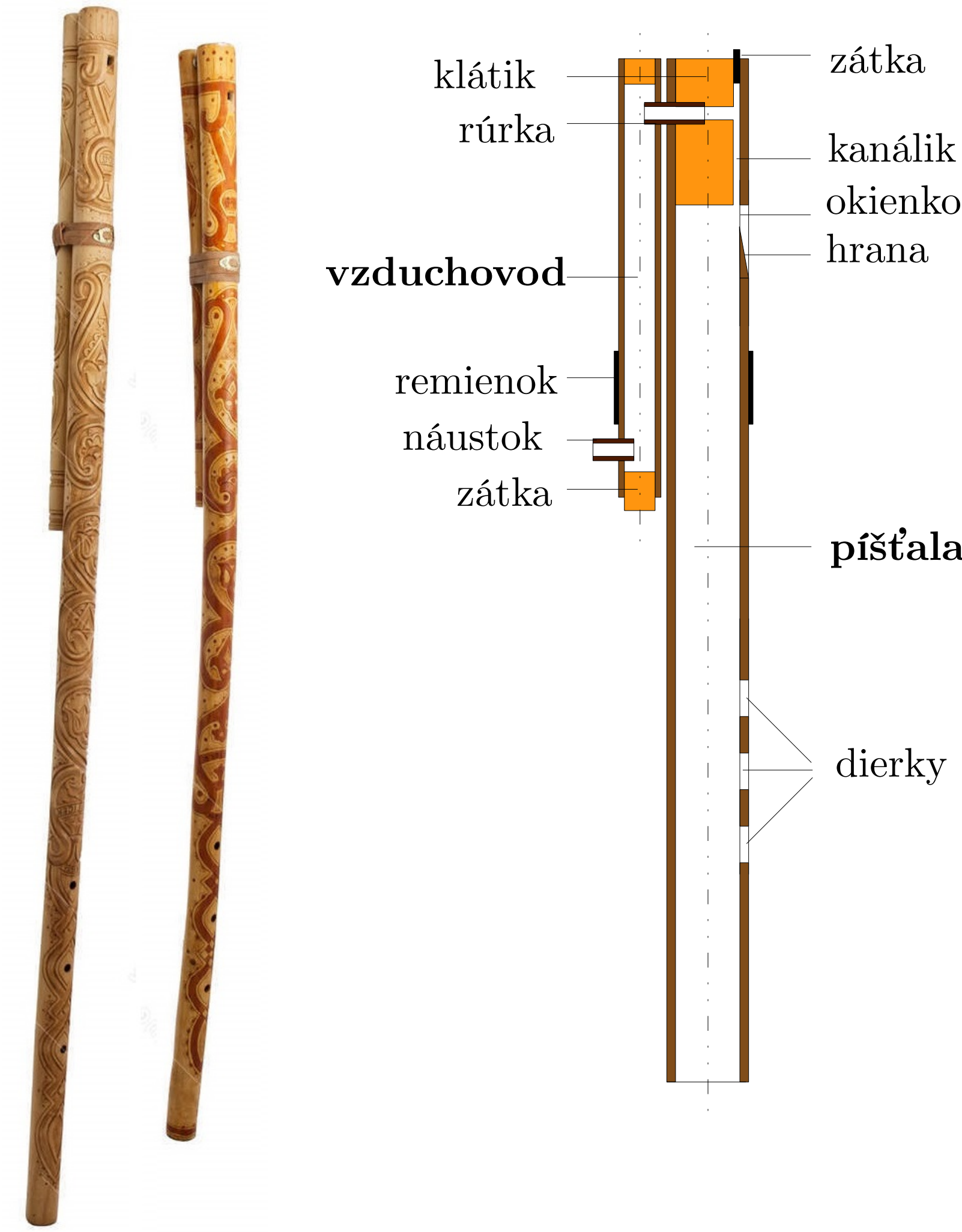


ANALÝZA VLASTNÝCH FREKVENCÍ DYCHOVÉHO HUDBNÉHO NÁSTROJA – FUJARY

Lukáš Tomek

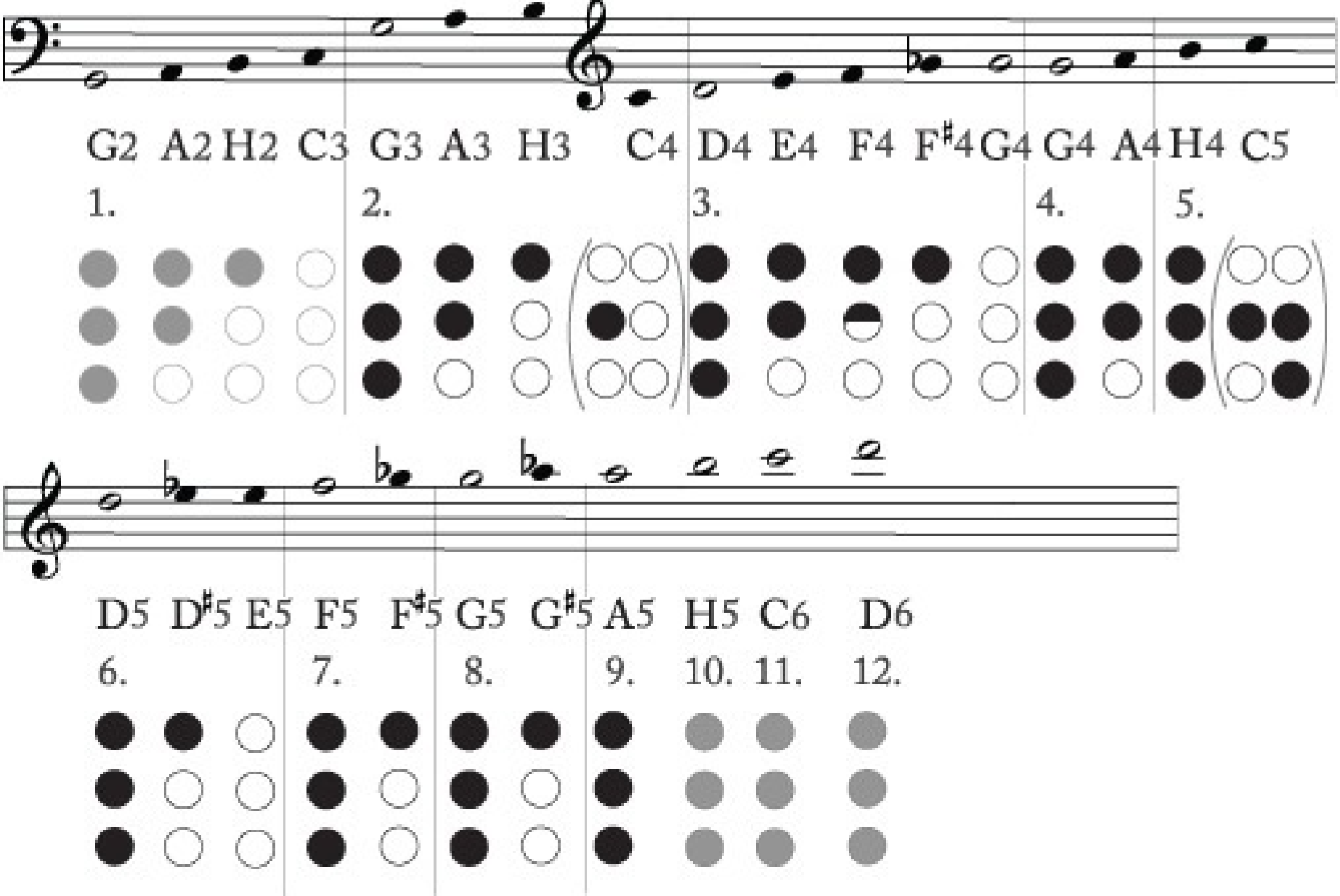
Čo je fujara

Fujara je tradičný slovenský ľudový nástroj. Skladá sa z dvoch trubic – hlavnej **píšťaly** a kratšieho **vzduchovodu**. Fujara patrí k nástrojom s veľkým obsahom **vyšších harmonických** frekvencií a so svojou dĺžkou (približne 175 cm pre typické ladenie G-dur) je **najdlhšou** píšťalou tohto druhu **na svete**. Svojou zvukovou originalitou a výzdobou má fujara na Slovensku postavenie „kráľovského“ hudobného nástroja. Je symbolom slovenského národa, jeho kultúry a ľudovej tradície. Od roku 2008 je fujara a jej hudba zapísaná na zozname nehmotného kultúrneho dedičstva ľudstva **UNESCO**.



Ukážky typických fujár a náčrt konštrukcie fujary.

Do fujary sa fúka cez náustok, vzduch prúdi vzduchovodom, rúrkou, kanálikom a dopadá na hranu, na ktorej sa „štiepi“ – striedavo prúdi von cez okienko a dnu do píšťaly, čím sa **rozkmítá vzduchový stĺpec** a vzniká **zvuk**. Fujara má **tri hmatové dierky** a dajú sa na nej zahrať dve kompletne oktávy v stupnici G-dur (15 tónov G3 až G5) a niekoľko ďalších tónov. **Výška tónu** sa ovplyvňuje **odkrývaním/zakrývaním** hmatových dierok a **silou fúkania**. Pri silnejšom fúknutí sa vo fujare vybudzujú **vyššie harmonické** frekvencie.



Prstoklady na pri hre na fujaru. Plný krúžok – zakrytá dierka, prázdny – odkrytá. Čísla označujú poradové číslo vyššej harmonickej.

Motivácia

Poloha dierok, ich veľkosť a všetky ostatné **rozмеры** fujary sa určujú podľa **empirických vzorcov** vytvorených na základe skúseností výrobcov fujár. Základnou motiváciou je vytvorenie modelu, ktorý pre **zadanú geometriu** fujary dokáže automaticky **vypočítať frekvencie** tónov používaných pri hre na fujaru. Takýto model by mohol byť v budúcnosti použitý na vytvorenie **optimálnej geometrie** zabezpečujúcej **presnejšie ladenie** nástroja.

Matematický model

V diplomovej práci analyzujeme kmitanie vzduchu vo fujare a mimo nej. Základnou rovnicou akustiky je **vlnová rovnica**

$$\partial_t^2 P - c^2 \Delta P = 0$$

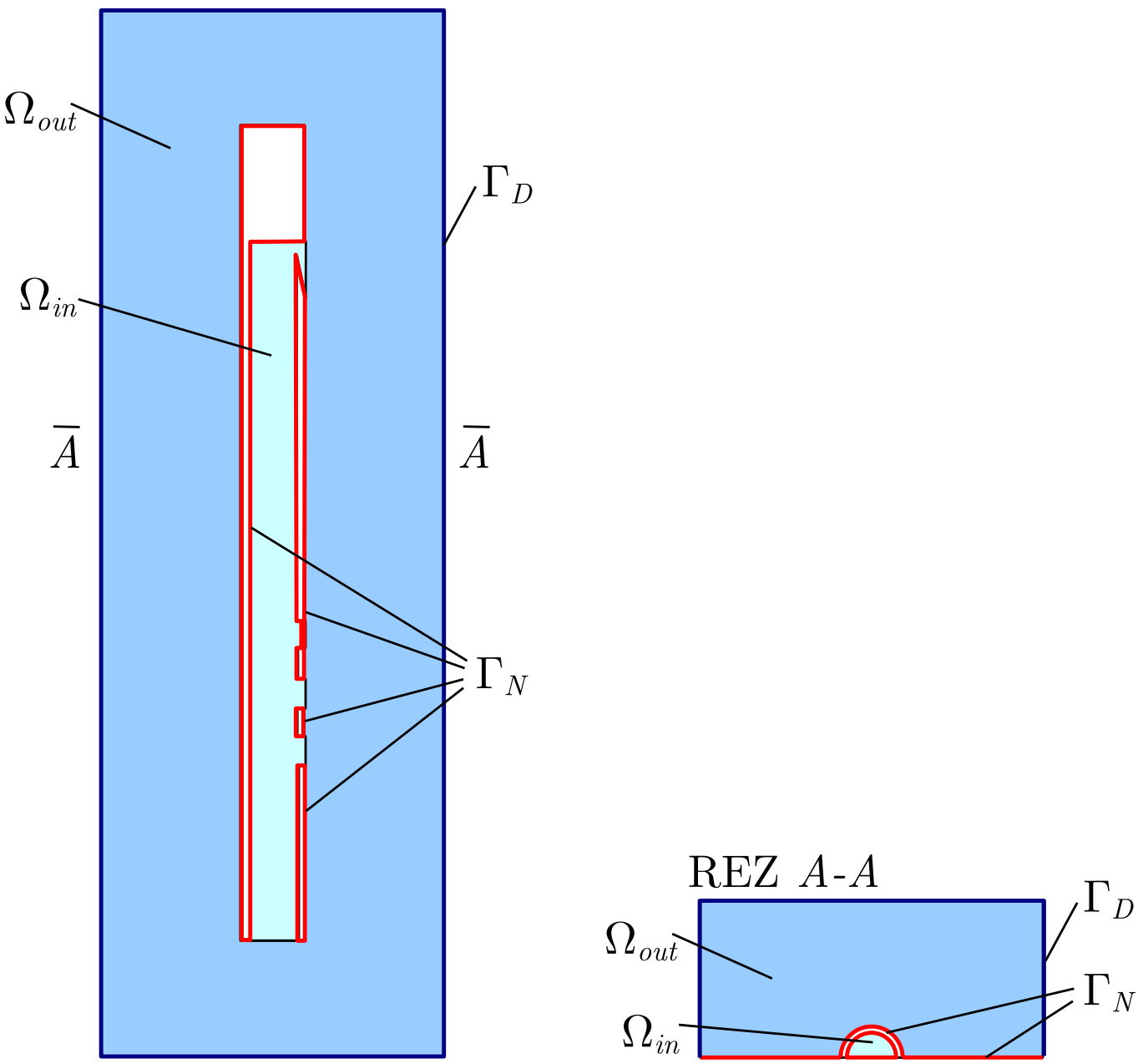
kde c je rýchlosť zvuku vo vzduchu. Neznámej funkcii $P(\mathbf{r}, t)$ sa hovorí **akustický tlak** (rozdiel tlaku voči atmosférickému tlaku). V akustike často hľadáme špeciálne riešenia, pri ktorých je časový priebeh akustického tlaku **harmonický**, čiže

$$P(\mathbf{r}, t) = p(\mathbf{r})e^{i\omega t}$$

Riešeniam tohto typu sa hovorí **stojaté vlny**. Vlnová rovnica vtedy prejde na tvar

$$\Delta p + \frac{c^2}{\omega^2} p = 0$$

ktorému sa hovorí **Helmholtzova rovnica**. Riešenia tejto rovnice sa nazývajú **módy**. Čísla ω sú vlastné kruhové frekvencie. **Vlastné frekvencie** sa počítajú ako $f = \frac{\omega}{2\pi}$. Analýzou viacerých geometrií sme dospeli záveru, že vhodným modelom je **rovná fujara bez vzduchovodu** a potrebný je **3D model so zahrnutím okolitého vzduchu**. Vďaka zrkadlovej **symetrii** fujary stačí modelovať len **polovicu** vzduchu. Helmholtzovu rovnicu riešime na oblasti $\Omega = \Omega_{in} \cup \Omega_{out}$, pričom Ω_{in} označuje vzduch vo fujare a Ω_{out} okolitý vzduch.



Náčrt výpočtovej oblasti a okrajových podmienok v 2D reze.

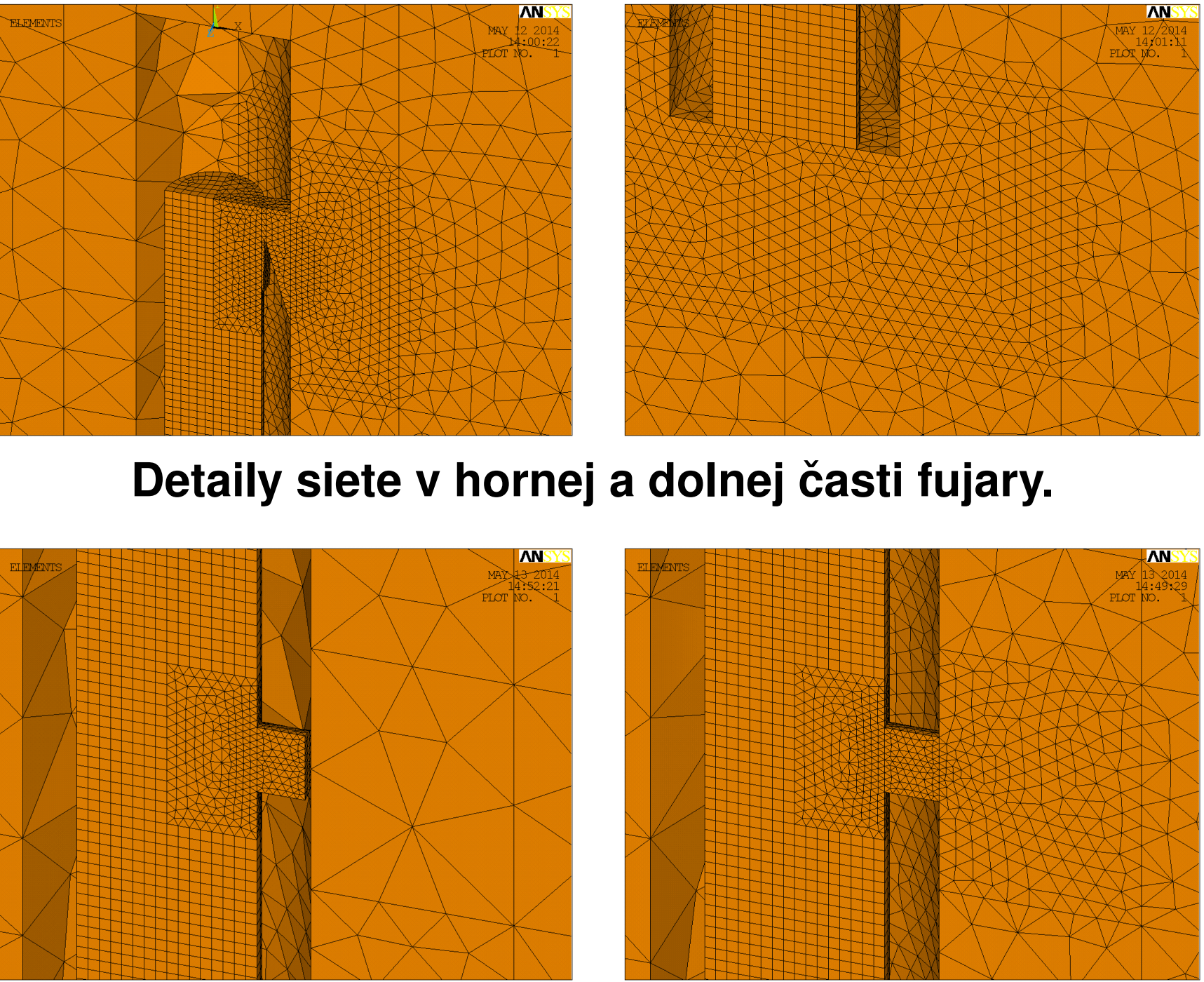
Na **vonkajšej hranici** Γ_D okolitého vzduchu je akustický tlak blízky nule, preto na nej predpisujeme **nulovú Dirichletovu** okrajovú podmienku. Na **stenách** sa v akustike predpisuje **nulová Neumannova** okrajová podmienka ($\mathbf{n}$ je vonkajšia normála ku hranici $\partial\Omega$).

$$\begin{aligned} p|_{\Gamma_D} &= 0 & \Gamma_D \\ (\mathbf{n} \cdot \nabla p)|_{\Gamma_N} &= 0 & \Gamma_N = \partial\Omega \setminus \Gamma_D \end{aligned}$$

Zakrývanie dierok realizujeme geometricky ich zaslepovaním.

Numerický výpočet frekvencií fujary

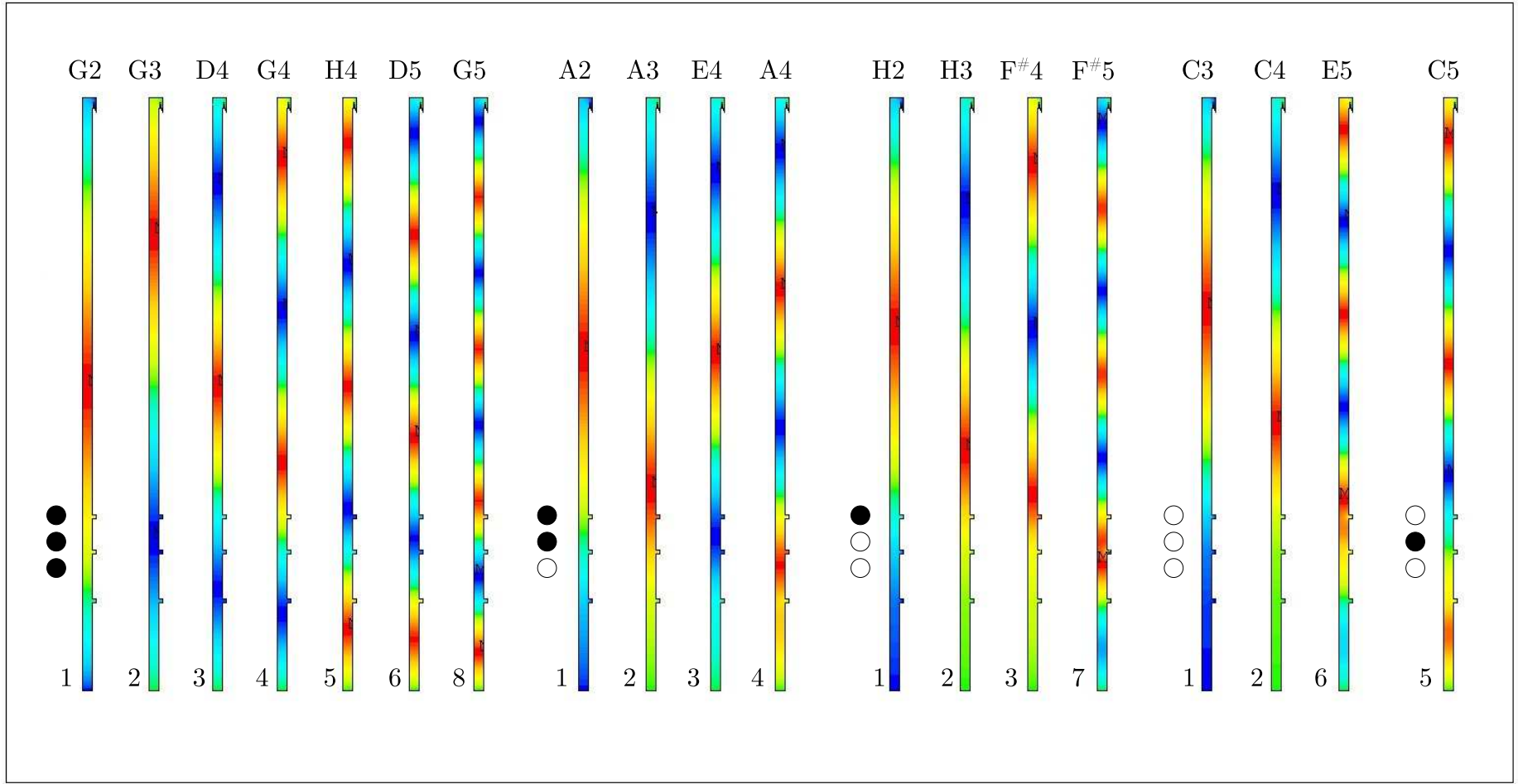
Model vzduchu vo fujare a okolitého vzduchu bol vytvorený v programe **ANSYS** Multiphysics založenom na **metóde konečných prvkov**. Na diskretizáciu geometrie sa použili akustické **prvky FLUID30**. Vytvorený model je plne automatizovaný. Na **vstupe** sa zadajú **rozмеры** a **rýchlosť zvuku** a program **automaticky** vypočíta všetky **frekvencie**.



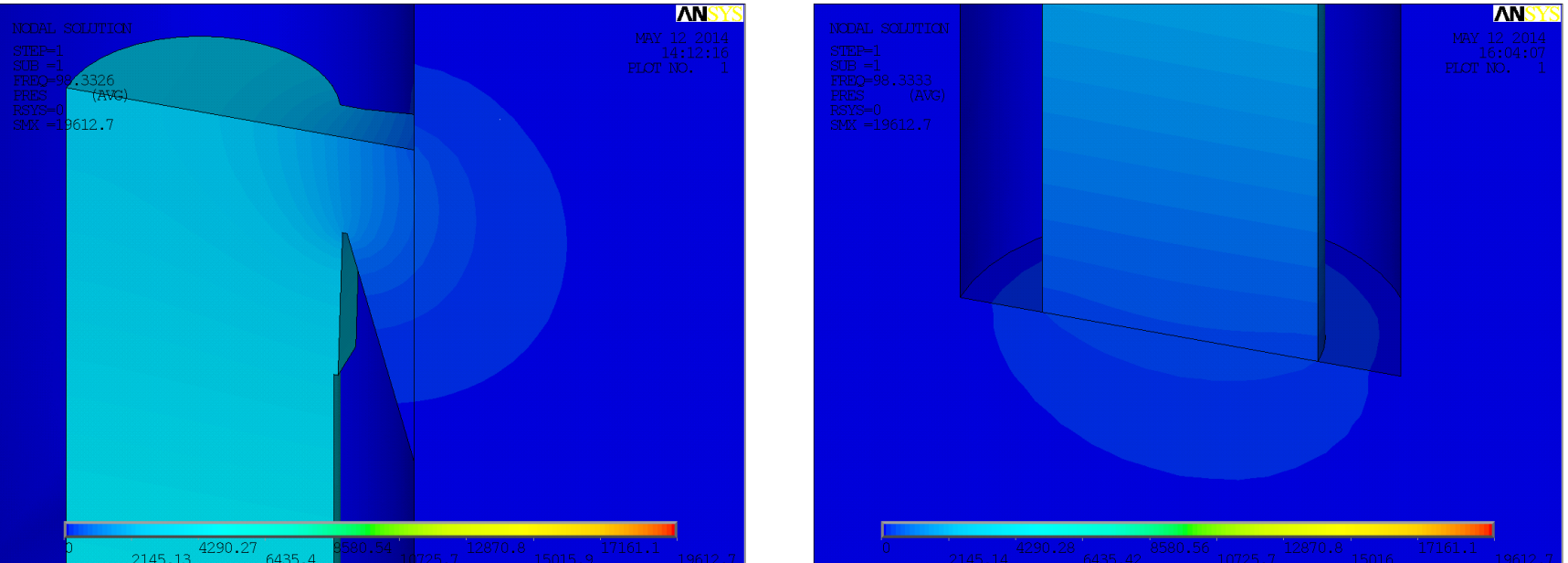
Detaily siete v hornej a dolnej časti fujary.

Detail siete pri odkrytej a zakrytej dierke.

Frekvencie boli počítané použitím **modálnej analýzy**. Skúmali sme 19 tónov: G2 až C3 (4 tóny) a 2 oktávy stupnice G-dur od G3 po G5 (15 tónov).



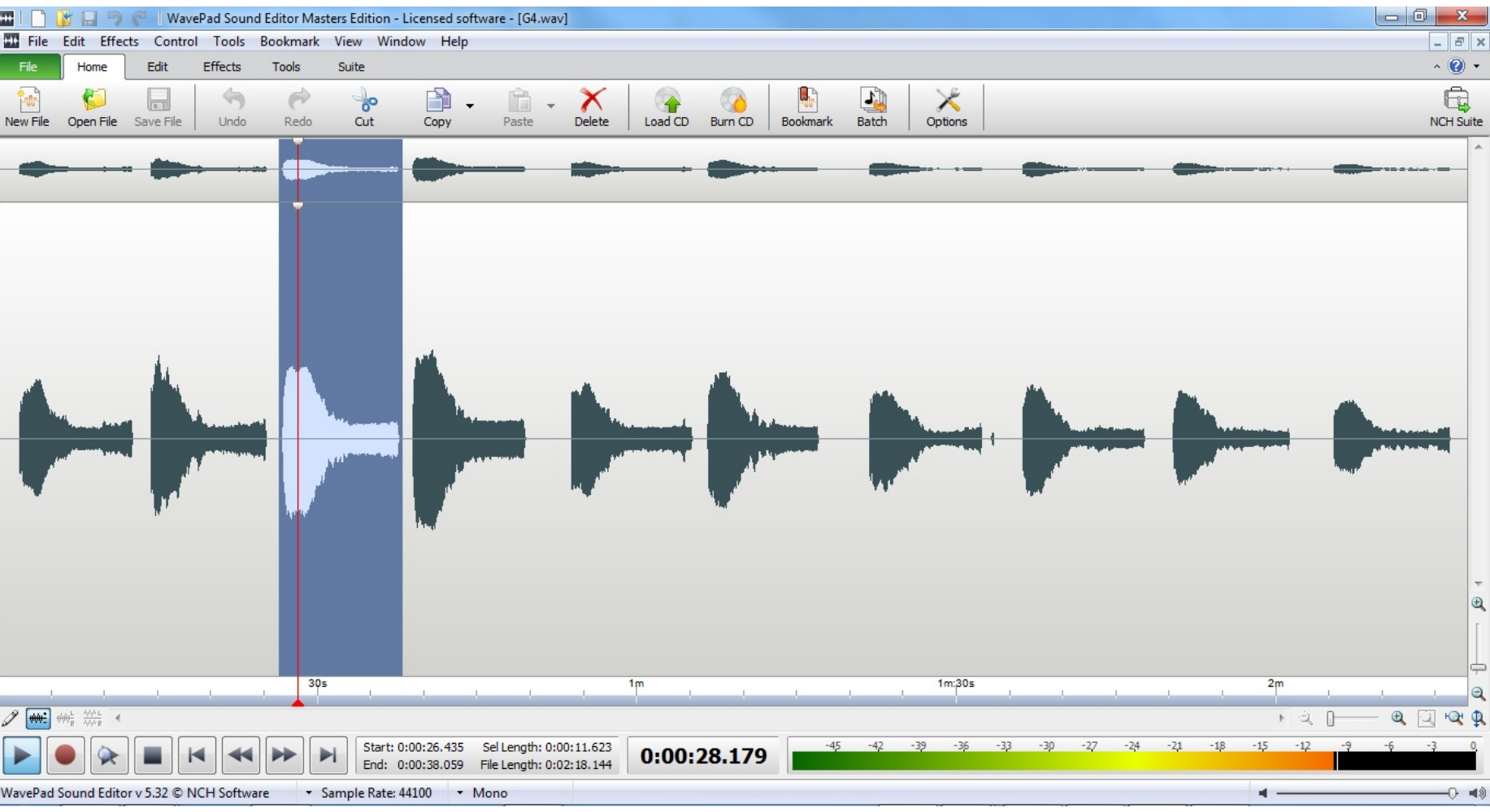
Módy pre všetky tóny, zoradené podľa prstokladov.



Akustický tlak v prvom móde pri zakrytých dierkach.

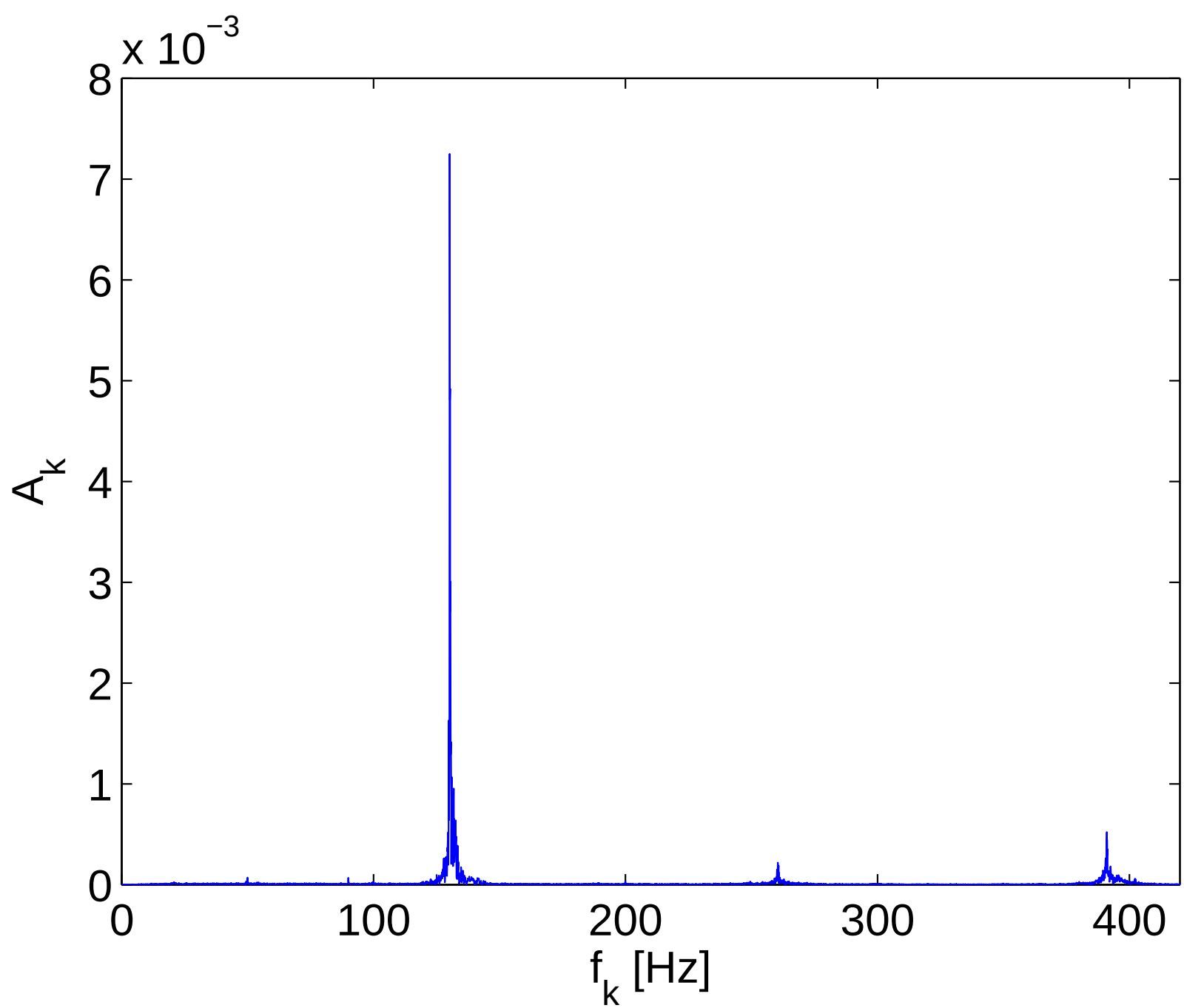
Experimentálne meranie frekvencií fujary

Cieľom experimentu bolo odmerať frekvencie tónov skutočnej fujary. Jednotlivé tóny boli nahraté v softvéri WavePad Sound Editor.



Nahrávka desiatich fúknutí pre tón G4.

Nahrávky boli analyzované v programe **Matlab**, pričom hlavným matematickým aparátom bola **diskrétna Fourierova transformácia** nahratého signálu, ktorá prevádza nahratý signál na **frekvenčné spektrum**.

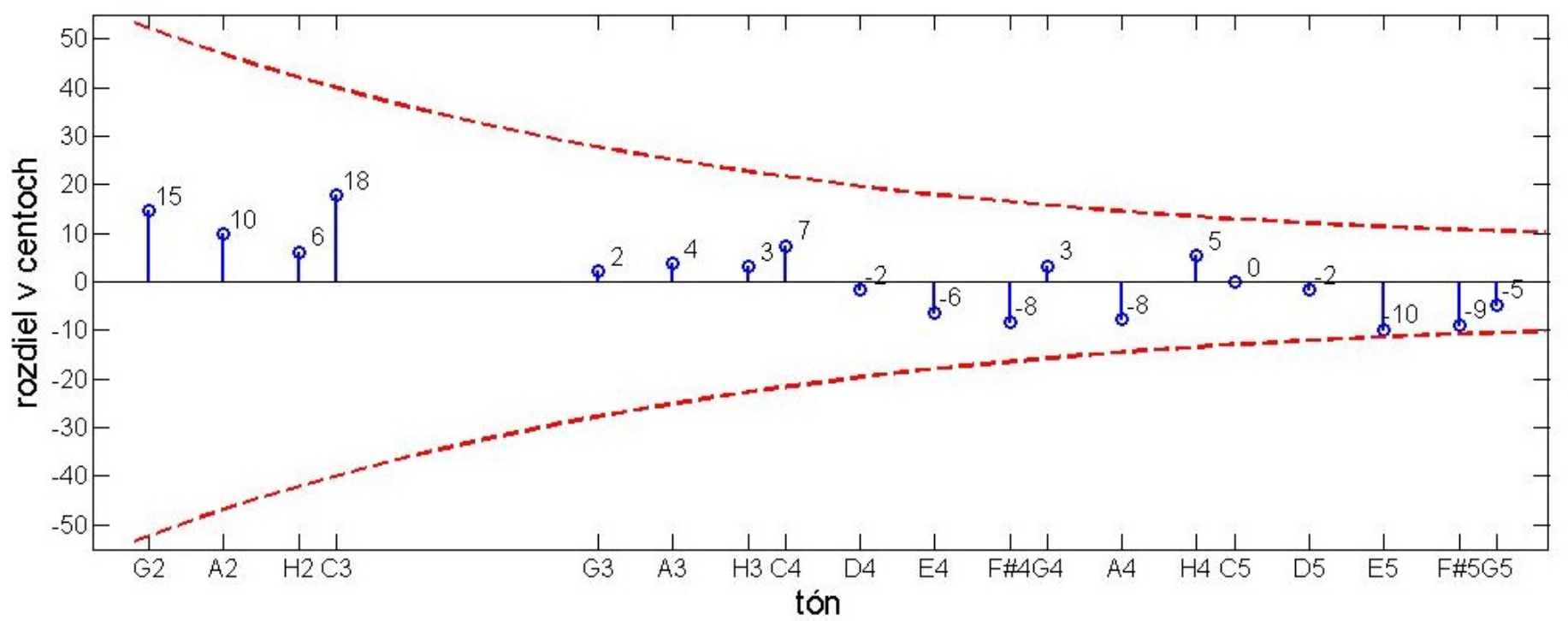


Frekvenčné spektrum jednej nahrávky tónu C3.

Porovnanie výsledkov

V nasledujúcej tabuľke a v grafe uvádzame porovnanie **numericky** vypočítaných frekvencií f_{num} a **experimentálne** nameraných frekvencií f_{exp} . Rozdiel d_C medzi f_{num} a f_{exp} počítame v centoch (jeden cent je stotina poltónu).

Tón	G2	A2	H2	C3	D3	E3	F#3	
f_{num} [Hz]	98,22	110,07	121,03	131,17				
f_{exp} [Hz]	97,39	109,44	120,60	129,83				
d_C [cent]	14,6	9,9	6,2	17,7				
Tón	G3	A3	H3	C4	D4	E4	F#4	
f_{num} [Hz]	196,31	219,50	241,67	261,18	294,36	326,57	359,52	
f_{exp} [Hz]	196,06	219,01	241,22	260,07	294,64	327,77	361,23	
d_C [cent]	2,2	3,8	3,2	7,4	-1,6	-6,3	-8,2	
Tón	G4	A4	H4	C5	D5	E5	F#5	G5
f_{num} [Hz]	393,71	426,95	492,88	526,68	591,02	637,43	714,26	790,52
f_{exp} [Hz]	392,96	428,85	491,37	526,72	591,57	641,05	717,93	792,65
d_C [cent]	3,3	-7,7	5,3	-0,1	-1,6	-9,8	-8,9	-4,7



Porovnanie výsledkov ANSYSu a experimentu.

Prerušované čiary označujú schopnosť priemerného ľudského ucha rozlíšiť dva tóny blízkej frekvencie. Ak sa dva tóny líšia menej, ľudské ucho ich považuje za totožné. Čiary sa s rastúcou frekvenciou zbiehajú. To znamená, že ľudské ucho viac toleruje rozladenú basu, než (rovnako) rozladené husle. Všetky **rozdiely** frekvencií sú **pod hranicou počuteľnosti**. To znamená, že **model** je **použiteľný** na hľadanie **optimálnej geometrie**, ktorá zabezpečí **presnejšie naladenie fujary**.

