

Seminár z matematicko – počítačového modelovania,  
Bratislava apríl 2013

# **MATEMATICKÉ MODELOVANIE V BIOMECHANIKE**

Mária Minárová

# Čo je biomechanika

- **transdisciplinárny odbor**, ktorý sa zaoberá mechanickou štruktúrou, mechanickým správaním a mechanickými vlastnosťami živého organizmu a jeho častí, mechanickými interakciami medzi nimi a vonkajším okolím
- **interakcia poznatkov** z klasických odborov – biológia, technická mechanika, matematika, fyzika, biofyzika, náuka o materiáloch, morfológia, atď.
- **aplikácia** výsledkov bádania – klinické lekárske obory, športové lekárstvo, technické obory, prírodné vedy, poľnohospodárstvo, ekológia atď.
- **Makrobiomechanika** - charakteristický je makroskopický („agregátový“) prístup - orgány, orgánové štruktúry a anatomicky ohraničené tkanivové komponenty a ich vzájomnú mechanickú interakciu (napr. pohyb v lakťovom kĺbe a jeho zaistenie kooperujúcou svalovou skupinou)
- **Mikrobiomechanika** - mikroskopický („celulárny“ a subcelulárny“) prístup k štruktúre a správaniu sa sledovaného objektu – rozlišujú sa jednotlivé bunky, bunkové komplexy, medzibunkové, skúma sa ich vzájomná komunikácia ( napr. mechanická interakcia medzi aktinom a myosinom v priebehu svalovej kontrakcie).



## Trocha histórie

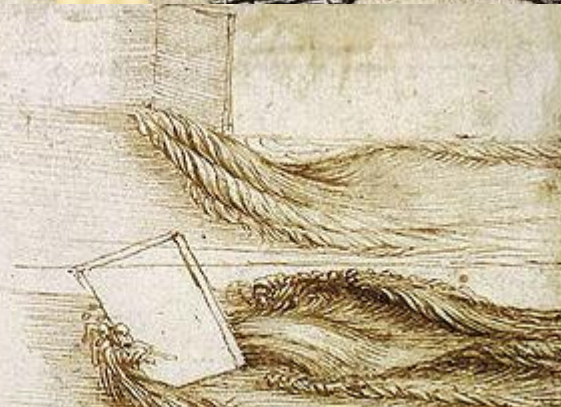
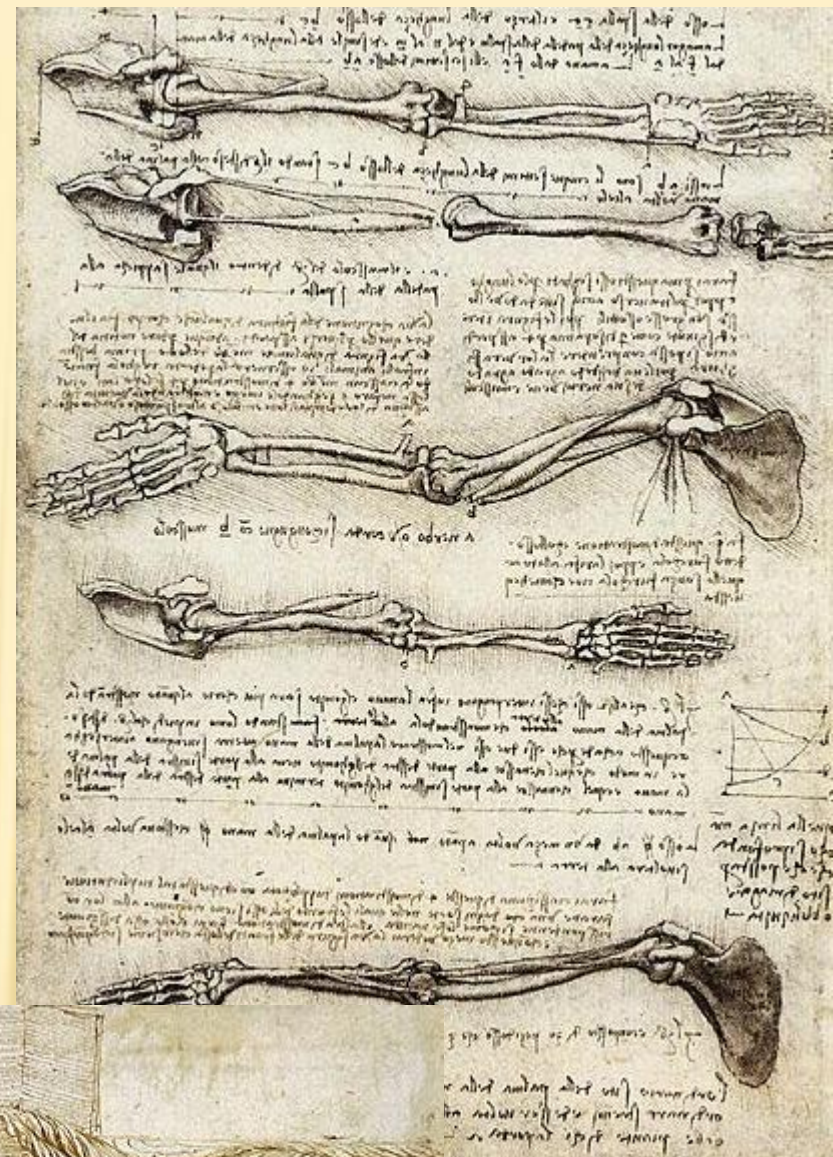
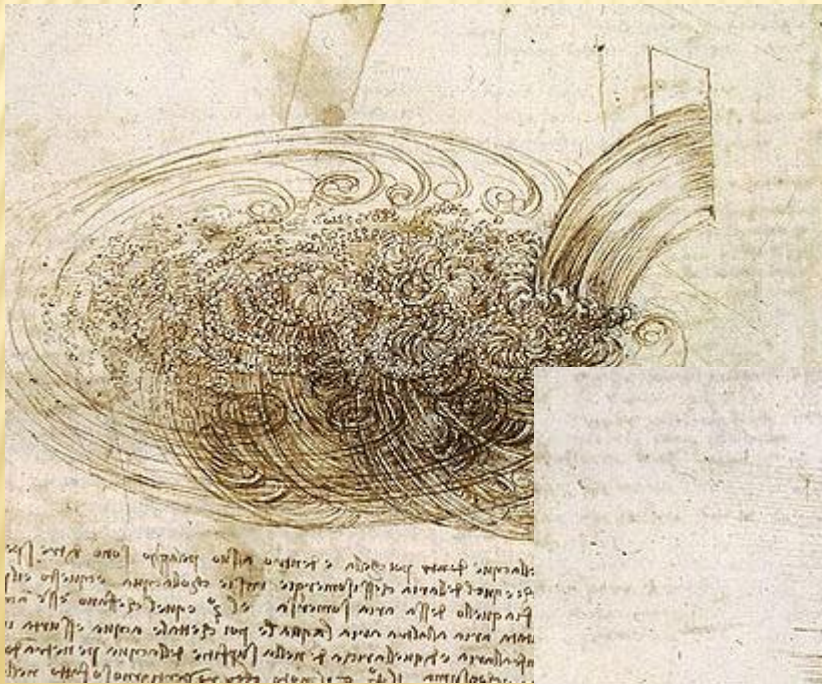
- **Aristoteles** (384 – 322 pred Kr.)
- „O častiach živých tvorov“
- **Hippokrates** (460 – 380 pred Kr.)





## Trocha histórie

- **Leonardo da Vinci**,  
génius stredoveku  
pozorovanie, analýzy, štúdie letu vtákov,  
stavby kosti, ...,  
inicioval záujem svojich nasledovníkov



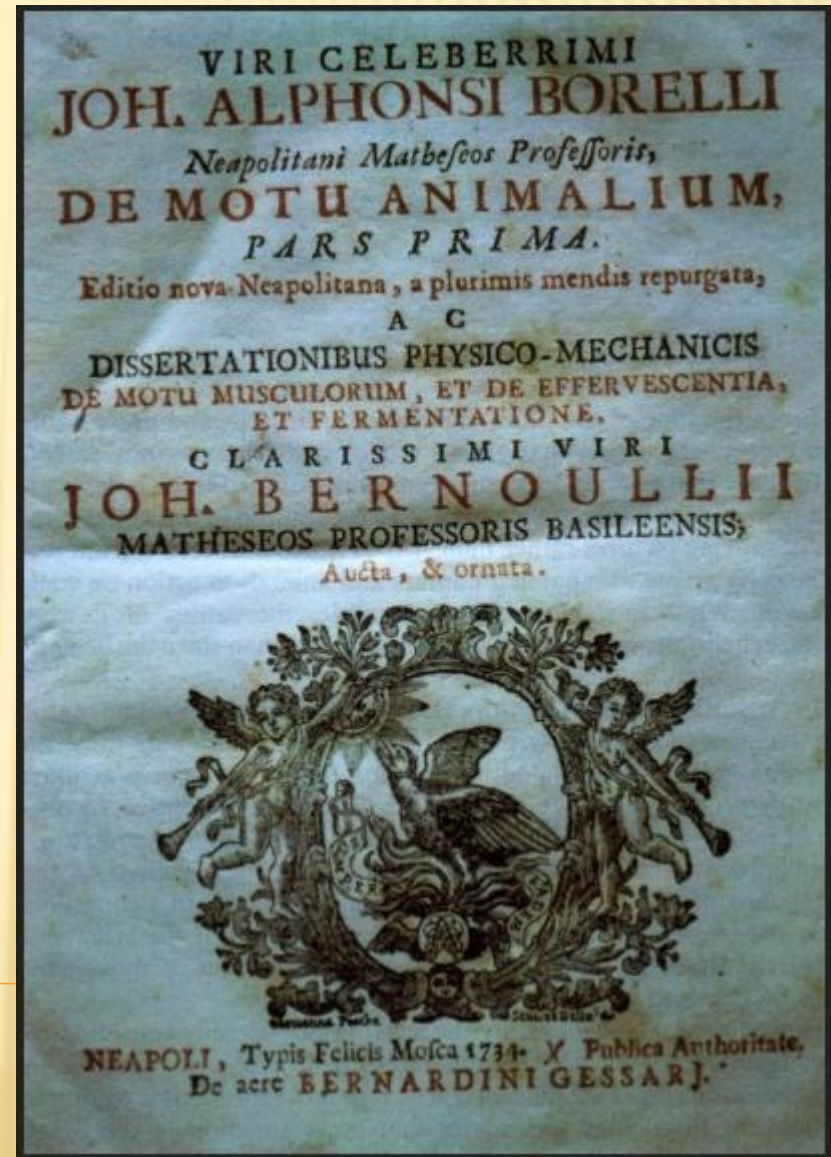


## Trocha histórie

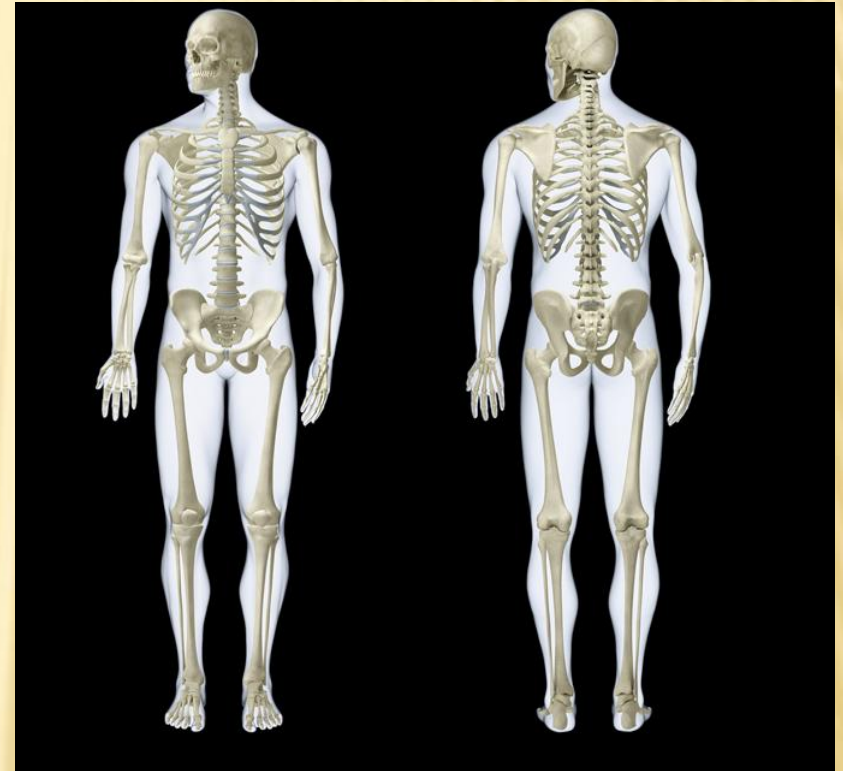
- **Giovani Alfonso Borelli** (1604 – 1680)

zakladateľ biomechaniky

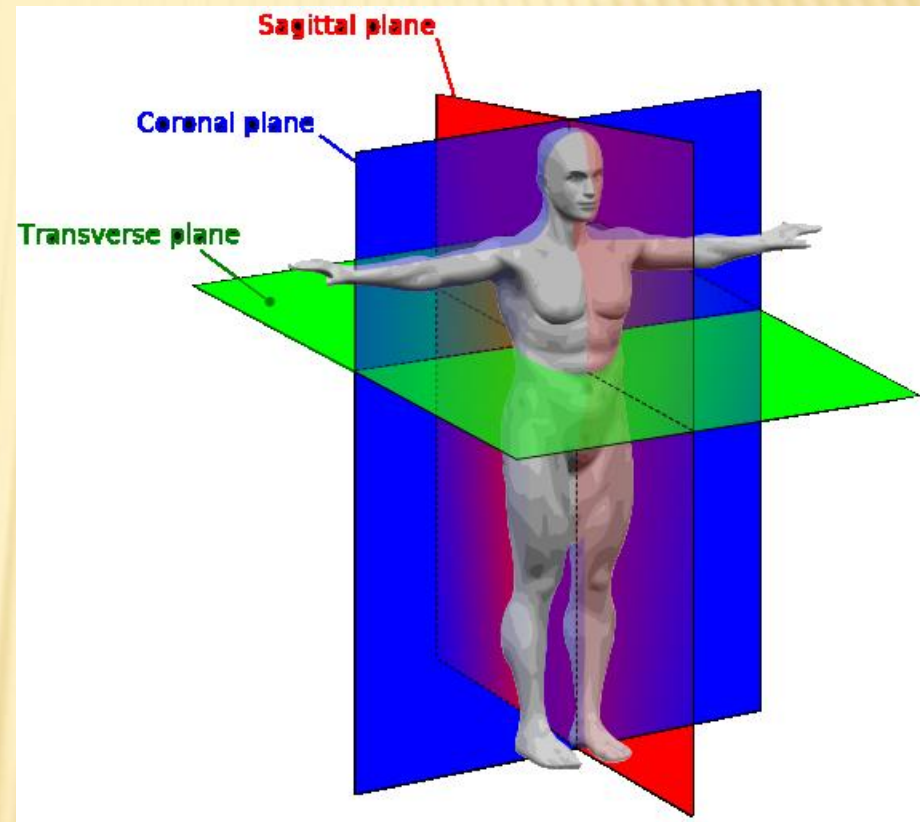
napísal prvú fundamentálnu štúdiu tohto  
odboru, DE MOTU ANIMALIUM



- Základy anatómie
- Geometria človeka - anatomické roviny, polohy a smery
- Stavba organizmu:  
bunka → tkanivo → orgán → sústava
- Základy mechaniky tuhých telies aj tekutín – sila, moment sily, napätie, deformácia
- Biomechanické modely

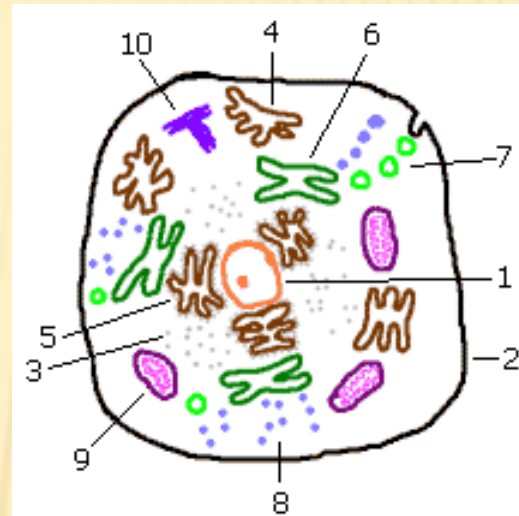


- Základy anatómie
- Geometria človeka - anatomické roviny, polohy a smery
- Stavba organizmu:  
bunka → tkanivo → orgán →  
sústava
- Základy mechaniky tuhých telies aj  
tekutín – sila, moment sily, napätie,  
deformácia
- Biomechanické modely





- Základy anatómie
- Anatomické roviny, polohy a smery
- Stavba organizmu:  
bunka → tkanivo → orgán → sústava
- Základy mechaniky tuhých telies aj tekutín – sila, moment sily, napätie, deformácia
- Biomechanické modely



- Bunka a jej organely:
- 1 - jadro s jadriekom
  - 2 - bunková membrána
  - 3 - ribozómy
  - 4 - hladké endoplazmatické retikulum
  - 5 - granulované endoplazmatické retikulum
  - 6 - Golgiho aparát
  - 7 - lyzozómy
  - 8 - transportné vezikuly
  - 9 - mitochondria
  - 10 - centriola

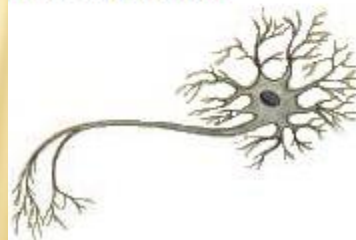
Tuková bunka



Pečeňová bunka Červená krvinka Spermia



Nervová bunka



Bunka kože



Kostná bunka

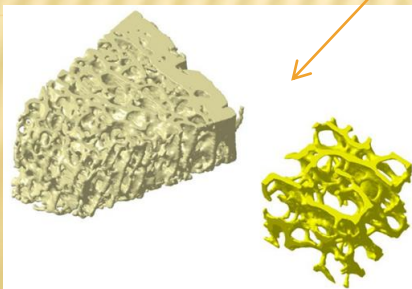
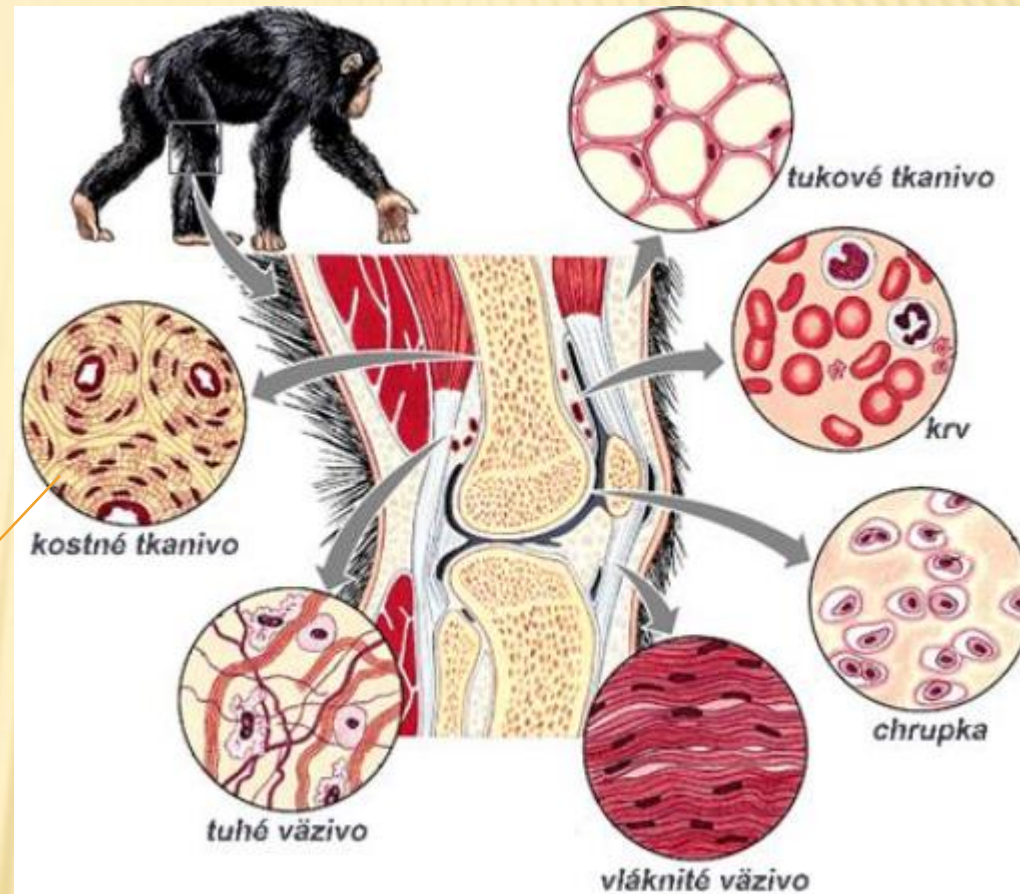


Svalová bunka

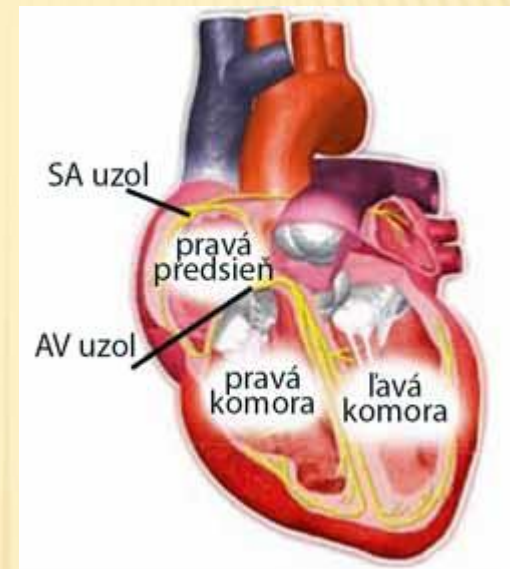




- Základy anatómie
- Anatomické roviny, polohy a smery
- Stavba organizmu:  
bunka → **tkanivo** → orgán →  
sústava
- Základy mechaniky tuhých telies aj  
tekutín – sila, moment sily, napätie,  
deformácia
- Biomechanické modely

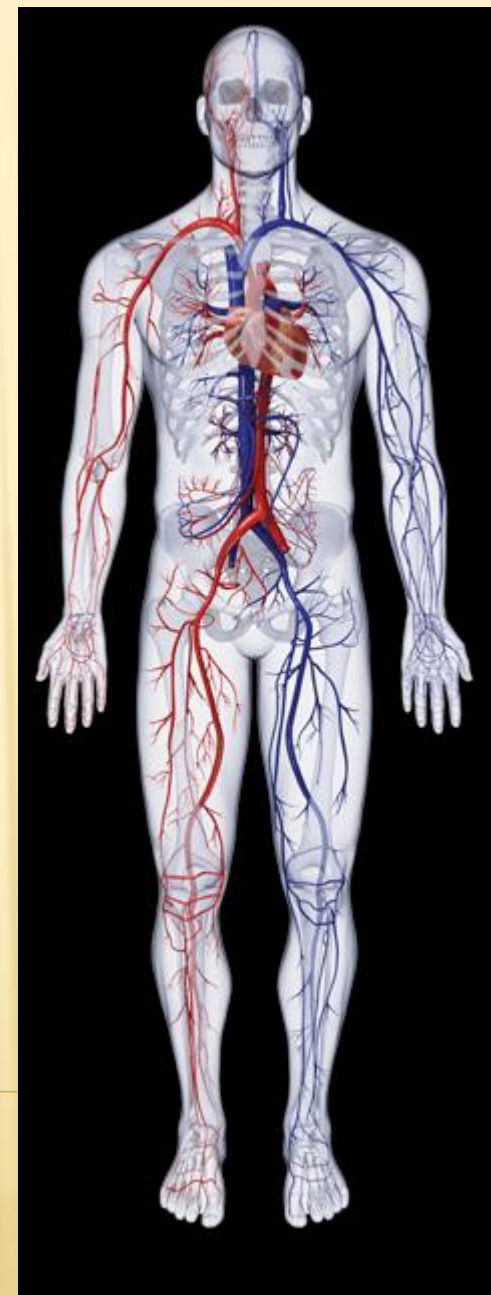


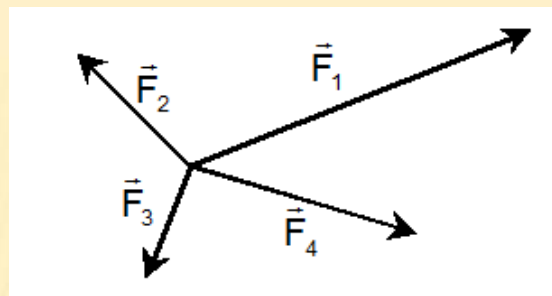
- Základy anatómie
- Anatomické roviny, polohy a smery
- Stavba organizmu:  
bunka → tkanivo → **orgán** →  
sústava
- Základy mechaniky tuhých telies aj  
tekutín – sila, moment sily, napätie,  
deformácia
- Biomechanické modely





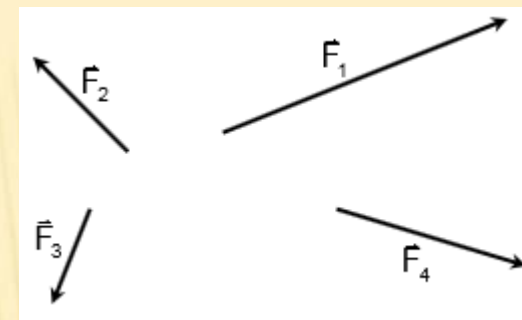
- Základy anatómie
- Anatomické roviny, polohy a smery
- Stavba organizmu:  
bunka → tkanivo → orgán →  
**sústava**
- Základy mechaniky tuhých telies aj  
tekutín – sila, moment sily, napätie,  
deformácia
- Biomechanické modely



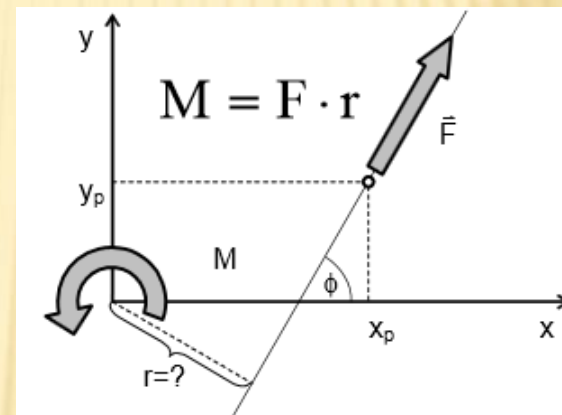


$$F_{Vx} = \sum_i F_{ix}$$

$$F_{Vy} = \sum_i F_{iy}$$



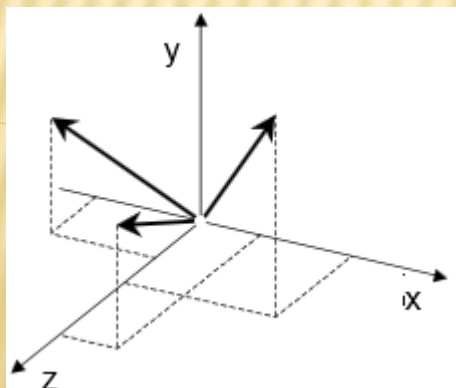
- Základy anatómie
- Anatomické roviny, polohy a smery
- Stavba organizmu:  
bunka → tkanivo → orgán →  
sústava
- Základy mechaniky tuhých telies aj  
tekutín – **sila**, **moment sily**, napätie,  
deformácia, stupne voľnosti
- Biomechanické modely



$$M_{Vx} = \sum_i M_{ix}$$

$$M_{Vy} = \sum_i M_{iy}$$

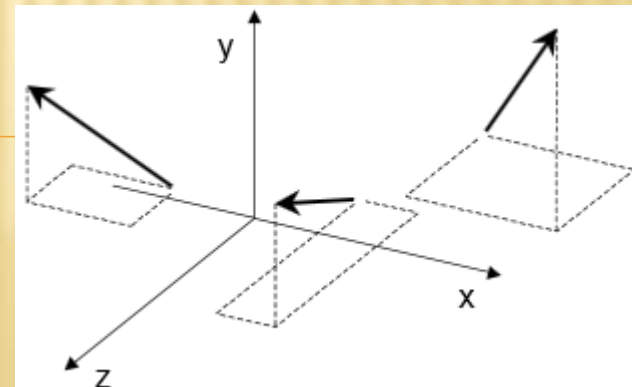
$$M_{Vz} = \sum_i M_{iz}$$



$$F_{Vx} = \sum_i F_{ix}$$

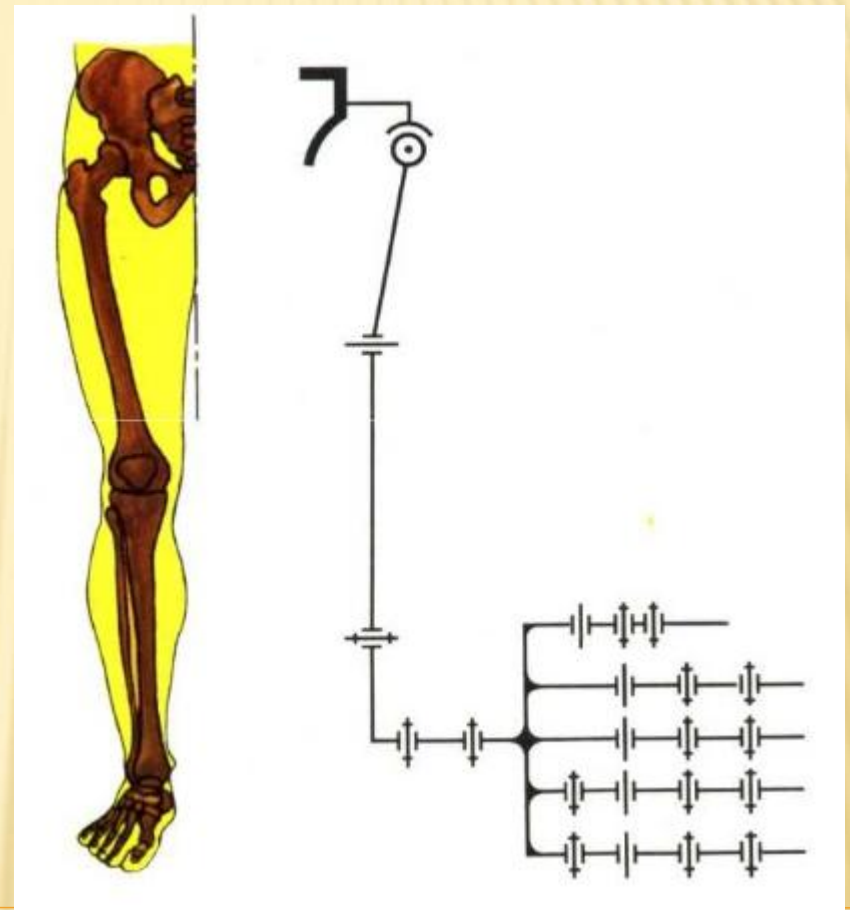
$$F_{Vy} = \sum_i F_{iy}$$

$$F_{Vz} = \sum_i F_{iz}$$

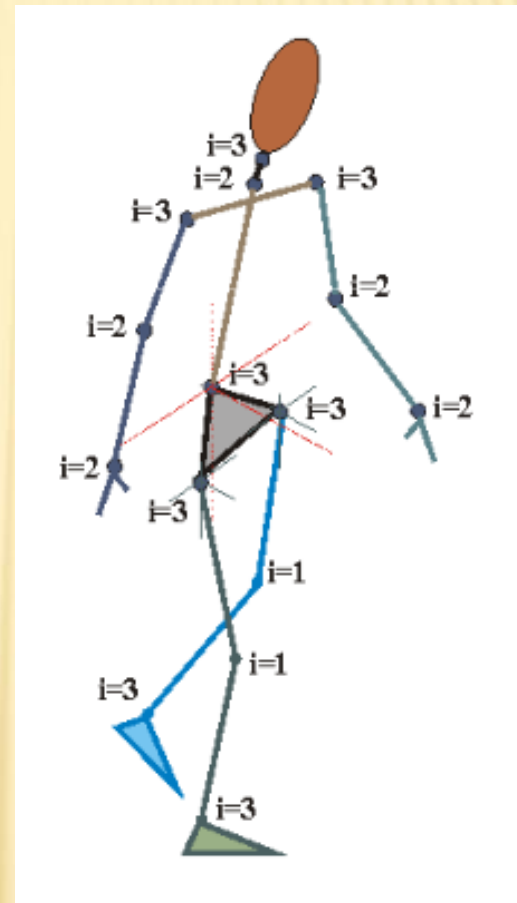




- Základy anatómie
- Anatomické roviny, polohy a smery
- Stavba organizmu:  
bunka → tkanivo → orgán →  
sústava
- Základy mechaniky tuhých telies aj  
tekutín – sila, moment sily, napätie,  
deformácia, **stupne voľnosti**
- Biomechanické modely

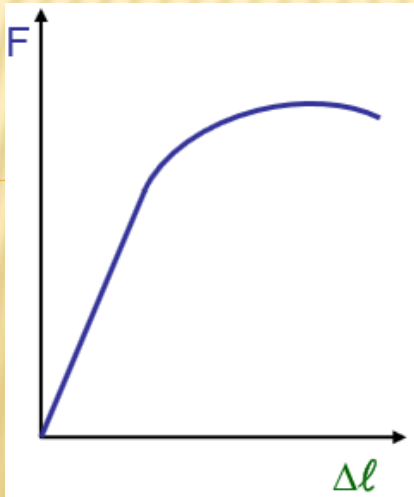
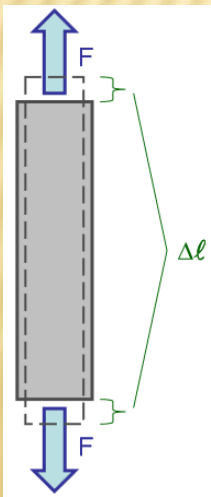


- Základy anatómie
- Anatomické roviny, polohy a smery
- Stavba organizmu:  
bunka → tkanivo → orgán →  
sústava
- Základy mechaniky tuhých telies aj  
tekutín – sila, moment sily, napätie,  
deformácia, **stupne voľnosti**
- Biomechanické modely





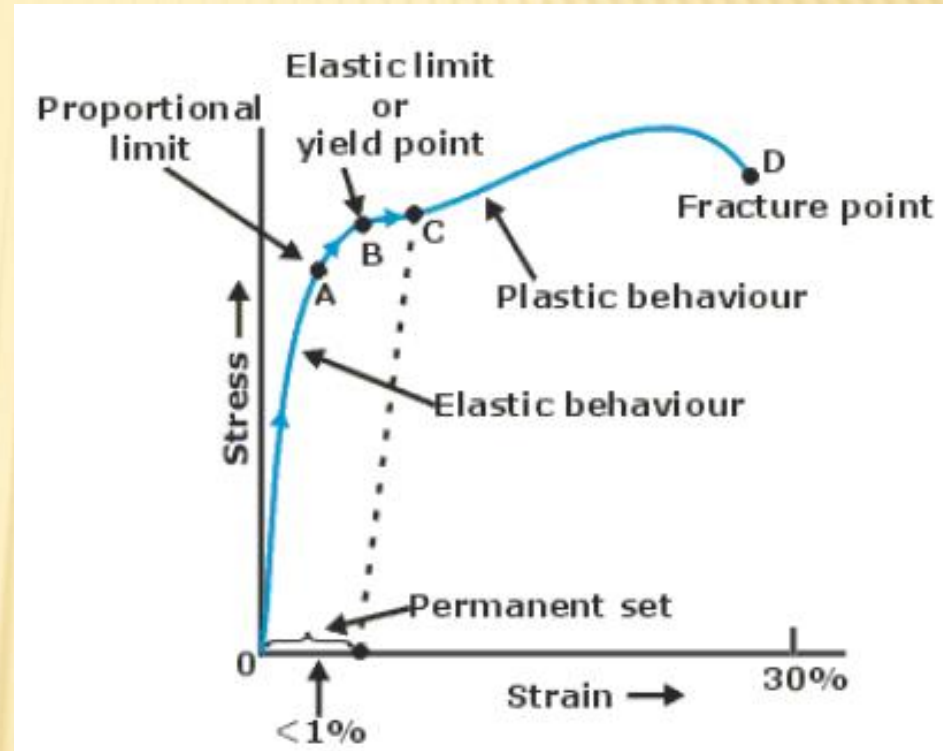
- Základy anatómie
- Anatomické roviny, polohy a smery
- Stavba organizmu:  
bunka → tkanivo → orgán → sústava
- Základy mechaniky tuhých telies aj tekutín – sila, moment sily, napätie, deformácia, stupne voľnosti
- Biomechanické modely



$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

**Hookov zákon**



## **Štruktúra biomechaniky:**

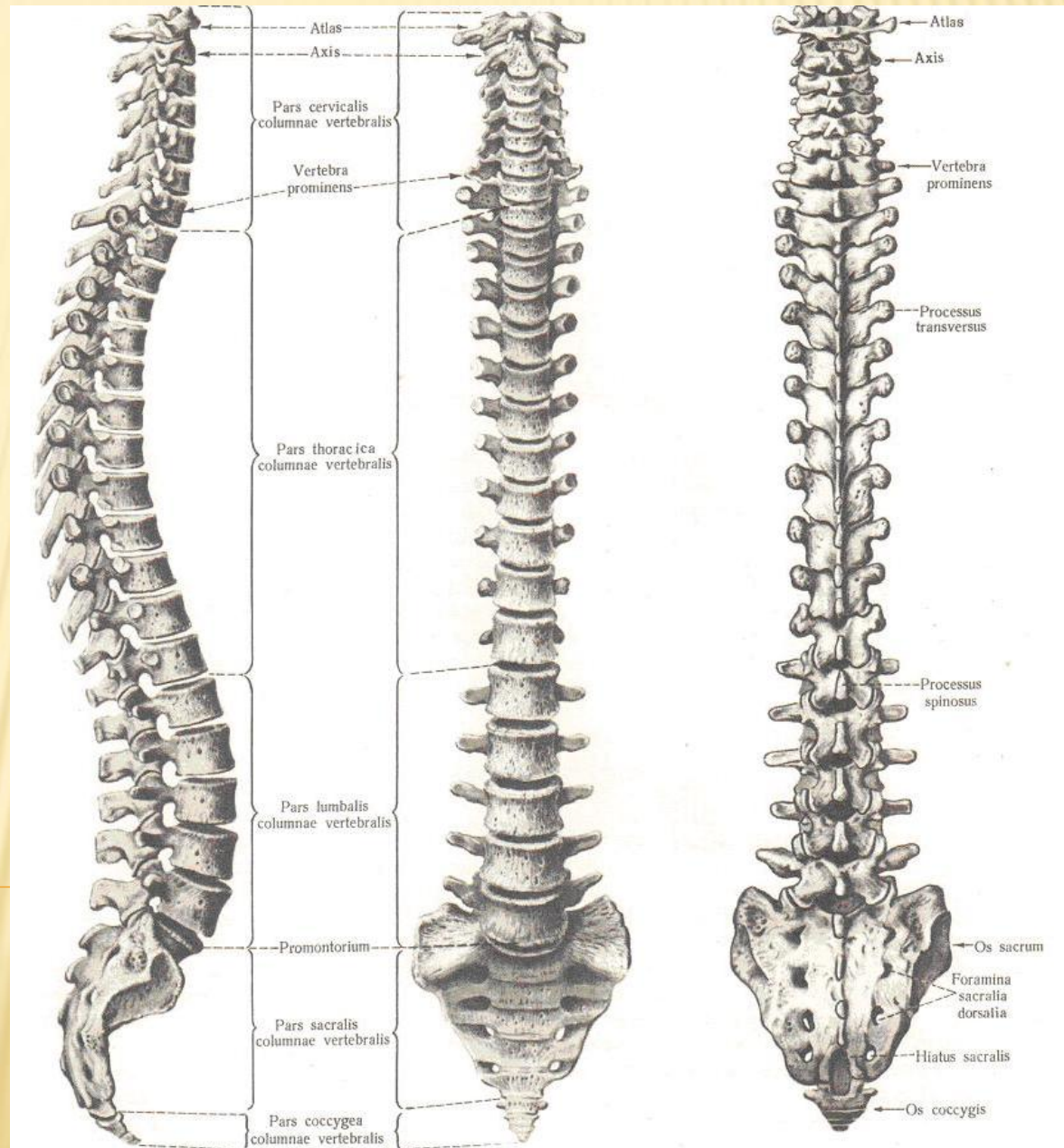
- biomechanika svalovo - kostrového systému
  - biomechanika kĺbu (kolenného, bedrového, ...)
  - biomechanika chrbtice
  - biomechanika dlhých a krátkych kostí
  - biomechanika svalov
- biomechanika srdcovo – cievnej sústavy
  - biomechanika srdca
  - biomechanika ciev
  - biomechanika žíl
- biomechanika dýchacej sústavy
  - biomechanika pohybu bránice
  - ....
- biomechanický model tkanív – reologický model



# Biomechanické modely - Stavec platnička stavec – kontaktná úloha

## Anatómia chrbtice

- *laterálny, anteriorný a posteriorný pohľad*



## Stavec platnička stavec – kontaktná úloha

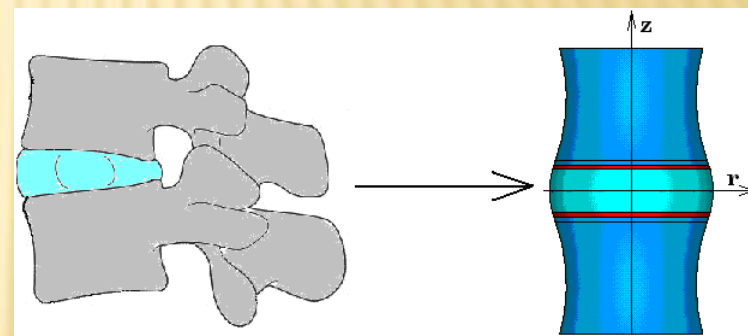
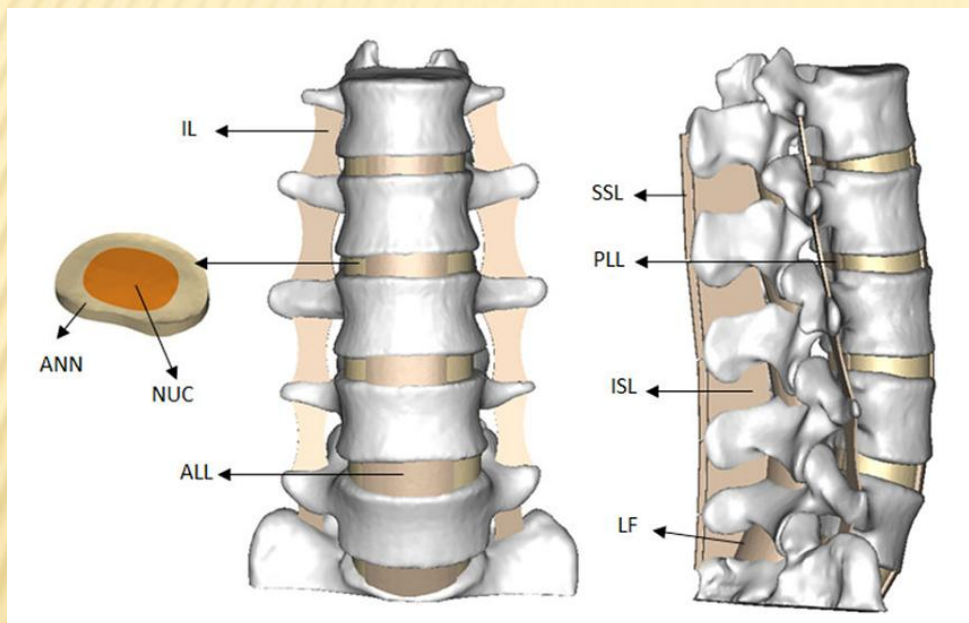
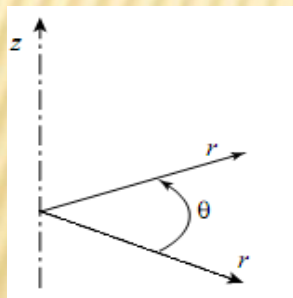
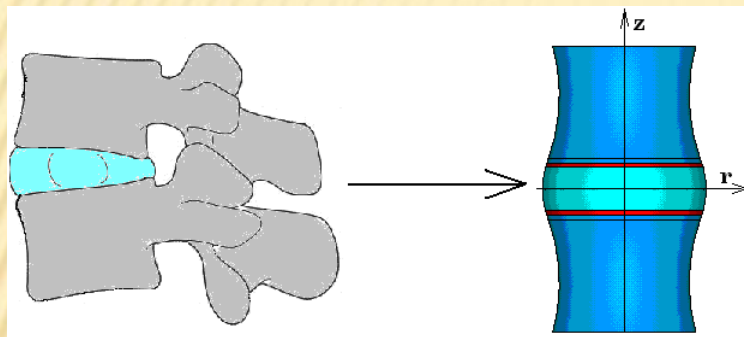






Figure 1

# Stavec platnička stavec – kontaktná úloha



**Rovnice pružnosti**  
v cylindických súradniciach

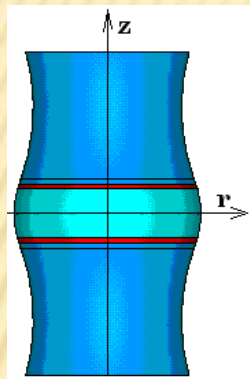
$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} e_{rr} \\ e_{zz} \\ e_{\theta\theta} \\ \gamma_{rz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 1 & 0 \\ \frac{r}{\partial} & \frac{\partial}{\partial r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_r \\ u_z \end{bmatrix} = \mathbf{D}\mathbf{u}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{rz} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu).(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{rr} \\ e_{zz} \\ e_{\theta\theta} \\ \gamma_{rz} \end{bmatrix} = \mathbf{E}\mathbf{e}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{rr}) + \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{rz} - \frac{\sigma_{\theta\theta}}{r} + b_r &= 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{rz}) + \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{zz} + b_z &= 0 \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sigma_{\theta r}) + \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{\theta z} + b_\theta &= 0 \end{aligned}$$



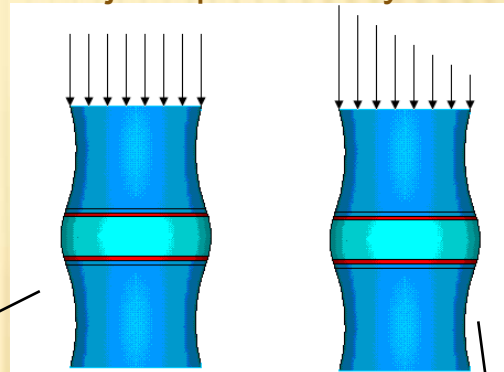
# Stavec platnička stavec – kontaktná úloha



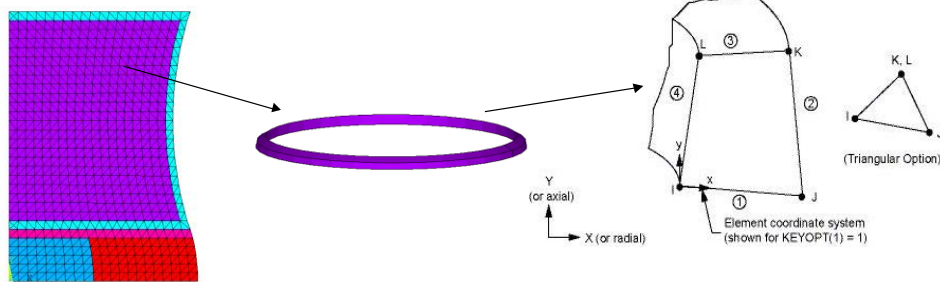
## Diferenciálne rovnice pružnosti

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{rr}) + \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{rz} - \frac{\sigma_{\theta\theta}}{r} + b_r &= 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{rz}) + \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{zz} + b_z &= 0 \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sigma_{\theta r}) + \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{\theta z} + b_\theta &= 0 \end{aligned}$$

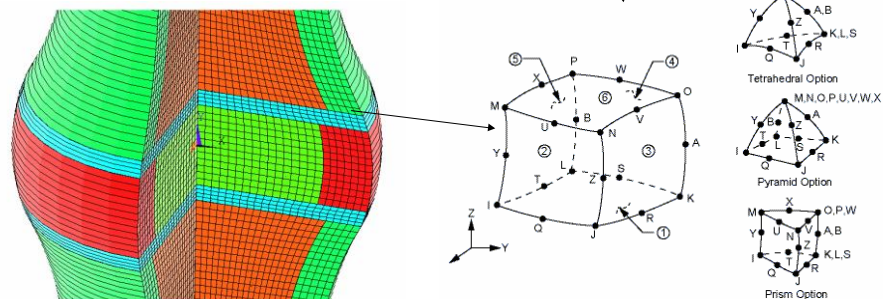
## Okrajové podmienky



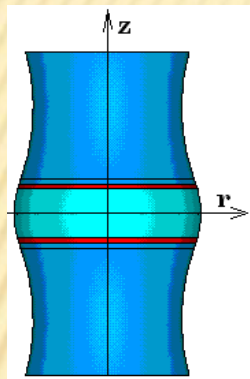
## Isoparametric element



## 3D element



# Stavec platnička stavec – kontaktná úloha



## Diferenciálne rovnice pružnosti

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{rr}) + \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{rz} - \frac{\sigma_{\theta\theta}}{r} + b_r = 0$$

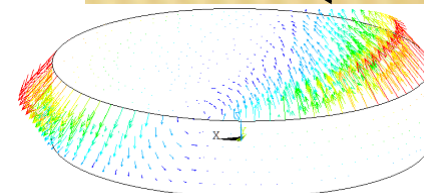
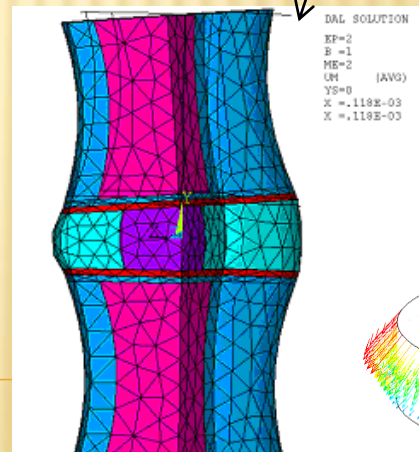
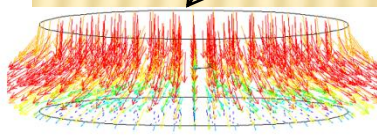
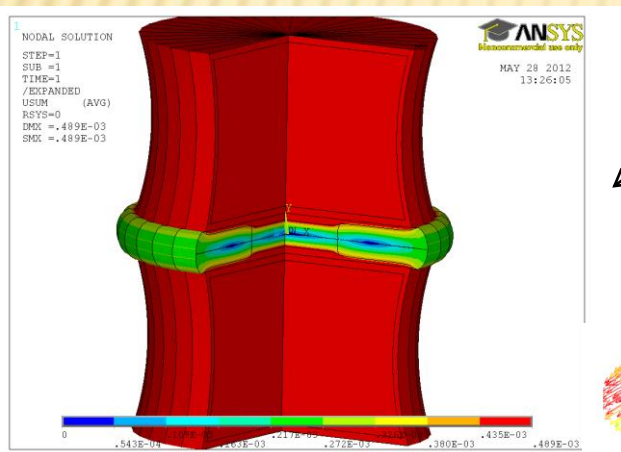
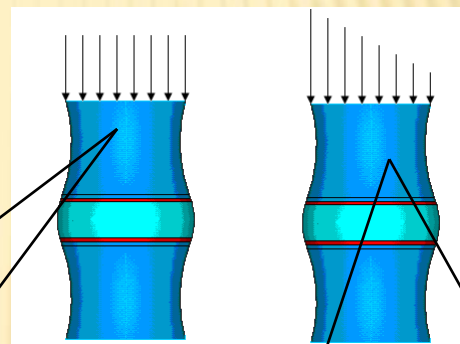
$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{zr}) + \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{zz} + b_z = 0$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sigma_{\theta r}) + \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{\theta z} + b_{\theta} = 0$$

b)

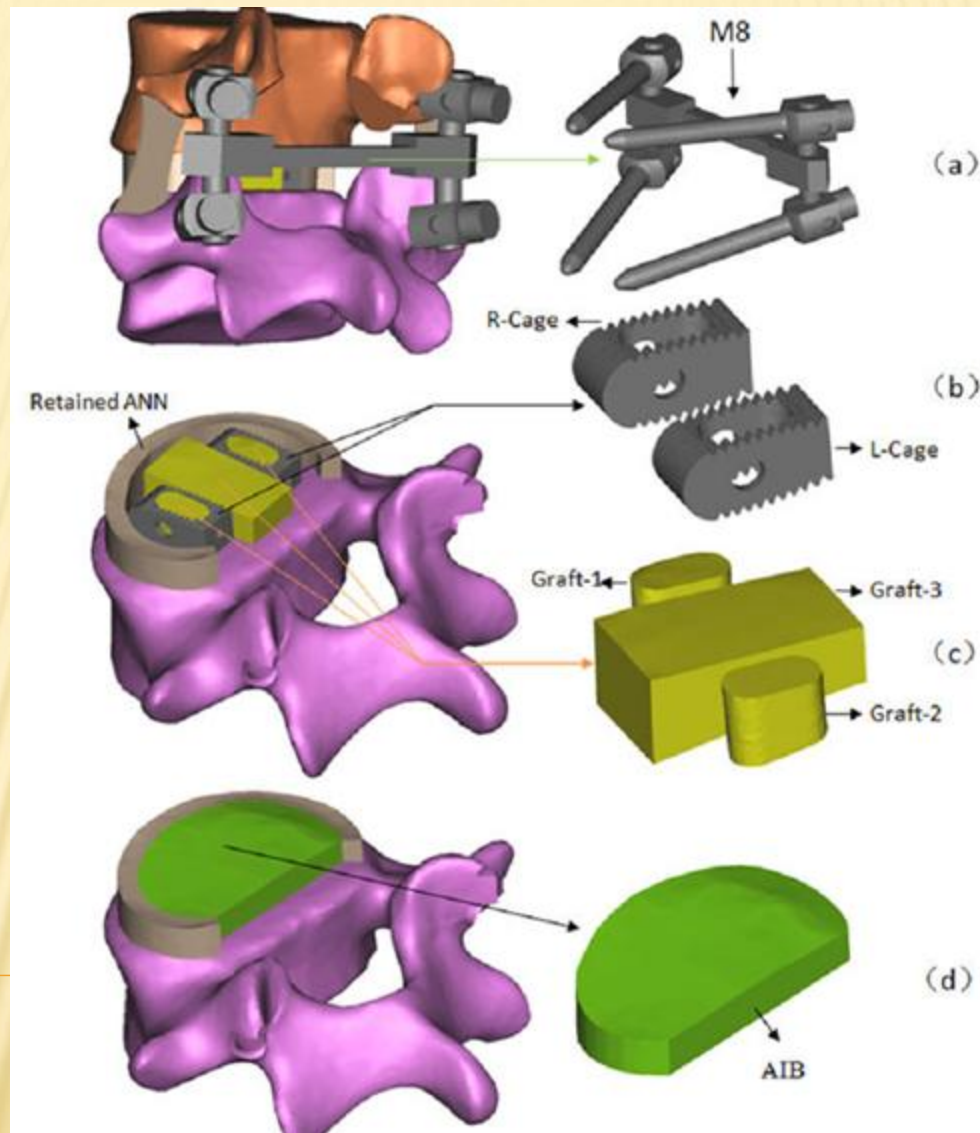
b)

## Okrajové podmienky

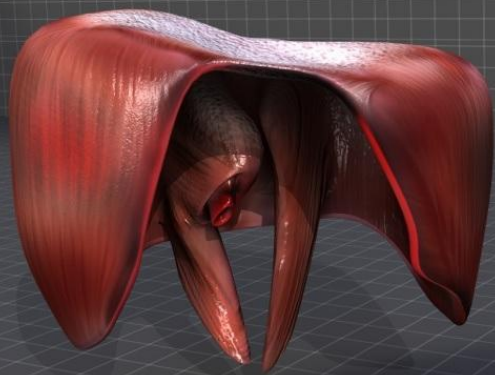




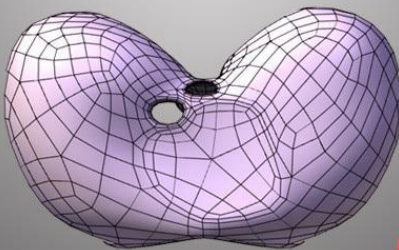
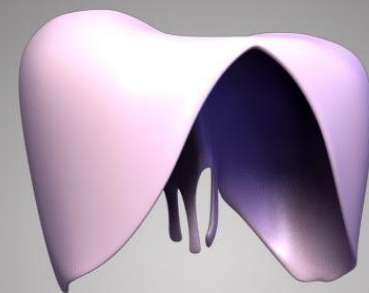
biokompatibilita



## Biomechanika pohybu bránice



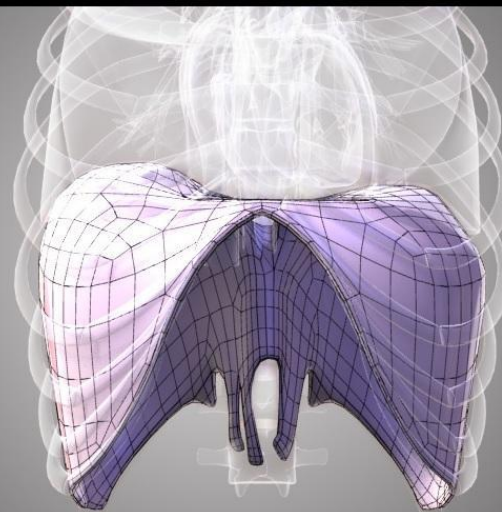
Digitallab3D



3Dm delS

LED

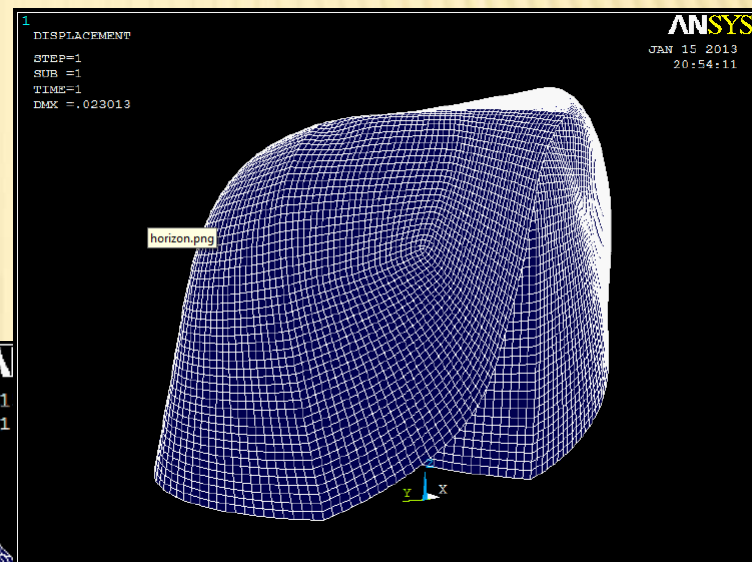
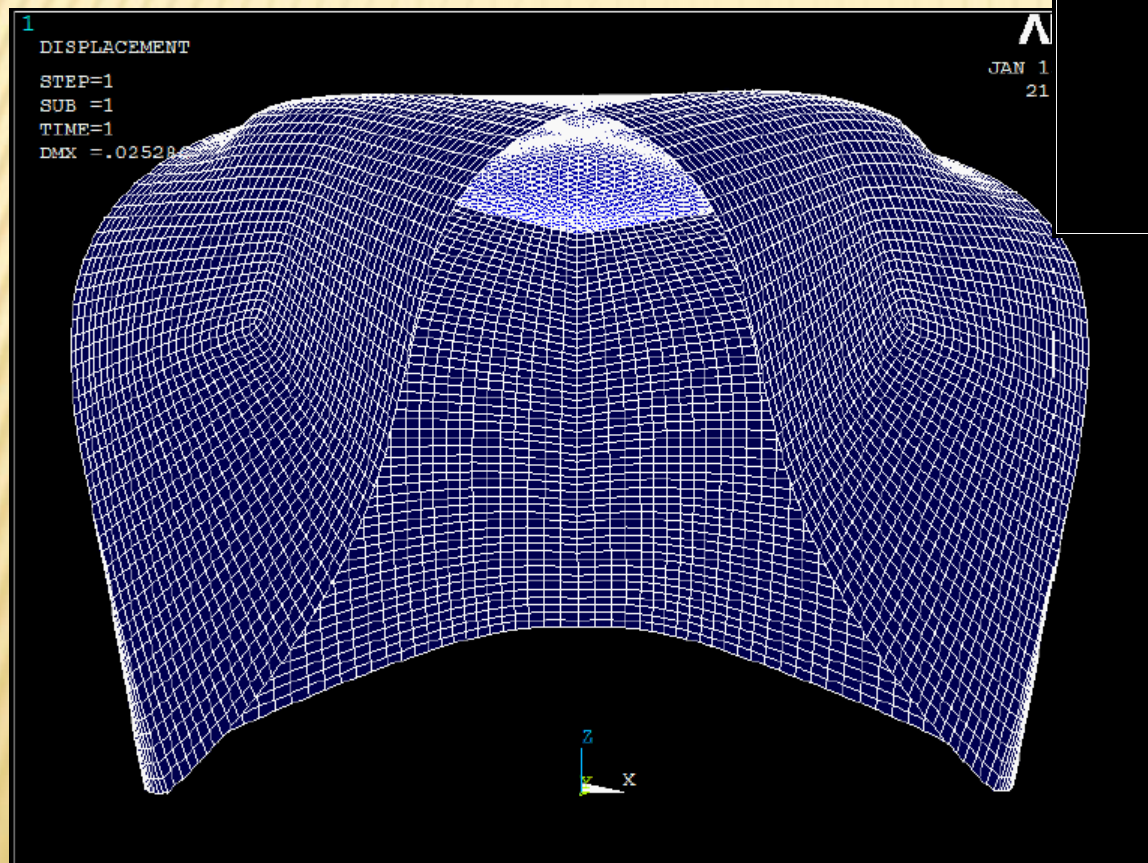
H  
U  
M  
A  
N



DIAPHRAGM

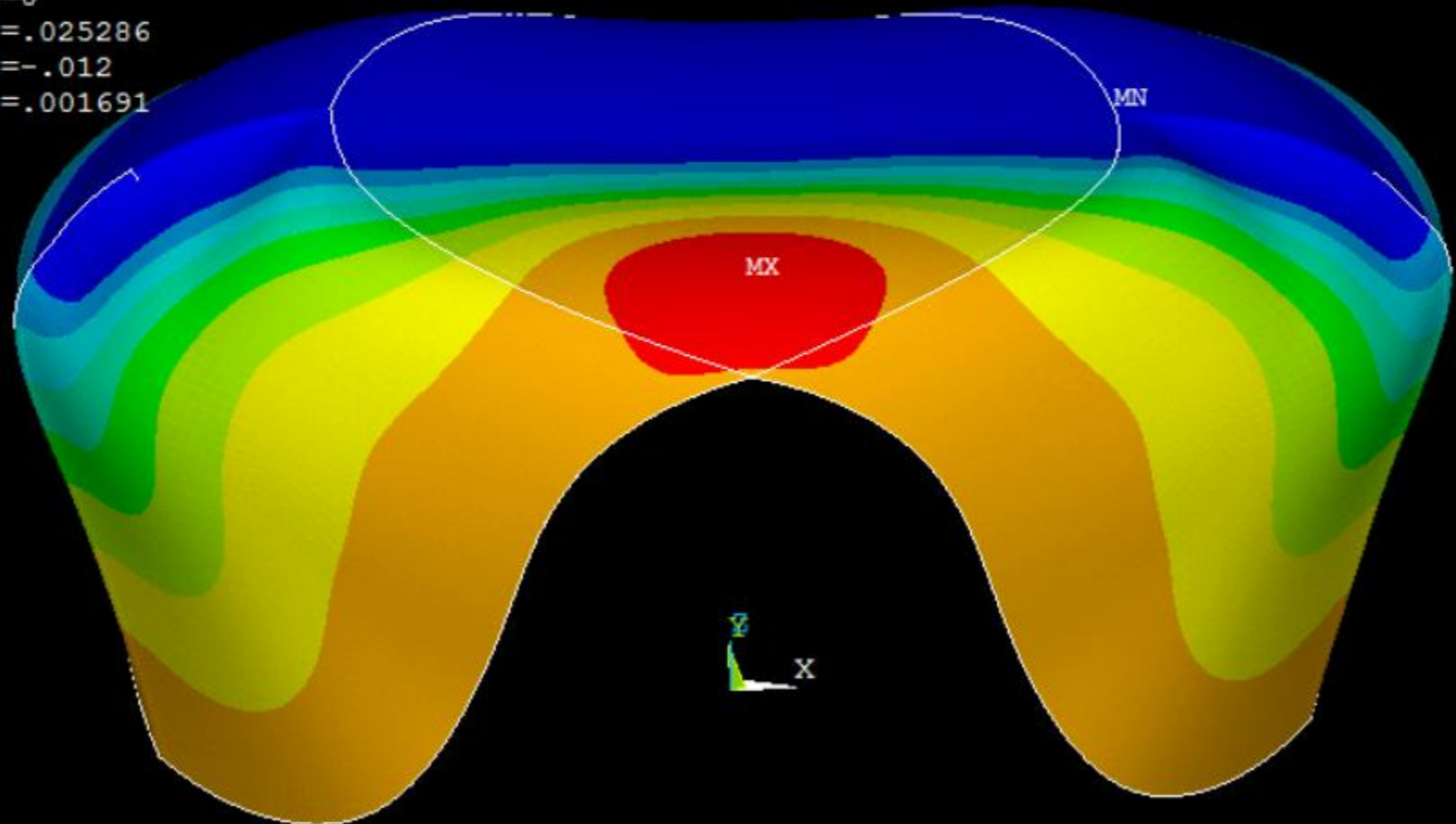


# Biomechanika pohybu bránice



# VIZUALIZÁCIA POSUNOV V Z-TOVOM SMERE (KRANIÁLNY SMER)

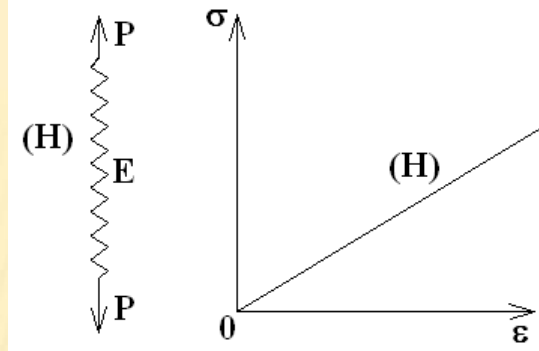
(AVG)  
S=0  
=.025286  
=-.012  
=.001691





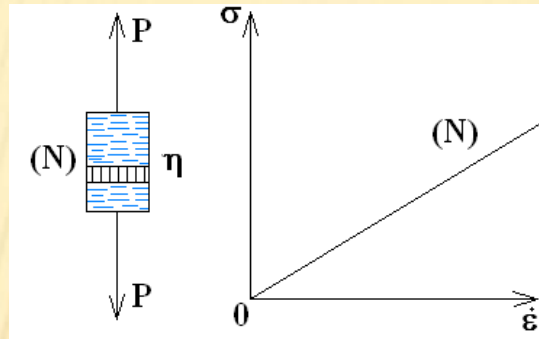
# Reológia

- základné látky



Hookova pružná látka

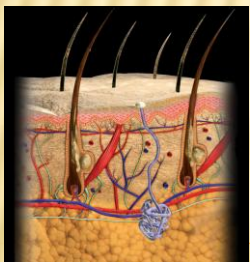
$$\sigma = \hat{E}\epsilon$$



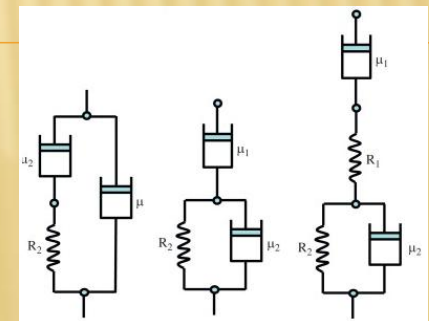
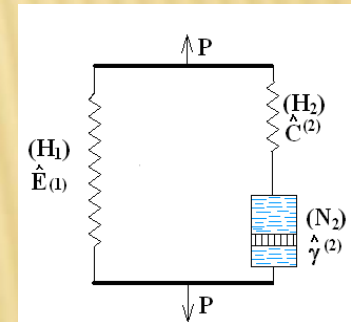
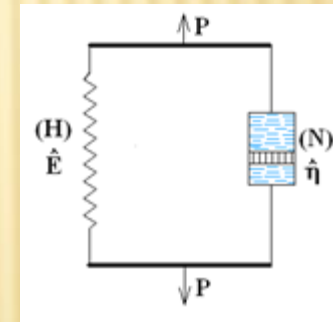
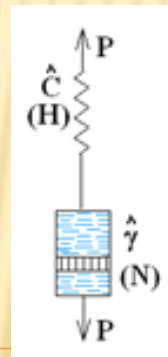
Newtonova väzká kvapalina

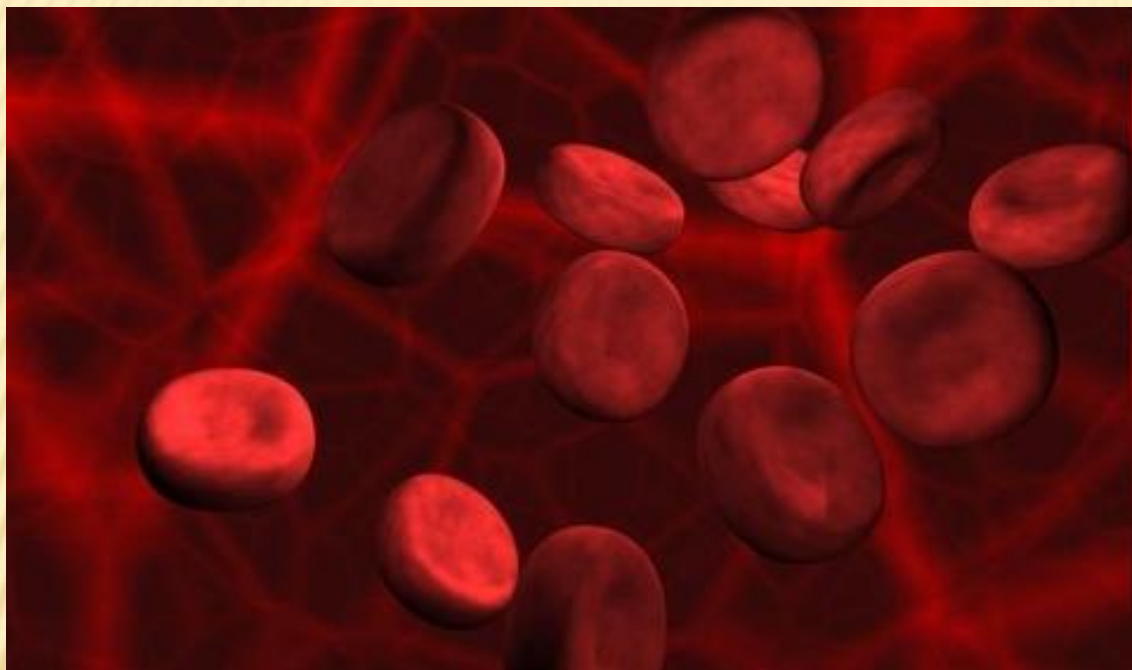
$$\sigma = \hat{\eta}\dot{\epsilon}$$

## Reologické modely



kožné tkanivo





Ďakujem za pozornosť

