1 Numerické metódy riešenia počiatočných úloh

Z teórie obyčajných diferenciálnych rovníc, ktorá sa na technických univerzitách preberá v bakalárskom stupni štúdia, už máme predstavu, že je len veľmi málo diferenciálnych rovníc, ktorých exaktné riešenie vieme nájsť. Preto pri hľadaní riešenia počiatočných úloh je často jedinou možnosťou nájsť *numerické riešenie.* V našich úvahách sa obmedzíme na hľadanie približného riešenia počiatočnej úlohy pre diferenciálnu rovnicu prvého rádu. Túto úlohu môžeme vo všeobecnosti zapísať v tvare

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0. \tag{1}$$

Všetky úvahy a výsledky sa však dajú rozšíriť aj pre systémy diferenciálnych rovníc. Základom, z ktorého vychádza väčšina numerických metód riešenia počiatočných úloh je *diskretizácia premenných.*

Znamená to, že približné riešenie sa nekonštruuje ako spojitá funkcia, ale postupne sa pre množinu navzájom rôznych bodov x_0, (bod, v ktorom je daná počiatočná podmienka), $x_1, x_2, \ldots$ hľadajú čísla y_0 (hodnota počiatočnej podmienky), $y_1, y_2, \ldots$, ktoré aproximujú hodnoty $y(x_0), y(x_1), \ldots$ presného riešenia v bodoch siete $x_0, x_1, \ldots$. Body siete -*uzly* nemusia byť *ekvidistantné*, to jest vzdiale- nosť medzi nimi, tzv. *krok diskretizácie* $h_n = x_{n+1} - x_n$ môže závisieť od n. Pritom aproximácia y_n presného riešenia $y(x_n)$ v bode x_n sa počíta z hodnôt približného riešenia v už vypočítaných uzloch. Týmto metódam hovoríme *metódy diskrétnej premennej* alebo *diferenčné metódy.*
Metóda, ktorá k tomuto riešeniu používa rekurentný vzťah, v ktorom je y_{n+1} vyjadrená pomocou k hodnôt $y_n, y_{n-1}, \ldots, y_{n+1-k}$ sa nazýva *k-kroková metóda.* Ak je $k = 1$, hovoríme o *jednokrokovej metóde.* Vzhľadom na cieľ a rozsah týchto skrípt sa v ďalšom obmedzíme len na stručný výklad dvoch najbežnejších typov jednokrokových metód.

Eulerova metóda

Je najjednoduchšou metódou na hľadanie približného riešenia Cauchyho úlohy typu (1).

Postupne od danej počiatočnej dvojice hodnôt $x_0,\ y_0$, ktoré určujú počia- točnú podmienku úlohy, budeme určovať hodnoty $x_1,\ y_1, \ldots, x_n, y_n$ takto: Zvolíme počiatočný krok h_0 a hodnota x_1 bude potom $x_1 = x_0 + h_0$. Teraz stačí vypočítať hodnotu y_1. Najskôr nájdeme pre hľadanú funkciu $y(x)$ Taylorov polynóm prvého stupňa v bode x_0 Keďže predpokladáme, že nami zvolený krok h_0 je malý, máme

$$y(x_1) \approx y(x_0) + h_0 y'(x_0).$$

V tejto aproximácii teraz nahradíme hodnotu $y'(x_0)$ hodnotou $f(x_0, y_0)$ z pôvodnej rovnice (1). Dostávame:

$$y(x_1) \approx y(x_0) + h_0 f(x_0, y_0).$$

Na základe tejto úvahy vypočíme teraz y_1 takto:

$$y_1 = y_0 + h_0 f(x_0, y_0).$$

Z vyššie uvedeného vyplýva, že hodnota y_1 bude aproximovať presnú hodnotu $y(x_1)$. Tento postup teraz môžeme zopakovať pre x_2, y_2 atď. Rekurentne dostávame: Ak máme vypočítané hodnoty x_n, y_n pre nejaké n, zvolíme h_n a potom

$$x_{n+1} = x_n + h_n, \quad y_{n+1} = y_n + h_n f(x_n, y_n). \tag{2}$$

Pre ekvidistantný krok h to jest $h = h_0 = h_1, \dots, = h_n, \dots$ dostávame schému

$$x_{n+1} = x_n + h, \quad y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n). \tag{3}$$

Teraz nás bude zaujímať, s akou presnosťou sme vypočítali hodnoty neznámej funkcie $y(x)$ v bodoch $x_1, \dots, x_n$, teda aký je rozdiel $y(x_n) - y_n$? Označme teraz d_n *lokálnu diskretizačnú chybu* to jest chybu, ktorej sa dopustíme v jednom kroku výpočtu Eulerovej metódy, to jest chybu s akou hodnoty presného riešenia spĺňajú rekurentný vzťah:

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + h_n f(x_n, y(x_n)) + d_n.$$

Meradlom, ako presne aproximuje postupnosť hodnôt $y_1, y_2, \dots, y_n$ presné riešenie danej počiatočnej úlohy, je *globálna diskretizačná chyba*. Označíme ju $e_n = y(x_n) - y_n$.
V stručnosti povieme, že *rád metódy* je najväčšie prirodzené číslo p také, že pre danú metódu aplikovanú na ľubovoľnú počiatočnú úlohu s dostatočne hladkým riešením (riešenie je spojitá funkcia, ktorá má aj spojité derivácie prvého a prípadne vyšších rádov) platí pre ľubovoľné n a $h_n \to 0$ odhad

$$d_n = O(h_n^{p+1}).$$

(Označenie $a = O(h)$ znamená, že existuje také číslo $C > 0: \ a \leq Ch$.) Rád Eulerovej metódy odvodíme veľmi ľahko opäť použitím Taylorovho radu a jeho zvyšku. Máme

$$d_n = y(x_{n+1}) - y(x_n) - h_n y'(x_n),$$

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) - h_n y'(x_n) + \frac{1}{2} h_n^2 y''(\psi), \quad \text{pre } \psi \in (x_n, x_{n+1}).$$

Preto

$$d_n = \frac{1}{2} h_n^2 y''(\psi).$$

Ak je y'' ohraničená, potom

$$d_n = O(h_n^2)$$

a teda Eulerova metóda je *prvého rádu.* Riešenie musí byť ale dostatočne hladká funkcia, inak sa rád metódy zníži. Odvodíme teraz globálnu chybu Eulerovej metódy pre prípad ekvidistantného kroku, to jest $h := h_0 = h_1 = \ldots = h_n \ldots$ ako napríklad [10] strana 132 - 140, alebo [1] strana 92 - 94. Odčítame rovnice algoritmu Eulerovej metódy a lokálnej chyby:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n),$$
$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + h_n f(x_n, y(x_n)) + d_n.$$

Máme

$$e_{n+1} = e_n + h(f(x_n, y(x_n)) - f(x_n, y_n)) + d_n.$$

Ku globálnej chybe sa tak v každom kroku pripočíta lokálna diskretizačná chyba, a preto sa v globálnej chybe e_{n+1} prejavia nepresnosti minulých diskretizačných krokov. V prípade, že funkcia f je len funkciou premennej x, a teda nezávisí od $y(x)$, hneď dostávame

$$e_N = \sum_{n=0}^{N-1} d_n.$$

(Podobný odhad dostaneme aj pre všeobecnejší prípad, za predpokladu že funkcia f je napríklad Lipschitzovsky spojitá v druhej premennej, tieto úvahy tu ale nebudeme robiť.)
Keďže už z vyššie uvedeného vieme, že lokálna chyba je typu $O(h^2)$ a $x_N - x_0 = Nh$, teda $N = \frac{x_N - x_0}{h}$, hneď dostávame, že $e_N = O(h)$, čiže globálna diskretizačná chyba je menšia ako Ch pre nejaké reálne číslo $C > 0$.
Nakoniec si ešte stručne povieme niečo o vplyve zaokrúhľovacích chýb (podrobnejšie pozri 1.diel kapitola 1.3, 1.4).
Nech ε je maximálna zaokrúhľovacia chyba v jednom kroku Eulerovej metódy. Označili sme y_n skutočné približné riešenie, a teraz označme $\bar{y}_n$ približné riešenie, ktoré skutočne vypočítame, a ktoré sa od riešenia y_n líši vplyvom zaokrúhľovacích chýb. Takéto riešenie potom spĺňa pre ekvidistantný krok rovnicu
$\bar{y}_{n+1} = \bar{y}_n + hf(x_n, \bar{y}_n) + \varepsilon, \quad n = 0, 1, \ldots.$
Celková chyba vzniknutá zaokrúhľovaním bude teda $N\varepsilon$, kde N je posledný krok, ktorý sme vypočítali. Z veľkosti N, ktorú sme odvodili vyššie, vidíme, že celková zaokrúhľovacia chyba bude $\frac{\varepsilon(x_N - x_0)}{h}$. Preto celková chyba výpočtu v bode x_N bude súčtom globálnej diskretizačnej chyby (chyby metódy) a globálnej zaokrúhľovacej chyby:
$|y(x_N) - \bar{y}_N| \approx Ch + \frac{\varepsilon(x_N - x_0)}{h} := g(h).$

Funkcia g bude minimálna pre $h = \left(\frac{\varepsilon(x_N - x_0)}{C}\right)^{\frac{1}{2}}$. Teda chyba bude minimálna pre isté h_{opt}. Ďalším zmenšovaním h nám budú narastať zaokrúhľovacie chyby (kroky budú menšie, a preto ich bude viac). Ak zvolíme h väčšie ako je h_{opt} bude zasa prevládať chyba diskretizačná. Tento jav je typický aj pre iné diferenčné metódy.

Poznámka Na princípe aproximácie funkcie Taylorovým polynómom sú založené aj iné metódy. Voláme ich *metódy Taylorovho typu.* Tieto môžu byť aj vyšších rádov ako je Eulerova metóda, na druhej strane zasa treba počítať aj derivácie danej funkcie. Tieto metódy sú preto presnejšie, ako je Eulerova, ale sú aj omnoho prácnejšie.

Metódy typu Runge-Kutta

Tieto metódy sú veľmi univerzálne a v technickej praxi užitočné. Tiež sú v podstate založené na Taylorovom rozvoji funkcie, ale nepriamo tak, aby sme nemuseli určovať hodnoty derivácií funkcie, tieto sa aproximujú výpočtom samotnej funkcie vo vhodne zvolených strategických bodoch. Ich všeobecná schéma je tvaru

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{i=1}^{r} \alpha_i k_i, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

kde

$$k_1 = f(x_n, y_n), \quad k_i = f(x_n + \lambda_i h_n, y_n + \mu_i h_n k_{i-1}), i = 1, \ldots, r$$

a $\alpha_i, \lambda_i, \mu_i$ sú vhodne vybraté konštanty. V stručnosti si uvedieme len najznámejšie metódy. Rád konvergencie ani veľkosť chyby odvádzať nebudeme.

Metódy 2. rádu

- $r = 2, \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 1, \lambda_2 = \mu_2 = \frac{1}{2}$
  Dostávame $k_1 = f(x_n, y_n),\quad k_2 = f(x_n + h_n/2, y_n + h_n/2k_1)$
  $y_{n+1} = y_n + h_n k_2$ Modifikovaná Eulerova metóda.

- $r = 2, \alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}, \lambda_2 = \mu_2 = 1$
  Dostávame $k_1 = f(x_n, y_n),\quad k_2 = f(x_{n+1}, y_n + h_n k_1)$
  $y_{n+1} = y_n + h_n(k_1 + k_2)/2$ Heunova metóda

Metódy 4. rádu

Uvedieme aspoň najpoužívanejšiu z nich:
$r = 4,\ k_1 = f(x_n, y_n),\quad k_2 = f(x_n + h_n/2, y_n + h_n/2k_1)$
$k_3 = f(x_n + h_n/2, y_n + h_n/2k_2),\quad k_4 = f(x_{n+1}, y_n + h_n k_3)$
$y_{n+1} = y_n + h_n(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6$

2 Okrajové úlohy pre obyčajné diferenciálne rovnice

Výraz

$$F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = g(x) \tag{4}$$

nazývame *obyčajnou diferenciálnou rovnicou (ODR) n-tého rádu.* Pritom F je funkcia $n + 2$ premenných a $g(x)$ je reálna funkcia jednej reálnej premennej.
Neznámou v rovnici je reálna funkcia $y(x)$ jednej reálnej premennej x, ktorá reprezentuje väčšinou bod priestoru alebo čas.
Z hľadiska aplikácií jednou z najdôležitejších je tzv. *lineárna ODR 2. rádu*

$$a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = g(x), \tag{5}$$

kde koeficienty a_2, a_1, a_0 a pravá strana g sú spojité funkcie a neznáma funkcia y je dvakrát diferencovateľnou funkciou.
Predtým, ako budeme definovať okrajovú úlohu pre ODR zavedieme ešte niekoľko užitočných pojmov.
Pomocou $C^k(a, b)$ budeme označovať množinu všetkých funkcií $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ (to jest funkciu definovanú na intervale (a, b) s oborom hodnôt v $\mathbf{R}$), ktoré sú k-krát spojite diferencovateľné (to jest majú derivácie až do k-teho rádu a tieto derivácie sú spojité funkcie). V tejto definícii môže byť aj $a = -\infty$ a $b = \infty$.
Majme teraz opäť lineárnu ODR 2. rádu (5), pre $x \in (a, b)$, kde a, b sú dané kladné reálne čísla $a < b$. Úlohou je nájsť funkciu $y \in C^2(a, b)$, ktorá pre $x \in (a, b)$ spĺňa lineárnu ODR (5) a pre ktorú v koncových bodoch intervalu $\langle a, b\rangle$ platia podmienky

$$\begin{aligned} \alpha y(a) + \beta y'(a) &= y_a \\ \gamma y(b) + \delta y'(b) &= y_b, \end{aligned} \tag{6}$$

kde $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ y_a,\ y_b$ sú dané reálne čísla vyhovujúce podmienke:

$$|\alpha| + |\beta| \neq 0, \qquad |\gamma| + |\delta| \neq 0.$$

Takúto úlohu nazývame *okrajovou úlohou* a podmienky (6) nazývame *okrajovými podmienkami.*
Typy okrajových podmienok:

1. *Dirichletove okrajové podmienky* (podmienky 1. druhu).

$$y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b$$

2. *Neumannove okrajové podmienky* (podmienky 2. druhu).

$$y'(a) = y_a, \quad y'(b) = y_b$$

3. *Newtonove okrajové podmienky* (podmienky 3. druhu). Sú to vlastne pôvodné okrajové podmienky (6) pre $\alpha, \beta, \gamma, \delta \neq 0$.

4. *Zmiešané okrajové podmienky*- v každom z oboch koncových bodov je typovo iná okrajová podmienka, napríklad:

$$y(a) = y_a, \quad y'(b) = y_b.$$

3 Numerické riešenie okrajových úloh

Existuje niekoľko spôsobov numerického riešenia okrajových úloh. Jednou z nich je *metóda sietí* alebo tiež *diferenčná metóda.* Okrajová úloha pre ODR je úloha spočívajúca v hľadaní riešenia, to jest neznámej funkcie, na určitom intervale. Označme tento interval napríklad $< a, b >$. Diferenčná metóda numerického riešenia okrajovej úlohy je založená na myšlienke, že riešenie budeme hľadať nie na celom intervale $< a, b >$, ale len v jednotlivých jeho bodoch. Tieto body budeme nazývať *uzly.* Získame ich delením intervalu $< a, b >$ na n častí, ktoré možu byť buď *ekvidistantné* - *rovnomerné*, kde:

$$h = \frac{b-a}{n}$$

bude označovať *krok delenia*, to jest veľkosť deliacich intervalov a počet uzlov bude $n+1$:

$$x_i = a + i \cdot h, \ i = 0, 1, \ldots, n$$

alebo máme *neekvidistantné* - *nerovnomerné* delenie, a v tom prípade platí:

$$x_i = a + i \cdot h_i,$$

kde

$$\sum_{i=1}^{n-1} h_i = b - a.$$

Uzly $x_0 = a$ a $x_n = b$ sú *hraničné uzly* siete ostatné uzly $x_i, i = 1, \ldots, n-1$ nazývame *vnútorné uzly* siete. V týchto uzloch budeme teraz hľadať numerické hodnoty riešenia daného okrajového problému.
Keďže riešenie má splňať diferenciálnu rovnicu vo vnútri oblasti, budeme postupovať

tak, že jednotlivé derivácie neznámej funkcie v rovnici nahradíme tzv. *diferenciami.* Tieto diferenčné vzťahy si veľmi ľahko odvodíme použijúc Taylorov rozvoj funkcie. Pre jednoduchosť ich odvodíme pre rovnomerné delenie intervalu s veľkosťou h.
Predpokladajme, že riešenie okrajovej úlohy - funkcia $y(x),\ x \in < a, b >$ je dostatočne hladká funkcia. Nech h je reálne číslo. Potom platí:

$$y(x+h) = y(x) + y'(x)h + y''(x)\frac{h^2}{2} + y'''(\eta)\frac{h^3}{3!}, \tag{7}$$

$$y(x-h) = y(x) - y'(x)h + y''(x)\frac{h^2}{2} - y'''(\mu)\frac{h^3}{3!}, \tag{8}$$

pre nejaké vhodné body η a μ. Odčítaním týchto dvoch rovníc a ich úpravou, dostaneme:

$$y'(x) = \frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h} + \frac{(y'''(\eta) + y'''(\mu))\, h^2}{3!}$$

Nech teraz $x = x_i,\ \ x + h = x_{i+1},\ \ \ x - h = x_{i-1}$ Ak uvážime, že delenie intervalu je dostatočne husté, teda hodnota h je dostatočne malá a ak navyše má riešenie ohraničené tretie derivácie, členy pri h^2 môžeme zanedbať, a potom pre nahradenie prvej derivácie dostaneme z vyššie uvedeného vzťahu nasledujúcu, tzv. *centrálnu diferenciu*, ktorá aproximuje prvu deriváciu s chybou $O(h^2)$:

$$y'_i \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}, \tag{9}$$

kde y_i znamená približnú hodnotu riešenia v bode x_i a y'_i znamená približnú hodnotu derivácie riešenia v bode x_i.
V numerickej matematike sa využívajú aj iné diferencie, ktoré nahrádzajú prvú deriváciu napríklad z rovnice (7) dostávame hneď tzv. *doprednú diferenciu*:

$$y'_i \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{h},$$

táto ale aproximuje prvú deriváciu len s chybou $O(h)$.
Keďže sa budeme zaoberať rovnicami druhého rádu, treba ešte odvodiť diferenciu pre druhú deriváciu. To môžeme urobiť opäť z Taylorovho rozvoja, ktorý urobíme až do 4. derivácie, podobne ako vo vzťahoch (7) a (8), ktoré teraz sčítame. Takto dostávame:

$$y''(x) = \frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2} + \frac{\left(y^{(4)}(\eta) + y^{(4)}(\mu)\right) h^2}{4!}.$$

Z tohto vzťahu vidno, že 2. deriváciu v bode x_i môžeme nahradiť diferenciou takto:

$$y''_i \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2}. \tag{10}$$

Chyba, ktorej sa pri tom dopustíme je, opäť rádu $O(h^2)$.
Okrajový problém s ODR 2. rádu s konštantnými koeficientami a Dirichletovými podmienkami by sme už vedeli riešiť, čo si môžeme demonštrovať na príklade:

Príklad 3.1.

$$y'' + 2y' + y = x^3 + 6x^2 + 1, \quad x \in (0, 2)$$

$$y(0) = 1, \quad y(2) = 5.$$

<u>*Riešenie:*</u> Interval $(0, 2)$ rozdelíme na $n + 1$, pre jednoduchosť ekvidistantných dielov, veľkosti $h = \frac{2}{n+1}$. Riešenie budeme hľadať v bodoch $x_1 = h, x_2 = 2h, \ldots, x_n = 2 - h$, pričom pre hraničné body bude platiť: $x_0 = 0$, $x_{n+1} = 2$ a z Dirichletových podmienok úlohy hneď vieme, že: $y_0 = 1$ a $y_{n+1} = 5$. Pre ostatné, vnútorné body použijeme diferenčné rovnice, ktoré dostaneme nahradením derivácií v ODR diferenciami. Takto pre i-ty uzol máme:

$$\frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} + 2\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + y_i = x_i^3 + 6x_i^2 + 1.$$

Po úprave môžeme napísať :

$$\left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{h}\right) y_{i-1} + \left(1 - \frac{2}{h^2}\right) y_i + \left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{h}\right) y_{i+1} = x_i^3 + 6x_i^2 + 1$$

Ako vidieť v i-tej rovnici sú vzájomne zviazané hodnoty len v troch uzloch, teda neznáme hodnoty y_{i-1}, y_i, y_{i+1} a táto väzba je lineárna. Preto pre vektor neznámych $\mathbf{Y} = [y_1, y_2, \ldots, y_n]$ máme n lineárnych rovníc, ktoré môžeme stručne zapísať v maticovom tvare:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{Y} = \mathbf{F}, \tag{11}$$

kde $\mathbf{F} = [F_1, F_2, \ldots, F_n]$ je vektor pravej strany, pre ktorý platí:

$$F_i = x_i^3 + 6x_i^2 + 1, \ i = 2, 3, \ldots, n - 1$$

Do prvej a poslednej zložky vektora pravej strany zahrnieme aj hodnoty z Dirichletových okrajových podmienok, ktoré sú známe:

$$F_1 = x_1^3 + 6x_1^2 + 1 - \frac{y_0}{h^2} + \frac{2y_0}{2h} = x_1^3 + 6x_1^2 + 1 - \frac{1}{h^2} + \frac{1}{h}$$

$$F_n = x_n^3 + 6x_n^2 + 1 - \frac{y_{n+1}}{h^2} - \frac{2y_{n+1}}{2h} = x_n^3 + 6x_n^2 + 1 - \frac{5}{h^2} - \frac{5}{h}$$

Matica A bude trojdiagonálna matica tvaru:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{2}{h^2} & \frac{1}{h^2} + \frac{1}{h} & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{1}{h^2} - \frac{1}{h} & 1 - \frac{2}{h^2} & \frac{1}{h^2} + \frac{1}{h} \ldots & 0 & \ldots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & \frac{1}{h^2} - \frac{1}{h} & 1 - \frac{2}{h^2} \end{bmatrix};$$

Vyriešením tohto lineárneho systému dostávame numerické riešenie danej úlohy.

Ak chceme riešiť problém priehybu pružného nosníka, musíme si ešte odvodiť aproximáciu štvrtej derivácie pomocou diferencií. Logický postup je ten istý ako pri deriváciách nižších rádov, avšak je nutné použiť viacbodovú schému a Taylorov rozvoj urobiť do vyššieho stupňa. Predpokladajme opäť dostatočne hladké riešenie $y(x)$ a urobíme jeho rozvoj v bode x_i, najskôr pre bod x_{i+1}, a potom pre bod x_{i-1} až piateho stupňa. Máme

$$\begin{aligned} y(x_{i+1}) = y(x_i) + y'(x_i)h + y''(x_i)\frac{h^2}{2} + y'''(x_i)\frac{h^3}{3!} + y^{(IV)}(x_i)\frac{h^4}{4!} \\ +y^{(V)}(x_i)\frac{h^5}{5!} + y^{(VI)}(\eta)\frac{h^6}{6!} \quad \text{pre } \eta \in \langle x_i, x_{i+1} \rangle. \end{aligned} \tag{12}$$

$$y(x_{i-1}) = y(x_i) - y'(x_i)h + y''(x_i)\frac{h^2}{2} - y'''(x_i)\frac{h^3}{3!} + y^{(IV)}(x_i)\frac{h^4}{4!} \tag{13}$$
$$-y^{(V)}(x_i)\frac{h^5}{5!} + y^{(VI)}(\mu)\frac{h^6}{6!} \qquad \text{pre}\mu \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle.$$

A analogicky pre body x_{i+2} a x_{i-2}:

$$y(x_{i+2}) = y(x_i) + y'(x_i)2h + y''(x_i)\frac{(2h)^2}{2} + y'''(x_i)\frac{(2h)^3}{3!} + \tag{14}$$
$$y^{(IV)}(x_i)\frac{(2h)^4}{4!} + y^{(V)}(x_i)\frac{(2h)^5}{5!} + y^{(VI)}(\eta)\frac{(2h)^6}{6!} \qquad \text{pre } \eta \in \langle x_i, x_{i+2}\rangle.$$

$$y(x_{i-2}) = y(x_i) - y'(x_i)2h + y''(x_i)\frac{(2h)^2}{2} - y'''(x_i)\frac{(2h)^3}{3!} + \tag{15}$$
$$y^{(IV)}(x_i)\frac{(2h)^4}{4!} - y^{(V)}(x_i)\frac{(2h)^5}{5!} + y^{(VI)}(\mu)\frac{(2h)^6}{6!} \qquad \text{pre } \mu \in \langle x_{i-2}, x_i\rangle.$$

Ak sčítame postupne prvé dve rovnice a druhé dve rovnice, dostaneme:

$$y(x_{i+1}) + y(x_{i-1}) = 2y(x_i) + y''(x_i)h^2 + y^{(IV)}(x_i)\frac{2h^4}{4!} + (y^{(VI)}(\eta) + y^{(VI)}(\mu))\frac{h^6}{6!}$$

$$y(x_{i+2}) + y(x_{i-2}) = 2y(x_i) + 4y''(x_i)h^2 + 2y^{(IV)}(x_i)\frac{(2h)^4}{4!}$$
$$+(y^{(VI)}(\eta) + y^{(VI)}(\mu))\frac{(2h)^6}{6!}$$

Prvú rovnicu teraz vynásobíme štyrmi a odčítame od druhej. Ak potom z takto vzniknutého vzt'ahu vyjadríme štvrtú deriváciu, pri označení ako u predchádzajúcich diferencií máme:

$$y^{(IV)}(x_i) = \frac{y_{i+2} - 4y_{i+1} + 6y_i - 4y_{i-1} + y_{i-2}}{h^4} + O(h^2)$$

Takúto aproximáciu môžeme využit' pri hl'adaní numerického riešenia diferenciálnej rovnice štvrtého rádu, napr. pri jednorozmerných rovniciach z lineárnej teórie pružnosti.
Treba ešte vyšetrit' aproximáciu okrajových podmienok. Dané hodnoty riešenia na okraji, sa realizujú ako Dirichletova podmienka pre rovnice druhé- ho rádu. Ak ale ide o rovnicu štvrtého rádu, môžu byt' predpísané hodnoty derivácií, analogicky, ako Neumannove podmienky pre rovnicu druhého rádu. Ukážeme si teraz, ako ich aproximovat' čo najlepšie. Odvodili sme dve aproximácie pre prvú deriváciu. Ak ale použijeme aproximáciu doprednou či analogicky spätnou diferenciou, táto je len presnosti $O(h)$, a preto celková chyba diskretizácie bude opät' len $O(h)$, aj ked' by sme aproximácie derivácií v rovnici urobili rádu vyššieho. Ak chceme zachovat' pre úlohu celkovú chybu $O(h^2)$, ako je aj v rovnici, musíme aj pri okrajových podmienkach použit' pre aproximáciu prvej derivácie centrálnu diferenciu.

Metodický opis je nasledovný (opíšeme pre l'avý okraj): Označme l'avý koncový bod x_0. Vo vzdialenosti h nal'avo zvolíme nový bod x_{-1}. V bode x_0 urobíme najskôr aproximáciu rovnice v tomto bode a potom centrálnou diferenciou aproximujeme okrajovú podmienku využijúc bod x_{-1}. Hodnotu v tomto bode z aproximácie OP eliminujeme a dosadíme do rovnice, ktorá aproximuje diferenciálnu rovnicu v krajnom bode. Postup ukážeme pre rovnicu priehybu votknutého nosníka. Pre ODR s Neumannovými podmienkami je postup analogický.

Teraz sa budeme zaoberat' úlohami s nekonštantnými koeficientami. V takomto prípade je vhodné upravit' ODR do samoadjungovaného tvaru a hl'adat' numerické riešenie takto preformulovanej úlohy.
Označme teraz:

$$p_i = p(x_i), \quad q_i = q(x_i), \ f_i = f(x_i), i = 1, \cdots, n,$$

to jest pre hodnoty vnútorných uzlov. Pre túto úlohu budeme potrebovat' pomocné body v polovici každého deliaceho intervalu a tieto označíme

$$x_{i+\frac{1}{2}} = x_i + \frac{h}{2} \quad \text{a} \quad x_{i-\frac{1}{2}} = x_i - \frac{h}{2}.$$

Podobne označíme

$$p_{i+\frac{1}{2}} = p(x_{i+\frac{1}{2}}), \quad p_{i-\frac{1}{2}} = p(x_{i-\frac{1}{2}}).$$

Teraz pomocou vzt'ahu (9) môžeme aproximovat' prvý člen, resp. jeho deriváciu v bode x_i nasledujúcim spôsobom:

$$(p(x_i)y'(x_i))' \approx \frac{p_{i+\frac{1}{2}}y'_{i+\frac{1}{2}} - p_{i-\frac{1}{2}}y'_{i-\frac{1}{2}}}{h}.$$

Ked' teraz v tomto vzt'ahu opät' použijeme na derivácie funkcie y diferenčnú formulu (9), dostaneme:

$$\frac{1}{h}\left(p_{i+\frac{1}{2}}\frac{y_{i+1} - y_i}{h} - p_{i-\frac{1}{2}}\frac{y_i - y_{i-1}}{h}\right).$$

Takýmto spôsobom môžeme teda aproximovat' 1. člen rovnice. Ostatné aproximujeme hodnotou v príslušnom bode. V i-tom vnútornom bode po malých úpravách budeme mat' rovnicu:

$$-\frac{1}{h^2}\left(p_{i+\frac{1}{2}}(y_{i+1} - y_i) - p_{i-\frac{1}{2}}(y_i - y_{i-1})\right) + q_i y_i = f_i,$$

alebo po d'alšej úprave:

$$-p_{i-\frac{1}{2}}y_{i-1} + (p_{i-\frac{1}{2}} + p_{i+\frac{1}{2}} + h^2 q_i)y_i - p_{i+\frac{1}{2}}y_{i+1} = h^2 f_i.$$

Z uvedenej rovnice vyplýva, že aj v tomto prípade numerické riešenie je riešením lineárneho systému rovníc s trojdiagonálnou maticou, ktorá je navyše symetrická, čo je z numerického hl'adiska vel'mi výhodná vlastnost'. Nech sú k takejto diferenciálnej rovnici dané Dirichletove okrajové podmienky v tvare:

$$y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta.$$

Uvedený systém rovníc bude v tomto prípade tvaru:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{Y} = \mathbf{F},$$

kde $\mathbf{F} = [F_1, F_2, \ldots, F_n]$ je vektor pravej strany, pre ktorý platí:

$$F_i = h^2 f_i, \; i = 2, 3, \ldots, n-1$$

Do prvej a poslednej zložky vektora pravej strany zahrnieme aj hodnoty z Dirichletových okrajových podmienok, ktoré sú známe:

$$F_1 = h^2 f_1 + p_{\frac{1}{2}}\alpha \text{ a } F_n = h^2 f_n + p_{n+\frac{1}{2}}\beta.$$

Matica $\mathbf{A}$ bude trojdiagonálna matica tvaru:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} p_{1/2} + p_{3/2} + h^2 q_1 & -p_{3/2} & \ldots & 0 \\ -p_{3/2} & p_{3/2} + p_{5/2} + h^2 q_2 \ldots & 0 & \\ \vdots & \vdots\vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & -p_{n-1/2} & p_{n-1/2} + p_{n+1/2} + h^2 q_n \end{bmatrix};$$

Vyriešením tohto lineárneho systému dostávame numerické riešenie danej úlohy.

References

[1] Bachvalov, N. S.: Numerické metódy, *Nauka* 1973

[2] Balážová, A., Baroková, D., Mikula, K., Pfender, D., Šoltész, A.: Numerical modelling of the groundwater flow in the left floodplain area of the Danube river, *Proc. of Algoritmy* , pp. 237-244 2002

[3] Černá, R., Machlický, M., Vogel, J., Zlatník, Č.: Základy numerické matematiky a programování. *SNTL/ALFA, Praha* 1987.

[4] Čunderlík, R., Janák, J., Mikula, K.: Matematika pre geodetov, *skriptá SvF STU Bratislava* 2005

[5] Evans, G., Blackledge, J., Yardely, P.: Numerical Methods for Partial Differential Equation *Springer London,* 2000

[6] Handlovičová, A.: Thermal analysis for 3D domain using finite element method, *Zborník z konferencie Matematická štatistika a numerická matematika a ich aplikácie,* Kočovce, pp.92 98, 1999

[7] Kálnová, G., Handlovičová, A., Miššík, L., Širáň, J.: Riešené úlohy z matematiky II *Skriptá SvF STU Bratislava 2000*

[8] Marčuk, G. I.: Metody numerické matematiky, *Academia Praha* 1987

[9] Míka, S., Kufner, A.: Okrajové úlohy pre obyčajné diferenciálne rovnice, *SNTL, Praha* zošit XIX, 1983

[10] Přikryl, P.: Numerické metody matematické analýzy *SNTL, Praha,* zošit XXIV, 1998

[11] Samarskij, A. A.: Teória diferenčných schém, *Nauka, Moskva* 1977, v ruštine