Kapitola 7. A

Testy hypotéz o parametroch normálneho rozdelenia.

Predstavme si, že vyšetrujeme predpoklady o parametroch normálneho rozdelenia výberového súboru, pričom o normalite súboru nemáme pochybnosti (napr. otestovali sme súbor na normalitu). Na základe pozorovania sme dospeli k úvahe, že stredná hodnota μ sa rovná μ_0. Toto tvrdenie sa nazýva ***hypotéza*** a našou úlohou bude overiť túto hypotézu. V matematickej štatistike sa táto hypotéza označuje ako H_0 a nazýva sa **nulovou hypotézou**. Táto formulácia nie je úplná, lebo je treba uviesť s akou inou možnosťou počítame, ak nulová hypotéza neplatí ($\mu \neq \mu_0$, $\mu > \mu_0$, $\mu < \mu_0$). Túto druhú možnosť nazveme ***alternatívna hypotéza*** (jednoduchá alternatíva, zložená alternatíva) a označíme H_1. Overovanie hypotéz podlieha náhodným chybám, pričom môžu nastať štyri prípady:

1. nulová hypotéza platí a test ju nezamietne – nedopustili sme sa žiadnej chyby
2. nulová hypotéza platí a test ju zamietne – dopustili sme sa ***chyby prvého druhu***, ktorá býva označovaná ako α
3. nulová hypotéza neplatí a test ju zamietne – nedopustili sme sa žiadnej chyby
4. nulová hypotéza neplatí a test ju nezamietne – ***dopustili sme sa chyby druhého druhu***, ktorá býva označovaná ako β

Našou prirodzenou požiadavkou je požiadavka minimalizovať tieto chyby. Svoje rozhodnutie o zamietnutí alebo nezamietnutí nulovej hypotézy urobíme na základe náhodného výberu (nameraných údajov) z uvažovaného normálneho rozdelenia. Keďže však rozsah výberu je vopred stanovený (už bol vykonaný, nedá sa v ňom pokračovať), nedá sa súčasne minimalizovať obidve chyby naraz. Preto sa pevne volí $\alpha \in (0,1)$ - zvyčajne však $\alpha = 0,1$ alebo $\alpha = 0,05$ alebo $\alpha = 0,01$. Iné hodnoty sa skoro nepoužívajú. Tomuto číslu sa potom hovorí ***hladina významnosti***. Pri pevne danej hladine významnosti test potom konštruujeme tak, aby sa *minimalizovala chyba druhého druhu*. V podstate konštruujeme príslušný *(1-α).100 % - interval spoľahlivosti* a dodržiavame tento postup:

1. Stanovíme nulovú a alternatívnu hypotézu. Vyberieme vhodný druh testu.
2. Vypíšeme všetky známe(dané) potrebné hodnoty, ostatné odhadneme (počet meraní, hladina významnosti, odhad strednej hodnoty, disperzie)
3. Rozhodneme o testovacej štatistike a jej rozdelení
4. Vyhodnotíme test , urobíme záver t.j. nezamietneme H_0 alebo zamietneme H_0 a prijmeme alternatívnu hypotézu.

Našou úlohou teraz bude ***testovať hypotézy o strednej hodnote*** normálne rozdeleného výberového súboru v prípade

1. ak disperzia σ^2 je známa, alebo počet meraní je veľký n>120
2. ak disperzia σ^2 nie je známa a musíme ju nahradiť bodovým odhadom

Test hypotézy o strednej hodnote pri známom σ^2

Vzorový príklad 1

Pri kontrole správnosti nastavenia meracieho prístroja bolo urobených 10 meraní skúšobného etalónu so správnou hodnotou $\mu_0 = 15,2$ pričom systematická odchýlka tohto prístroja je σ=0,03. Boli namerané tieto údaje :

15,23	15,21	15,19	15,16	15,26	15,22	15,23	15,26	15,23	15,29

Riešenie

Pretože je rovnako žiaduce odhaliť kladnú aj zápornú chybu budeme testovať nulovú hypotézu oproti jednoduchej alternatíve:

$$H_0:\ \mu=15{,}2 \quad H_1:\ \mu\neq 15{,}2$$

pričom hladina významnosti α=0,05.

Spočítame bodový odhad $\bar{x}$ =15,228, α=0,05, n=10, σ=0,03. Keďže je disperzia známa testovacia štatistika bude v tvare:

$$T=\frac{(\bar{x}-\mu_0)}{\sigma}\sqrt{n}$$

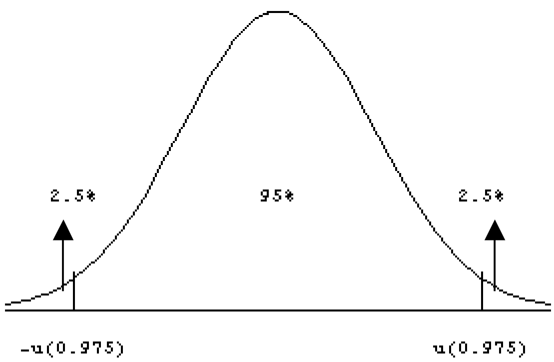
T má N(0; 1) rozdelenie a nulovú hypotézu nezamietame ak (pozri obrázok 7.1):

$$-u(0{,}975)\ \leq \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n} \leq\ u(0{,}975)$$

kde u(0,975) je príslušný kvantil normálneho rozdelenia. T=2,951 a u(0,975)=1,96, keďže T>1,96 zamietame nulovú hypotézu na príslušnej hladine významnosti a prijmeme alternatívnu hypotézu. Merací prístroj *nie je dobre nastavený*.

Vo všeobecnosti nulovú hypotézu nezamietame na hladine významnosti α , ak platí:

$$-u(1-\frac{\alpha}{2})\ \leq \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n} \leq\ u(1-\frac{\alpha}{2})$$



Obr. 7.1

Stanovíme teraz zloženú alternatívu v dvoch prípadoch:

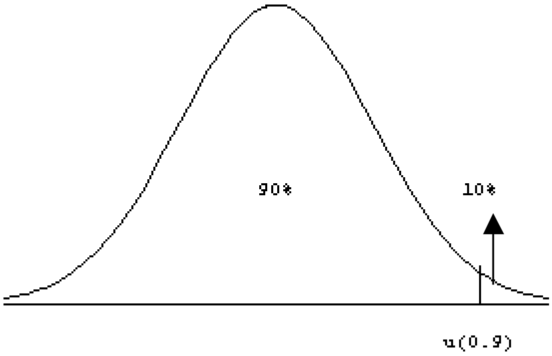
a) H_0: μ=15,2 H_1: μ >15,2 pre hladinu významnosti α=0,1,

b) H_0: μ=15,2 H_1: μ <15,2 pre hladinu významnosti α=0,1.

a) V neprospech nulovej hypotézy svedčia veľmi veľké hodnoty, hypotézu H_0 zamietame, ak

$$\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n} \geq\ u(0{,}9)$$

kde u(0,9)=1,29 je kvantil N(0, 1) rozdelenia. Keďže T> u(0,9) zamietam nulovú hypotézu na hladine významnosti α, prijímam alternatívu, merací prístroj výsledky nadhodnocuje (pozri obrázok 7.2).



Obr. 7.2

Vo všeobecnosti zamietame nulovú hypotézu v tomto prípade, ak

$$\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n} \geq u(1-\alpha)$$

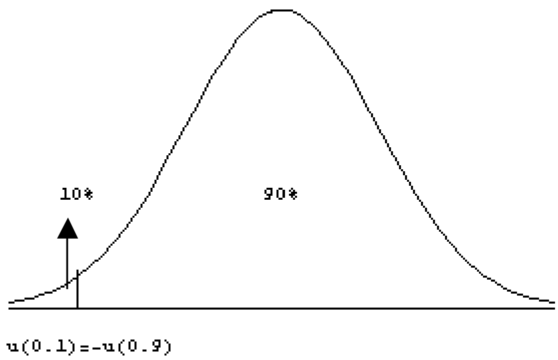
b) V neprospech nulovej hypotézy svedčia veľmi malé hodnoty, hypotézu H_0 zamietame, ak

$$\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n} \leq u(0,1) = -u(0,9)$$

kde u(0,9)=1,29 je kvantil N(0, 1) rozdelenia. Keďže T> -u(0,9) nezamietam nulovú hypotézu na hladine významnosti α, merací prístroj nepodhodnocuje (pozri obrázok 7.3).

Vo všeobecnosti zamietame nulovú hypotézu v tomto prípade, ak

$$\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n} \leq u(\alpha) = -u(1-\alpha)$$



Obr. 7.3

<u>Test hypotézy o strednej hodnote pri neznámom σ^2</u>

<u>Vzorový príklad 2</u>

Pri kontrole správnosti nastavenia meracieho prístroja bolo urobených 10 meraní skúšobného etalónu so správnou hodnotou $\mu_0 = 15{,}2$.

15,23	15,21	15,19	15,16	15,26	15,22	15,23	15,26	15,23	15,29

Testujte nulovú hypotézu H_0 oproti jednoduchej alternatíve, ak sigma nie je známe:

$H_0 : \mu = 15{,}2 \quad H_1: \mu \neq 15{,}2$

pričom hladina významnosti α=0,05.

Riešenie
Spočítame bodový odhad $\bar{x}$ =15,228, α=0,05, n=10. Ak σ nie je známe, treba ho odhadnúť z nameraných údajov. Odhadom $\sigma = \sqrt{Var(X)}$ je výberová smerodajná odchýlka v tvare:

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{n-1}\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n(\bar{x})^2 \Big)}$$

Pri teste preto použijeme štatistiku

$$T = \frac{\bar{x}-\mu_0}{s_x}\sqrt{n} \quad \approx \quad t_{n-1}$$

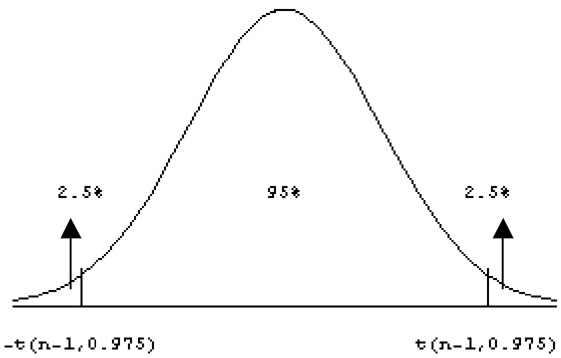
Táto štatistika má *Studentovo t-rozdelenie* s n-1 stupňami voľnosti. Je to symetrické rozdelenie, ktorého hodnoty sú pre príslušné stupne voľnosti a hladiny významnosti α tabelované. Nulovú hypotézu nezamietame na hladine významnosti α=0,05 ak

$$-t_{n-1}(0{,}975) \le \frac{\bar{x}-\mu_0}{s_x}\sqrt{n} \le t_{n-1}(0{,}975)$$

Keďže s_x=0,037, T=2,39 a $t_9(0{,}975) = 2{,}262$ na tejto hladine významnosti α zamietame nulovú hypotézu. Vo všeobecnosti nulovú hypotézu nezamietame na hladine významnosti α, ak platí:

$$-t_{n-1}(1-\frac{\alpha}{2}) \le \frac{\bar{x}-\mu_0}{s_x}\sqrt{n} \le t_{n-1}(1-\frac{\alpha}{2})$$

kde $t_{n-1}(1-\frac{\alpha}{2})$ je kvantil t-rozdelenia.



Obr. 7.4.

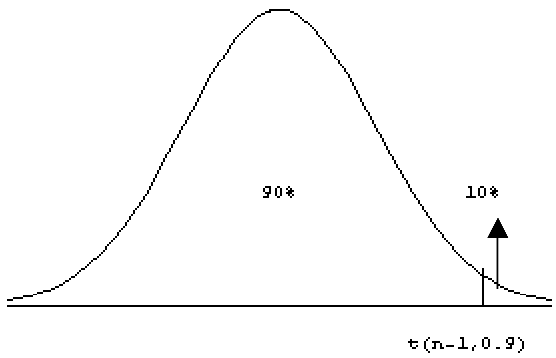
Merací prístroj teda *nie je dobre nastavený*. Stanovíme teraz zloženú alternatívu v dvoch prípadoch
a) H_0: $\mu = 15{,}2$ H_1: $\mu > 15{,}2$ pre hladinu významnosti α=0,1,
b) H_0: $\mu = 15{,}2$ H_1: $\mu < 15{,}2$ pre hladinu významnosti α=0,1.

a) V neprospech nulovej hypotézy svedčia veľmi veľké hodnoty, hypotézu H_0 zamietame, ak

$$\frac{\bar{x}-\mu_0}{s_x}\sqrt{n} \ge t_{n-1}(0{,}9)$$

kde $t_9(0{,}9)$ =1,38 je kvantil t-rozdelenia rozdelenia. Keďže T> $t_9(0{,}9)$ zamietame nulovú hypotézu na hladine významnosti α, prijímame alternatívnu hypotézu, že merací prístroj nadhodnocuje (pozri obrázok 7.5).
Vo všeobecnosti nulovú hypotézu zamietame na hladine významnosti α ak

$$\frac{\bar{x}-\mu_0}{s_x}\sqrt{n} \geq t_{n-1}(1-\alpha)$$



Obr. 7.5

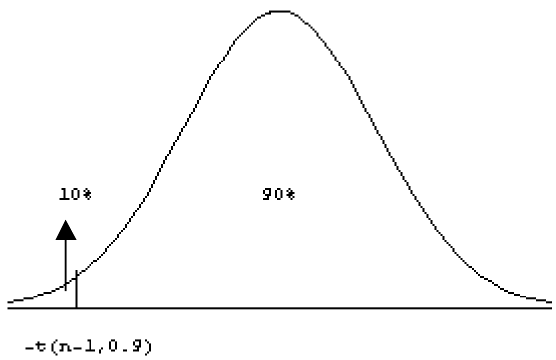
c) V neprospech nulovej hypotézy svedčia veľmi malé hodnoty, hypotézu H_0 zamietame, ak

$$\frac{\bar{x}-\mu_0}{s_x}\sqrt{n} \leq t_{n-1}(0.1) = -t_{n-1}(0{,}9)$$

kde - $t_9(0{,}9)$ = -1,38 je kvantil t-rozdelenia rozdelenia. Keďže T> - $t_9(0{,}9)$ nezamietame nulovú hypotézu na hladine významnosti α, zdá sa, že merací prístroj nepodhodnocuje.

Vo všeobecnosti nulovú hypotézu zamietame na hladine významnosti α ak

$$\frac{\bar{x}-\mu_0}{s_x}\sqrt{n} \leq t_{n-1}(\alpha) = -t_{n-1}(1-\alpha)$$



Obr. 7.6

<u>Testy hypotéz pre neznáme σ alebo σ^2</u>

<u>Vzorový príklad 3</u>
Zo základného súboru s rozdelením N(μ ;σ^2) sa urobil náhodný výber s nasledujúcimi výsledkami

51,3	62,8	51,9	57	55,3	52,1	58,4

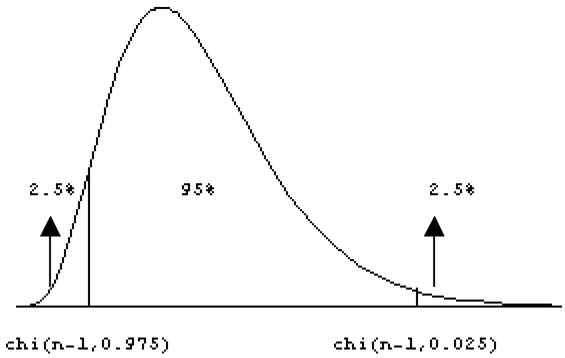
a) Testujte na hladine významnosti α=0,05 hypotézu

H$_0$: σ_0^2=16 oproti jednoduchej alternatíve H$_1$: $\sigma_0^2 \neq 16$

Riešenie

Pri teste použijeme štatistiku T = $\frac{n-1}{\sigma_0^2} s_x^2 \approx \chi_{n-1}^2$, ktorá má *chí- kvadrát rozdelenie* s (n-1) stupňami voľnosti. Hypotézu H$_0$ nezamietame na hladine významnosti α, ak platí:

$$\chi_{n-1}^2\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) \leq \frac{n-1}{\sigma_0^2} s_x^2 \leq \chi_{n-1}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$



Obr. 7.7

kde $\chi_{n-1}^2(1-\frac{\alpha}{2})$ a $\chi_{n-1}^2(\frac{\alpha}{2})$ sú kritické hodnoty chí kvadrát rozdelenia. Keďže $s_x^2 = 17{,}68$, σ_0^2=16, $\chi_6^2(0{,}025)$ =14,45 a $\chi_6^2(0{,}925)$=1,24 a T=6,63 nezamietame nulovú hypotézu na hladine významnosti α a prijímame alternatívu (pozri obrázok 7.7).

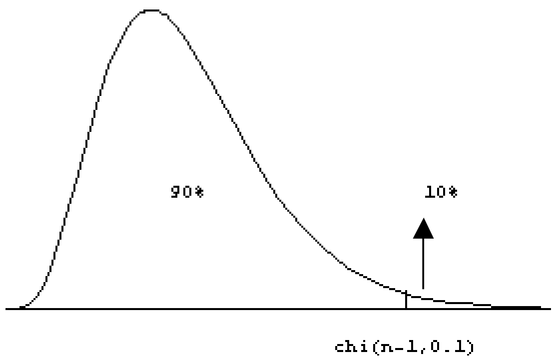
b) Na hladine významnosti α=0,1 testujte hypotézu

H$_0$: σ_0^2=16 oproti zloženej alternatíve H$_1$: σ_0^2>16

V neprospech hypotézy H$_0$ svedčia veľmi veľké hodnoty a tak H$_0$ zamietame, ak

$$\frac{n-1}{\sigma_0^2} s_x^2 \geq \chi_{n-1}^2(\alpha)$$

Keďže $\chi_6^2(0{,}1)$ =10,64 a T=6,63 zamietame nulovú hypotézu na hladine významnosti α=0,1 (pozri obrázok 7.8).



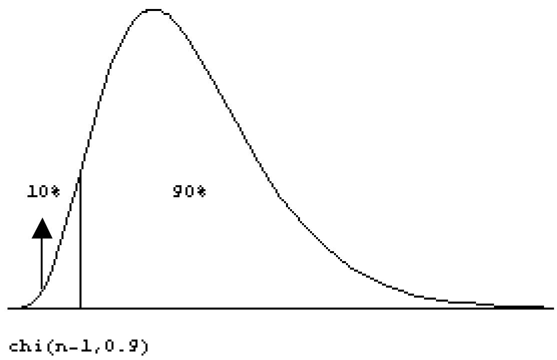
Obr. 7.8

H$_0$: σ_0^2=16 oproti zloženej alternatíve H$_1$: σ_0^2<16

V neprospech hypotézy H$_0$ svedčia veľmi malé hodnoty a tak H$_0$ zamietame, ak

$$\frac{n-1}{\sigma_0^2} s_x^2 \quad \leq \quad \chi_{n-1}^2(1-\alpha)$$

Keďže $\chi_6^2(0,9)$=2,2 a T=6,63 nezamietame nulovú hypotézu na hladine významnosti α=0,1 (pozri obrázok 7. 9).



Obr. 7.9
.

Poznámka
Matematické vyjadrenie krivky hustôt χ^2 a Studentovho t-rozdelenia a tvary kriviek týchto rozdelení možno nájsť v kapitole 4. B.

Nové pojmy a definície kapitoly 7. A

- *nulová a alternatívna hypotéza*
- *zložená a jednoduchá alternatíva*
- *hladina významnosti*
- *chyba prvého a druhého druhu*
- *testy hypotéz*

Cvičenia

Príklad 1
Pri meraní koeficientu tepelnej vodivosti tehlovej steny sme namerali tieto hodnoty:

0,62	0,64	0,57	0,61	0,59	0,57	0,62	0,59

Na hladine významnosti α=0,05 testujte nulovú hypotézu μ=0,6 oproti alternatíve μ≠0,6. Výsledky interpretujte.

Príklad 2
Zisťoval sa percentuálny obsah železa vo vzorkách železnej rudy. Výsledky sú zaznamenané v tabuľke početností

x_i	9	11	12	14	15	16	17	18	20	21

n_i	1	2	3	4	7	5	4	3	2	1

a) Na hladine významnosti α=0,01 testujte nulovú hypotézu μ=15 oproti alternatíve $\mu \neq$15.
b) Zistite, či má zmysel ťažiť rudu na danom mieste, ak ťažiť sa oplatí vtedy, keď obsah železa vo vzorkách je v priemere aspoň 13 %? Testujte na hladine významnosti α=0,05

Príklad 3
Denný prietok vody má normálne rozdelenie. Výsledky dlhodobého pozorovania sú zaznačené v tabuľke triedneho rozdelenia početností

x_i	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75
n_i	4	6	8	15	25	20	8	7	5	2

Na hladine významnosti α=0,05 testujte nulovú hypotézu μ=50 oproti alternatíve $\mu \neq$50. Výsledky interpretujte.

Príklad 4
Firma, ktorá sa zaoberala výrobou výliskov z plastických hmôt, chce poznať účinok technologického procesu na kmitanie podlahy vo výrobnej hale. Ohrozenie podlahy sa hodnotí pomocou vibrácií, ktorými sa podlaha rozkmitá v dôsledku nárazov pri lisovaní. Pomocou snímačov na podlahe sme urobili 50 meraní maximálnych výchyliek a vypočítali aritmetický priemer (2,25mm) a odhad rozptylu (0,73). Testom sme zistili, že ide o výber z normálneho rozdelenia. Testujte na hladine významnosti α =0,05:
a) Či maximálna výchylka sa rovná 2,75 (čo je povolená norma).
b) Či technologický proces nespôsobuje výchylky vyššie ako povoľuje norma.
c) Či rozptyl sa rovná 0,81.

Príklad 5.
Merala sa vlhkosť štrku v percentách s nasledovnými výsledkami

14,9	13,9	12,1	14	14,1	14,1	15	14,2	13,8

Výrobca garantuje 14 % vlhkosť štrku. Testujte na hladine významnosti α=0,05, či sa tvrdenie výrobcu zhoduje so skutočnosťou.

Riešenia

Príklad 1
$-2{,}364=t_7(0{,}025)<T=0{,}139< t_7(0{,}975)=2{,}364$, nezamietam H_0

Príklad 2
a) T=0,715 , $t_{31}(0{,}995)=2{,}744$, $|T| \leq 2{,}744$, nezamietam H_0
b) T=4,875, $t_{31}(0{,}05)=1{,}695$, T>1,695, nezamietam H_0, ťažiť na tomto mieste sa oplatí.

Príklad 3
T=1,0874, $t_{99}(0{,}975)=1{,}984$, $|T| \leq 1{,}984$, nezamietam H_0, dá sá potvrdiť, že denné prietoky vody sú na úrovni $50m^3$.

Príklad 4
a) T=-4,138, $t_{49}(0{,}975)=2{,}009$, $|T| > 2{,}009$, zamietam H_0, zdá sa, že výchylky budú nižšie.
b) T=-4,138, $t_{49}(0{,}95)=1{,}676$, T<1,676 hypotézu H_0 nezamietam, výchylky nebudú vyššie ako je stanovená norma.
c) T=44,16, $\chi^2_{49}(0{,}975)$ =31,554, $\chi^2_{49}(0{,}025)$ =70,222, 31,554<44,16<70,222, nezamietam hypotézu H_0

Príklad 5

T=0,04, , $t_8(0{,}975)=2{,}306$, $|T| \leq 2{,}306$, hypotézu H_0 nezamietam, tvrdenie výrobcu sa zhoduje so skutočnosťou.