18. Priestor $W_2^k(G)$

Uvažujme opäť oblasť G s Lipschitzovskou hranicou Γ. Označme $C^\infty(\overline{G})$ lineárny priestor spojitých funkcií so spojitými deriváciami všetkých rádov v uizavretej oblasti $\overline{G}$. ďalej označme $C_0^\infty(\overline{G})$ LP všetkých funkcií z $C^\infty(\overline{G})$ s kompaktným nosičom v G.

Priestor $L_2(G)$ sme už podrobne popídsali a pracovali s ním v predchádzajúcich častiach.

Definícia 18.1.:

Nech k je celé nezáporné číslo. Symbolom

(18.1) $(u,v)_{W_2^k(G)}, \quad u,v \in C^\infty(\overline{G})$

budeme rozumieť súčet skalárnych súčinov (v $L_2(G)$) funkcií u a v a ich derivácií podľa tých istých premenných až do rádu k vrátane.

Príklad 18.1.:

N=1:

(18.2) $$(u,v)_{W_2^1(a,b)} = (u,v)_{L_2(a,b)} + (u',v')_{L_2(a,b)} = \int_a^b uv\,dx + \int_a^b u'v'\,dx$$

(18.3) $$(u,v)_{W_2^2(a,b)} = (u,v)_{L_2(a,b)} + (u',v')_{L_2(a,b)} + (u'',v'')_{L_2(a,b)} =$$

$$\int_a^b uv\,dx + \int_a^b u'v'\,dx + \int_a^b u''v''\,dx$$

N=2: vynecháme označenie oblasti G

(18.4) $$(u,v)_{W_2^1} = (u,v)_{L_2} + \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial v}{\partial x_1}\right)_{L_2} + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}, \frac{\partial v}{\partial x_2}\right)_{L_2} =$$

$$\int_G uv\,dx + \int_G \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_1}\,dx + \int_G \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_2}\,dx$$

Príklad 18.2.:

Všeobecný N- rozmerný prípad.

Označme i vektor tzv. multiindex : $i = (i_1, i_2, \ldots, i_N)$, kde zložky sú celé nezáporné čísla (teda niektoré môžu byť aj nulové).

Označíme:

$D^i u = \dfrac{\partial^{i_1+i_2+\ldots+i_N} u}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_N^{i_N}}$ alebo ak označíme

$|i| = i_1 + i_2 + \ldots + i_N$, potom $D^i u = \dfrac{\partial^{|i|} u}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_N^{i_N}}$.

V tomto prípade definujeme

(18.5) $(u,v)_{W_2^k} = \sum_{|i|\le k} \int_G D^i u D^i v dx, \quad u,v \in C^\infty(\overline{G})$

Sumácia cez $|i| \le k$ znamená, že treba vyčerpať všetky navzájom rôzne vektory $i = (i_1, i_2, ..., i_N)$, pre ktoré platí $|i| = i_1 + i_2 + ... + i_N \le k$.

Tvrdenie 18.1.: Ukážte, že vzťahom (18.5) je na LP $C^\infty(\overline{G})$ definovaný skalárny súčin.
Obvyklým spôsobom potom definujeme normu a metriku odovdenú od tohto skalárneho súčinu.

Definícia 18.2.:
Vzťah

(18.6) $\|u\|_{W_2^k} = \sqrt{(u,u)_{W_2^k}}, \quad u \in C^\infty(\overline{G})$ definuje normu a

(18.7) $\rho(u,v)_{W_2^k} = \|u - v\|_{W_2^k}, \quad u,v \in C^\infty(\overline{G})$ definuje metriku.

Takže LP $C^\infty(\overline{G})$ sa stáva metrickým priestorom, označme ho $S_2^k(G)$, stručne S_2^k.
Tento priestor je unitárny so skalárnym súčinom (18.5), normou (18.6) a metrikou (18.7).
Poznámka 18.1.: Druhá mocnina normy funkcie u z $C^\infty(\overline{G})$ v priestore $S_2^k(G)$ je teda súčet druhých mocnín noriem funkcie u a všetkých jej parciálnych derivácií do k-teho rádu včítane v priestore $L_2(G)$. Odtiaľ ihneď dostávame

$$\rho^2(u,v)_{W_2^k} = \|u - v\|^2_{W_2^k} = \sum_{|i|\le k} \rho^2(D^i u, D^i v)_{L_2}.$$

Konvergencia v priestore $S_2^k(G)$ teda znamená:

(18.8) $\lim\limits_{n\to\infty} \|u_n - u\|^2_{W_2^k} = \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{|i|\le k} \|D^i u_n - D^i u\|^2_{L_2} = 0$, odkiaľ plynie :

Tvrdenie 18.2.:
Postupnosť $\{u_n\}$ konverguje v priestore $S_2^k(G)$ k prvku u práve vtedy, keď konverguje postupnosť $\{u_n\}$ a postupnosti príslušných derivácií $\{D^i u_n\}$, $|i| \le k$ k funkcii u a k jej deriváciám $D^i u$ v priestore $L_2(G)$.

Tvrdenie 18.3.:
Postupnosť $\{u_n\}$ je cauchyovská v priestore $S_2^k(G)$ práve vtedy, keď postupnosť $\{u_n\}$ a postupnosti príslušných derivácií $\{D^i u_n\}$, $|i| \le k$ sú cauchyovské v priestore $L_2(G)$.

Poznámka 18.2.: Pre k=0 dostávame skalárny súčin, normu a metriku priestoru $L_2(G)$.

Poznámka 18.3.: Nech u je z $S_2^k(G)$ a nech φ je **funkcia s kompaktným nosičom** v G. Podľa Greenovej vety pre každé j, $1 \le j \le N$ platí

$$(18.9) \quad \int_G \frac{\partial u}{\partial x_j} \varphi dx = -\int_G u \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx$$

Všeobecne dostávame

$$(18.10) \quad \int_G D^i u \varphi dx = (-1)^{|i|} \int_G u D^i \varphi dx, \quad \varphi \in C_0^\infty(G), \quad u \in S_2^k(G).$$

Preberme teraz otázku úplnosti priestoru $S_2^k(G)$. Podobne ako pri zuplnení priestoru $L_2(G)$ hneď vidieť, že tento priestor nie je úplný.
Pre prípad k=0 úplným priestorom, ktorý obsahuje $S_2^k(G)$ je práve priestor $L_2(G)$. V ňom navyše je LP $C^\infty(\overline{G})$ hustý. V tomto prípade sa skalárny súčin (18.5) rozšíri prirodzeným spôsobom z priestoru $C^\infty(\overline{G})$ na priestor $L_2(G)$, ktorý je úplný.
V prípade k>0 sa ale skalárny súčin (18.5) nedá prirodzeným spôsobom rozšíriť na všetky funkcie z $L_2(G)$, pretože nie všetky funkcie z tohto priestoru majú (aspoň v nejakom rozumnom zmysle) požadované derivácie. Avšak aj v tomto prípade sa dá vytvoriť úplný priestor.

Uvažujme ľubovoľnú postupnosť $\{u_n\}$ cauchyovskú v $S_2^k(G)$. Sú možné tieto dva prípady:
a) postupnosť $\{u_n\}$ je v priestore $S_2^k(G)$ konvergentná, teda konverguje aj spolu s postupnosťami jej príslušných derivácií v priestore $L_2(G)$.
b) postupnosť $\{u_n\}$ nie je v priestore $S_2^k(G)$ konvergentná. Ale keďže je cauchyovská , je aj každá z postupností $\{D^i u_n\}$, $|i| \le k$ cauchyovská v $L_2(G)$. Toto je ale úplný priestor a teda každá z týchto postupností má v ňom určitú limitu, označme ju $v^{(i)}$:

$$(18.11) \quad \lim_{n\to\infty} D^i u_n = v^{(i)} \quad v \quad L_2(G).$$

Pre $|i| = 0$, označíme príslušnú limitu u:

$$(18.12) \quad \lim_{n\to\infty} u_n = u \quad v \quad L_2(G).$$

O funkciách $v^{(i)}$, $|i| \ge 1$ nemôžeme teraz tvrdiť, že sú deriváciami limitnej funkcie u lebo o nej vieme zatiaľ len to, že patrí do $L_2(G)$.
Tieto funkcie nazveme **zovšeobecnenými deriváciami funkcie u.** Keďže $\{u_n\}$ je v $S_2^k(G)$, z Greenovej vety pre každé i, $1 \le |i| \le k$, a pre každé $\varphi \in C_0^\infty(G)$ platí

(18.13) $\int_G D^i u_n \varphi dx = (-1)^{|i|} \int_G u_n D^i \varphi dx$.

Ak teraz v tomto vzťahu prejdeme k limite, dostávame:

(18.14) $\int_G v^{(i)} \varphi dx = (-1)^{|i|} \int_G u D^i \varphi dx, \quad 1 \le |i| \le k, \quad \varphi \in C_0^\infty(G).$

Takto teda definujeme zovšeobecnené derivácie funkcie u. Zostáva vyšetriť otázku, či môže nastať prípad, kedy dve cauchyovské postupnosti $\{u_n\}$ a $\{\tilde{u}_n\}$, ktoré majú tú istú limitu (18.12) majú rôzne limity (18.11)? To by totož znamenalo, že tá istá funkcia by mala rôzne zovšeobecnené derivácie.

Ukážeme sporom:

Nech máme cauchyovskú postupnosť $\{u_n\}$ v priestore $S_2^k(G)$, pre ktorú platí (18.11) a (18.12) a postupnosť $\{\tilde{u}_n\}$ v priestore $S_2^k(G)$, pre ktorú platí (18.12) a pre derivácie platí

(18.15) $\lim_{n \to \infty} D^i \tilde{u}_n = \tilde{v}^{(i)} \quad v \quad L_2(G), \quad 1 \le |i| \le k.$

Podobne ako v predchádzajúcej úvahe aj pre tieto derivácie máme:

(18.16) $\int_G \tilde{v}^{(i)} \varphi dx = (-1)^{|i|} \int_G u D^i \varphi dx, \quad 1 \le |i| \le k, \quad \varphi \in C_0^\infty(G).$

Teraz pre pevné i, $1 \le |i| \le k$, odčítame (18.16) od (18.14) a máme:

(18.17) $\int_G (v^{(i)} - v^{(i)}) \varphi dx = 0, \quad \varphi \in C_0^\infty(G).$

Tento vzťah ale platí pre každú funkciu $\varphi \in C_0^\infty(G)$ a LP $C_0^\infty(G)$ je hustý v priestore $L_2(G)$, z toho okamžite dostávame:

(18.18) $\tilde{v}^{(i)} = v^{(i)}$, pre každé i, $1 \le |i| \le k$.

Zovšeobecnené derivácie sú teda určené jednoznačne. Budeme pre ne používať ten istý symbol ako pri klasických deriváciách to jest $D^i u$. Z definície ihneď vyplýva, že $D^i u \in L_2(G)$.

Veľmi jednoduchou úvahou sa dá presvedčiť, že ak funkcia u je dostatočne hladká , pojem zivšeobecnenej a klasickej derivácie splývajú.

Ak pridáme k prvkom priestoru $S_2^k(G)$ všetky limitné funkcie z (18.12), dostaneme určitý lineárny priestor, ktorý označíme E_k a na ňom definujeme

(18.19) $(u, v)_{W_2^k} = \sum_{|i| \le k} \int_G D^i u D^i v dx, \quad u, v \in E_k$ skalárny súčin**.**

Tento je rozšírením skalárneho súčinu definovaného vzťahom (18.5). Tento príslušný unitárny priestor je úplný, teda Hilbertov priestor (konštrukcia je podobná ako v kapitole pri konštrukcii priestoru H_A).

Definícia 18.3.: Hilbertov priestor , ktorého prvky tvoria prvky LP E_k a v ktorom je skalárny súčin definovaný vzťahom (18.19), nazveme priestorom $W_2^k(G)$, stručne W_2^k. Z jeho konštrukcie plynie, že

- LP $C^\infty(\overline{G})$ je v $W_2^k(G)$ **hustý**

- norma a metrika sa definuje vzťahmi (18.6), (18.7)
- platí vzťah (18.8)
- dá sa ukázať, že priestor $W_2^k(G)$ je **separabilný.** Príkladom spočítateľnej hustej množiny v $W_2^k(G)$ je množina všetkých polynémov v N premenných s racionálnymi koeficientami

Poznámka 18.4: Konštrukciu Hilbertovho preistoru $W_2^k(G)$ možno urobiť aj inak. Najskôr sa definujú zovšeobecnené derivácie a potom sa zavedie skalárny súčin, na základe ktorého sa konštruuje uinitárny priestor a ukáže sa, že je to priestor úplný. Pre oblasti s Lipschitzovskou hranicou sa ukáže, že obe tieto konštrukcie vedú k tomu istému funkcionálnemu priestoru.

Poznámka 18.5. Pre k=0 platí $W_2^0(G) = L_2(G)$. Pre k>0 tvoria prvky priestoru $W_2^k(G)$ tie prvky z $L_2(G)$, ktoré majú zovšeobecnené derivácie v zmysle predchádzajúcej definície, do k-teho rádu včítane.

Tvrdenie 18.4.: Ak prvok $u \in W_2^k(G)$, potom platí

1. $u \in W_2^n(G), \quad 0 \le n \le k;$
2. ich zovšeobecnené derivácie $D^i u, |i| < k$ patria do priestoru $W_2^{k-|i|}(G)$ a platí $D^i(D^j u)=D^{i+j}u$, kde i+j je súčet týchto vektorov.

Poznámka 18.6.: Ak sme v jednorozmernom prípade N=1, potom funkcia $u \in W_2^1(a,b)$ je funkcia absolútne spojitá . Skoro všade v (a,b) existuje $u'(x)$, ktorá je skoro všade rovná zovšeobecnenej derivácii. Funkcia, ktorá má v nejakom bode skok teda nemôže byť z priestoru $W_2^1(a,b)$.

19. Stopy funkcií z priestoru $W_2^k(G)$ Priestor $\dot{W}_2^k(G)$ Zovšeobecnená Friedrichsova a Poincaréova nerovnosť

Pre každú funkciu spojitú v $\overline{G}$ a tým skôr pre funkcie z $C^\infty(\overline{G})$ sú jednoznačne dané hodnoty tejto funkcie na hranici oblasti G. Funkciu u(S) , $S \in \Gamma$ budeme nazývať **stopa funkcie** u z $C^\infty(\overline{G})$ na Γ. Táto je na hranici Γ spojitá a teda integrovateľná s druhou mocninou a preto platí

(19.1) $u(x) \in C^\infty(\overline{G}) \Rightarrow u(S) \in L_2(\Gamma)$

Rozšírenie pojmu stopy funkcie aj na funkcie, ktoré nie sú z LP $C^\infty(\overline{G})$ umožňuje nasledujúca veta:
Veta 19.1.: Nech G je oblasť s Lipschitzovskou hranicou. Potom existuje a to práve jeden ohraničený lineárny operátor T, ktorý zobrazuje priestor $W_2^1(G)$ do priestoru $L_2(\Gamma)$ tak, že pre u(x) z $C^\infty(\overline{G})$ je Tu(x) = u(S).

Na základe tejto vety je každej funkcii z $W_2^1(G)$ priradená určitá funkcia z $L_2(\Gamma)$, **stopa** na hranici Γ.
Toto zobrazenie má rozumné vlastnosti:

- funkciám z $C^\infty(\overline{G})$ priraďuje ich stopu na Γ.
- T je spojitý a teda dvom „blízkym“ funkciám vo $W_2^1(G)$ priradí dve „blízke“ funkcie v $L_2(\Gamma)$.
- z hustoty LP $C^\infty(\overline{G})$ vo $W_2^1(G)$ vyplýva, že stopu funkcie nepatriacej do $C^\infty(\overline{G})$ možno pokladať za limitu v priestore $L_2(\Gamma)$ postupnosti stôp $u_n(S)$ funkcií $u_n(x)$ z $C^\infty(\overline{G})$ a konvergujúcich vo $W_2^1(G)$ k uvažovanej funkcii u z $W_2^1(G)$.
- ak je u spojitá v $\overline{G}$ stopa je daná jej hodnotami na hranici.

Poznámka 19.1.: Ak je funkcia u z $W_2^2(G)$, potom aj táto funkcia aj všetky je parciálne derivácie patria do $W_2^1(G)$. Z vety 19.1 potom dostávame, že nielen samotná funkcia u ale aj všetky jej parciálne derivácie majú stopy na hranici Γ.
Všeobecne: ak je funkcia $u \in W_2^k(G)$, potom všetky jej derivácie $D^i u$ pre $|i| \le k-1$ sú z $W_2^1(G)$ V tomto zmysle každej tejto derivácii $D^i u(x)$ odpovedá stopa funkcie $D^i u(S)$ z $L_2(\Gamma)$. Túto funkciu potom nazývame **stopou funkcie $D^i u(x)$.**
Poznámka 19.2.: Pretože hranica Γ je lipschitzovská, normála k nej existuje skoro všade a definícia stôp funkcie umožňuje definovať pojem derivácie funkcie $u \in W_2^k(G)$ pre $k \ge 2$ podľa normály:

$$(19.2.)\quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial x_j}(S)\nu_j(S), \quad u \in W_2^k(G), \quad k \ge 2\,.$$

Poznámka 19.3.: Dá sa veta 19.1. obrátiť? Je každá funkcia $v(S) \in L_2(\Gamma)$ stopou nejakej funkcie $u \in W_2^1(G)$? Toto tvrdenie neplatí.
Platí ale, že stopy funkcií, ktoré patria do priestoru $W_2^1(G)$ sú v $L_2(\Gamma)$ husté.

Veta 19.2.: (Friedrichsova nerovnosť) Nech G je oblasť s Lipschitzovskou hranicou. Potom exisuje konštanta $k_1>0$ závislá len na danej oblasti a taká, že pre každú funkciu $u \in W_2^1(G)$ platí:

$$(19.3)\quad \|u\|^2_{W_2^1(G)} \le k_1 \left\{ \sum_{k=1}^{n} \int_G \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 dx + \int_\Gamma u^2(s)\, ds \right\}$$

V prvom integrály sú zobecnené derivácie a v druhom stopa funkcie u.
Táto veta môže mať aj všeobecnejší tvar:

Veta 19.3: Nech G je oblasť s Lipschitzovskou hranicou Γ a Γ_1 je jej časť majúca kladnú Lebesgueovu mieru, $m\Gamma_1>0$. Potom exisuje konštanta $k_2>0$ závislá len na danej oblasti a na Γ_1 a taká, že pre každú funkciu $u \in W_2^1(G)$ platí:

$$(19.4)\quad \|u\|^2_{W_2^1(G)} \le k_2 \left\{ \sum_{k=1}^{n} \int_G \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 dx + \int_{\Gamma_1} u^2(s)\, ds \right\}$$

Veta 19.4.: Nech G je oblasť s Lipschitzovskou hranicou. Potom exisuje konštanta $k_3>0$ závislá len na danej oblasti a taká, že pre každú funkciu $u \in W_2^2(G)$ platí:

$$(19.5)\quad \|u\|^2_{W_2^2(G)} \le k_3 \left\{ \sum_{|i|=2} \int_G (D^i u)^2 dx + \int_\Gamma u^2(s)\, ds \right\}$$

Veta 19.5.: (Poincaréova nerovnosť). Nech G je oblasť s Lipschitzovskou hranicou. Potom exisuje konštanta $k_4>0$ závislá len na danej oblasti a taká, že pre každú funkciu $u \in W_2^k(G)$ platí:

$$(19.6)\quad \|u\|^2_{W_2^k(G)} \le k_4 \left\{ \sum_{|i|=k} \int_G (D^i u)^2 dx + \sum_{|i|<k} \left(\int_G D^i u dx \right)^2 \right\}.$$

Špeciálne pre k=1 máme

$$(19.7)\quad \|u\|^2_{W_2^1(G)} \le k_4 \left\{ \sum_{j=1}^{n} \int_G \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right)^2 dx + \left(\int_G u dx \right)^2 \right\}.$$

Poznámka 19.3.: V predchádzajúcej kapitole sme definovali priestor $S_2^k(G)$, ktorého prvky sú funkcie z LP $C^\infty(\overline{G})$ s príslušným skalárnym súčinom $(u,v)_{W_2^k}$ a ním indukovanou normou a metrikou.
Teraz označme priestor $D_2^k(G)$ priestor s tým istým skalárnym súčinom, ale s prvkami z LP $C_0^\infty(G)$, teda s prvkami s kompaktným nosičom v G. Zúplnením priestoru $S_2^k(G)$ sme vytvorili Hilbertov priestor $W_2^k(G)$. Ak analogicky prevedieme zúplnenie priestoru $D_2^k(G)$, dostaneme opäť Hilbertov priestor, ktorý bude podpriestorom priestoru $W_2^k(G)$. Tento priestor označíme $\dot{W}_2^k(G)$ .Funkcie tohto priestoru sa vyznačujú vlastnosťou, že sa „rovnajú nule na hranici Γ vrátane derivácií až do rádu k-1“:

$$(19.8)\quad D^i u(S) = 0 \quad \text{na} \quad \Gamma, \quad |i| \le k-1, \quad u \in \dot{W}_2^k(G).$$

Tieto vzťahy chápeme v zmysle stôp funkcie. Platí aj tvrdenie v istom zmysle obrátené, ktore je sformulované v nasledujúcej vete:

Veta 19.6.: Nech G je oblasť s Lipschitzovskou hranicou Γ. Potom

$$(19.9)\quad \left\{ v; v \in W_2^1(G), v = 0 \quad \text{na} \quad \Gamma \quad (\text{v} \quad \text{zmysle} \quad \text{stop} \right\} = \dot{W}_2^1(G)$$

$$(19.10)\quad \left\{ v; v \in W_2^2(G), D^i v = 0 \quad \text{na} \quad \Gamma \quad (\text{v} \quad \text{zmysle} \quad \text{stop} \quad \text{pre} \quad |i| \le 1 \right\} = \dot{W}_2^2(G)$$

Poznámka 19.4.: Pre $u \in \dot{W}_2^k(G)$ prejde tvrdenie (19.3) Friedrichsovej vety do tvaru:

$$(19.11)\quad \|u\|^2_{\dot{W}_2^1(G)} \le k_1 \sum_{k=1}^{n} \int_G \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 dx$$

a analogicky pre vzťah (19.5) máme:

(19.12) $\|u\|^2_{\dot{W}_2^2(G)} \le k_3 \sum_{|i|=2} \int_G (D^i u)^2 \, dx$

20. Eliptické diferenciálne operátory rádu 2k. Slabé riešenie eliptických rovníc

V zmysle symboliky z predchádzajúcich kapitol definujeme operítor 2k-teho rádu. Nech sú dané funkcie $a_{ij}(x)$, definované v oblasti G a N-rozmerné vektory **i,j** (multiindexy) s celočíselnými, nezápornými prvkami a platí:

$|i| = i_1 + i_2 + ... + i_N$, $|j| = j_1 + j_2 + ... + j_N$. Potom symbolom

(20.1) $A = \sum_{|i|,|j| \le k} (-1)^{|i|} D^i (a_{ij} D^j)$

je definovaný operátor rádu 2k.
Ak sú v oblasti G funkcie a_{ij} ako aj u dostatočne hladké, môžeme aplikovať operátor A na funkciu u v klasickom zmysle a dostávame:

(20.2) $Au = \sum_{|i|,|j| \le k} (-1)^{|i|} D^i (a_{ij} D^j u) = \sum_{|i|,|j| \le k} (-1)^{|i|} \frac{\partial^{|i|}}{\partial x_1^{i_1} ... \partial x_N^{i_N}} (a_{i_1 ... i_N j_1 ... j_N}(x) \frac{\partial^{|j|} u}{\partial x_1^{j_1} ... \partial x_N^{j_N}})$

Pre k=1 dostávame operátor druhého rádu

(20.3) $Au = -\sum_{|i|=1,|j|=1} D^i (a_{ij} D^j u) - \sum_{|i|=1,|j|=0} D^i (a_{ij} u) + \sum_{|i|=0,|j|=1} a_{ij} D^j u + a_{00} u$

Príklad 20.1.: Pre N=2, a k=1 ak platí

a_{ij} =1 pre $i = (1,0), j = (1,0)$ a $i = (0,1), j = (0,1)$

a_{ij} =0 v ostatných prípadoch, dostávame - Laplaceov operátor Δ .
Dá sa dostať aj iným spôsobom.

Príklad 20.2.: Pre N=2, a k=2 ak platí

a_{ij} =1 pre $i = (2,0), j = (2,0)$ a $i = (0,2), j = (0,2)$

a_{ij} =2 pre $i = (1,1), j = (1,1)$
a_{ij} =0 v ostatných prípadoch dostávame biharmonický operátor

$$Au = \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^{\,4}} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^{\,2} \partial x_2^{\,2}} + \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^{\,4}} = \Delta^2 u \, .$$

Dá sa dostať aj iným spôsobom

Definícia 20.1.: Hovoríme, že operátor (20.1) je eliptický v bode $P(x)=P(x_1,x_2,..., x_N)$ ak pre každý nenulový vektor $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_N)$ platí:

$$(20.4)\quad \sum_{|i|,|j|=k} a_{ij}(P)\xi_i\xi_j \neq 0,\ \text{kde}\ \xi_i = \xi_1^{i_1}\ldots\xi_N^{i_N}\ ,\ \xi_j = \xi_1^{j_1}\ldots\xi_N^{j_N}\ .$$

Hovoríme, že tento operátor **je rovnomerne eliptický v oblasti G**, ak existuje take číslo c>0, závislé len na danej oblasti a koeficientoch daného operátora a_{ij}, že pre skoro každý bod $P(x_1,x_2,\ldots, x_N)$ z G a každý nenulový vektor $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N)$ platí:

$$(20.5)\quad \sum_{|i|,|j|=k} a_{ij}(P)\xi_i\xi_j \geq c|\xi|^{2k},\ \text{kde}\ |\xi|^2 = \xi_1^2 + \ldots + \xi_N^2\ .$$

Príklad 20.3.: Operátor $-\Delta$ z príkladu 20.1 je rovnomerne eliptický v každej oblasti G a pre všetky dimenzie N

Príklad 20.4.: Biharmonický operátor Δ^2 z príkladu 20.1 je rovnomerne eliptický v každej oblasti G a pre všetky dimenzie N.

Príklad 20.5.: Operátor

$$A = \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\left(1 + x_1^2\right)\frac{\partial}{\partial x_1}\right] - 3\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$$

nie je eliptický v žiadnom bode oblasti G.

Teraz budeme definovať pojem slabého riešenia eliptickej rovnice.
Začneme príkladom Poissonovej rovnice.
Klasickým riešením rovnice

$$(20.6)\quad -\Delta u = f$$

rozumieme funkciu $u \in C^2(G)$ pre $f \in C(G)$, takú ktorá spĺňa Poissonovu rovnicu (20.6) v každom bode oblasti G.
Teraz prenásobíme rovnicu (20.6) ľubovoľnou hladkou funkciou φ s kompaktným nosičom v G a po preintegrovaní cez oblasť G dostávame:

$$(20.7)\quad -\int_G \varphi\Delta u dx = \int_G f\varphi dx$$

Použijeme Greenovu vetu ako v predchádzajúcich kapitolách ,ale pre funckie z iných priestorov:

$$(20.8)\quad \int_G b\frac{\partial c}{\partial x_i}dx = \int_\Gamma bc\nu_i dS - \int_G \frac{\partial b}{\partial x_i}c dx,\ \ b, c \in W_2^1(G)$$

Platnosť tohto vzťahu sa ľahko overí limitným prechodom so základnými znalosťami konštrukcie priestorov $W_2^k(G)$. V tomto prípade sa teda parciálne derivácie vystupujúce vo vzťahu (20.8) chápu ako zovšeobecnené derivácie a hodnoty funkcií b a c na hranici sú príslušné stopy týchto funkcií.
Využijúc vzťah (20.8) pre všetky parciálne derivácie vo vzťahu (20.7), dostaneme

$$(20.9)\quad \sum_{i=1}^{N}\int_G \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}dx = \int_G \varphi f dx,\ \ \forall\varphi \in C_0^\infty(G)$$

Hovoríme, že pre funkciu u(x) je **splnená integrálna identita (20.9).**

Ak ale pravá strana rovnice f nie je z priestoru $C(G)$, nemá rovnica klasické riešenie. Preto sa budeme zaoberať otázkou, ako zovšeobecniť riešenie aj pre tieto prípady, napríklad pre pravú stranu $f \in L_2(G)$. Ak pre pravú stranu platí táto podmienka, pravá strana integrálnej rovnice (20.9) má zmysel. Ľavá strana tejto identiny má zmysel napríklad pre funkcie $u \in W_2^1(G)$, kde príslušné derivácie sú definované v zovšeobecnenom zmysle.

Definícia 20.2.: Nech $u \in W_2^1(G)$, $f \in L_2(G)$. Ak pre funkciu u je splnená podmienka (20.9), hovoríme, že táto funkcia je **slabým riešením rovnice (20.6).** Tento pojem je definovaný rozumne, pretože naviac platí, že ak $u \in C^2(G)$ a $f \in C(G)$, potom jednoducho obráteným postupom z integrálnej identity (20.9) dostaneme

$$(20.10) \quad \int_G (\Delta u + f)\varphi dx = 0, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(G)$$

Pretože ale priestor $C_0^\infty(G)$ je hustý v priestore $W_2^1(G)$ dostávame odtiaľ

$$(20.11) \quad \Delta u + f = 0 \quad v \quad L_2(G).$$

Ak ale je $u \in C^2(G)$ a $f \in C(G)$, potom funkcia $\Delta u + f$ je spojitá v G a teda platí

$$-\Delta u = f \quad v \quad G.$$

Ak využijeme príklad 20.1, môžeme Poissonovu rovnicu zapísať v tvare:

$$(20.12) \quad \sum_{|i|,|j|\le 1} (-1)^{|i|} D^i (a_{ij} D^j u) = f$$

a integrálna identita (20.9) bude

$$(20.13) \quad \sum_{|i|,|j|\le 1} \int_G a_{ij} D^i \varphi D^j u dx = \int_G \varphi f dx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(G)$$

Ak naviac použijeme na pravej strane zápis v tvare skalárneho súčinu, máme:

$$(20.14) \quad \sum_{|i|,|j|\le 1} \int_G a_{ij} D^i \varphi D^j u dx = (f, \varphi) \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(G)$$

Cvičenie 20.1. Definujte podobným spôsobom slabé riešenie pre rovnicu s biharmonickým operátorom.

Podobne môžeme definovať aj slabér iešenie všeobecného operátora 2k-teho rádu.

Definícia 20.3.: Nech $f \in L_2(G)$ a funkcie a_{ij} sú všetky ohraničené merateľné funkcie v G. Funkciu $u \in W_2^k(G)$ nazývame **slabým riešením rovnice**

$$(20.15) \quad Au = f,$$

kde operátor A je definovaný vzťahom (20.1), ak platí

$$(20.16) \quad \sum_{|i|,|j|\le k} \int_G a_{ij} D^i \varphi D^j u dx = (f, \varphi) \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(G).$$

Poznámka 20.1.: Podobne ako pri Poissonovej rovnici platí, že ak koeficienty rovnice a riešenie spĺňajú predpoklady hladkosti, je dané slabé riešenie aj klasickým riešením.

21. Formulácia problému s okrajovými podmienkami.

Stabilné a nestabilné okrajové podmienky

Na formuláciu tohto problému použijeme teóriu vybudovanú v kapitole o stopách funkcie. Z tejto časti vieme, že ak funkcia $u \in W_2^1(G)$ má na Γ stopu u(S), potom táto gunkcia spĺňa na Γ okrajovú podmienku u=u(S) v zmysle stôp. Tento pojmr, podobne ako v predchádzajúcej kapitole umožní formulovať riešenie okrajového problému ďaleko obecnejšie ako v klasickom zmysle.

Príklad 21.1.: Ak A je operátor druhého rádu a treba riešiť okrajový problém Au=f v G a u=g(S) na Γ,kde $g \in L_2(\Gamma)$
potom riešenie nech je taká funkcia $u \in W_2^1(G)$, ktorá je slabým riešením danej rovnice v zmysle definície (20.3) a ktorá má na Γ stopu g(S).
Ak naviac $u \in W_2^2(G)$, má na Γ stopu nie len táto funkcia ale aj jej zovšeobecnené parciálne derivácie. Okrem toho, ak hranica oblasti G je Lipschitzovská, existuje skoro všade vektor vonkajšej normály , takže môžeme hovoriť aj o derivácii podľa vonkajšej normály a o Neumanovej okrajovej podmienke (uvažovanej opäť v zmysle stôp).
Poznámka 21.1.: Z predchádzajúcej časti vieme, že ak je operátor A 2k-teho rádu je riešenie $u \in W_2^k(G)$. Špeciálne pre operátor druhého rádu je riešenie $u \in W_2^1(G)$. Zobrazenie, ktoré priraďuje takejto funkcii stopu na hranici je spojité . Odtiaľ hneď dostávame, že ak konverguje postupnosť funkcií $u_n \in W_2^1(G)$ v tomto priestore k funkcii u, potom aj postupnosť ich stôp $u_n(S) \in L_2(\Gamma)$ konverguje v priestore $L_2(\Gamma)$ k stope limitnej funkcie $u(S) \in L_2(\Gamma)$.
Teda ak všetky funkcie postupnosti spĺňajú okrajovú podmienku

$u_n(S) = g(S)$ na Γ (v zmysle stôp),

potom aj ich limitná funckia spĺňa okrajovú podmienku

(21.1) $u(S) = g(S)$ na Γ (v zmysle stôp).

Podmienku (21.1) voláme preto **stabilná okrajová podmienka.**

Poznámka 21.2.: Analogicky pre operátor štvrtého rádu, bude riešenie $u \in W_2^2(G)$ a stabilné okrajové podmienky budú v tomto prípade typu:

$$u = g_0(S), \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = g_1(S), \quad \text{na} \quad \Gamma$$

Definícia 21.1.: Pre operátor 2k-teho rádu budeme pod pojmom **stabilné okrajové podmienky** rozumieť okrajové podmienky obsahujúce danú funkciu a jej derivácie do k-1 radu vrátane.
podmineky, ktoré obsahujú derivácie vyšších rádov než k-1 nazveme **nestabilnými okrajovými podmienkami.**

Príklad 21.2. Nestabilnou opkrajovou podmienkou pre Poissonovu rovnicu je Neumanova podmienka.

Cvičenie 20.2.: Uvažujme jednorozmerný prípad teda máme funkcie jednej premennej. Nech je daná funkcia:

$u(x) = 1 - x^2, \quad x \in <-1,1>$.

Uvažujme postupnosť párnych funkcií na intervale <-1,1>, ktoré sú na intervale <0,1> tvaru:

$$u_n(x) = \begin{cases} 1 - x^2, \quad x \in <0, 1-\frac{1}{n}> \\ \frac{1}{n} + (n-1)(1-x)^2, \quad x \in <1-\frac{1}{n}, 1> \end{cases}$$

Ukážte, že všetky tieto funkcie sú na intervale <-1,1> spojité aj so svojími deriváciami prvého rádu. Ďalje ukážte, že v priestore $W_2^1(-1,1)$ postupnosť funkcií u_n konverguje k funkcii u. Ukážte konvergenciu hodnôt postupnosti funkcií na hranici a tiež fakt, že derivácie týchto postupností na hranici nekonvergujú k hodnotám derivácií funkcie u na hranici.

Príklady slabých riešení pre okrajové úlohy.

Príklad 21.3: Uvažujme Poissonovu rovnicu s Dirichletovou okrajovou podmienkou:

(21.1) $-\Delta u = f, \quad u = g(S) \quad \text{na} \quad \Gamma$

Klasické riešenie tohto problému predpokladá, že funkcie v probléme spĺňajú podmienky: $f \in C(\overline{G}), \quad g \in C(\Gamma)$. Riešenie je funkcia $u \in C^2(\overline{G})$.

Podľa vyššie uvedenej teórie budeme formulovať slabé riešenie tohto problému. Označme priestor V priestor s metrikou priestoru W_2^1, ktorý spĺňa v zmysle stôp homogénnu Dirichletovu okrajovú podmienku: $v = 0 \quad \text{na} \quad \Gamma$.

Ako už bolo povedané, v tomto prípade je $V = \dot{W}_2^1$ z minulej kapitoly.
Ľubovoľnou funkciou $v \in V$ teraz prenásobme rovnicu vo vzťahu (21.1) a preintegrujeme cez oblasť G. Dostaneme:

(21.2) $-\int_G v\Delta u dx = \int_G vf dx,$

Použijúc teraz Greenovu vetu, máme ($v \in V$, teda má parciálne derivácie v zovšeobecnenom zmysle):

(21.3) $\sum_{i=1}^{N} \int_G \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = \int_G fvdx$ alebo zjednodušený zápis:

$$\int_G \nabla u . \nabla v dx = \int_G fvdx$$

Vzťah (21.3) má zmysel ak pre funkcie platí: $u \in W_2^1(G)$ a $f \in L_2(G)$.
Pojem slabého riešenia teraz môžeme definovať nasledujúcim spôsobom:
Definícia 21.2.: Nech funkcia g(S) je stopa niektorej funkcie $w \in W_2^1(G)$ a nech $f \in L_2(G)$. Označme $V = \left\{ v; v \in W_2^1(G), v = 0 \quad \text{na} \quad \Gamma \quad \text{v} \quad \text{zmysle} \quad \text{stop} \right\}$.

Funkciu $u \in W_2^1(G)$ nazveme **slabým riešením problému (21.1**) ak platí:

(21.4) $u - w \in V$

(21.5) $\sum_{i=1}^{N} \int_G \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = \int_G fvdx \quad \forall v \in V$

Takto definované slabé riešenie je v súlade s vyššie uvedenou všeobecnou definíciou slabého riešenia, pretože ľubovoľná funkcia $\varphi \in C_0^\infty(G)$ je funkcia z V a teda platí identita (21.5) aj pre takéto funkcie.
Ak je u slabé riešenie a samotné u a funkcia f spĺňajú isté podmienky hladkosti, potom sa spätným postupom dá ukázať, že je to aj klasické riešenie.
Splnenie okrajovej podmienky zaručuje vzťah (21.4). Priama definícia funkcie u, aby spĺňala hodnotu funkcie g na hranici, nie je možná ako sme sa zmienili v kapitole o stopách funkcie v poznámke 19.3.

Príklad 21.4: Uvažujme Poissonovu rovnicu s Neumannovou okrajovou podmienkou:

(21.6) $-\Delta u = f, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = h(S) \quad \text{na} \quad \Gamma$

V tomto prípade je okrajová podmienka nestabilná, preto priestor V , kde by sme kládli podmienky na splnenie stabilnej okrajovej podmienky bude rovný W_2^1.
Klasické riešenie tohto problému predpokladá, že funkcie v probléme spĺňajú podmienky: $f \in C(\overline{G}), \quad h \in C(\Gamma)$. Riešenie je funkcia $u \in C^2(\overline{G})$.

Podľa vyššie uvedenej teórie budeme formulovať slabé riešenie tohto problému. Ľubovoľnou funkciou $v \in V$ teraz prenásobme rovnicu vo vzťahu (21.6) preintegrujeme cez oblasť G. Dostaneme:

(21.7) $-\int_G v \Delta u dx = \int_G vfdx,$

Použijúc teraz Greenovu vetu, máme ($v \in V$, teda má parciálne derivácie v zovšeobecnenom zmysle):

(21.8) $\sum_{i=1}^{N} \int_G \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = \int_G fvdx + \int_\Gamma vh(S)dS$ alebo zjednodušený zápis:

$$\int_G \nabla u.\nabla v dx = \int_G fvdx + \int_\Gamma v(S)h(S)dS$$

Vzťah (21.8) má zmysel ak pre funkcie platí: $u \in W_2^1(G)$, $f \in L_2(G)$ a $h(S) \in L_2(\Gamma)$. Pojem slabého riešenia teraz môžeme definovať nasledujúcim spôsobom:

Definícia 21.3: Nech $f \in L_2(G)$ a $h(S) \in L_2(\Gamma)$.
Funkciu $u \in W_2^1(G)$ nazveme **slabým riešením problému (21.6)** ak platí:

$$\sum_{i=1}^{N} \int_G \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = \int_G fvdx + \int_\Gamma vh(S)dS \quad \forall v \in W_2^1(G) \tag{21.9}$$

Zásadný rozdiel v definícii slabého riešenia v tomto príklade a v príklade predchádzajúcom je v zahrnutí okrajovej podmienky, keďže Dirichletova podmienka je podmienka pre túto rovnicu stabilná a Neumanova podmienka je pre Poissonovu rovnicu podmienkou nestabilnou.

Príklad 21.5: Uvažujme teraz rovnicu s biharmonickým operátorom a okrajovou podmienkou:

$$\Delta^2 u = f, \quad u = g(S) \quad \text{na} \quad \Gamma, \quad Mu = h(S) \quad \text{na} \quad \Gamma, \tag{21.10}$$

$$Mu = \sigma\Delta u + (1-\sigma)\frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2}, \quad 0 \le \sigma < 1$$

Klasické riešenie tohto problému predpokladá, že funkcie v probléme spĺňajú podmienky: $f \in C(\overline{G})$, $g \in C(\Gamma)$. Riešenie je funkcia $u \in C^4(\overline{G})$.

Podľa vyššie uvedenej teórie budeme formulovať slabé riešenie tohto problému. Označme priestor V priestor s metrikou priestoru W_2^2, ktorý spĺňa v zmysle stôp homogénnu Dirichletovu okrajovú podmienku: $v = 0$ na Γ.

Ľubovoľnou funkciou $v \in V$ teraz prenásobme rovnicu vo vzťahu (21.10) a preintegrujeme cez oblasť G. Dostaneme:

$$\int_G v\Delta^2 u dx = \int_G vfdx, \tag{21.11}$$

Využijeme biharmonický rozklad operátora v dvojdimenzionálnej oblasti:

$$\Delta^2 u = \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4} =$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \sigma\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right) + 2\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}\left[(1-\sigma)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\right] + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \sigma\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right)$$

Použijúc teraz Greenovu vetu, máme ($v \in V$, teda má parciálne derivácie v zovšeobecnenom zmysle):

$$(21.12) \quad \int_G v\Delta^2 u dx =$$

$$\int_G \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \sigma\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}\right) + 2(1-\sigma)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \sigma\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}\right)\right] dx -$$

$$\int_\Gamma vNudS - \int_\Gamma \frac{\partial v}{\partial \nu} MudS,$$

kde $\quad Nu = -\frac{\partial}{\partial \nu}(\Delta u) + (1-\sigma)\frac{\partial}{\partial S}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\nu_1\nu_2 - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\left(\nu_1^2 - \nu_2^2\right) - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\nu_1\nu_2\right].$

Využijúc teraz okrajové podmienky, dostaneme

$$(21.13) \quad \int_G \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \sigma\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}\right) + 2(1-\sigma)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \sigma\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}\right)\right] dx =$$

$$\int_G vfdx + \int_\Gamma \frac{\partial v}{\partial \nu} h(S) dS, \quad v \in V$$

Pojem slabého riešenia teraz môžeme definovať nasledujúcim spôsobom:

Definícia 21.2.: Nech funkcia g(S) je stopa niektorej funkcie $w \in W_2^2(G)$ a nech $h(S) \in L_2(\Gamma)$ a $f \in L_2(G)$. Označme

$$V = \left\{ v; v \in W_2^2(G), v = 0 \quad \text{na} \quad \Gamma \quad \text{v} \quad \text{zmysle} \quad \text{stop} \right\}.$$

Funkciu $u \in W_2^2(G)$ nazveme **slabým riešením problému (21.10)** ak platí:

$$(21.4) \quad u - w \in V$$

a pre každé $\forall v \in V$ je splnená podmienka (21.13).

Slabé riešenie okrajových úloh-všeobecný prípad

Budeme uvažovať všeobecny operátor 2k-teho rádu, ako bol definovaný vo vzťahu 20.1 v predchádzajúcej časti. Vyššie sme si popísali okrajové podmienky a rozdelili sme ich do dvoch typov. Nech teda platí, že máme okrajový problém s operátorm 2k-teho rádu a nech je úloha taká, že je daných

μ okrajových podmienok stabilných a

$k-\mu$ nestabilných okrajových podmienok.

Označme stabilné okrajové podmienky nasledovne:

$$(21.5)\quad \frac{\partial^{s_1}u}{\partial\nu^{s_1}} = g_{s_1},\quad \frac{\partial^{s_2}u}{\partial\nu^{s_2}} = g_{s_2},\ldots\frac{\partial^{s_\mu}u}{\partial\nu^{s_\mu}} = g_{s_\mu}.$$

Ostatné podmienky označme:

$$(21.6)\quad \frac{\partial^{t_1}u}{\partial\nu^{t_1}} = g_{t_1},\quad \frac{\partial^{t_2}u}{\partial\nu^{t_2}} = g_{t_2},\ldots\frac{\partial^{t_{k-\mu}}u}{\partial\nu^{t_{k-\mu}}} = g_{t_{k-\mu}}.$$

Príklad 21.6: V príklade 21.3 teda máme k=1, μ=1, s_1=0, k- μ=0. V príklade 21.4 máme k=1, μ=0, t_1=0, k- μ=1. V príklade 21.5 máme k=2, μ=1, s_1=0, k- μ=1,t_1=1.

Môžeme však mať aj všeobecenjšie okrajové podmienky ako Dirichletove a preto budeme uvažovať, za predpokladu na určitu hladkosť hranice, stabilné okrajové podmienky tvaru

$$(21.7)\quad B_1u = \frac{\partial^{s_1}u}{\partial\nu^{s_1}} + F_1u = g_1(S),$$

....

$$B_\mu u = \frac{\partial^{s_\mu}u}{\partial\nu^{s_\mu}} + F_\mu u = g_\mu(S),$$

kde operátory F_l (l=1,2,...,μ) sú lineárne operátory rádu nanajvýš (k-1), ktorých členy obsahujú v lokálnom vyjadrení derivácie podľa vonkajšej normály len tých rádov, ktoré odpovedajú niektorému z čísel $t_1,\ldots t_{k-\mu}$.

Príklad 21.7.: Pre operátor štvrtého rádu predpíšeme podmienky:

$$\frac{\partial u}{\partial\nu} + u = g(S),\qquad \Delta u = h(S)\qquad \text{na}\qquad \Gamma.$$

Prvá z týchto podmienok je pre daný operátor stabilná druhá nie.

Máme: μ=1, s_1=1, k- μ=1, t_1=0. Naviac podľa označenia vo vzťahu (21.7) máme

$B_1u = \frac{\partial u}{\partial\nu} + F_1u,\quad F_1u = u,$ čo je derivácia podľa vonkajšej normály odpovedajúca t_1=0.

Definícia 21.3.: Podpriestor všetkých funkcií $v \in W_2^k(G)$ spĺňajúcich homogénne okrajové podmienky (21.7) teda podmienky tvaru

(21.8) $B_1 = 0, B_2 = 0,\ldots B_\mu = 0$ na Γ označíme V.

Pre vhodnejší zápis slabého riešenia v obecnom prípade zavedieme ešte nasledujúce označenie:

$$(21.9)\quad A(u,v) = \sum_{|i|,|j|\le k} \int_G a_{ij} D^i v D^j u dx .$$

Pre tento výraz zrejme platí, že je lineárny v oboch premenných:

$$A(v, c_1 u_1 + c_2 u_2) = c_1 A(v, u_1) + c_2 A(v, u_2)$$

$$A(c_1 v_1 + c_2 v_2, u) = c_1 A(v_1, u) + c_2 A(v_2, u) .$$

Preto ju nazveme **bilineárnou formou** operátora A.

Príklad 21.8.: Pre Laplaceov operátor s koeficientami ako v príklade 21.3. má v dvojdimenzionálnom priestore príslušná bilineárna forma tvar:

$$A(u,v) = \int_G \left(\frac{\partial v}{\partial x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2} \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) dx$$

a príslušná integrálna identita (21.3) sa teda bude dať zapísať v tvare:

$$(21.10)\quad (Au, v) = (f, v), \quad v \in V$$

Definícia 21.4.: (prvá predbežná definícia slabého riešenia okrajového problému).
Nech je dané:

- Obkasť G s Lipschitzovskou hranicou (poprípade aj s niektorými podmienkami hladkosti)
- operátor $A = \sum_{|i|,|j|\le k} (-1)^{|i|} D^i (a_{ij} D^j)$ s ohraničenými lebesgueovsaky merateľnými koeficientami a_{ij}
- príslušná bilineárna forma $A(u,v) = \sum_{|i|,|j|\le k} \int_G a_{ij} D^i v D^j u dx$
- funkcia $f \in L_2(G)$
- operátory $B_1, ... B_\mu$, $\mu \le k$
- podpriestor $V = \left\{ v; v \in W_2^k(G), B_1 v = 0, ... B_\mu v = 0 \quad \text{na} \quad \Gamma \right\}$
- $g_1 \in L_2(\Gamma), ..., g_\mu \in L_2(\Gamma)$
- funkcia $w \in W_2^k(G)$, pre ktorú platí: $B_1 w = g_1, ..., B_\mu w = g_\mu,$ na Γ v zmysle stôp
- funkcie $h_1 \in L_2(\Gamma), ..., h_{k-\mu} \in L_2(\Gamma)$

Funkciu $u \in W_2^k(G)$ nazveme **slabým riešením problému s okrajovými podmienkami** daného vyššie popísanými dátami ak platí:

- $u - w \in V$
- $A(v,u) = (v,f) + \sum_{l=1}^{k-\mu} \int_\Gamma \frac{\partial^{t_l} v}{\partial \nu^{t_l}} h_l ds$ platí pre každé $v \in V$.

Interpretácia zmiešaných podmienok:

Príklad 21.9.: Uvažujme opäť Poissonovou rovnicu, ale tentokrát so zmiešanými okrajovými podmienkami: Na časti hranice Γ_1 je predpísaná Dirichletova podmienka a na časti hranice Γ_2 je predpísaná Neumannova podmienka.

V tomto prípade máme: $A(v,u) = (v,f) + \int_{\Gamma_2} vhdS \quad \forall v \in V$ a priestor V vyberáme ako:

$V = \left\{ v; v \in W_2^1(G), v = 0, \quad \text{na} \quad \Gamma_1 \right\}$ Dirichletovu podmienku potom charakterizujeme funkciou $w \in W_2^1(G)$, pre ktorú v zmysle stôp platí $w = g(S)$ na Γ_1.

Poznámka 21.3: Analogicky sa zmení priestor V a definícia slabého riešenia aj pre všeobecný prípad.

Príklad 21.10.: Uvažujme opäť Poissonovou rovnicu teraz s newtonovou okrajovou podmienkou na Γ:

$\frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma u = h \quad \text{na} \quad \Gamma$. Táto podmienka je nestabilná. Preto $V = W_2^1(G)$. Štandartným postupom dostaneme:

$$A(v,u) + \int_{\Gamma} \sigma vudS = (f,v) + \int_{\Gamma} vhdS, \quad \forall v \in W_2^1(G).$$

Na ľavej strane tejto integrálnej identity je integrál po hranici chápaný v zmysle stôp funkcií u a v. Toto zobrazenie je ale ohraničené preto platí:

$\|v\|_{L_2(\Gamma)} \le c\|v\|_{W_2^1(G)}, \quad \|u\|_{L_2(\Gamma)} \le c\|u\|_{W_2^1(G)}$. Ak teraz je funkcia σ ohraničená merateľná funkcia na Γ $|\sigma(S)| \le m$, zo Schwartzovej nerovnosti hneď máme:

$$\left| \int_{\Gamma} \sigma vudS \right| \le c_1 \|u\|_{W_2^1(G)} \|v\|_{W_2^1(G)}, \quad c_1 = mc^2.$$

Poznámka 21.4.:
Z toho vyplýva, že pre zachytenie takéhoto typu okrajových podmienok musíme v integrálnej identite doplniť ďalší člen definovaný na hranici Γ, označíme ho a(v,u).

Definícia 21. 5.:
Nech je a(u,v) výraz definovaný na hranici Γ, pre ktorý platí:

- a(v,u) je bilineárny výraz premenných u a v.
- existuje konštanta c_1, ktorá je nezávislá na funkciách $u, v \in W_2^k(G)$ tak, že platí: $|a(v,u)| \le c_1 \|u\|_{W_2^k(G)} \|v\|_{W_2^k(G)}$.

Výraz a(v,u) nazývame **hraničná bilineárna forma.**

Zavedieme ešte označenie: $((v,u)) = A(v,u) + a(v,u)$.

Tento výraz je bilineárna forma v premenných u a v. Z vyššie uvedených predpokladov vyplýva:

$$|((v,u))| \leq K\|u\|_{W_2^k(G)}\|v\|_{W_2^k(G)}, \quad v,u \in W_2^k(G)$$

Vo všeobecnom prípade nech platí:

Definícia 21.6.: (definícia slabého riešenia okrajového problému).
Nech je dané:

- Obkasť G s Lipschitzovskou hranicou (poprípade aj s niektorými podmienkami hladkosti)
- operátor $A = \sum_{|i|,|j|\leq k} (-1)^{|i|} D^i (a_{ij} D^j)$ s ohraničenými lebesgueovsaky merateľnými koeficientami a_{ij}
- bilineárna forma $((v.u)) = A(u,v) + a(v,u)$, pre ktorú platí:

$$|((v,u))| \leq K\|u\|_{W_2^k(G)}\|v\|_{W_2^k(G)}, \quad v,u \in W_2^k(G), \ K>0,$$

- funkcia $f \in L_2(G)$
- operátory $B_{11},...B_{1\mu_1},....B_{r1},...B_{r\mu_r}$ na jednotlivých častiach hraniceΓ: Γ_1, Γ_2,.... Γ_r

podpriestor $V = \left\{ v; v \in W_2^k(G), B_{11}v = 0,...B_{r\mu_r}v = 0 \quad \text{na} \quad \Gamma \right\}$

- $g_{p1} \in L_2(\Gamma_p),...,g_{p\mu_p} \in L_2(\Gamma_p), \quad p = 1,...,r$
- funkcia $w \in W_2^k(G)$, pre ktorú na častiach hranice Γ_p, p=1,...r platí: $B_{p1}w = g_{p1},..., B_{p\mu_p}w = g_{p\mu_p}$, v zmysle stôp
- funkcie $h_{pl} \in L_2(\Gamma_p), \quad p = 1,2,..,r, \quad l = 1,...k - \mu_p$

Funkciu $u \in W_2^k(G)$ nazveme **slabým riešením problému s okrajovými podmienkami** daného vyššie popísanými dátami ak platí:

- $u - w \in V$
- $((v,u)) = (v,f) + \sum_{p=1}^{r} \sum_{l=1}^{k-\mu_p} \int_{\Gamma_p} \frac{\partial^{t_{pl}} v}{\partial \nu^{t_{p_l}}} h_{pl} ds$ platí pre každé $v \in V$.

22. Existencia slabého riešenia. Lax-Milgramova veta.

Veta 22.1.: Lax- Milgramova veta. Nech je H Hilbertov priestor so skalárnym súčinom (v,u). Nech B(v,u) je bilineárna forma definovaná pre u,v z H a taká, že existujú konštanty K>0 a α>0 nezávislé na u a v tak, že pre každé $v \in H$, $u \in H$ platí:

$$\text{(22.1)} \quad B(v,u) \le K\|v\|\|u\|$$

$$\text{(22.2)} \quad B(v,v) \ge \alpha\|v\|^2 .$$

Potom sa dá každý lineárny funkcionál F, ohraničený na H vyjadriť v tvare

(22.3) $Fv = B(v,z), \quad v \in H$, kde z je prvok priestoru H, jednoznačne určený funkcionálom F. Pritom platí:

(22.4) $\|z\| \le \dfrac{\|F\|}{\alpha}$, kde $\|F\|$ je norma funkcionálu F.

Riešme teraz otázku existencie slabého riešenia okrajovej úlohy. Z predchádzajúcej časti vieme, že pre operátor a okrajové podmienky ako boli definované vyššie, slabé riešenie je funkcia $u \in W_2^k(G)$ taká, že platí

- $u - w \in V$
- $((v,u)) = (v,f) + \sum_{p=1}^{r} \sum_{l=1}^{k-\mu_p} \int_{\Gamma_p} \dfrac{\partial^{t_{pl}} v}{\partial \nu^{tp_l}} h_{pl}\, ds$ pre všetky $v \in V$.
- Posledný vzťah môžeme zjednodušene zapísať v tvare

(22.5) $((v,u)) = (v,f) + \kappa(v,h), \quad \forall v \in V$ kde $\kappa(v,h) = \sum_{p=1}^{r} \sum_{l=1}^{k-\mu_p} \int_{\Gamma_p} \dfrac{\partial^{t_{pl}} v}{\partial \nu^{tp_l}} h_{pl}\, ds$

Definícia 22.1.: Nech sú dané bilineárne forma ((v,u)) a priestor V ako v predchádzajúcej časti. Forma ((v,u)) sa nazýva V-eliptická, ak existuje konštanta α>0 taká, že pre každé $v \in V$ platí:

$$\text{(22.6)} \quad ((v,v)) \ge \alpha\|v\|_V^2 .$$

Veta 22.2.: Nech je daný problém s okrajovými podmienkami tak, ako bol definovaný v predchádzajúcej časti. Ak je forma ((v,u)) V –eliptická, má daný problém práve jedno slabé riešenie $u \in W_2^k(G)$ a existuje kladná konštanta c nezávislá na funkciách f,w a h_{pl}, tak, že platí:

$$\text{(22.7)} \quad \|u\|_{W_2^k(G)} \le c\left(\|f\|_{L_2(G)} + \|w\|_{W_2^k(G)} + \sum_{p=1}^{r} \sum_{l=1}^{k-\mu_p} \|h_{pl}\|_{L_2(\Gamma_p)} \right)$$