

Kopule a ich aplikácie

Zdenka Polakovičová

1 Abstrakt

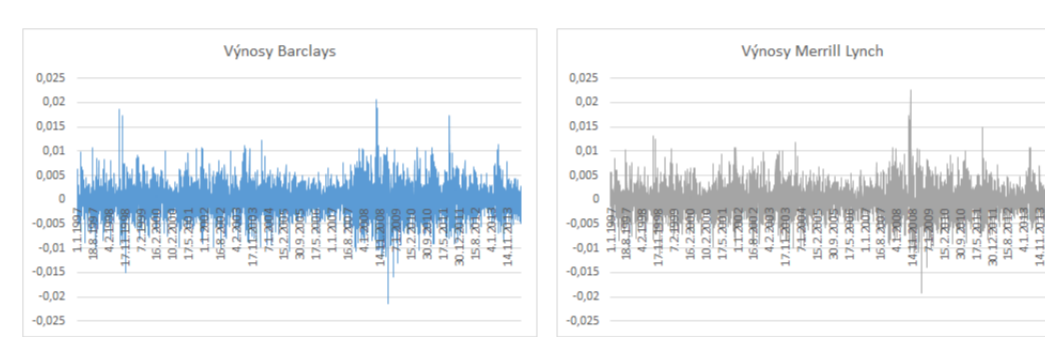
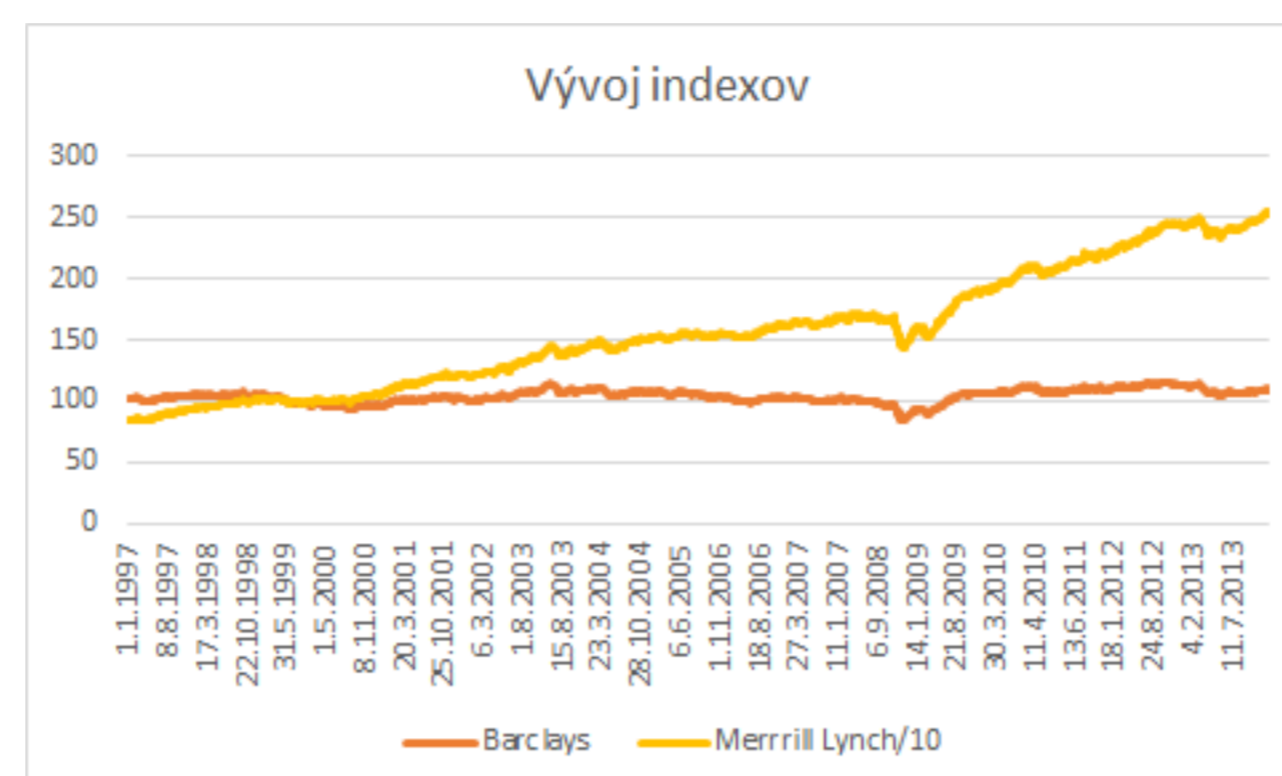
Práca je venovaná priblíženiu pojmu dvojrozmerná kopula. Popisuje základné vlastnosti kopúl najprv všeobecne, potom pre najčastejšie používané triedy kopúl (Archimedovské, eliptické, extreme-value kopule), pri ktorých je spomenutá aj oblasť použitia v praxi. Ďalej sa práca zaoberá metódami odhadu parametrov a výberom vhodných tried kopúl na základe goodness-of-fit testov (Cramer von Misses test, Clarkov test, Vuongov test). Uvedená teória je aplikovaná na ekonomické a finančné dáta, konkrétne na indexy amerických korporátnych dlhopisov. Ukázalo sa, že sledované indexy sú vysoko korelované a majú silné chvostové závislosti. Na základe GoF testov sa ako najvhodnejšia ukázala trieda Studentových t-kopúl, ktorá popisovala dáta najlepšie spomedzi testovaných kopúl v celom sledovanom období.

2 Úvod

Pojem *kopula* prvý krát použil Abe Sklar (1959) na pomenovanie funkcie spájajúcej jednorozmerné distribučné funkcie s ich združenou distribučnou funkciou. Kopule teda umožňujú stochasticky modelovať simultánne rozdelenie, na základe znalostí marginálnych rozdelení. V súčasnosti sa kopule používajú hlavne vo finančnej matematike, napr. na modelovanie závislosti vývoja finančných derivátov, na modelovanie potrebnej výšky rezerv, v poistnej matematike na modelovanie výšky škôd pri previazaných poistných udalostiach, v inžinierskych odvetviach na modelovanie degradácie materiálu v dôsledku navzájom závislých vplyvov a pod. Výhoda agregácie náhodných veličín pomocou kopúl spočíva v tom, že každá náhodná veličina sa môže simulovať samostatne, bez znalostí správania ostatných veličín, a pritom je možné modelovať ich spoločné správanie.

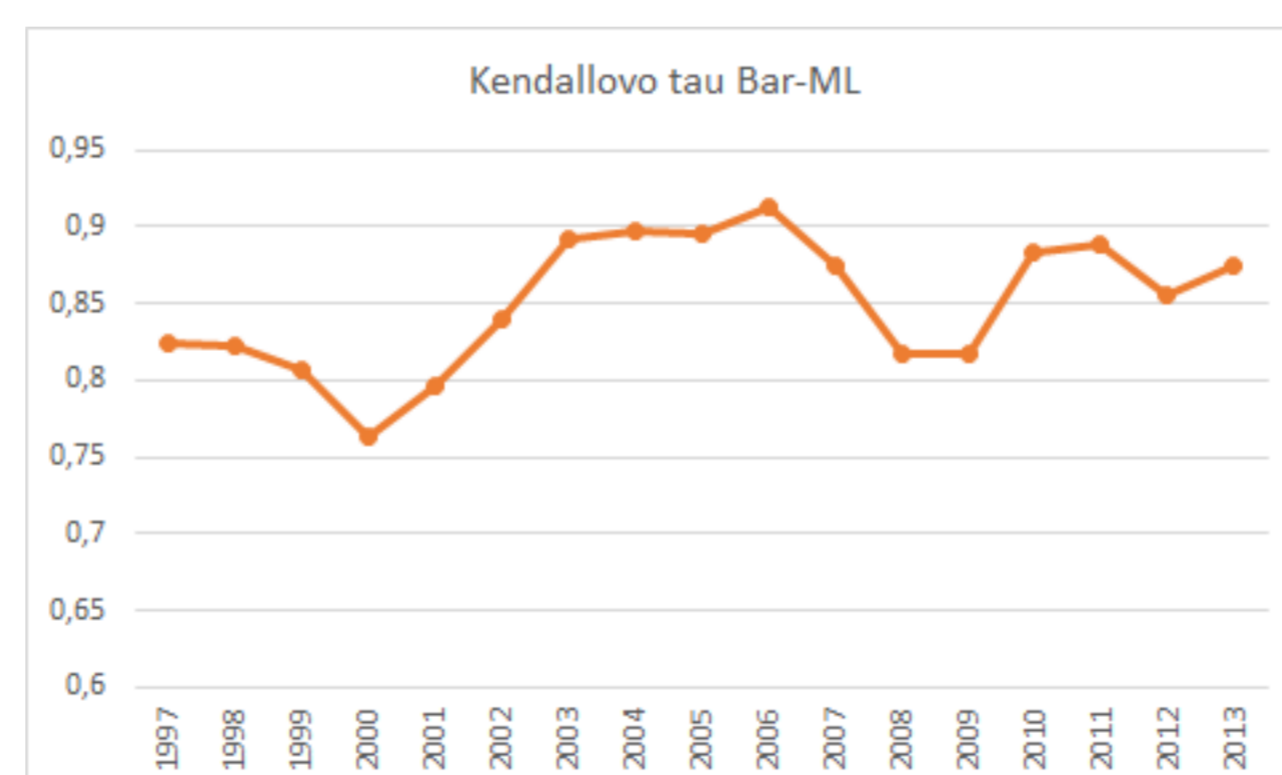
3 Ukázkový model - Indexy US korporátnych dlhopisov

Skúmanými dlhopismi sú *Barclays US Corporate & Investment Grade Index* (Bar) a *Merrill Lynch US Corporate Bond Index* (ML). Použili sme denné dáta (uverejnené agentúrou Bloomberg) z obdobia január 1997 – máj 2014 (t.j. $n = 4543$). Vyrátali sme výnosy indexov a ich charakteristiky popisnej štatistiky.



Index	Str. hodnota	Odhýlka	Šikmost	Špicatosť	Min	Max
Barclay	0.00001	0.0034	-0.2219	5.4769	-0.0210	0.0219
Merrill Lynch	0.00024	0.0031	-0.3705	5.4614	-0.0230	0.0197

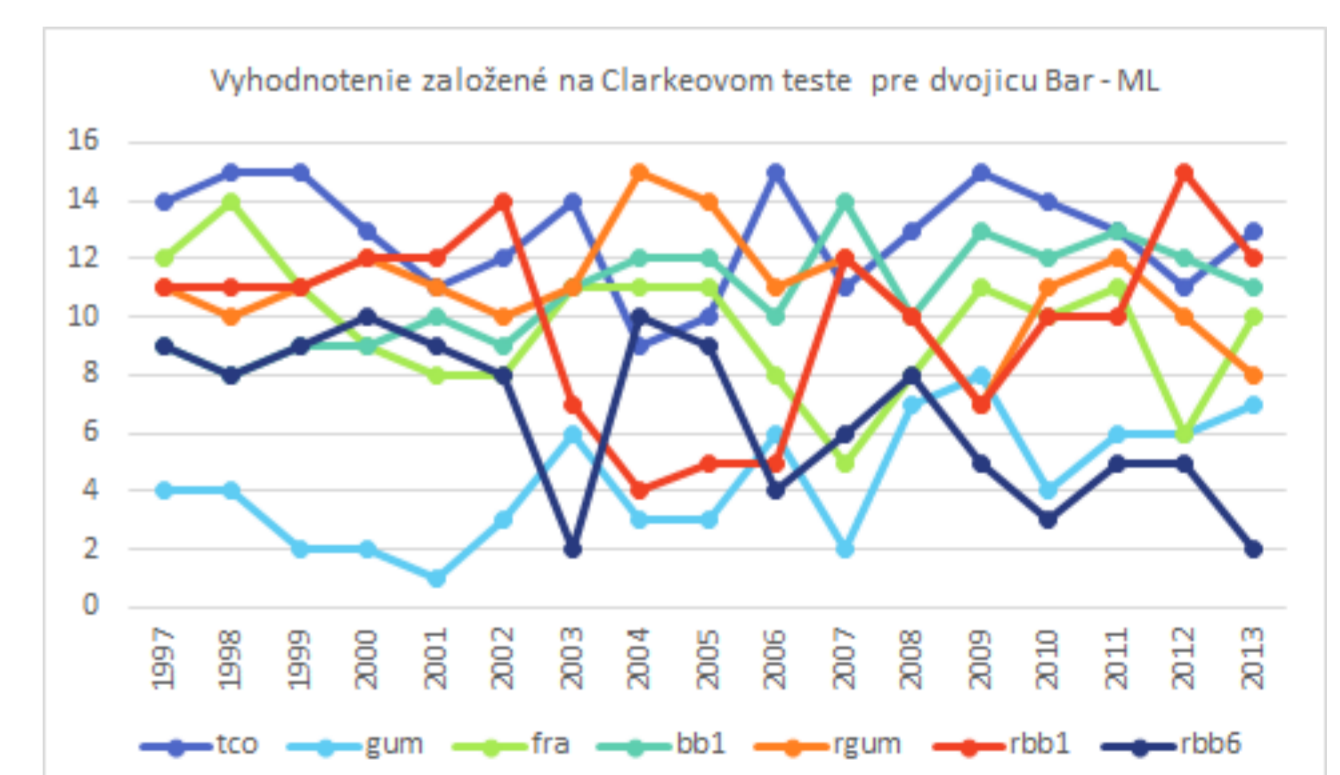
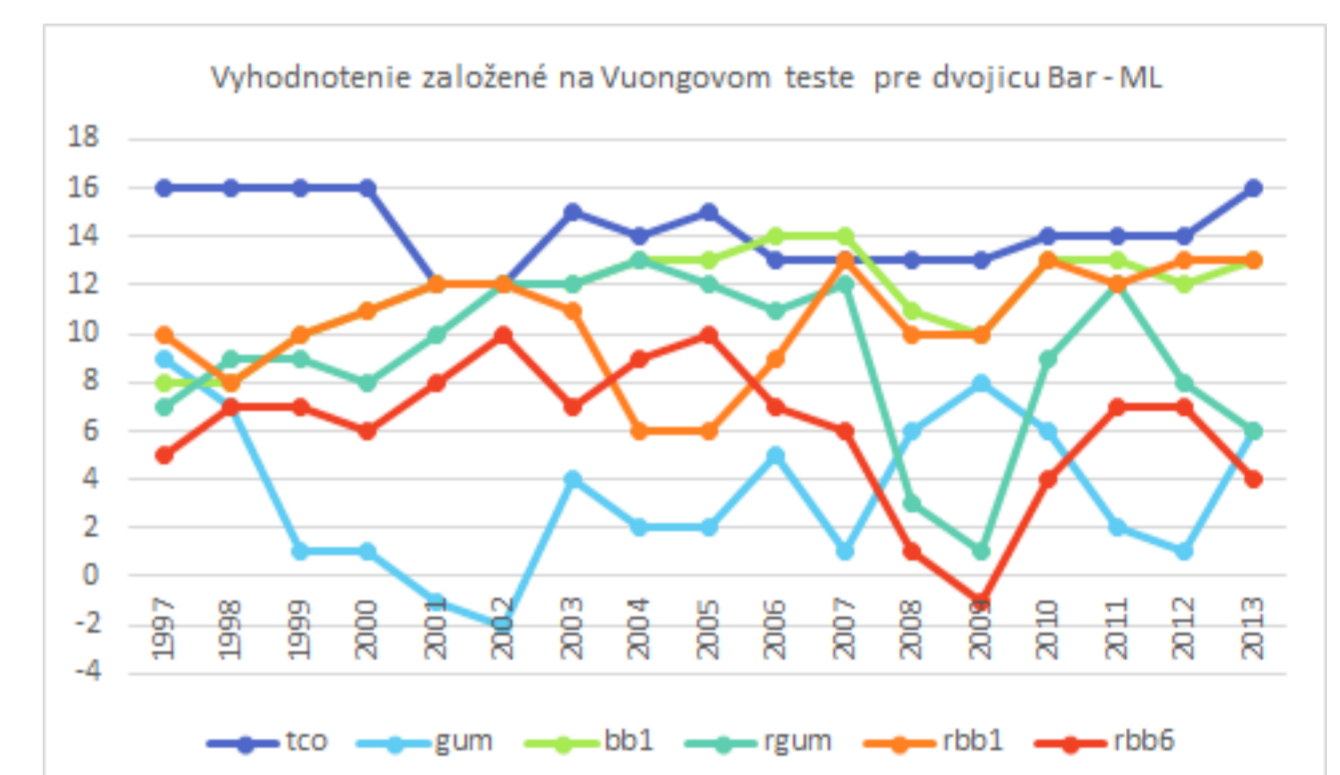
Aby sme zaistili, že jednorozmerné dáta budú nezávislé a rovnako rozdelené, pred ďalšou analýzou sme filtrovali tieto jednorozmerné časové rady výnosov ARMA-GARCH modelmi pomocou R balíka tseries. V analýze sme pokračovali skúmaním vývoja Kendallovho tau počas uvažovaného časového obdobia. Vypočítali sme Kendallovo tau pre dáta zo susedných intervalov s dĺžkou 24 mesiacov, prekrývajúcich sa na 12-mesačných intervaloch. Celkom sme dostali 17 hodnôt, pričom posledná bola vypočítaná na 17-mesačnom intervale. Kendallovo tau nadobúda hodnoty z intervalu $[0.75, 0.95]$, ktoré výrazne prevyšujú kritickú hodnotu testu nulovosti korelačného koeficientu rovnú ± 0.029 .



Ďalej sme vytvorili modely kopúl a priradili im body podľa Vuongovho a Clarkovho porovnávacieho testu. Vuongov test vybral za najlepšiu triedu Studentovu t, tesne nasledovanú modelmi triedy BB_{180} (t.j. kopulou prežitia pre konvexnú kombináciu Claytonovej a Gumbelovej kopule). Výsledky Clarkovho testu sú mierne odlišné, pre dvojicu Bar & ML Studentova aj BB_{180} trieda dosiahli rovnaký počet bodov.

Kopula	θ_1	θ_2	λ_L	λ_U	Vuong	Clarke
Gauss	0.957	x	0	0	-7	0
t-kopula	0.976	x	0.815	0.815	16	14
Clayton	7.455	x	0.911	0	-7	-4
Gumbel	6.069	x	0	0.879	4	4
Frank	25.580	x	0	0	2	11
Joe	7.380	x	0	0.901	-13	-11
BB1	0.987	4.205	0.846	0.821	12	10
BB6	1.001	5.902	0	0.876	4	2
BB7	5.000	5.949	0.890	0.851	0	-5
BB8	6.000	0.985	0	0	-14	-16
Clayton ₁₈₀	6.374	x	0	0.897	-15	-12
Gumbel ₁₈₀	6.240	x	0.882	0	9	11
Joe ₁₈₀	8.032	x	0.910	0	-5	-3
BB₁₈₀	0.483	5.143	0.856	0.001	14	14
BB6 ₁₈₀	1.001	6.000	0.878	0	9	6
BB7 ₁₈₀	5.000	4.563	0.851	0.859	0	-8
BB8 ₁₈₀	6.000	0.993	0	0	-9	-13

Tiež sme vypočítali najlepšie modely pre dáta prekrývajúce sa na 2-ročných intervaloch spomenutých vyššie. Vývoj bodového zisku podľa Vuongovho aj Clarkovho testu je znázornený na grafe, kde môžeme vidieť jasnú prevahu Studentovej t-triedy kopúl.



Dospeli sme k záveru, že výnosy uvažovaných indexov dlhopisov majú veľmi vysoké koeficienty chvostových závislostí, a preto nepredstavujú vhodné komponenty v dobre diverzifikovaných portfóliách. Na druhú stranu, ich optimálne modely sú v Studentovej t triede s nízkymi stupňami voľnosti (iba 2), čo znamená vysoké hodnoty inverznej distribučnej funkcie, a preto by mohli byť dobrými kandidátmi na podkladové aktíva finančných derivátov.