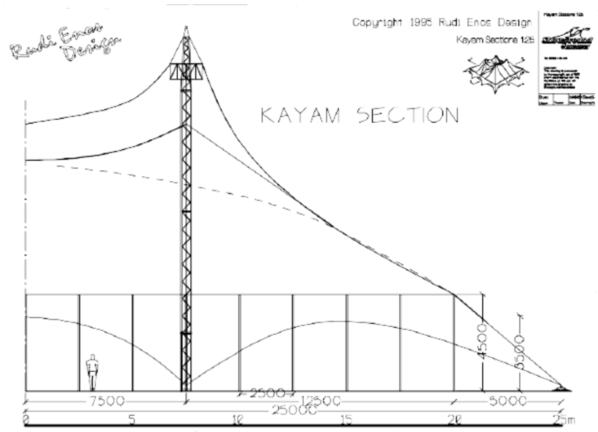
Obr. 4.28: Ilustračný obrázok umiestnenia hlavných stĺpov v Kayam stane, ktorý je však väčší ako náš vzor, pohľad č.1 [5].



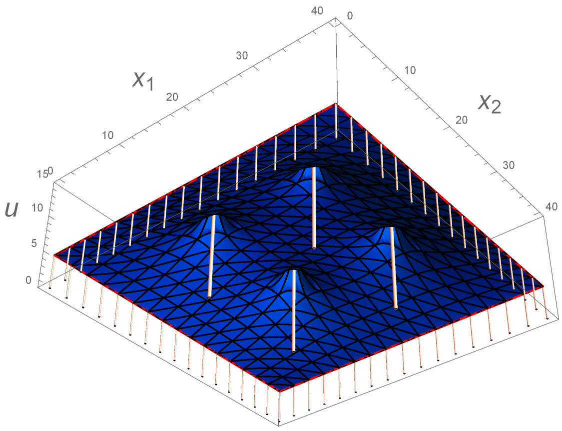
Obr. 4.29: Ilustračný obrázok umiestnenia hlavných stĺpov v Kayam stane, ktorý je však väčší ako náš vzor, pohľad č.2 [5].



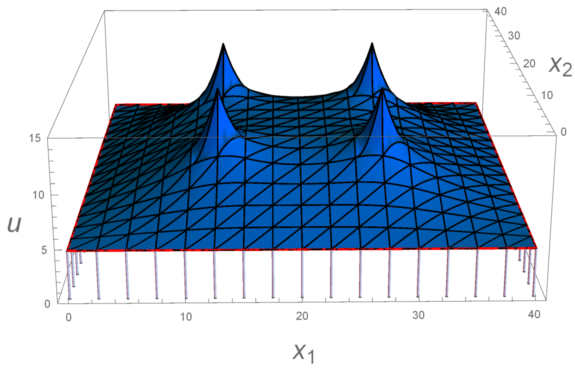
Obr. 4.30: Umiestnenie bočných stĺpikov v Kayam stane, pohľad č.1.



Obr. 4.31: Rozmery a umiestnenie bočných stĺpikov v Kayam stane, pohľad č.2.



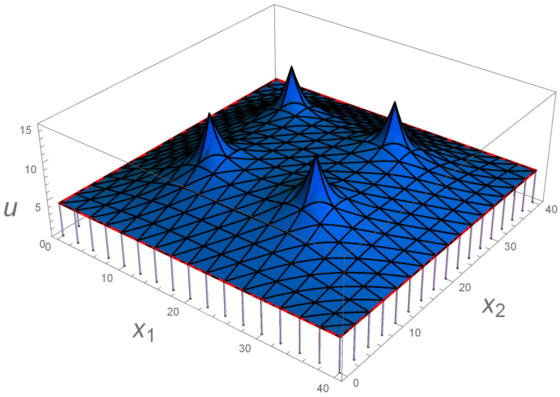
Obr. 4.32: Umiestnenie hlavných stĺpov v modeli Kayam stanu.



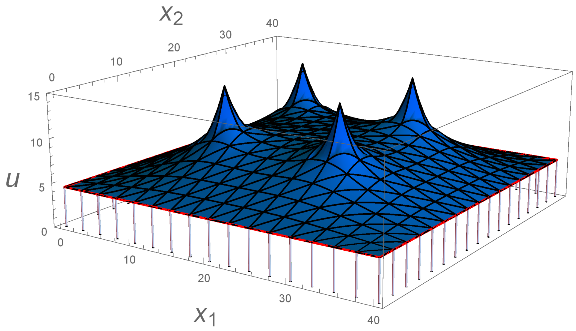
Obr. 4.33: Umiestnenie bočných stĺpikov v modeli Kayam stanu.

Obr. 4.34: Reálna konštrukcia Kayam stanu, vrchný pohľad [13].

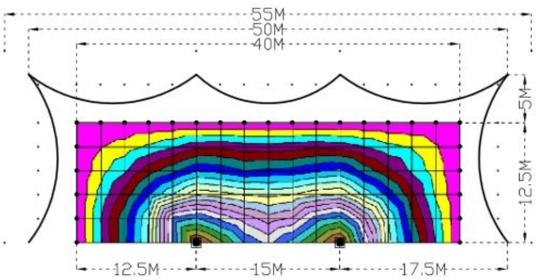
Obr. 4.35: Reálna konštrukcia Kayam stanu, bočný pohľad [14].



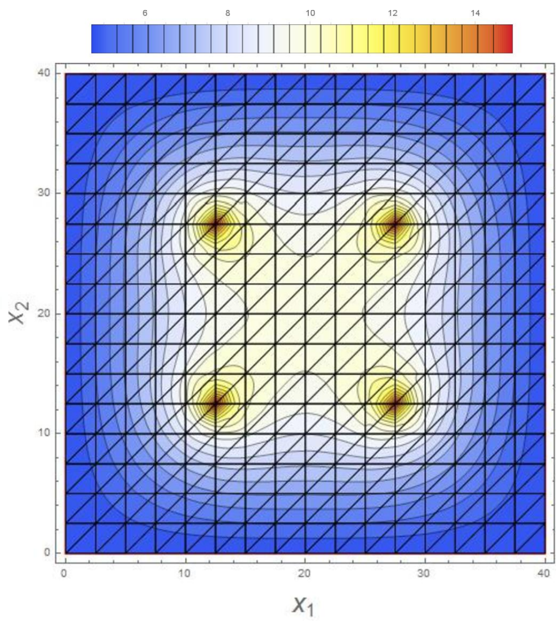
Obr. 4.36: Riešenie úlohy modelovania Kayam stanu, vrchný pohľad.



Obr. 4.37: Riešenie úlohy modelovania Kayam stanu, bočný pohľad.



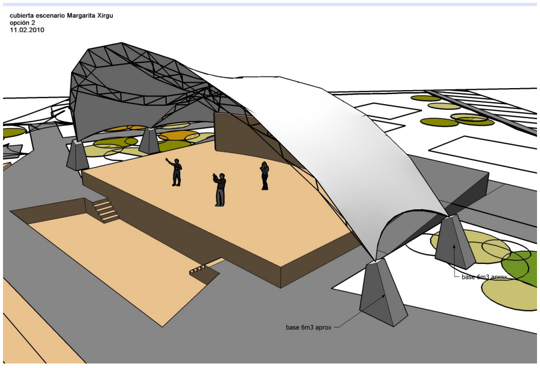
Obr. 4.38: Výškové údaje Kayam stanu [6].



Obr. 4.39: Graf s vrstevnicami riešenia úlohy Kayam stanu.

4.2.2 Strecha pódia s pôdorysom s krivočiarou hranicou

V tejto časti navrhneme membránové zastrešenie pódia, ktoré nemá hranicu tvorenú rovnými čiarami. Inšpiráciou nám boli konštrukcie zobrazené na obr. 4.40 a 4.41.



Obr. 4.40: Jeden z návrhov amfiteátru v Uruguaji [18].

Obr. 4.41: Divadlo v parku Zuiderpark v meste Haag [19].

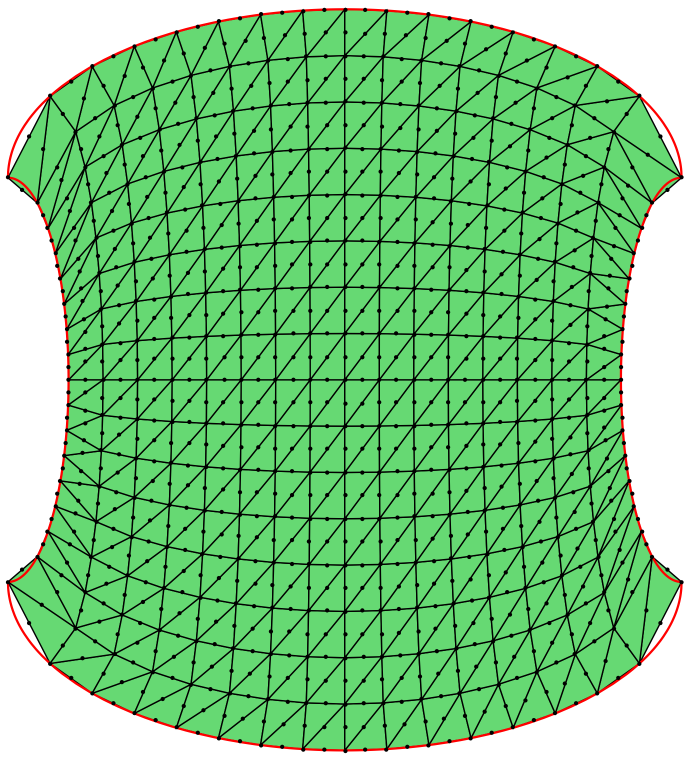
Volíme rozmery podobné rozmerom použitým v konštrukcii vonkajšieho divadla v parku Zuiderpark v Holandskom meste Haag od firmy Poly-Ned [9]. Vzdialenosti rohových bodov zastrešenia sú nasledovné, šírka $h_1 = 25\,\mathrm{m}$ a výška $h_2 = 15\,\mathrm{m}$. Hraničné krivky pôdorysu vieme vyjadriť parametricky

$$
\begin{aligned}
c_1(t) &= \left(t, -0.5\sqrt{\left(\frac{h_1}{2}\right)^2 - \left(t - \frac{h_1}{2}\right)^2}\right), && t \in [0, h_1],\\
c_2(t) &= \left(25 - 0.3\sqrt{\left(\frac{h_2}{2}\right)^2 - \left(t - \frac{h_2}{2}\right)^2}, t\right), && t \in [0, h_2],\\
c_3(t) &= \left(t, 15 + 0.5\sqrt{\left(\frac{h_1}{2}\right)^2 - \left(t - \frac{h_1}{2}\right)^2}\right), && t \in [0, h_1],\\
c_4(t) &= \left(0.3\sqrt{\left(\frac{h_2}{2}\right)^2 - \left(t - \frac{h_2}{2}\right)^2}, t\right), && t \in [0, h_2].
\end{aligned}
$$

Volíme membránu vytvorenú z materiálu Valmex FR700 Universal, ktorá bola použitá aj na tvorbu Kayam stanu v časti 4.2.1 a teda jej charakteristiky čerpáme z [7]. Gravitačné zrýchlenie uvažujeme $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, plošnú hustotu membrány nastavíme na $\rho_S = 0.69\,\mathrm{kg\,m^{-2}}$. Ďalšími vstupnými údajmi sú konštantná tuhosť membrány $\mu(x_1, x_2) = 2000\,\mathrm{N\,m^{-1}}$ a intenzita síl $f(x_1, x_2) = -\rho_S\, g = -6.7689\,\mathrm{N\,m^{-2}}$, v ktorej zahŕňame vlastnú tiaž membrány. Ďalej definujeme okrajové podmienky

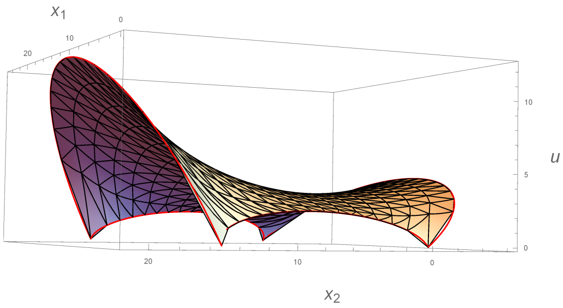
$$\begin{aligned}
g(x_1,0) &= 0.4\sqrt{\left(\frac{h_1}{2}\right)^2-\left(x_1-\frac{h_1}{2}\right)^2}, \quad x_1\in[0,h_1],\\
g(h_1,x_2) &= 0.3\sqrt{\left(\frac{h_2}{2}\right)^2-\left(x_2-\frac{h_2}{2}\right)^2}, \quad x_2\in[0,h_2],\\
g(x_1,h_2) &= \sqrt{\left(\frac{h_1}{2}\right)^2-\left(x_1-\frac{h_1}{2}\right)^2}, \quad x_1\in[0,h_1],\\
g(0,x_2) &= 0.3\sqrt{\left(\frac{h_2}{2}\right)^2-\left(x_2-\frac{h_2}{2}\right)^2}, \quad x_2\in[0,h_2].
\end{aligned}$$

Vytvoríme sieť 256 obdĺžnikov, ktoré diagonálne rozdelíme na 512 elementov a vytvoríme sieť zobrazenú na obr. 4.42, jej maximálna šírka je 25 m a maximálna výška je 27.5 m.

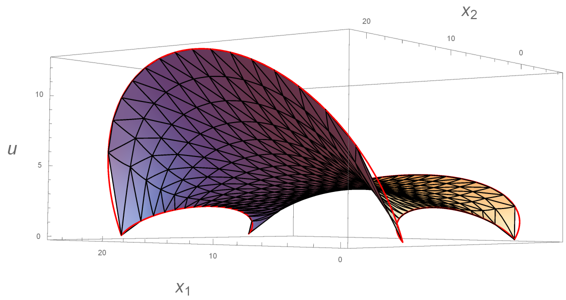


Obr. 4.42: Sieť 512 elementov pre navrhnutý model prekrytia pódia.

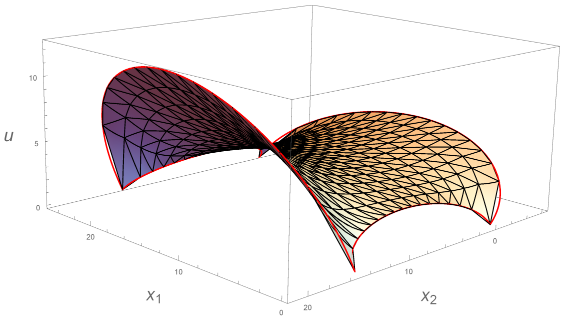
Po vyriešení úlohy dostávame riešenia zobrazené na obr. 4.43 až 4.48. Z týchto riešení vidíme, že naša implementácia MKP funguje aj na sieťach s krivočiarymi hranicami a nepravidelnou sieťou. V tomto prípade je však väčšia diskretizačná chyba, čo môžme vidieť na obr.4.42, tá by sa však v tomto prípade dala zmenšiť voľbou viacerých elementov, či elementov s krivočiarymi hranami.



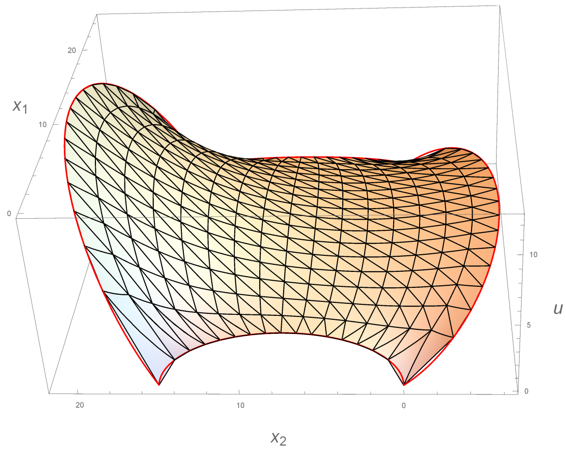
Obr. 4.43: Prekrytie pódia zaťažené vlastnou tiažou, pohľad č.1.



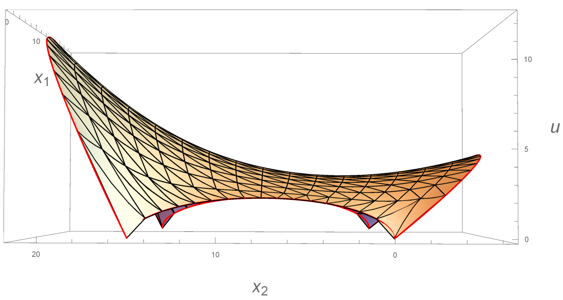
Obr. 4.44: Prekrytie pódia zaťažené vlastnou tiažou, pohľad č.2.



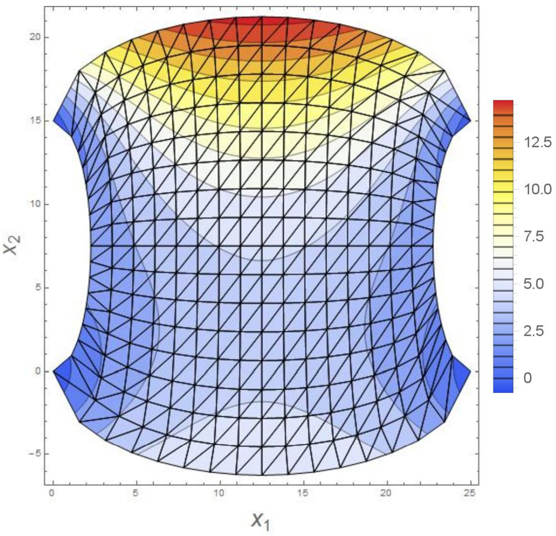
Obr. 4.45: Prekrytie pódia zaťažené vlastnou tiažou, pohľad č.3.



Obr. 4.46: Prekrytie pódia zaťažené vlastnou tiažou, pohľad č.4.



Obr. 4.47: Prekrytie pódia zaťažené vlastnou tiažou, pohľad č.5.



Obr. 4.48: Prekrytie pódia zaťažené vlastnou tiažou, graf s vrstevnicami.

Kapitola 5

Záver

Cieľom práce, bolo popísať algoritmus MKP a použiť ho v programoch naprogramovaných v softvéri Wolfram Mathematica. Najskôr bolo cieľom použiť program na riešenie modelového príkladu membrány a ukázať na ňom vplyv zaťaženia a podopretia stĺpom v jednom bode. Ďalšou úlohou bolo použiť program na modelovanie reálnych konštrukcií. V prvom prípade to bol stan podopretý stĺpmi a v druhom prípade návrh zastrešenia pódia s pôdorysom s krivočiarymi hranami.

V práci sme najprv v kapitole 2 vytvorili matematický model úlohy priehybu membrány a odvodili teda diferenciálnu rovnicu (2.14).

Následne sme v kapitole 3 podrobne popísali algoritmus MKP s použitím kvadratických trojuholníkových elementov, ktorý sme potom v kapitole 4 použili pri riešení modelového príkladu a reálnych konštrukcií.

V prípade modelového príkladu sme ukázali spresňovanie výsledku použitím vyššieho počtu elementov, čo sa ukázalo aj na analýze chýb metódy. V nej sme očakávali, že MKP bude mať v L_2 norme rád konvergencie rovný 2 a v energetickej norme rád konvergencie rovný 3. Tieto očakávania sa nám výpočtami aj potvrdili (pozri tabuľku 4.1).

Ďalej v časti 4.2.1 sme namodelovali konštrukciu veľkoplošného stanu. Po porovnaní s fotografiami reálnych konštrukcií bolo vidieť, že výsledné riešenie modelu sa vizuálne blížilo k obrázkom reálnych stanov. Malé rozdiely boli viditeľné iba v okolí upevnenia stĺpov. Tieto odchýlky mohli byť spôsobené zvolením Dirichletovej podmienky a teda presnej výšky membrány iba v jednotlivých bodoch. V reálnych konštrukciách je totiž membrána upevňovaná v kružnicovom okolí bodu ukotvenia (firma Kayam [5] napríklad membránu upevňuje na obruče umiestnené v okolí bodov ukotvenia stĺpov), čo má vplyv na tvar membrány medzi týmito štyrmi stĺpmi. V tejto práci sme tiež neuvažovali rôzne zaťaženia, ako napríklad vplyv snehu na priehyb membrány. To by ale bolo možné iba pri zvolení nekonštantnej tuhosti membrány $\mu(x_1, x_2)$, ktorá by bola závislá aj od riešenia u. V okolí stĺpov, kde riešenie rýchlo rastie je totiž napnutie membrány väčšie a teda aj jej tuhosť tam musí byť vyššia.

V poslednej časti 4.2.2 sme navrhli zastrešenie pódia, ktorého pôdorys má krivočiare hrany. Inšpiráciou boli už existujúce reálne konštrukcie. Nami vytvorený model sa správal podľa očakávaní a teda membrána vizuálne pripomínala tvar s minimálnou plochou. Riešenie ukázalo, že naša implementácia MKP funguje aj na oblastiach s krivočiarymi hranami aj na nepravidelných sieťach.

Literatúra

[1] A. Handlovičová and M. Tibenský. *Základy funkcionálnej analýzy a variačného počtu*. Slovenská technická univerzita v Bratislave, 2016.

[2] P. Kattan. *The Quadratic Triangular Element. In: MATLAB Guide to Finite Elements*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2008.

[3] S. Míka and A. Kufner. *Parciální diferenciální rovnice I.* SNTL - Nakladatelství technické literatury, 1983.

[4] J. N. Reddy. *An introduction to the finite element method, second edition*. McGraw-Hill, Inc., 1993.

[5] Kayam. kayam.co.uk. 26.04.2018.

[6] Kayam, roof heights. http://www.kayam.co.uk/wp-content/uploads/2014/02/Kayam-laser-height-survey.pdf. 26.04.2018.

[7] Kayam, technical manual. http://www.kayam.co.uk/wp-content/uploads/2014/02/Kayam_Technical_Manual.pdf. 26.04.2018.

[8] Partial diferential equations and Fourier methods. http://www.roe.ac.uk/japwww/teaching/fourier/fourier_lectures_part5.pdf. 28.04.2018.

[9] Poly-Ned, Zuiderparktheater Den Haag. http://polyned.com/portfolio-item/zuiderparktheater-den-haag/. 26.04.2018.

[10] Zepelin s.r.o. http://texarch.sk/etfe/. 29.04.2018.

[11] Obrázok, Allianz Arena v Mníchove. https://files1.structurae.de/files/350high/2768/dsc_0389.jpg. 29.04.2018.

[12] Obrázok, Eden Project Cornwall England. https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/f/f2/Eden_Project_geodesic_domes_panorama.jpg. 29.04.2018.

[13] Obrázok, Kayam stan. http://www.rudienosdesign.com/images/Kayam/Rudi_Enos_Design_Kayam_010.jpg. 28.04.2018.

[14] Obrázok, Kayam stan. http://www.rudienosdesign.com/images/Kayam/Rudi_Enos_Design_Kayam_001.jpg. 28.04.2018.

[15] Obrázok, Kayam stan z festivalu Pohoda. http://www.pluska.sk/thumb/images/gallery/regiony/2016/07/o_pohoda7.jpg?w=800&h=1000. 28.04.2018.

[16] Obrázok, Kayam stan z festivalu Pohoda. https://hudba.zoznam.sk/media/obrazky/magazin/galeria/96237/pohoda-2016.jpg. 28.04.2018.

[17] Obrázok, membránové zastrešenie pumpy v Bratislave. https://www.archinfo.sk/image-handler/26901/659282/gallery/box_38033/width_936/n%20%C2%BCS%20SLOVNAFT%2028%20DSC_6333.jpg. 29.04.2018.

[18] Obrázok, návrh amfiteátra v Uruguaji. https://i.pinimg.com/originals/42/cf/fc/42cffc31c2eba586a8913f5043595b16.jpg. 28.04.2018.

[19] Obrázok, Poly-Ned Zuiderparktheater Den Haag. http://polyned.com/wp-content/uploads/2015/03/137.jpg. 28.04.2018.