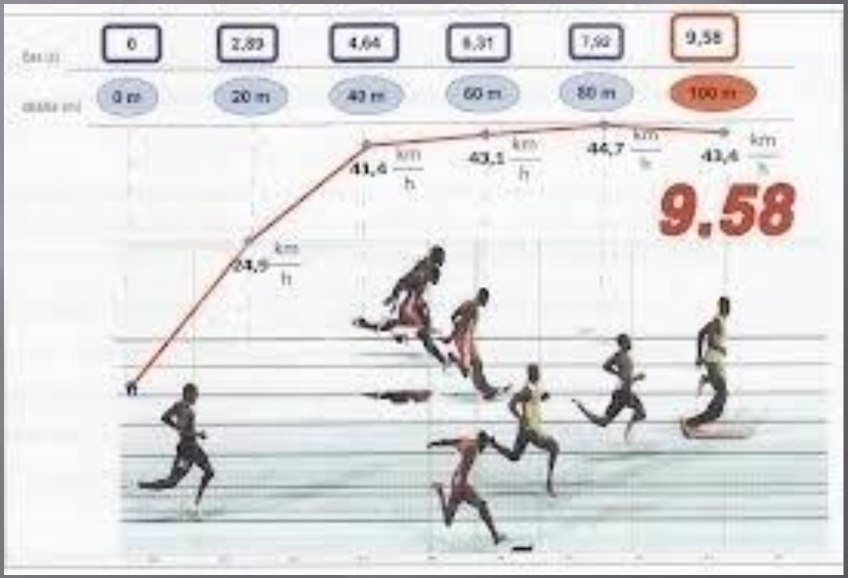
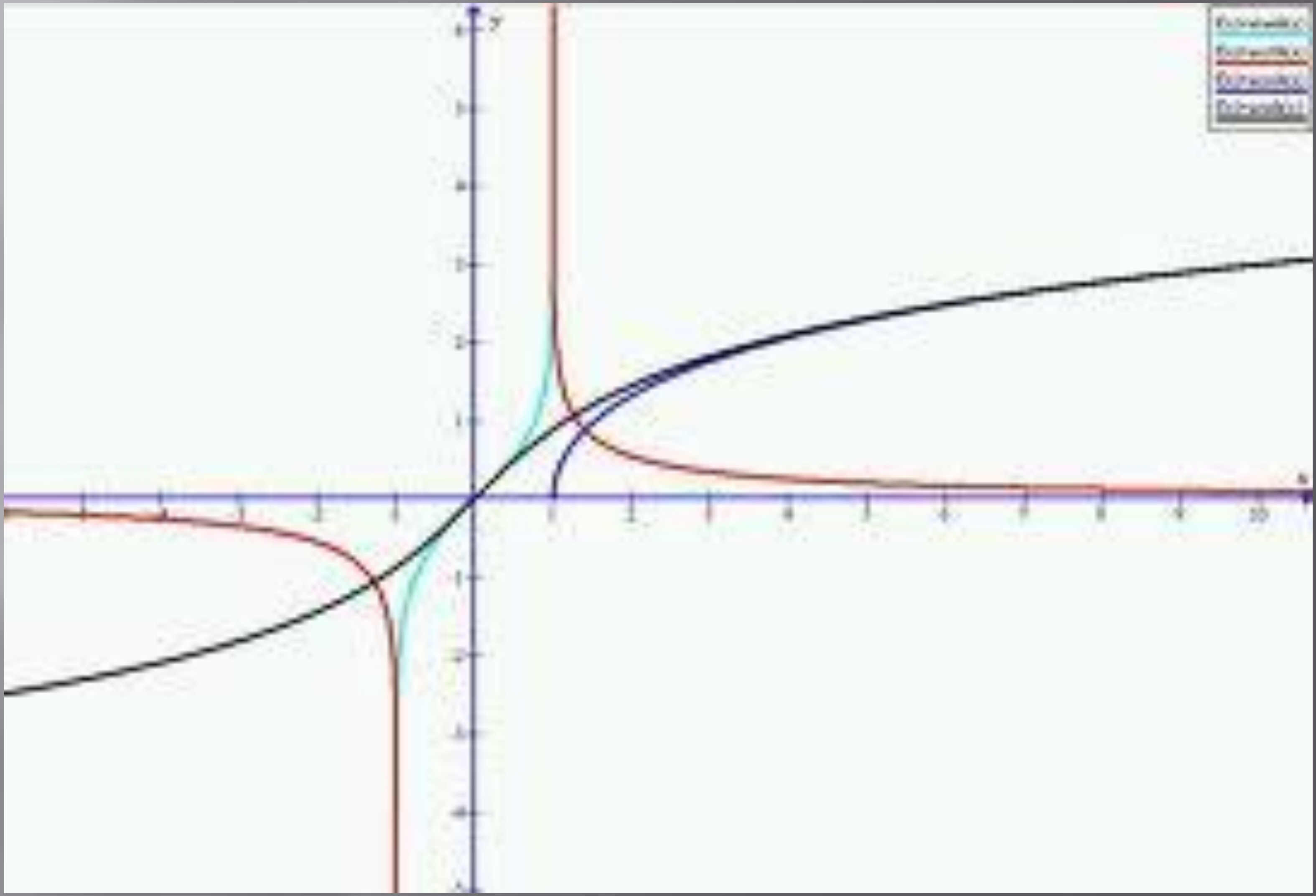
TEÓRIA GRAFOV A JEJ APLIKÁCIE

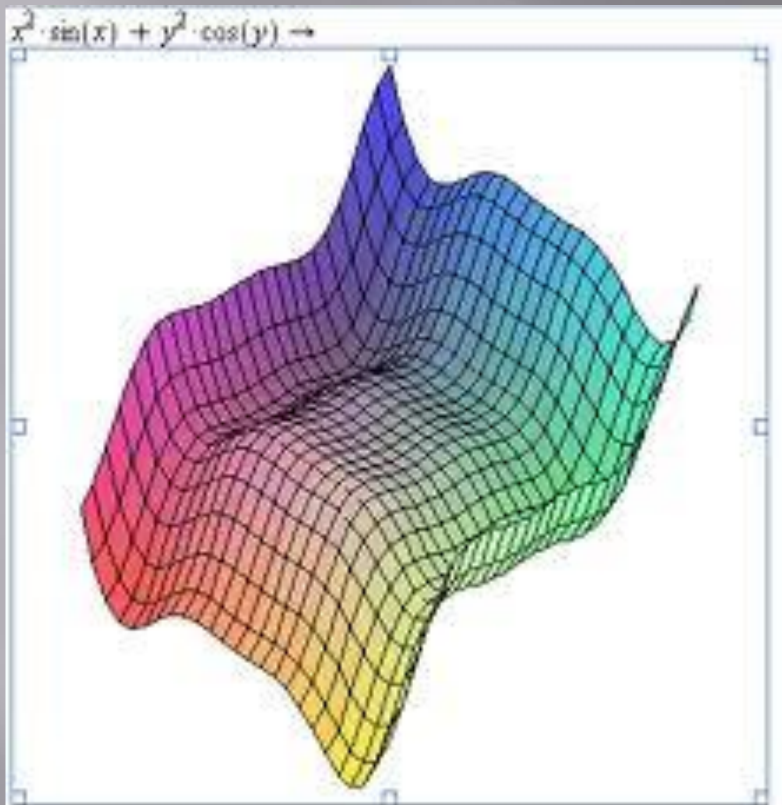
Mária Ždímalová
KMDG, Svf STU v Bratislave

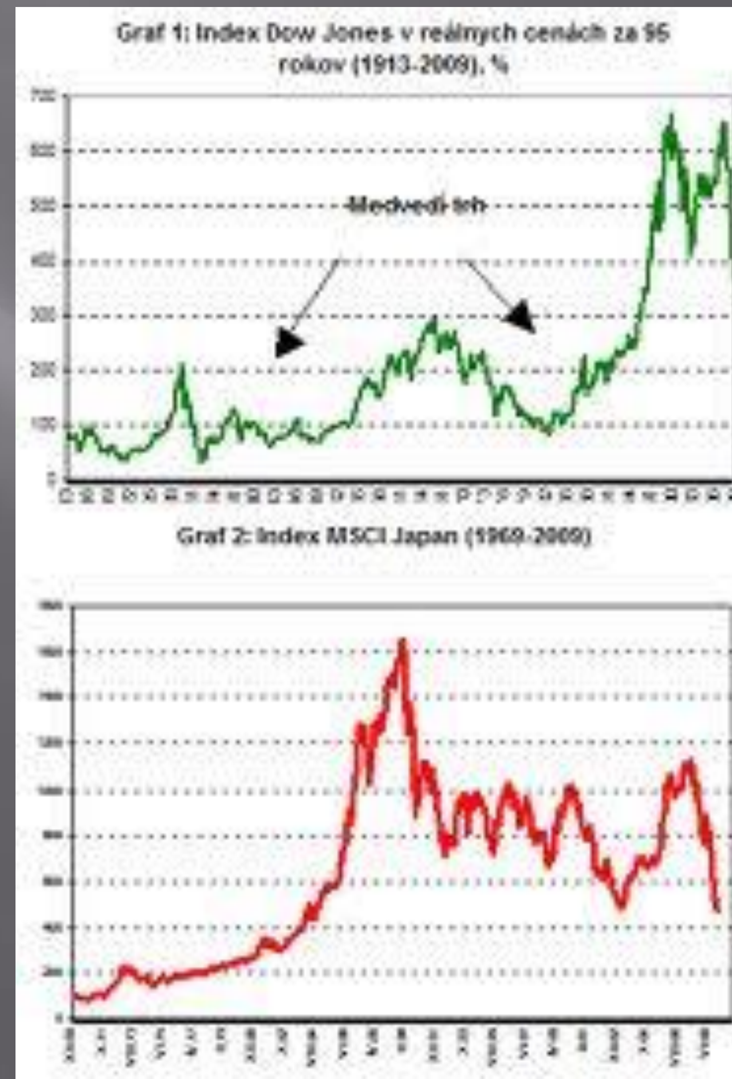
Grafy

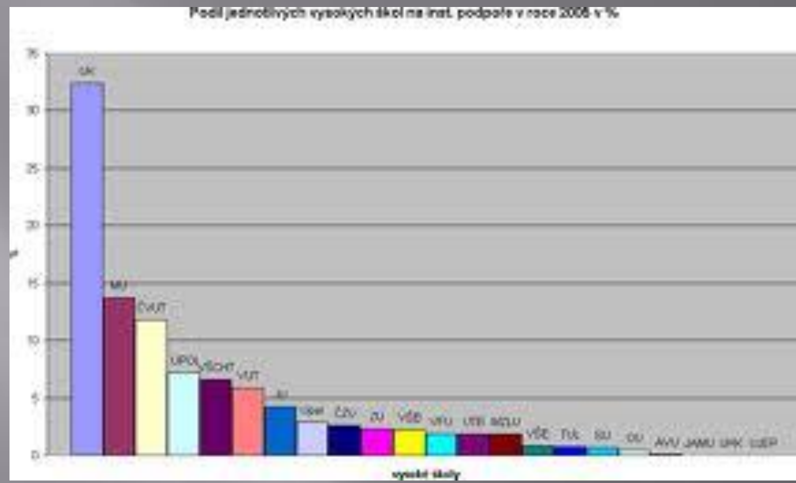
- Čo je to graf ?
- Grafy funkcií
- Grafy prezentujúce štatistické údaje

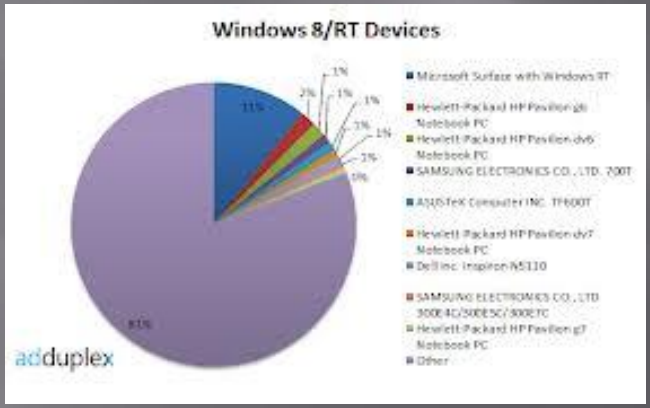


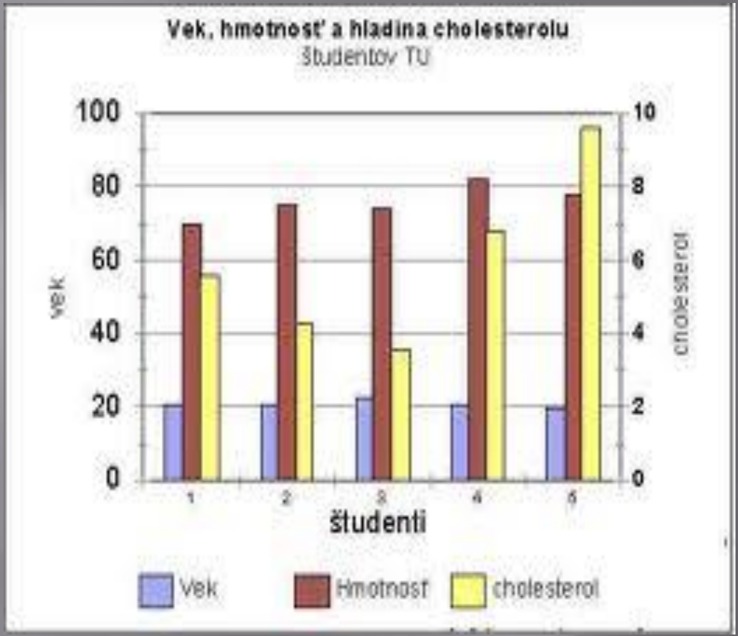


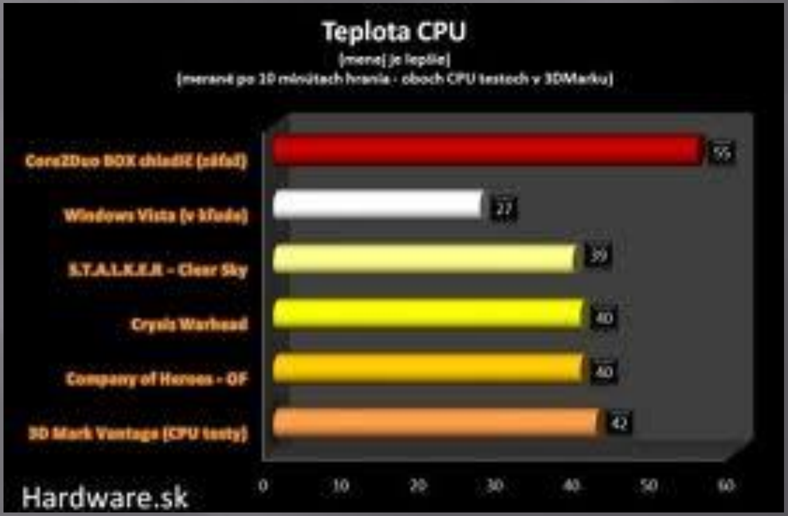

$x^2 \cdot \sin(x) + y^2 \cdot \cos(y) \rightarrow$


Graf 1: Index Dow Jones v reálnych cenách za 95 rokov (1913-2009), %
Medvedí trh
Graf 2: Index MSCI Japan (1969-2009)


Podíl jednotlivých vysokých škol na inst. podpoře v roce 2008 v %
UK
MU
ČVUT
UPOL
VŠCHT
VUT
ČZU
ZU
VŠB
VFU
VŠE
TUL
SU
OU
AVU
JAMU
UHK
vysoké školy


Windows 8/RT Devices
11%
81%
Microsoft Surface with Windows RT
Hewlett-Packard HP Pavilion g6 Notebook PC
Hewlett-Packard HP Pavilion dv6 Notebook PC
SAMSUNG ELECTRONICS CO., LTD. 700T
ASUSTeK Computer INC. TF600T
Hewlett-Packard HP Pavilion dv7 Notebook PC
Dell Inc. Inspiron N5110
SAMSUNG ELECTRONICS CO., LTD 300E4C/300E5C/300E7C
Hewlett-Packard HP Pavilion g7 Notebook PC
Other
adduplex


Vek, hmotnosť a hladina cholesterolu
študentov TU
100
80
60
40
20
0
vek
10
8
6
4
2
0
cholesterol
1
2
3
4
5
študenti
Vek
Hmotnost
cholesterol


Teplota CPU
Core2Duo BOX chladič (záťaž)
Windows Vista (v kľude)
S.T.A.L.K.E.R - Clear Sky
Crysis Warhead
Company of Heroes - OF
3D Mark Vantage (CPU testy)
55
27
39
40
40
42
0
10
20
30
40
50
60
Hardware.sk

Graf ako štruktúra

Čo majú spoločné nasledujúce úlohy?

1. Na filmovom festivale sa zišlo 6 000 ľudí, niektoré dvojice sa poznajú, niektoré nie. Ako nájsť najväčšiu skupinu ľudí, v ktorej sa všetci poznajú?

2. Podnikaľ spisuje procesy, ktoré sa pravidelne opakujú, pri tvorbe jeho produktu. Niektoré úlohy závisia na dokončení iných, a tak by rád vedel, ako ich usporiadať a aké možnosti má pri ich paralelizovaní.

3. Ako nájsť najkratšiu cestu z Plzne do Brna, ak máme zadanú dialničnú sieť Českej republiky ako trojice (mesto, mesto, ďiaľka) ?

1. Obyčajný graf
2. Orientovaný graf
3. Ohodnotený graf

- Spoločné veci: vstupy môžeme redukovať na dve množiny: OBJEKTY a VŤAHY medzi dvojicami týchto objektov.

- Objekty sú po poradí: ľudia, úlohy, mestá.
- Vzťahy sú:

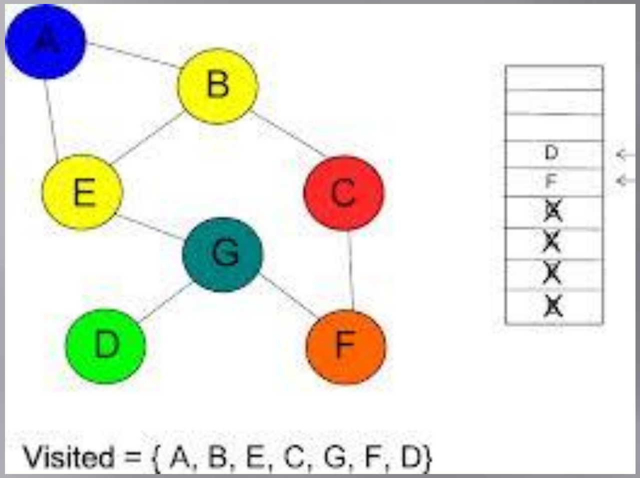
1. A sa pozná s B
2. A závisí na dokončení B
3. Medzi A a B existuje cesta dlhá x.

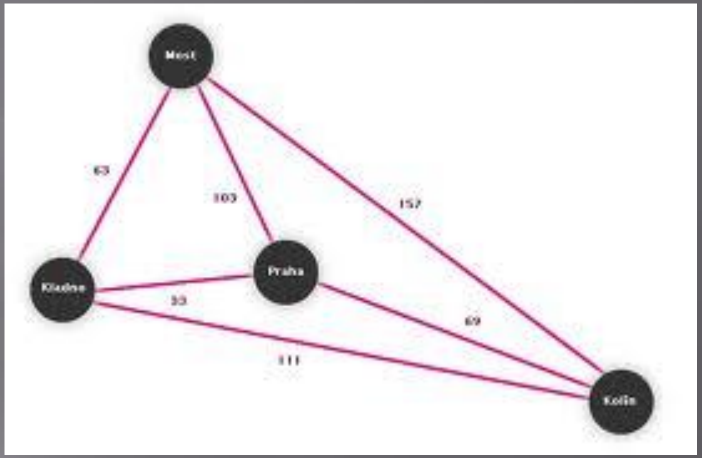
- Grafy sú pekné na kreslenie.
- Určenie:

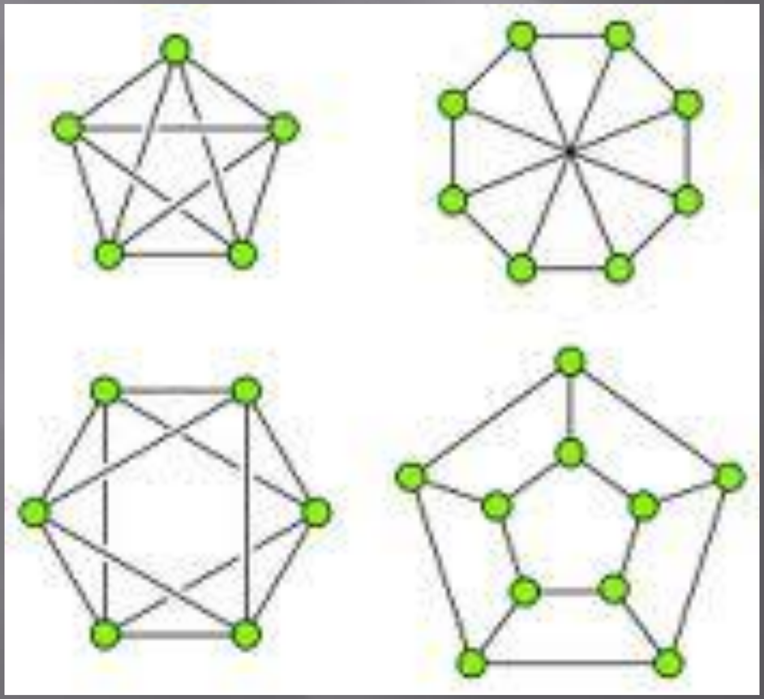
1. Filmový festival – jediné, čo o vzťahu vieme, je, že existuje.... obyčajné grafy.
2. Podnikatelia – vzťahy majú smer....orientované grafy.
3. Prípad hľadania najkratšej cesty – ohodnotený graf. Vieme, že vzťah existuje a ak áno, aké má ohodnotenie (číslo).

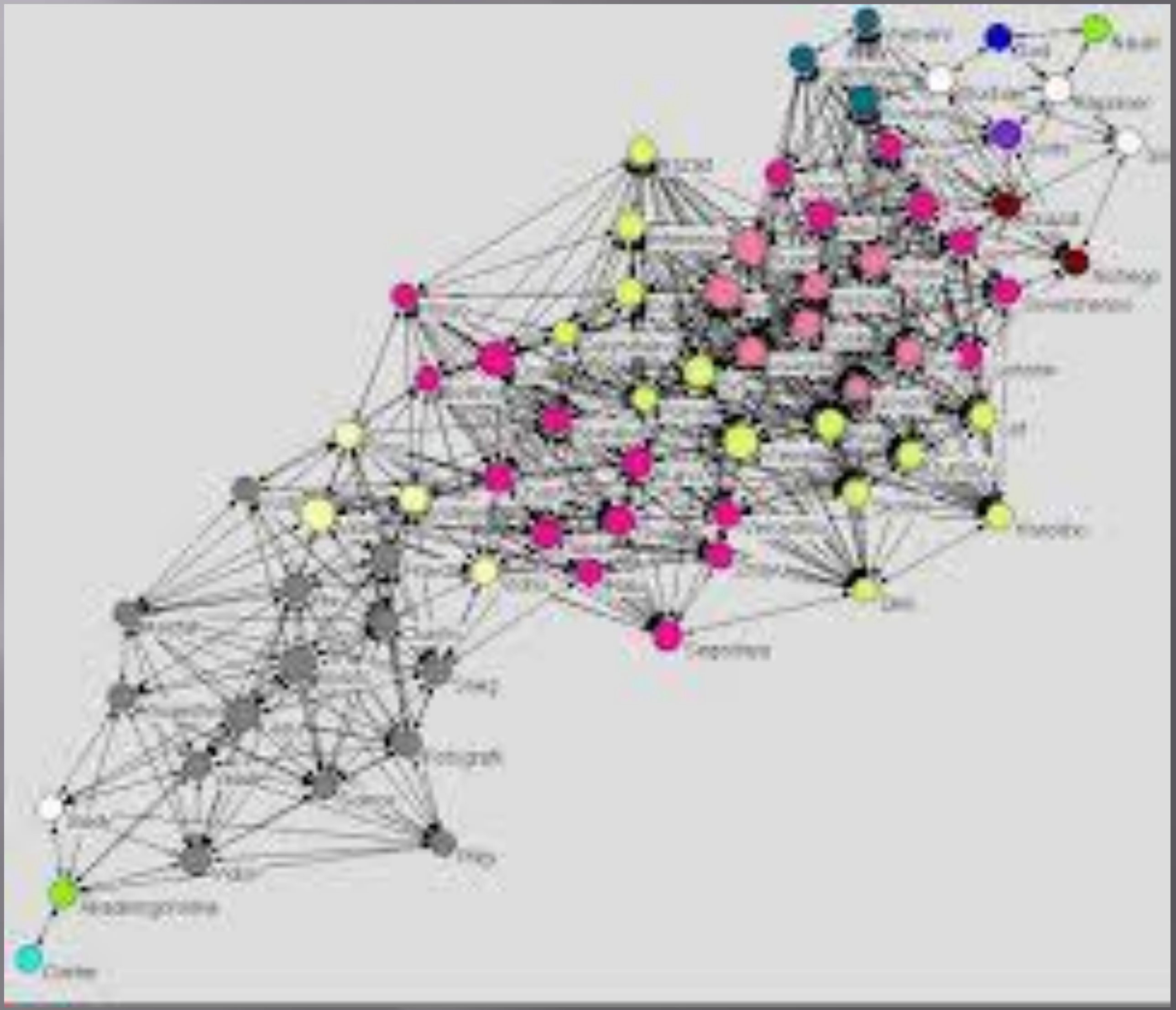
- Grafy: vrcholy a hrany.
- Objektom hovoríme vrcholy.
- Vzťahom hovoríme hrany.

- Príklady grafov a sietí:


A
B
E
C
G
D
F
D
F
Visited = { A, B, E, C, G, F, D}


Most
Praha
Kladno
Kolin
63
103
157
33
69
111





História

- Mladá vedecká diciplína.
- Leonhard Paul Euler (1 707-1783), Problém mostov mesta Königsberg (1736).
- Mesto Königsberg - v Prusii, 7 mostov, ostrovy. Otázka , či je možné spraviť takú prechádzku, aby sme prešli kažým mostom práve raz?

- Problém štyroch farieb: 19. storočie, vyriešený až v roku 1976 s využitím počítačov.

Stači štyri farby na ofarbenie ľubovoľnej politickej mapy tak, aby žiadne dva susediace štáty neboli ofarbené rovnakou farbou?

- Ak máme nesúvislé územie, tak štyri farby nestačia. Predpoklad: každý štát má súvislé územie.

New Hampshire
Vermont
Massachusetts
Washington
Montana
North Dakota
Maine
Oregon
Minnesota
Wisconsin
Idaho
South Dakota
New York
Wyoming
Michigan
Rhode Islan
Iowa
Pennsylvania
Connecticut
Nevada
Nebraska
Ohio
New Jersey
Utah
Illinois
Indiana
Delaware
Colorado
Kansas
Missouri
Maryland
California
Virginia
Kentucky
Washington, D.
North Carolina
Tennessee
West Virginia
Oklahoma
Arizona
Arkansas
New Mexico
South Carolina
Alabama
Georgia
Mississippi
Texas
Louisiana
Alaska
Florida
Hawaii

Algoritmy na hľadanie najkratšej cesty

- Cestná sieť – graf.
- Križovatky - vrcholy grafu.
- Cesty – hrany, znázorňujúce „príbuzenstvo“, spojenia medzi križovatkami.

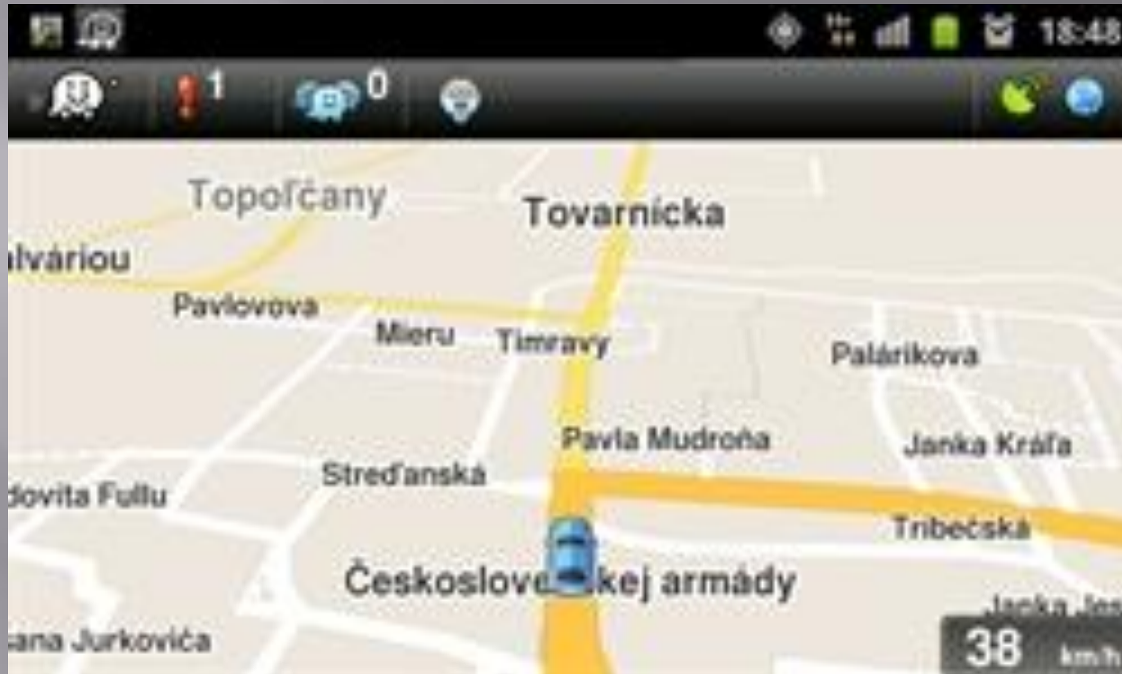
Obr.

GPS a navigácie

GPS a navigácie

- Cieľ: nájsť najkratšiu cestu z bodu A do bodu B (z Bratislavy do Humenného) .
- Algoritmy na hľadanie najktratších ciest – metódy teórie grafov.
- Dijkstrov algoritmus.
- Ako zostrojiť algoritmus, ktorý nájde naktratšiu cestu z bodu A do bodu B a zaručí, že je najktratšia?

- „My“ ulice vidíme, keď sa pozrieme na mapu, ale algoritmus ich nevidí, snaží sa „manuálne poslepiačky“ nájsť túto cestu.
- Cestná sieť – ak bude veľmi veľká, nepomôže nám „vidieť“ kúsok mapy.
- Potrebujeme metódu, ktorá v akejkoľvek sieti nájde najkratšiu cestu.


18:48
1
0
Topoľčany
Tovarnicka
Pavlovova
Mieru
Timravy
Palárikova
Pavla Mudroňa
Janka Kráľa
Streďanská
Tribečská
38
km/h


Tovarnicka
Timravy
Pavla Mudroňa
38

- Otázka: Ako rýchlo prebehne algoritmus?

- V polynomiálnom čase, O(n^3), kde n je počet vrcholov.

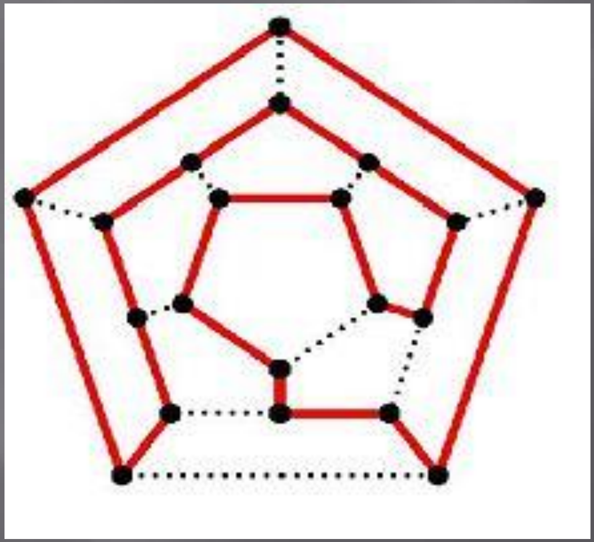
- Ak n = 1000 vrcholov, tak O(n^3) je rádovo miliarda operácií.

- Pri súčastných počítačoch, kde máme „veľa“ vrcholov a „málo“ hrán, v týchto „riedkych“ grafoch sú tieto algoritmy veľmi rýchle (rádovo sekundy).

- Na druhej strane existujú matematické problémy, ktoré sú stále veľmi ťažké:

- Nájdenie a existencia Hamiltonovskej cesty, t. j. takej cety v grafe, ktorá navštívi každý vrchol práve raz.

- Obr.



Ak graf s n=100

- Dijkstrov algoritmus
- Hľadáme všetky najkratšie cesty v čase 100^3=1000000.konšta nta
- rádovo sekundy (ak aj uvažujeme počítač, spôsob implementácie)

- Algoritmy hľadajúce Hamiltonovské cesty
- 2^n . konštanta
- 2^10=10 ^3
- 2^100 približne 10 ^30
- Je veľmi veľa
- 1 rok približne 3,1. 10^7 sekúnd.

- Iný podobný druh problému: nájsť najlacnejšiu cestu, ak máme ohodnotené grafy (na hranách hodnoty – cena za cestu, kilometre, a pod.)
- Aj na tieto úlohy poznáme algoritmy, ešte sú sú dostatočne rýchle.
- Existuje jeden problém PNP otázka: trieda úloh, ktoré vieme riešiť v polynomiálnom čase na deterministickom stroji v počítači   = triede problémov, ktoré vieme algoritmicky riešiť v polynomiálnom čase na nedeterministickom stroji.

- Ak odpoveď na otázku je, že sa tieto triedy nerovnajú, tak nikdy nikdo nebude vedieť nájsť rýchlejší algoritmus na nájdenie Hamiltonovskej cesty, t.j. takýto algoritmus neexistuje.
- Problém, či P=NP patrí medzi miléniové problémy – Problémy tisícročia. Je ich 7, na každý z nich je vypísaná odmena (milión dolárov). Jeden z nich je už vyriešený.

- Tieto algoritmy trvajú „veľmi dlho“, preto sa aplikujú „aproximačné“ algoritmy.

- Nájdenie Hamiltonovských ciest a pod. , ako hľadanie najlacnejšj cety :

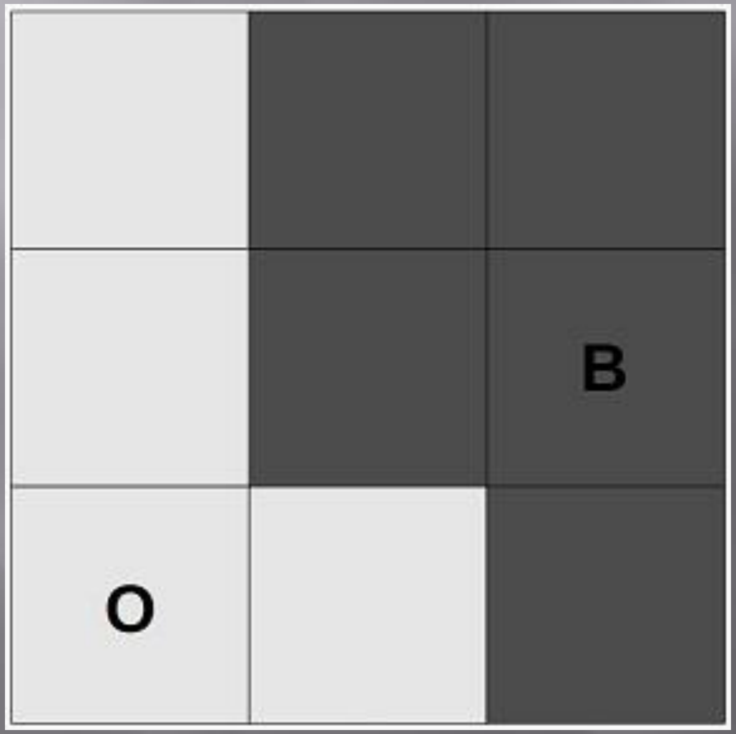
aproximačné algoritmy

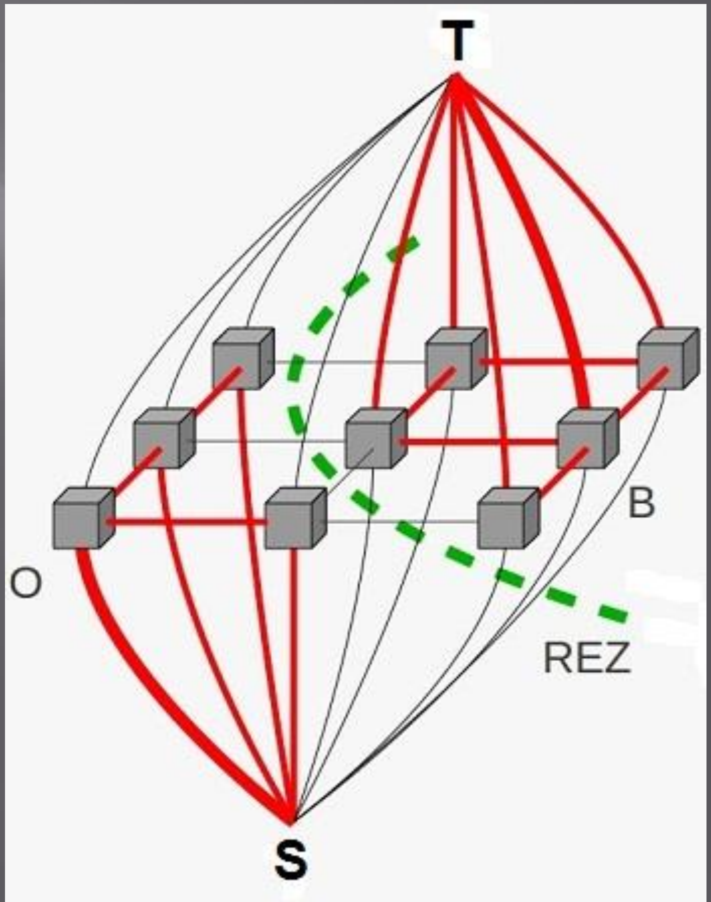
- Tieto síce nenájdu najoptimálnejšie riešenie, ale prebehnú v reálnom čase a uspokoja sa s optimom.

Aplikácia grafových algoritmov v spracovaní obrazu

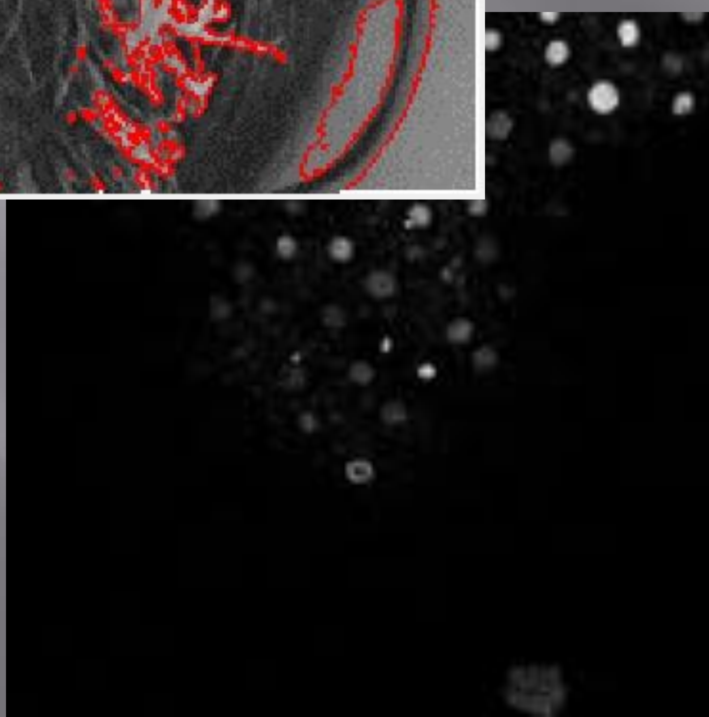
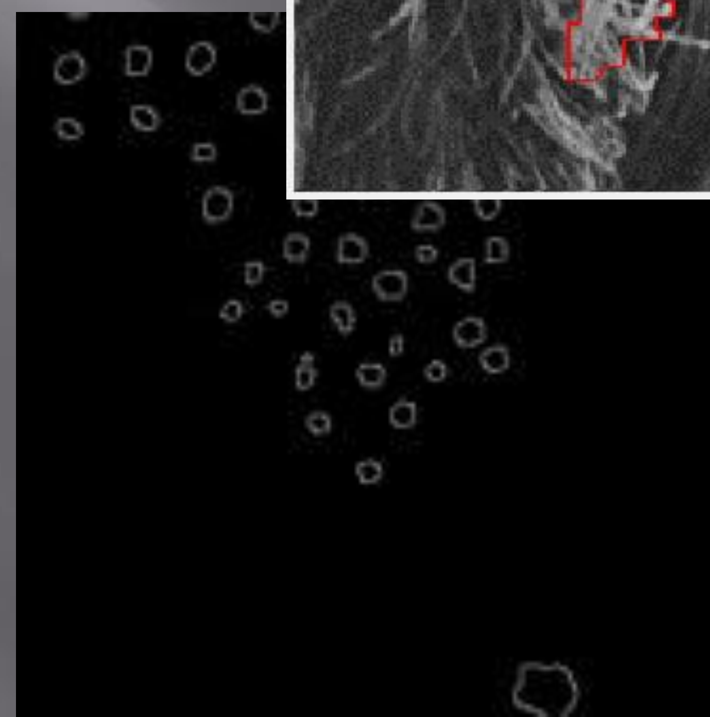
- Grafové algoritmy na hľadanie maximálneho toku v sieti.
- Ford - Fulkersonov algoritmus.
- Push – relabel algoritmus.
- Obrázok, pixely a hodnoty intenzít, následne z toho konštrukcia grafu, pridanie ústia a zdroju siete.
- Maximálny tok v sieti = minimálny rez = segmentácii obrázku (object a backround)

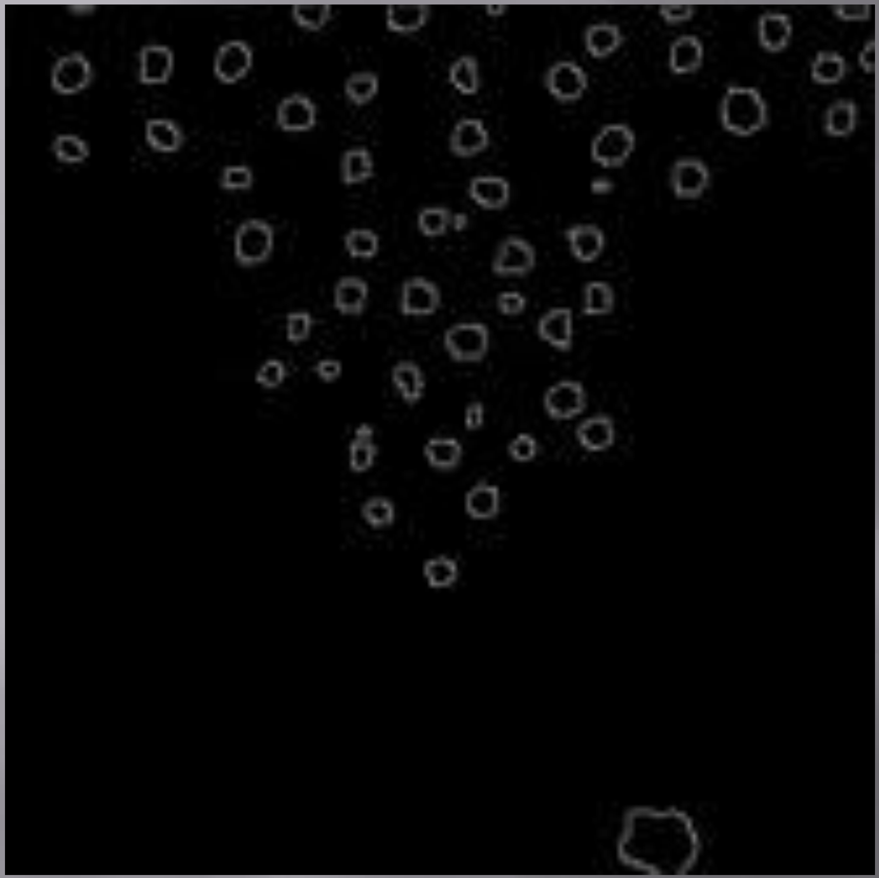
- Aplikácia v spracovní umelých, medicínskych dát (napr. röntgenové snímky), biologických dát
- Krivá Z., Bohumel T., Ždímalová M. :

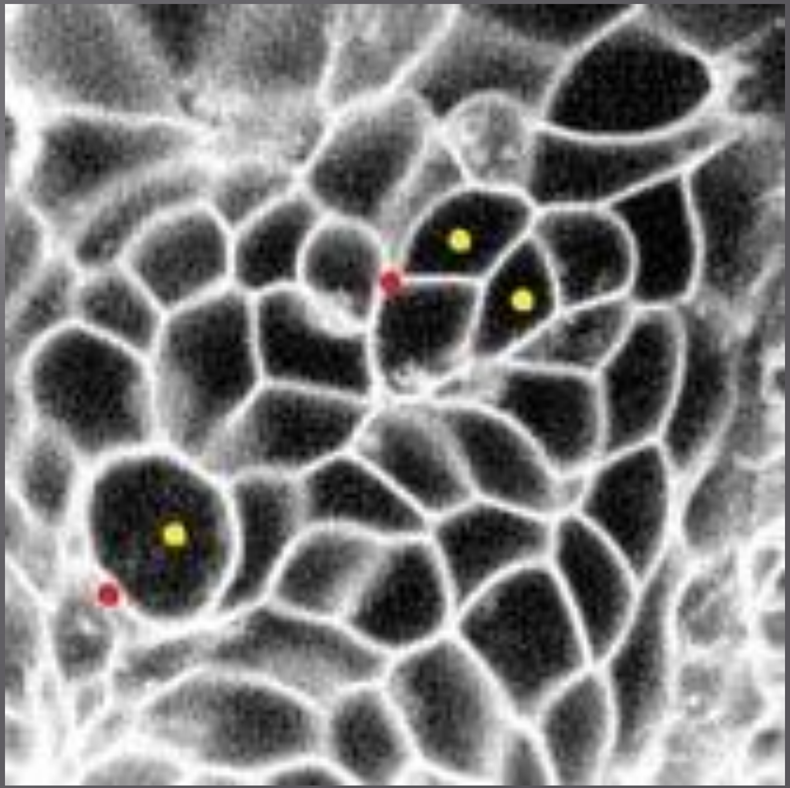










Ďakujem za pozornosť.