



Náhodné premenné a ich parametre

Rekapitulácia - Pravdepodobnosť

Uvažujme o rôznych možných poradiach narodení chlapcov (B) a dievčat (G) pri štyroch pôrodoch. Existuje $2^4 = 16$ možností, teda výberový priestor je

BBBB

BGBB

GBBB

GGBB

BBBG

BGBG

GBBG

GGBG

BBGB

BGGB

GBGB

GGGB

BBGG

BGGG

GBGG

GGGG

Ak je narodenie chlapca a dievčaťa rovnako pravdepodobné ($P(G) = P(B) = 0.5$) a pohlavie každého dieťaťa je nezávislé od predchádzajúcich, potom pravdepodobnosť každej z týchto 16 možností je $1/16$.

Náhodné premenné

Spočítajme **počet dievčat** v každej množine možných poradií štyroch narodení:

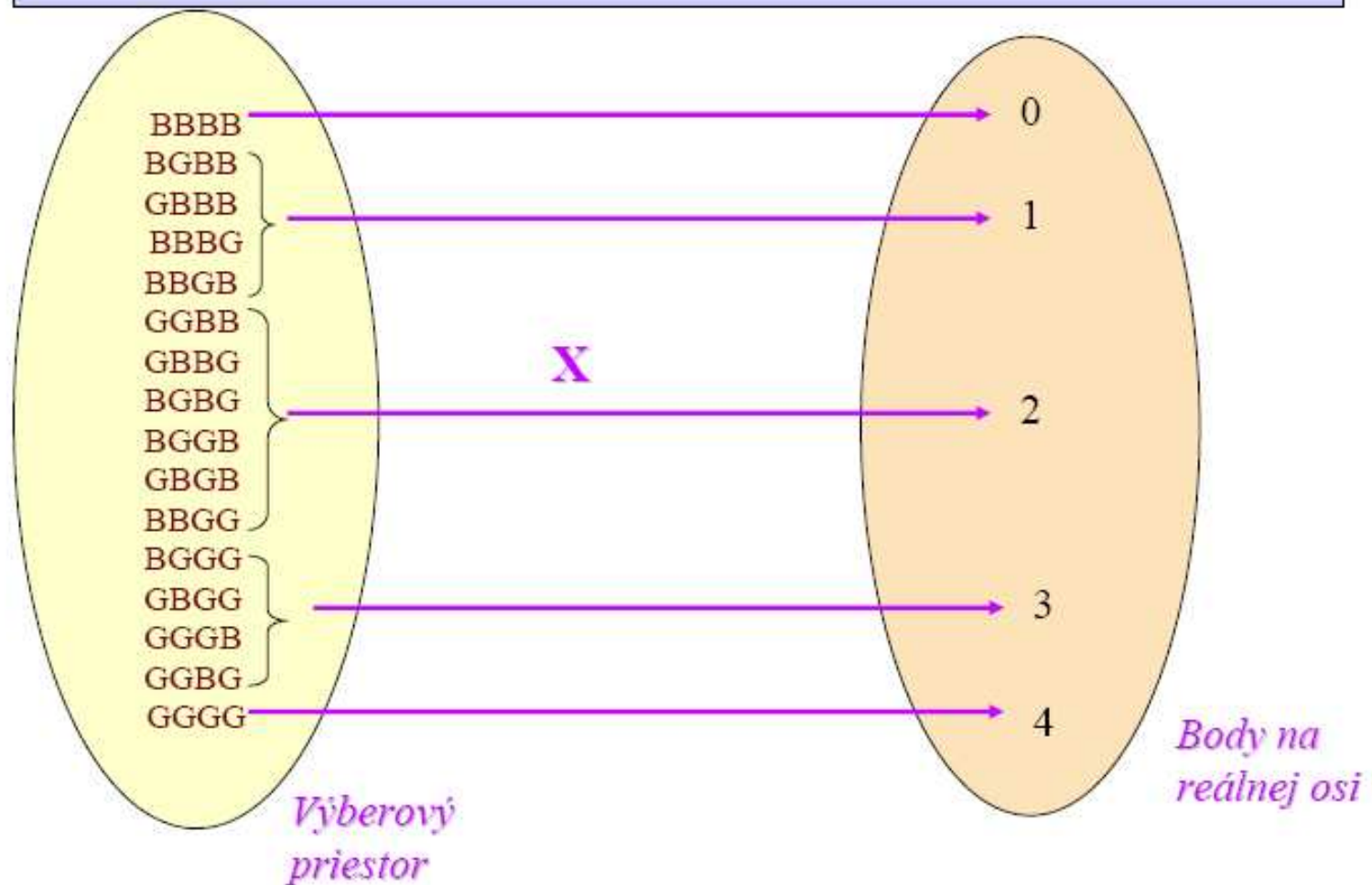
BBBB (0)	BGBB (1)	GBBB (1)	GGBB (2)
BBBG (1)	BGBG (2)	GBBG (2)	GGBG (3)
BBGB (1)	BGGB (2)	GBGB (2)	GGGB (3)
BBGG (2)	BGGG (3)	GBGG (3)	GGGG (4)

- každému možnému výsledku je priradená numerická hodnota,
- hodnoty priradené jednotlivým výsledkom sa menia.

Počet dievčat v každom výsledku je **náhodná premenná**:

Náhodná premenná X je funkcia, ktorá priraduje každému prvku výberového priestoru jednu numerickú hodnotu, ktorá sa mení.

Náhodné premenné - pokračovanie

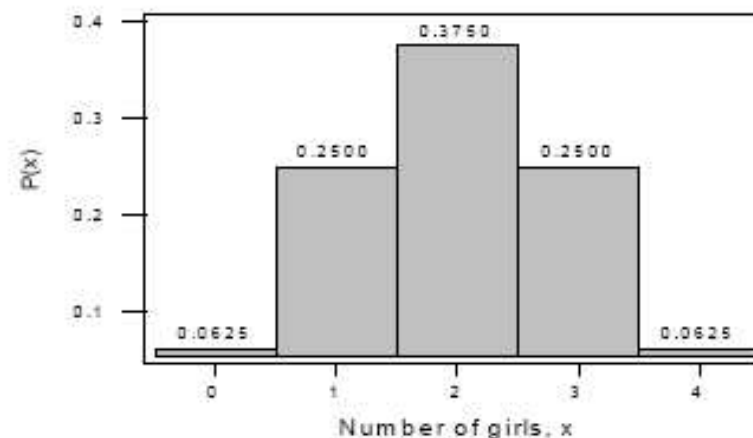


Náhodné premenné - pokračovanie

Rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej premennej je tabuľka ktorá obsahuje možné hodnoty náhodnej premennej a im priradené pravdepodobnosti.

<u>x</u>	<u>P(x)</u>
0	1/16
1	4/16
2	6/16
3	4/16
4	<u>1/16</u>
	16/16=1

Probability Distribution of the Number of Girls in Four Births



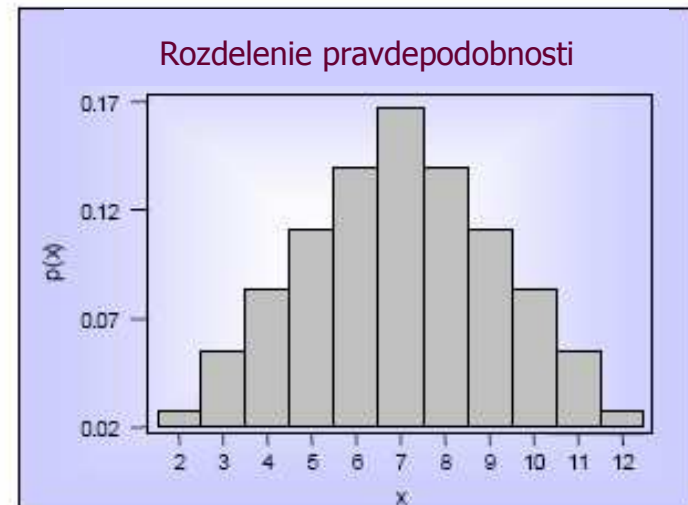
Príklad 1

Uvažujme o experimente, ktorý spočíva v **hode dvoch kociek**. **Možných výsledkov je 36**. Nech náhodná premenná **X** predstavuje **súčet čísel, ktoré padnú pri hode dvomi kockami**:



2	3	4	5	6		
1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	7
2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	8
3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	9
4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	10
5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6	11
6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6	12

x	P(x)*
2	1/36
3	2/36
4	3/36
5	4/36
6	5/36
7	6/36
8	5/36
9	4/36
10	3/36
11	2/36
12	1/36
	1

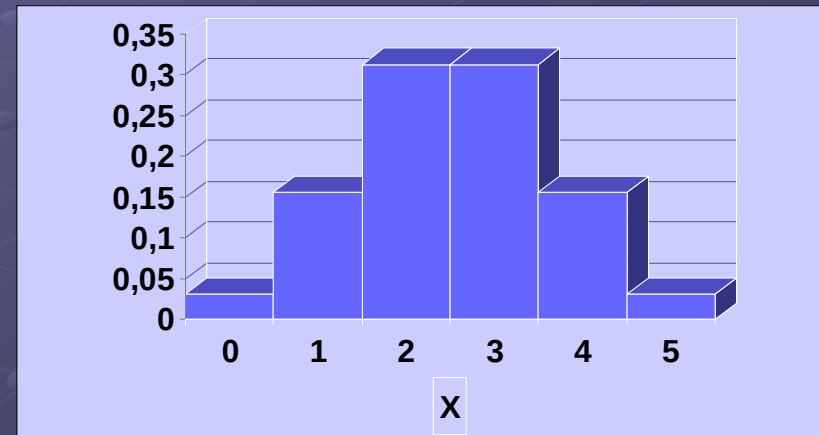


Príklad 2

Experiment spočíva v 5 hodoch mincou. Nech náhodná premenná X predstavuje počet padnutí znaku. Predpokladáme, že minca nie je falošná, t.j. pravdepodobnosť, že pri jednom hode padne znak je 0.5.

x	P(x)
0	0.03125
1	0.15625
2	0.31250
3	0.31250
4	0.15625
5	0.03125
Σ	1

Rozdelenie pravdepodobnost



Pravdepodobnosť, že znak padne viac ako 2x:

$$P(X > 2) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) = 0.5$$

Pravdepodobnosť, že padne aspoň jeden znak:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 0.96875$$

Diskrétne a spojité náhodné premenné

Diskrétna náhodná premenná:

- má konečný alebo spočítateľný počet možných hodnôt;
- má nespojité skoky (alebo medzery) medzi po sebe nasledujúcimi hodnotami.

Spojité náhodná premenná:

- počet jej možných hodnôt je veľmi veľký, často závislý od presnosti merania (váha, dĺžka, čas, rýchlosť, cena);
- od hodnoty k hodnote sa mení spojito;
- pravdepodobnosti jednotlivých hodnôt sú veľmi malé a klesajú s rastúcou presnosťou ich určovania.

Pravidlá pre diskkrétne rozdelenie pravdepodobnosti

Rozdelenie diskrétnych náhodných premenných X **musí** vyhovovať nasledujúcim podmienkam:

$$P(X) \geq 0$$

$$\sum_{i=1}^n P(X = i) = 1$$

$$0 \leq P(X) \leq 1$$

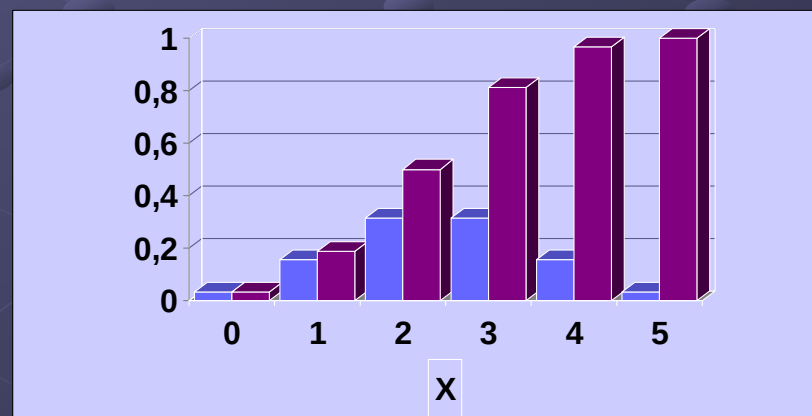
Kumulatívna distribučná funkcia

Kumulatívna distribučná funkcia $F(x)$ diskkrétnej náhodnej premennej X je definovaná nasledovne:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{i \leq x} P(X = i)$$

x	P(x)	F(x)
0	0.03125	0.03125
1	0.15625	0.18750
2	0.31250	0.5
3	0.31250	0.8125
4	0.15625	0.96875
5	0.03125	1

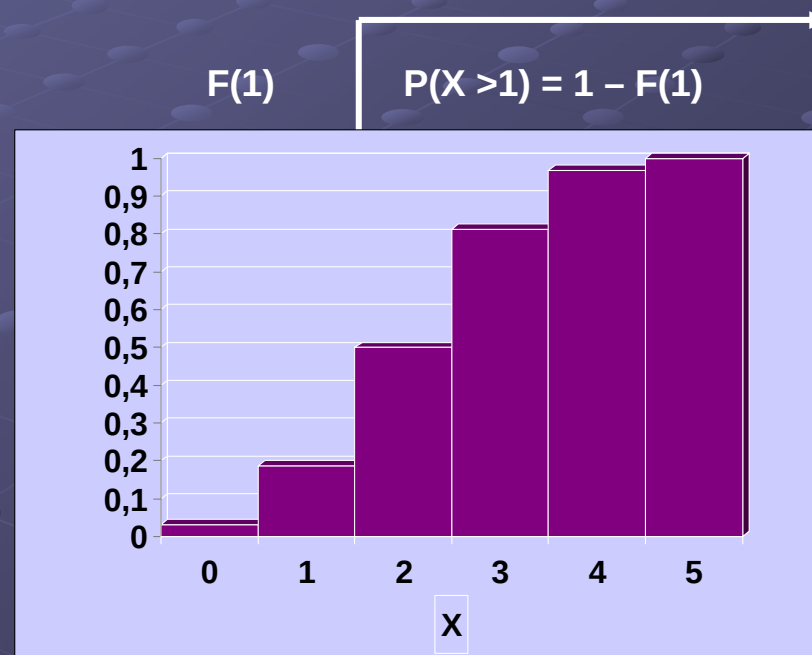
Rozdelenie pravdepodobnosti a
distribučná funkcia



Použitie kumulatívneho rozdelenia pravdepodobnosti

Pravdepodobnosť, že padne viac ako jeden znak:

x	P(x)	F(x)
0	0.03125	0.03125
1	0.15625	0.18750
2	0.31250	0.5
3	0.31250	0.8125
4	0.15625	0.96875
5	0.03125	1



Stredná hodnota diskkrétnej náhodnej premennej

Je miera centrality rozdelenia pravdepodobnosti. Je to **vážený priemer**, kde hodnoty náhodnej premennej sú „vážené“ ich pravdepodobnosťami.

Strednú hodnotu niekedy nazývame aj **očakávanou hodnotou** náhodnej premennej, pretože je to hodnota, ktorej nastatie v priemere očakávame.

Stredná hodnota $E(X)$ diskkrétnej náhodnej premennej X , sa rovná súčtu súčinov hodnôt tejto premennej a ich pravdepodobností:

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^n x_i P(x_i)$$

x	P(x)	x P(x)
0	0.03125	0
1	0.15625	0.15625
2	0.31250	0.625
3	0.31250	0.9375
4	0.15625	0.625
5	0.03125	0.15625
E(X)		2.5

Stredná hodnota funkcie diskkrétnej náhodnej premennej

Stredná hodnota funkcie diskkrétnej náhodnej premennej X je:

$$E[h(X)] = \sum_i h(x_i)P(x_i)$$

Príklad: Mesačné predaje určitého výrobku majú rozdelenie pravdepodobnosti uvedené v tabuľke. Predpokladajme, že firma má fixné mesačné výrobné náklady rovné 8000 a zisk z každého kusa výrobku je 2. Vypočítajte strednú hodnotu z mesačného zisku z predaja.

$h(X) = 2X - 8000$, kde X je počet predaných výrobkov

Počet výrobkov, x		$P(x)$	
		$h(x)$	$h(x)P(x)$
5000	0.2	2000	400
6000	0.3	4000	1200
7000	0.2	6000	1200
8000	0.2	8000	1600
9000	0.1	10000	1000
1.0			5400

Stredná hodnota lineárnej funkcie náhodnej premennej

Stredná hodnota **lineárnej funkcie** náhodnej premennej je:

$$E(aX+b)=aE(X)+b$$

<i>Počet</i>		
<i>výrokov, x</i>	<i>P(x)</i>	<i>xP(x)</i>
5000	0.2	1000
6000	0.3	1800
7000	0.2	1400
8000	0.2	1600
9000	0.1	900
	1.0	6700

V našom prípade: $E(2X-8000)=2E(X)-8000=(2)(6700)-8000=5400$

Rozptyl a štandardná odchýlka diskkrétnej náhodnej premennej

Rozptyl náhodnej premennej $V(X)$ je stredná hodnota štvorca odchýlky od strednej hodnoty:

$$\begin{aligned}\sigma^2 = V(X) &= E[(X - \mu)^2] = \sum_x (x - \mu)^2 P(x) \\ &= E(X^2) - [E(X)]^2 = \left[\sum_x x^2 P(x) \right] - \left[\sum_x x P(x) \right]^2\end{aligned}$$

Štandardná odchýlka náhodnej premennej je druhá odmocnina jej rozptylu:

$$\sigma = \sqrt{V(X)}$$

Rozptyl lineárnej funkcie náhodnej premennej

Rozptyl **lineárnej funkcie** náhodnej premennej je:

$$V(aX+b)=a^2V(X)=a^2\sigma^2$$

Príklad 3:

Počet položiek x	P(x)	xP(x)	x ² P(x)
5000	0.2	1000	5000000
6000	0.3	1800	10800000
7000	0.2	1400	9800000
8000	0.2	1600	12800000
9000	0.1	900	8100000
	1.0	6700	46500000

$$\sigma^2 = V(X)$$

$$= E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$= \left[\sum_{\text{all } x} x^2 P(x) \right] - \left[\sum_{\text{all } x} x P(x) \right]^2$$

$$= 46500000 - (6700^2) = 16100000$$

$$\sigma = SD(X) = \sqrt{16100000} = 1268.86$$

$$V(2X - 8000) = (2^2)V(X)$$

$$= (4)(16100000) = 64400000$$

$$\sigma_{(2x-8000)} = SD(2x - 8000)$$

$$= 2\sigma_x = (2)(1268.86) = 2537.72$$

Binomické rozdelenie pravdepodobnosti

Binomické rozdelenie pravdepodobnosti:

$$P(x) = \binom{n}{x} p^x q^{(n-x)} = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{(n-x)}$$

kde:

p je pravdepodobnosť úspechu v jednom pokuse,

$q = 1-p$,

n je počet pokusov,

x je počet úspechov.

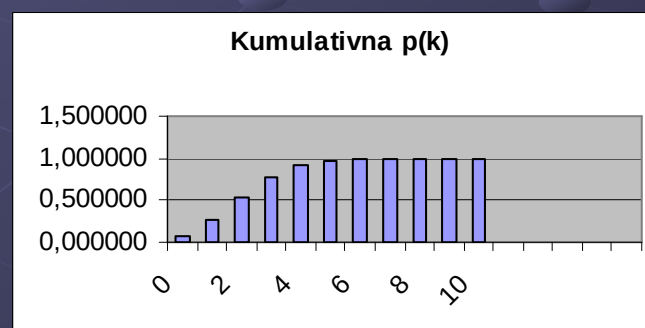
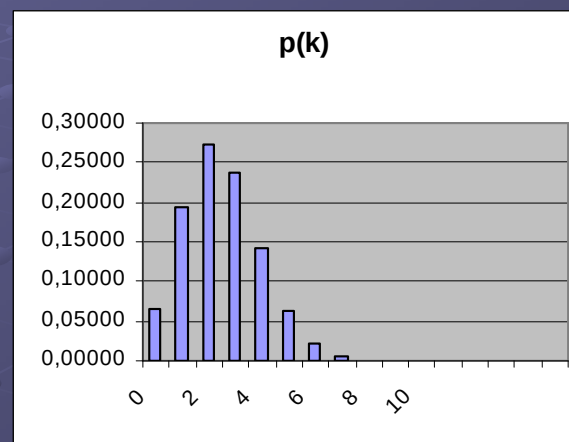
Počet úspechov x	Pravdepodobnosť $P(x)$
0	$\frac{n!}{0!(n-0)!} p^0 q^{(n-0)}$
1	$\frac{n!}{1!(n-1)!} p^1 q^{(n-1)}$
2	$\frac{n!}{2!(n-2)!} p^2 q^{(n-2)}$
3	$\frac{n!}{3!(n-3)!} p^3 q^{(n-3)}$
M	M
n	$\frac{n!}{n!(n-n)!} p^n q^{(n-n)}$
1.00	

$$E(X) = n p$$

$$V(X) = n p (1 - p)$$

Príklad 1. Určte rozdelenie pravdepodobnosti a distribučnú funkciu náhodnej premennej, reprezentujúcej počet padnutia 6 pri pokuse, pozostávajúcom z 10 hodov kocky (ak predpokladáme, že kocka nie je falošná)

počet	Rozdelenie pravdepodobnosti	Distribučná funkcia
0	0,06491	0,064905
1	0,19472	0,259622
2	0,27260	0,532225
3	0,23626	0,768481
4	0,14175	0,910234
5	0,06237	0,972606
6	0,02079	0,993396
7	0,00535	0,998743
8	0,00107	0,999812
9	0,00017	0,999978
10	0,00002	0,999998



Spojité náhodné premenné

Spojité náhodná premenná môže nadobudnúť akúkoľvek hodnotu v číselnom intervale.

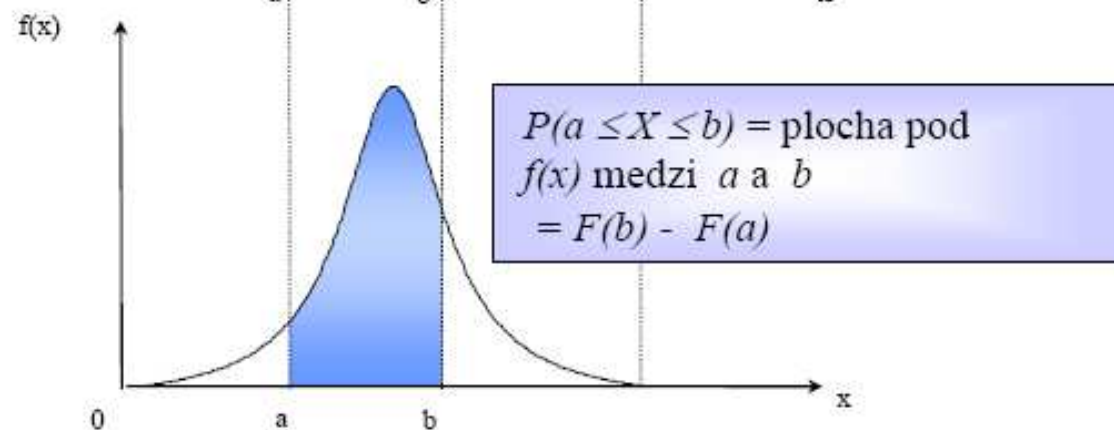
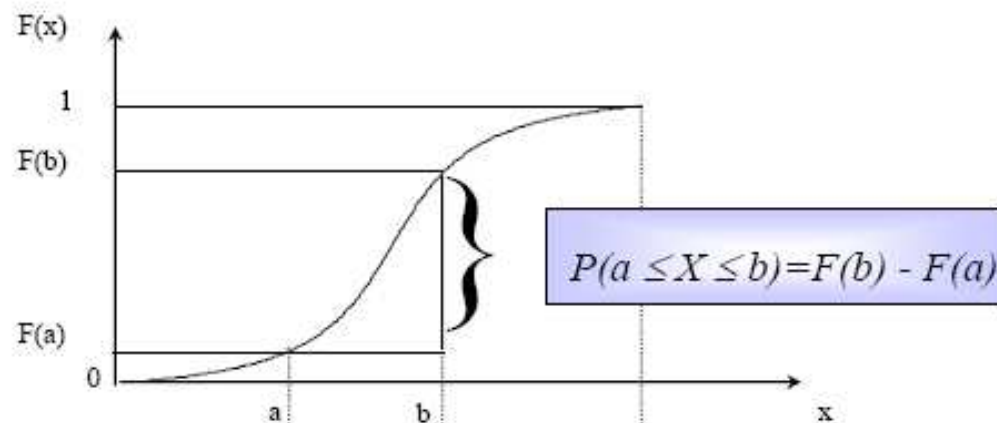
Pravdepodobnosti priradené spojitej náhodnej premennej X sú determinované **funkciou hustoty pravdepodobnosti** náhodnej premennej. Táto funkcia, ktorú budeme označovať $f(x)$, má nasledujúce vlastnosti:

1. $f(x) \geq 0$ pre všetky x .
2. Pravdepodobnosť, že X bude medzi dvoma hodnotami a a b sa rovná ploche pod $f(x)$ medzi a a b .
3. Celková plocha pod krivkou $f(x)$ sa rovná 1.00.

Kumulatívna distribučná funkcia spojitej náhodnej premennej:

$F(x) = P(X \leq x)$ = plocha pod $f(x)$ medzi najmenšou možnou hodnotou X (často $-\infty$) a bodom x .

Funkcia hustoty pravdepodobnosti a kumulatívna distribučná funkcia



Stredná hodnota a rozptyl spojitej náhodnej premennej

Stredná hodnota: $\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$

Stredná hodnota lineárnej funkcie náhodnej premennej X:

$$E(aX + b) = a E(X) + b$$

Rozptyl:

$$\sigma^2 = V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 f(x) dx$$

Rozptyl lineárnej funkcie náhodnej premennej X:

$$V(aX + b) = a^2 V(X) = a^2 \sigma^2$$

Nezávislosť náhodných premenných, kovariancia

Náhodné premenné X, Y sú **nezávislé**, ak $\forall x, y \in \mathfrak{R}$:

$$P((X \leq x) \wedge (Y \leq y)) = P(X \leq x) \cdot P(Y \leq y)$$

Kovariancia náhodných premenných X, Y je:

$$\text{cov}(X, Y) = E[(X - E(X)) (Y - E(Y))]$$

Pre **súčet** náhodných premenných X, Y možno odvodiť vzťah:

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2 \text{cov}(X, Y)$$

Dá sa ukázať, že platí:

$$\text{cov}(X, Y) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y)$$

Navyše pre nezávislé náhodné premenné X, Y platí:

$$E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y), \text{ čiže } \text{cov}(X, Y) = 0.$$

Niektoré vlastnosti stredných hodnôt a rozptylov náhodných premenných

Stredná hodnota súčtu náhodných premenných je súčet ich stredných hodnôt:

$$\mu_{(X+Y)} = E(X+Y) = E(X) + E(Y) = \mu_X + \mu_Y$$

Například: $E(X) = 350$ and $E(Y) = 200$

$$\rightarrow E(X+Y) = 350 + 200 = 550$$

Rozptyl súčtu **nezávislých** náhodných premenných je súčet ich rozptylov:

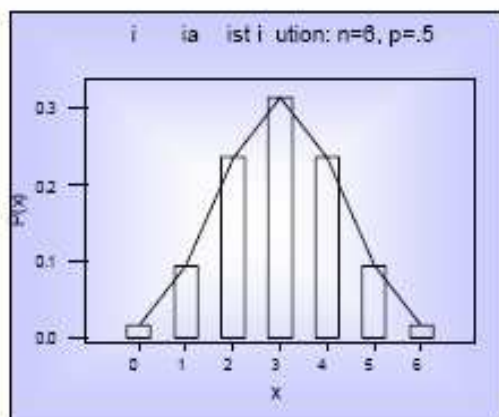
$$\sigma^2_{(X+Y)} = V(X+Y) = V(X) + V(Y) = \sigma^2_X + \sigma^2_Y$$

vtedy a len vtedy, ak X a Y sú nezávislé

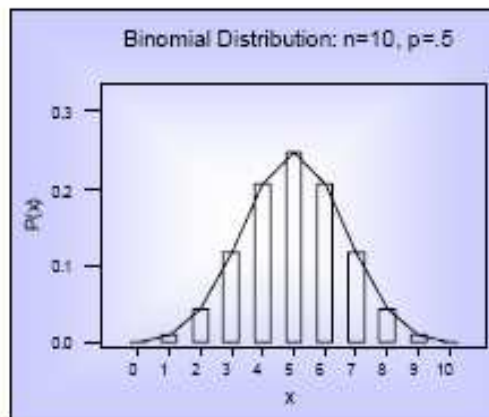
Například: $V(X) = 84$ and $V(Y) = 60 \rightarrow V(X+Y) = 144$

S rastom n sa binomické rozdelenie blíži k ...

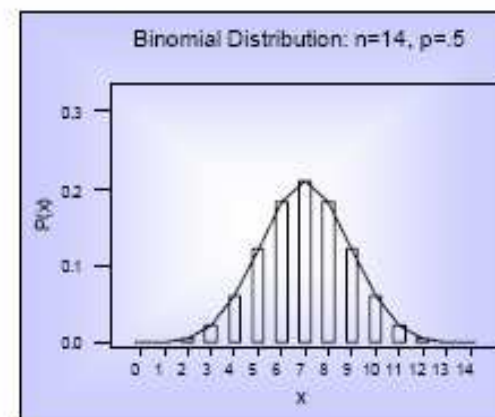
$n = 6$



$n = 10$



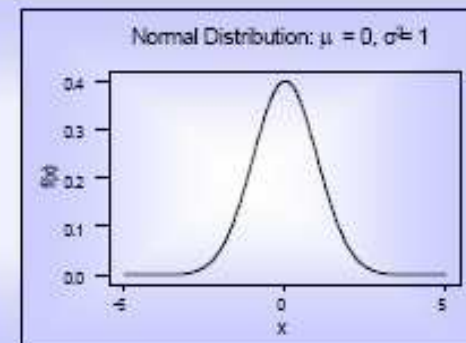
$n = 14$



Funkcia hustoty normálneho rozdelenia:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \text{pre} \quad -\infty < x < \infty$$

kde $e = 2.7182818...$ a $\pi = 3.14159265...$



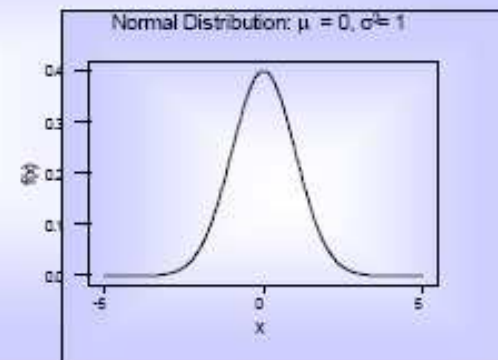
$$\frac{x - E(X)}{\sqrt{V(X)}} \rightarrow N(0, 1)$$

Normálne rozdelenie

Funkcia hustoty:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \text{pre} \quad -\infty < x < \infty$$

kde $e = 2.7182818\dots$ a $\pi = 3.14159265\dots$



Vlastnosti normálneho rozdelenia pravdepodobnosti

Normálne rozdelenie je **trieda rozdelení**,

- ✓ ktoré majú tvar **zvona** a sú **symetrické**, t.j. polovica hodnôt náhodnej premennej (50%) leží na každej strane od strednej hodnoty;
- ✓ každé rozdelenie z tejto triedy je charakterizované dvojicou **strednej hodnoty μ a rozptylu σ^2** . Teda $X \approx N(\mu, \sigma^2)$;
- ✓ hustota každého normálneho rozdelenia sa asymptoticky blíži k osi x (pre $x \rightarrow \pm\infty$);
- ✓ plocha pod funkciou hustoty pravdepodobnosti v intervale $(\mu - k\sigma, \mu + k\sigma)$ je **rovnaká pre každé normálne rozdelenie** bez ohľadu na strednú hodnotu a rozptyl.

Vlastnosti normálneho rozdelenia pravdepodobnosti – pokračovanie

Ak $X_1, X_2, \dots, X_n$ sú nezávislé náhodné premenné s normálnym rozdelením, potom aj ich súčet S bude náhodná premenná s normálnym rozdelením, pričom:

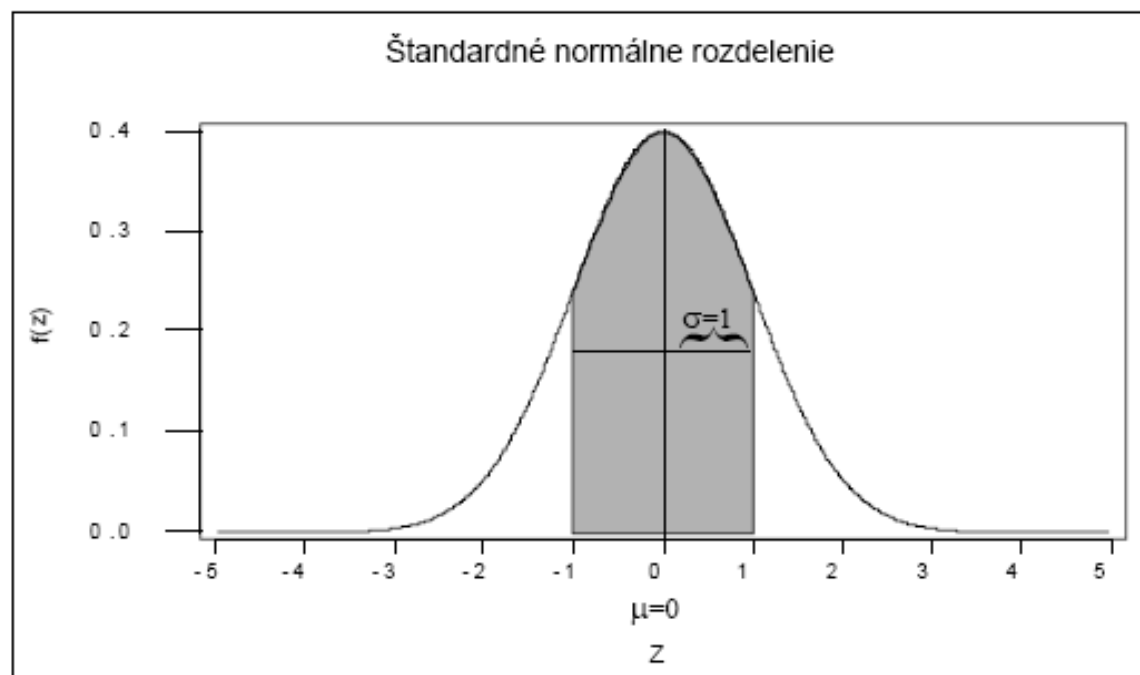
$$E(S) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n)$$

$$V(S) = V(X_1) + V(X_2) + \dots + V(X_n)$$

Poznámka: Spočítať treba rozptyly, nie štandardné odchýlky.

Štandardné normálne rozdelenie

Štandardná normálna náhodná premenná Z , je normálna náhodná premen-
ná so strednou hodnotou $\mu = 0$ a štandardnou odchýlkou $\sigma = 1$, čo zapi-
sujeme takto: $Z \sim N(0, 1^2)$.



Transformácia normálnych náhodných premenných

Transformácia X na Z :

$$Z = \frac{X - \mu_x}{\sigma_x}$$

Inverzná transformácia Z na X :

$$X = \mu_x + Z\sigma_x$$

Transformácia X na Z , kde a a b sú čísla:

$$P(X < a) = P\left(Z < \frac{a - \mu}{\sigma}\right)$$

$$P(X > b) = P\left(Z > \frac{b - \mu}{\sigma}\right)$$

$$P(a < X < b) = P\left(\frac{a - \mu}{\sigma} < Z < \frac{b - \mu}{\sigma}\right)$$

Normálne pravdepodobnosti (empirické pravidlo)

Pravdepodobnosť, že náhodná premenná s rozdelením $N(\mu, \sigma^2)$ bude mať hodnotu vo vnútri intervalu:

$(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$ je približne 0,68;

$(\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)$ je približne 0,95;

$(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$ je približne 0,9974.

