VLASTNÉ ČÍSLA A JORDANOV KANONICKÝ TVAR

MICHAL ZAJAC

VLASTNÉ ČÍSLA A VLASTNÉ VEKTORY

Pripomeňme najprv, že lineárny operátor $T\colon L \to L$ je vzhľadom na bázu $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ lineárneho priestoru L určený maticou $A = [T]_{\mathcal{B}}$, ktorej stĺpce sú: $A_{*1} = [Tb_1]_{\mathcal{B}}$, $A_{*2} = [Tb_2]_{\mathcal{B}}$, $\dots$,$A_{*n} = [Tb_n]_{\mathcal{B}}$ (súradnice prvku Tb_n vzhľadom na bázu $\mathcal{B}$). Nasledujúci príklad ukazuje, že vhodnou voľbou bázy sa dá matica lineárneho operátora zjednodušiť.

Príklad. Nech lineárny operátor $T\colon R^2 \to R^2$ má vzhľadom na štandardnú bázu maticu $A = [T]_S = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$. Nájdime jeho maticu vzhľadom na bázu $\mathcal{B} = \{b_1 = (1.4)^\top,\ b_2 = (1,-1)^\top\}$:

$$\left.\begin{aligned} Tb_1 &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \end{pmatrix} = 3b_1 \quad\Longrightarrow [Tb_1]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \\ Tb_2 &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = -2b_2 \Longrightarrow [Tb_2]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \end{aligned}\right. \Longrightarrow [T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Matica $[T]_{\mathcal{B}}$ je „jednoduchšia" ako $[T]_S$ b_1, b_2 sú vlastné vektory operátora T:

Definícia. Nech $(L, +, \cdot)$ je lineárny priestor, $T\colon L \to L$ lineárny operátor. Nenulový vektor $u \in L$ sa nazýva *vlastný vektor* operátora T patriaci k *vlastnému číslu* $\lambda \in C$, ak $Tu = \lambda u$.

Ak $I\colon L \to L$, $Ix = x$ pre $\forall\, x \in L$, tak $Tu = \lambda u \iff (T - \lambda I)u = 0$, t.j. λ je vlastné číslo operátora T, ak existuje nenulový prvok z $\ker(T - \lambda I)$. V konečnorozmernom priestore L je T určené maticou A a môžeme to napísať v maticovom zápise, $\det(A - \lambda I) = 0$. Teda nájsť vlastné čísla znamená nájsť korene polynómu $\det(A - \lambda I)$. Potom príslušné vlastné vektory sa hľadajú ako nenulové riešenie homogénnej sústavy lineárnych rovníc $(A - \lambda I)u = 0$.

Označenie. Množina všetkých vlastných čísiel matice $A \in C^{n\times n}$ sa nazýva *spektrum* matice A a označuje $\sigma(A)$.

Príklad. Nájdite vlastné čísla a vlastné vektory matice A
a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} -14 & 12 \\ -20 & 17 \end{pmatrix}$ c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$ d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ e) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$

Definícia. Nech matica $A \in C^{n\times n}$.
1. $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ sa nazýva *charakteristický* polynóm matice A.
2. Nenulový polynóm $m_A(\lambda)$ sa nazýva minimálny polynóm matice A, ak
   a. $m_A(A) = 0_{n\times n}$.
   b. Ak p je polynóm, pre ktorý $p(A) = 0_{n\times n}$, tak $m_A(\lambda)$ je deliteľom $p(\lambda)$.

Teda $m_A(\lambda)$ je polynóm najmenšieho stupňa, ktorého hodnota v A je nulová matica.

Veta. *Nech $A \in C^{n\times n}$. Potom*
1. $\lambda \in C$ je vlastné číslo matice A, vtedy a len vtedy, keď je koreňom jej charkateristického polynómu.
2. $\lambda \in C$ je vlastné číslo matice A, vtedy a len vtedy, keď je koreňom jej minimálneho polynómu.
3. (Cayley-Hamiltonova veta) Ak $p(\lambda)$ je charakteristický polynóm matice A, tak $p(A) = 0_{n\times n}$.
4. Minimálny polynóm matice $A \in C^{n\times n}$ je deliteľom jej charakteristického polynómu.

Dôkaz. Tvrdenie 1 sme už dokázali.
2. Ak $m(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1}(\lambda - \lambda_2)^{k_2} \cdots (\lambda - \lambda_m)^{k_m}$ je kanonický rozklad minimálneho polynómu matice A, tak

$$0_{n\times n} = m(A) = (A - \lambda_1 I)^{k_1}(A - \lambda_2 I)^{k_2} \cdots (A - \lambda_m I)^{k_m}$$

Pre každé $i = 1, 2, \ldots, m$ je polynóm $f(\lambda) = m(\lambda)/(\lambda - \lambda_i)$ menšieho stupňa ako $m(\lambda)$, preto $B = f(A) \neq 0_{n\times n}$. Teda ak by bola matica $(A - \lambda_i I)$ regulárna, tak by

$$0_{n\times n} = (A - \lambda_i I)B \implies (A - \lambda_i I)^{-1} 0_{n\times n} = B = 0\,.$$

Matica B je ale nenulová, preto neexistuje $(A - \lambda_i I)^{-1}$, teda λ_i je vlastné číslo matice A. Ukázali sme, že každý koreň minimálneho polynómu je vlastné číslo matice A.

Naopak, ak by vlastné číslo μ matice A nebolo koreňom minimálneho polynómu $m(\lambda)$ matice A, tak $m(\lambda) = (\lambda - \mu)g(\lambda) + r$, kde $r = m(\mu)r \neq 0$. Potom by pre vlastný vektor $\mathbf{a}$ patriaci k vlastnému číslu μ platilo

$$m(A)\mathbf{b} = [(A - \mu I)g(A) + rI]\mathbf{b} = g(A)((A - \mu I)\mathbf{b} + r\mathbf{b} = r\mathbf{b} \neq 0_{n\times 1}\,.$$

To je v spore s tým, že $m(A) = 0_{n\times n}$.

Zvyšné dve tvrdenia vety sú zrejmým dôsledkom 2. tvrdenia.

Poznamenajme ešte, že z predchádzajúcej vety vyplýva, že korene minimálneho polynómu a charakteristického polynómu matice A sú tie isté, v minimálnom polynóme môžu mať menšiu násobnosť.

Podobnosť matíc, Jordanov tvar matice.

Teraz sa budeme zaoberať podmienkami, za ktorých matice $A, B \in C^{n\times n}$ sú maticami toho istého lineárneho operátora T (pri rôznych bázach). Presnejšie kedy existujú bázy $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$, $\mathcal{D} = \{d_1, d_2, \ldots, d_n\}$ také, že $A = [T]_{\mathcal{B}}$, $B = [T]_{\mathcal{D}}$. Pripomeňme, stĺpce matice A sú potom $A_{*k} = [Tb_k]_{\mathcal{B}}$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Hlavná otázka bude pri akej báze bude matica $[T]_{\mathcal{B}}$ „najjednoduchšia".

Definícia. Matice $A, B \in C^{n\times n}$ sa nazývajú podobné, ak $\exists$ regulárna matica P, pre ktorú $B = P^{-1}AP$.

Príklad. Daná je matica $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 8 & -11 & -8 \\ -8 & 8 & 5 \end{pmatrix}$. Považujme A za maticu lineárneho operátora $T\colon C^3 \to C^3$ vzhľadom na štandardnú bázu $\mathcal{S}$. Matica A má vlastné čísla $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = -3$. Pre túto maticu vieme nájsť bázu $C^{3\times 1}$ pozostávajúcu z jej vlastných vektorov: $\mathcal{D} = \{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3\}$, $\mathbf{d}_1 = (1, 2, -2)^\top$ $(A\mathbf{d}_1 = \mathbf{d}_1)$, $\mathbf{d}_2 = (1, 1, 0)^\top$, $\mathbf{d}_3 = (1, 0, 1)^\top$ $(A\mathbf{d}_2 = -3d_2$, $A\mathbf{d}_3 = -3d_3)$.

Zoberme $P = (\,\mathbf{d}_1 \quad \mathbf{d}_2 \quad \mathbf{d}_3\,) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $(P_{*1} = \mathbf{d}_1$, $P_{*2} = \mathbf{d}_2$, $P_{*3} = \mathbf{d}_3)$, teda $P = [I]_{\mathcal{DS}}$, preto $P^{-1} = [I]_{\mathcal{SD}}$. A ľahko sa presvedčíme, že

$$[T]_{\mathcal{D}} = [I]_{\mathcal{SD}}[T]_{\mathcal{S}}[I]_{\mathcal{DS}} = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} AP = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 6 & -9 & -6 \\ -6 & 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Teda matica operátora T vzhľadom na bázu pozostávajúcu z vlastných čísel operátora T je diagonálna.

Veta. *Matice $A, B \in C^{n\times n}$ sú podobné práve vtedy, keď sú maticami toho istého operátora $T\colon C^n \to C^n$, t.j. keď existujú bázy $\mathcal{B}$, $\mathcal{D}$ také, že $A = [T]_{\mathcal{B}}$, $B = [T]_{\mathcal{D}}$.*

Ako urobiť dôkaz vidieť z predchádzajúceho príkladu: Ak sú matice podobné $A = PBP^{-1}$, tak matica A je vzhľadom na štandardnú bázu maticou toho istého operátora ako matica B vzhľadom na bázu $\{P_{*1}, P_{*2}, \ldots, P_{*n}\}$. Naopak, ak $A = [T]_{\mathcal{B}}$, $B = [T]_{\mathcal{D}}$, tak pre $P = [I]_{\mathcal{BD}}$ platí $A = P^{-1}BP$.

Vidieť, že na nájdenie bázy, pri ktorej je matica daného operátora jednoduchá je potrebné poznať štruktúru jeho vlastných vektorov. V predchádzajúcom príklade sme našli bázu posoztávajúcu z vlastných vektorov. Pre maticu $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sa nám to nepodarí. Má len jedno vlastné číslo a k nemu príslušný vlastný podpriestor je len jednorozmerný.

Definícia. Matica $A \in C^{n\times n}$ sa nazýva diagonalizovateľná, ak je podobná diagonálnej matici.

Zrejme platí nasledujúce tvrdenie:

Veta. *Matica $A \in C^{n\times n}$ je diagonalizovateľná práve vtedy, keď existuje báza priestoru $C^{n\times 1}$ pozostávajúca z vlastných vektorov matice A.*

Definícia. Nech $A \in C^{n\times n}$. Polynóm $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$sa nazýva charakteristický polynóm matice A.

Pripomeňme, že $\lambda \in C$ je vlastné číslo matice $A \in C^{n\times n}$ vtedy a len vtedy, keď λ je koreňom jej charakteristického polynómu $p_A(\lambda)$. Vieme, že $\deg p_A(\lambda) = n$, má teda najviac n rôznych koreňov (ak ich má n, v tom prípade majú všetky násobnosť 1 a matica je diagonalizovateľná. Vyplýva to z nasledujúcej vety:

Veta. *Vlastné vektory $e_1, e_2, \dots e_n$ prislúchajúce k po dvoch rôznym vlastným číslam $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ operátora $T\colon L \to L$ sú lineárne nezávislé.*

Dôkaz. Vetu dokážeme matematickou indukciou.

1. Ak $n = 1$ tak je veta pravdivá, lebo vlastný vektor e_1 je nenulový a teda množina $\{e_1\}$ lineárne nezávislá.
2. Predpokladajme, že veta platí pre n vektorov a nech $e_1, e_2, \dots, e_n, e_{n+1}$ sú vlastné vektory prislúchajúce k po dvoch rôznym vlastným číslam $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1}$. Potom vieme, že množina $\{e_1, e_2, \dots e_n\}$ je lineárne nezávislá. Ak $\alpha_{n+1} = 0$, tak

$$\mathbf{0} = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n + \alpha_{n+1} e_{n+1} = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n \implies 0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n$$

Ak $\alpha_{n+1} \neq 0$, tak

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n + \alpha_{n+1} e_{n+1} = \mathbf{0} \implies e_{n+1} = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \dots \beta_n e_n\,,$$

kde $\beta_k = -\frac{\alpha_k}{\alpha_{n+1}}$, $k = 1, 2, \dots, n$. Teraz

$$\begin{aligned} Te_{n+1} = \beta_1 Te_1 + \beta_2 Te_2 + \dots \beta_n Te_n &= \beta_1\lambda_1 e_1 + \beta_2\lambda_2 e_2 + \dots + \beta_n\lambda_n e_n \\ Te_{n+1} = \lambda_{n+1} e_{n+1} = \lambda_{n+1}(\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \dots + \beta_n e_n) &= \beta_1\lambda_{n+1} e_1 + \beta_2\lambda_{n+1} e_2 + \dots + \beta_n\lambda_{n+1} e_n \end{aligned}$$

Z lineárnej nezávislosti množiny $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ dostaneme (odčítaním predchádzajúcich rovností):

$$\begin{aligned} \mathbf{0} = \beta_1 \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_{n+1})}_{\neq 0} e_1 + \beta_2 \underbrace{(\lambda_2 - \lambda_{n+1})}_{\neq 0} e_2 + \dots + \beta_n \underbrace{(\lambda_n - \lambda_{n+1})}_{\neq 0} e_n \\ \implies 0 = \beta_1(\lambda_1 - \lambda_{n+1}) = \beta_2(\lambda_2 - \lambda_{n+1}) = \dots = \beta_n(\lambda_n - \lambda_{n+1}) \end{aligned}$$

Pretože vlastné čísla λ_k sú po dvoch rôzne, dostávame $0 = \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_n \implies 0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n$. Potom ale máme

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n + \alpha_{n+1} e_{n+1} = \mathbf{0} \implies \alpha_{n+1} e_{n+1} = \mathbf{0} \implies \alpha_{n+1} = 0\,.$$

To je však spor s našim predpokladom, že $\alpha_{n+1} \neq 0$ a veta je dokázaná.

V prípade, že matica nie je diagonalizovateľná, „najjednoduchšia" k nej podobná matica je tzv. Jordanova forma matice.

Definícia. Matica $J_k(\lambda) = (a_{ij}) \in C^{k\times k}$ sa nazýva Jordanov blok, ak $a_{ii} = \lambda$ pre $\forall\ i = 1, 2, \dots k$, $a_{i+1,i} = 1$ pre $\forall\ i = 1, 2, \dots, k-1$.

Príklad. Nech $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$ je báza lineárneho priestoru L. Nech lineárny operátor $N\colon L \to L$ je určený vzťahmi

$$Nb_1 = b_2\,,\ Nb_2 = b_3\,,\ Nb_3 = 0\,.$$

Ľahko sa ukáže, že $N^2 \neq 0$, $N^3 = 0$ a jeho matica je

$$[N]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = J_3(0)\,.$$

Teda matica operátora N vzhľadom k báze $\mathcal{B}$ je Jordanov blok a bázové prvky majú vlastnosť: $N^k b = 0$ pre nejaké $k \in N$.

Definícia. Nech $A \in C^{n\times n}$, $\lambda \in C$. Nenulový vektor $e \in C^{n\times 1}$ sa nazýva zovšeobecnený vlastný vektor matice (operátora) A patriaci k vlastnému číslu λ, ak existuje $m \in N$, pre ktoré $(A-\lambda I)^m e = 0$.

Množinu $E = \{f_1, f_2, \ldots, f_k\} \subset C^{n\times n}$ nazývame reťazec zovšeobecnených vlastných vektorov matice A, ak

1. $f_1 \notin \operatorname{ran} A$ ($\operatorname{ran} A$ znamená obor hodnôt operátora A, t.j. $\operatorname{ran} A = \operatorname{span}\{A_{*1}, A_{*2}, \ldots, A_{*n}\}$)
2. $(A-\lambda I)f_p = f_{p+1}$, $\forall\, p = 1, 2, \ldots, k-1$.
3. $Af_k = \lambda f_k$, $f_k \neq 0$.

Nasledujúca veta sa dá jednoducho dokázať matematickopu indukciou pomocou vzťahu:

$$(A-\lambda I)(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \cdots + \alpha_k f_k) = \alpha_1 f_2 + \alpha_2 f_3 + \cdots + \alpha_{k-1} f_k\,.$$

Veta. *Nech $A \in C^{n\times n}$. Každý reťazec zovšeobecnených vlastných vektorov matice A je lineárne nezávislá množina.*

Jordanov tvar nilpotentnej matice.

Nech $0_{p\times q}$ označuje nulovú maticu z $C^{p\times q}$.

Definícia. Matica $A \in C^{n\times n}$ sa nazýva nilpotentná rádu $k \in N$, ak $A^k = 0_{n\times n}$. $A^{k-1} \neq 0_{n\times n}$.

Dá sa ukázať, že pre nilpotentnú maticu $A \in C^{n\times n}$ rádu k, pre ktorú $\dim\ker A = p$ existuje p reťazcov $E_1, E_2, \ldots, E_p$ zovšeobecnených vlastných vektorov matice A patricich k (jedinému) vlastnému číslu matice A, $\lambda = 0$.

$$E_1 = \{f_{11}, f_{12}, \ldots, f_{1k_1}\}\,,\ E_2 = \{f_{21}, f_{22}, \ldots, f_{2k_2}\}\,, \ldots,\ E_p = \{f_{p1}, f_{p2}, \ldots, f_{pk_p}\}\,,$$

tak, že $k = k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_p$. $k_1 + k_2 + \cdots + k_p = n$ a $E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_p$ je báza priestoru C^n. Hlavnú myšlienku dôkazu ukážeme na príklade troch reťazcov. Nech

$$E = \{e_1, e_2, e_3\}\,,\ F = \{f_1, f_2, f_3\}\,,\ G = \{g_1, g_2\}\,.$$

Ukážeme, že množina $E \cup F \cup G$ je lineárne nezávislá vtedy a len vtedy, keď je množina vlastných vektorov $\{e_3, f_3, g_2\}$ lineárne nezávislá: Ak je $\{e_3, f_3, g_2\}$ lineárne závislá, tak je lineárne závislá aj množina $E \cup F \cup G \supset \{e_3, f_3, g_2\}$, predpokladajme teda, že $\{e_3, f_3, g_2\}$ je lineárne nezávislá a existujú čísla $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$; $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, γ_1, γ_2, pre ktoré

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \beta_1 f_1 + \beta_2 f_2 + \beta_3 f_3 + \gamma_1 g_1 + \gamma_2 g_2 = 0\,.$$

Potom

$$\begin{aligned}
&A^2(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \beta_1 f_1 + \beta_2 f_2 + \beta_3 f_3 + \gamma_1 g_1 + \gamma_2 g_2) = \alpha_1 e_3 + \beta_1 f_3 = 0 \implies \alpha_1 = \beta_1 = 0\\
&\implies \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \beta_2 f_2 + \beta_3 f_3 + \gamma_1 g_1 + \gamma_2 g_2 = 0\,,\\
&\implies A(\alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \beta_2 f_2 + \beta_3 f_3 + \gamma_1 g_1 + \gamma_2 g_2) = \alpha_2 e_3 + \beta_2 f_3 + \gamma_1 g_2 = 0 \implies \alpha_2 = \beta_2 = \gamma_1 = 0\,.\\
&\implies \alpha_3 e_3 + \beta_3 f_3 + \gamma_2 g_2 = 0 \implies \alpha_3 = \beta_3 = \gamma_2 = 0\,.
\end{aligned}$$

Tým sme naše tvrdenie dokázali.

Veta. *Nech A je nilpotentná matica rádu k a $\dim\ker A = p$. Potom existujú $k_1, k_2, \ldots, k_p \in N$, pre ktoré platí $k = k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_p$, $k_1 + k_2 + \cdots + k_p = n$ a matica A je podobná blokovo diagonálnej matici*

$$J = \begin{pmatrix} J_{k_1}(0) & 0_{k_1\times k_2} & \ldots & 0_{k_1\times k_p}\\ 0_{k_2\times k_1} & J_{k_2}(0) & \ldots & 0_{k_2\times k_p}\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ 0_{k_p\times k_1} & 0_{k_p\times k_2} & \ldots & J_{k_p}(0) \end{pmatrix}$$

Dôkaz. Ak A je matica lineárneho operátora T vzhľadom na štandardnú bázu, tak matica J je matica lineárneho operátora T vzhľadom na bázu tvorenú vyššie popísanými p reťazcami zovšeobecnených vlastných vektorov matice A

Príklad. Nájdite Jordanov tvar nilpotentnej matice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Charakteristický polynóm matice A je $p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ 4 & -2-\lambda & 0 \\ 4 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda[(2-\lambda)(-2-\lambda)+4] = -\lambda^3$.
Teda $\sigma(A) = \{0\}$ a matica A je nilpotentná (presvedčte sa, že $A^2 = 0_{3\times 3}$.

Najprv hľadáme vlastné vektory:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \mathbf{e} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \forall (s,t) \in C^2, (s,t) \neq (0,0)\,.$$

Existujú teda dve lineárne nezávislé vlastné vektory, báza vzhľadom ku ktorej bude mať matica Jordanov tvar pozostáva z dvoch reťazcov zovšeobecnených vlastných vektorov. Najprv hľadáme vlastný vektor e_2, ku ktorému existuje $e_1 \neq 0_{3\times 1}$ také, že $Ae_1 = e_2$ (súčasne hľadáme aj e_1, teda riešime sústavu rovníc, ktorej rozšírená matica je

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & s \\ 4 & -2 & 0 & 2s \\ 4 & -2 & 0 & t \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & s \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t-2s \end{array}\right) \quad \text{pre } (s,t) = (1,2) \text{ dostaneme } e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},\ e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Na voľbu zovšeobecneného vlastného vektora e_1 bolo nekonečne veľa možností. Za e_3 zvolíme taký vlastný vektor, ktorý nie je násobkom e_2, napr. pre $(s,t) = (0,1)$ dostaneme $e_3 = (0,0,1)^\top$. Ak teraz zvolíme maticu P tak, že jej stĺpce sú $P_{*1} = e_1$, $P_{*2} = e_2$, $P_{*3} = e_3$, tak dostaneme

$$A = PJP^{-1}\,, \quad \text{kde} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_2(0) & 0_{2\times 1} \\ 0_{1\times 2} & J_1(0) \end{pmatrix}.$$

Bez dôkazu teraz uvedieme vetu o Jordanovom tvare všeobecnej matice $A \in C^{n\times n}$.

Veta. *Nech $A \in C^{n\times n}$, ktorej charakteristický polynóm má kanonickú faktorizáciu*

$$p_A(\lambda) = (-1)^n(\lambda-\lambda_1)^{m_1}(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\ldots(\lambda-\lambda_p)^{m_p}\,.$$

Potom je A podobná blokovo diagonálnej matici

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0_{m_1\times m_2} & \ldots & 0_{m_1\times m_p} \\ 0_{m_2\times m_1} & J_2 & \ldots & 0_{m_2\times m_p} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0_{m_p\times m_1} & 0_{m_p\times m_2} & & J_p \end{pmatrix}$$

Kde $J_i - \lambda_i I$ je Jordanov tvar nilpotentnej matice (lineárneho operátora $(A-\lambda_i I)|\ker(A-\lambda_i)^{m_i}$).

Poznamenajme, že J_i je Jordanov tvar matice, ktorá má jediné vlastné číslo λ_i a je tvaru

$$\begin{pmatrix} J_{k_{i1}}(\lambda_i) & 0_{k_{i1}\times k_{i2}} & \ldots & 0_{k_{i1}\times k_{im}} \\ 0_{k_{i2}\times k_{i1}} & J_{k_{i2}}(\lambda_i) & \ldots & 0_{k_{i2}\times k_{im}} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0_{k_{im}\times k_{i1}} & 0_{k_{im}\times k_{i2}} & \ldots & J_{k_{im}}(\lambda_i) \end{pmatrix}$$

kde $k_i = k_{i1} \geq k_{i2} \geq \cdots \geq k_{im}$, $k_{i1}+k_{i2}+\cdots+k_{im} = m_i$. Teda Jordanov tvar matice A je blokovo diagonálna matica, ktorá má na diagonále Jordanove bloky patriace k vlastným číslam matice A. Počet blokov patriacich k vlastnému číslu λ_i je $\dim\ker(A-\lambda_i I)$, teda počtu lineárne nezávislých vlastných vektorov patriacich k λ_i. Toto číslo sa nazýva *geometrická násobnosť* vlastného čísla λ_i a je vždy menšie alebo rovné m_i (algebraickej násobnosti λ_i ako koreňa charakteristického polynómu matice A).

Pripomeňme už dokázanú vetu:

Cayley-Hamiltonova veta.
Nech $p(\lambda)$ je charakteristický polynóm matice $A \in C^{n\times n}$. Potom $p(A) = 0_{n\times n}$.

Veta. *Nech $p(\lambda) = (-1)^n(\lambda-\lambda_1)^{m_1}(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\dots(\lambda-\lambda_p)^{m_p}$ je charakteristický polynóm matice $A \in C^{n\times n}$ a nech k_i $(i = 1, 2\dots, p)$ je rozmer najväčšieho Jordanovho bloku matice A patriaceho ku vlastnému číslu λ_i. Potom minimálny polynóm matice A je*

$$m(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{k_1}(\lambda-\lambda_2)^{k_2}\dots(\lambda-\lambda_p)^{k_p}\,.$$

Caley-Hamiltonovu aj predchádzajúcu vetu stačí dokázať pre Jordanov tvar matice, lebo minimálny aj charakteristický polynóm sa podobnosťou zachováva, stačí si uvedomiť, že $\det(P^{-1}AP) = \det A$ a že

$$\begin{aligned} A = PBP^{-1} &\implies A^2 = PB(P^{-1}P)BP^{-1} = PB^2P^{-1} \\ &\implies f(A) = Pf(B)P^{-1} \quad \text{pre } \forall \text{ polynómy } f\,, \end{aligned}$$

Príklad. Určte Jordanov tvar J a minimálny polynóm matice A. Nájdite regulárnu maticu P, pre ktorú $A = PJP^{-1}$.

a. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $[J_3(2)]$

b. $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$, $[J_2(-1) \oplus J_1(-1)]$

c. $A = \begin{pmatrix} 6 & -7 & 4 \\ 1 & -2 & -1 \\ 6 & -6 & -4 \end{pmatrix}$, $[J_2(-1) \oplus J_1(10)]$

d. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $[J_3(-1)]$

e. $A = \begin{pmatrix} 6 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, $[J_2(1) \oplus J_1(2)]$

f. $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$, $[J_2(0) \oplus J_1(1)]$

g. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $[J_3(1) \oplus J_1(1)]$

h. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$, $[J_2(0) \oplus J_2(0)]$

i. $A = \begin{pmatrix} 15 & 28 & -7 \\ -6 & -11 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, $[J_1(0) \oplus J_1(0) \oplus J_1(2)]$

j. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $[J_3(1) \oplus J_1(1)]$

k. $A = \begin{pmatrix} 11 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 9 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 11 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & 9 \end{pmatrix}$, $[J_2(8) \oplus J_1(12) \oplus J_1(12)]$

l. $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, $[J_1(3) \oplus J_3(2)$