

# Matematické modelovanie v monitorovaní tiažového poľa Zeme

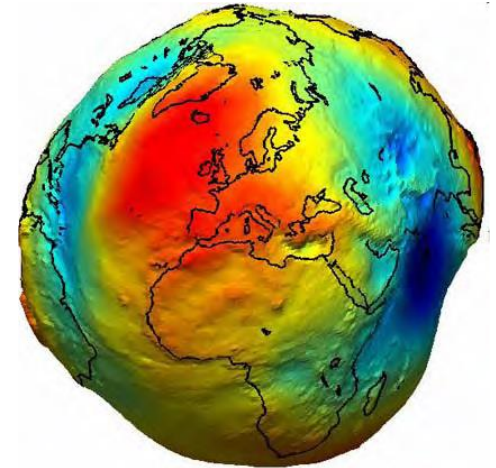
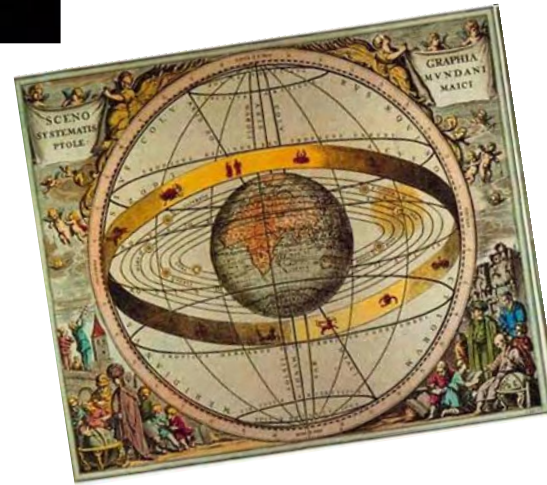
---

M. MACÁK, R. ČUNDERLÍK, Z. MINARECHOVÁ



# Trochu z histórie

---

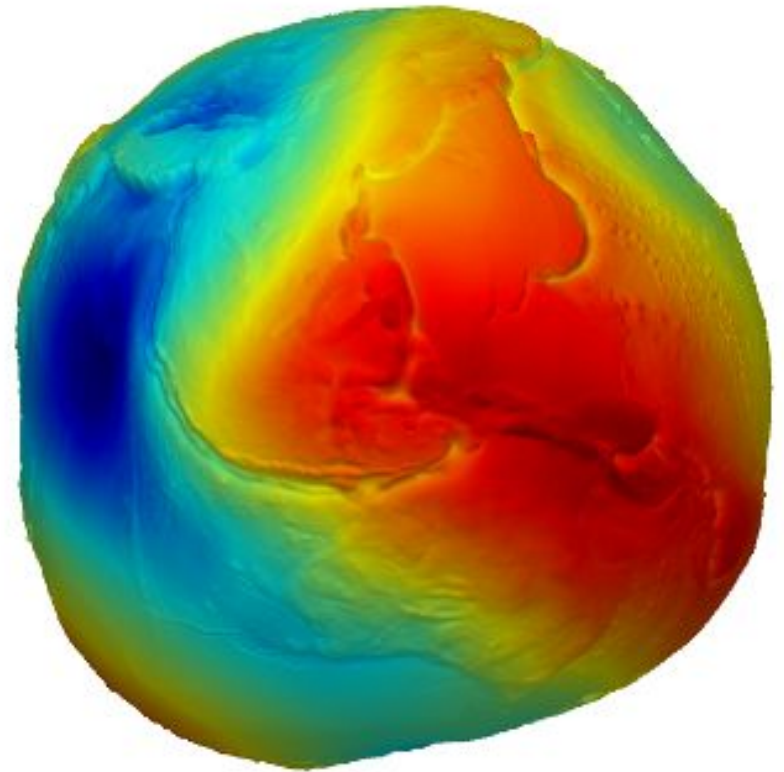


# Čo je to Geoid?

---

Geoid je fyzikálny model povrchu Zeme pri strednej hladine svetových oceánov..

Johann Benedikt Listing (1871)



# Fyzikálna geodézia

## Skutočná Zem:

- tiažový potenciál  
(gravitačný + odstredivý)
- tiažové zrýchlenie

$$W_0 \approx 62\,636\,856.0 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$$
$$g \approx 9.813456789 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$W$$
$$g = \text{grad } W$$

## Normálne teleso:

(napr. referenčný elipsoid)

- normálny tiažový potenciál  
(gravitačný + odstredivý)
- normálne tiažové zrýchlenie

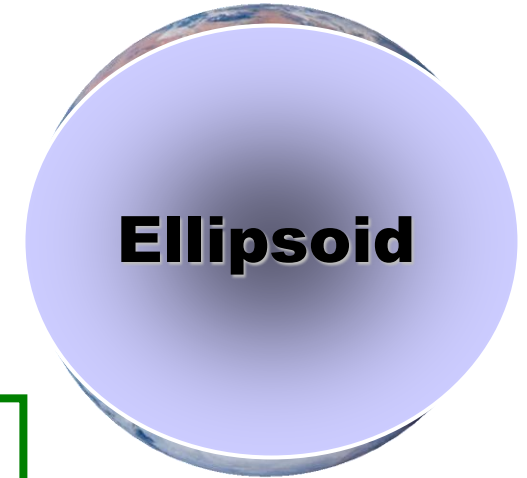
$$U$$
$$\gamma = \text{grad } U$$

**Poruchový potenciál**

$$T = W - U$$

Ak parametre normálneho telesa  
odvodené zo skutočnej Zeme

$$\Delta T = 0 \quad \text{- mimo Zeme}$$



# Geodetická okrajová úloha

$$\begin{aligned}\Delta T(\mathbf{x}) &= 0 & \mathbf{x} \in \text{ext. } \Omega \\ \langle \nabla T(\mathbf{x}), \mathbf{s}(\mathbf{x}) \rangle &= -\delta g(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \Gamma \\ T(\mathbf{x}) &= O(|\mathbf{x}|^{-1})\end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned}T(\mathbf{x}) &= W(\mathbf{x}) - U(\mathbf{x}) \\ \mathbf{s}(\mathbf{x}) &= -\nabla U(\mathbf{x}) / |\nabla U(\mathbf{x})| \\ \Omega &- \text{Zem} \\ \Gamma &- \text{povrch Zeme}\end{aligned}$$

**Vstupné dáta – tiažové poruchy**

$$\delta g(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) - \gamma(\mathbf{x})$$

$$\begin{aligned}\text{kde } g(\mathbf{x}) &= |\nabla W(\mathbf{x})| \\ \gamma(\mathbf{x}) &= |\nabla U(\mathbf{x})|\end{aligned}$$



# Modifikovaná geodetická okrajová úloha

$$\Delta T(\mathbf{x}) = 0 \quad \mathbf{x} \in \Omega$$

$$\langle \nabla T(\mathbf{x}), \mathbf{s}(\mathbf{x}) \rangle = -\delta g(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1$$

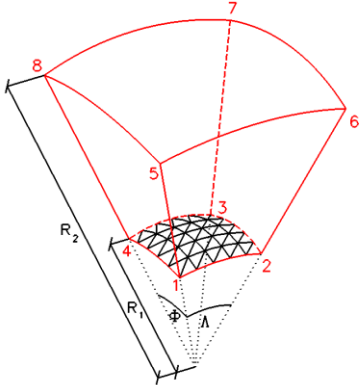
$$T(\mathbf{x}) = T^{\text{SAT}}(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \Gamma_i \quad i=2, \dots, 6$$



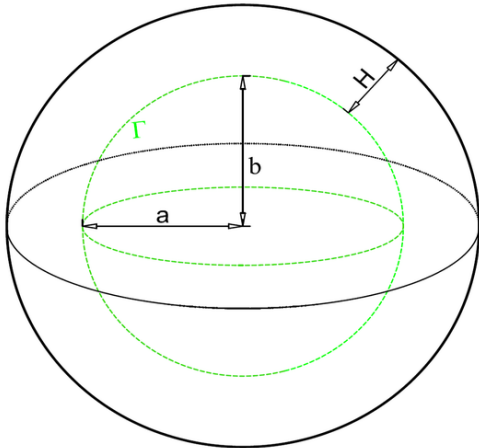
Vstupné dáta :

- Tiažové poruchy
- Poruchový potenciál (dáta zo satelitov)

3D výpočtová oblasť nad zemským povrchom



- $\Gamma_1$  : 1,2,3,4
- $\Gamma_2$  : 5,6,7,8
- $\Gamma_3$  : 1,2,6,5
- $\Gamma_4$  : 2,3,7,6
- $\Gamma_5$  : 3,4,8,7
- $\Gamma_6$  : 4,1,5,8
- $\Omega$  : 1,2,3,4,5,6,7,8



# Numerické riešenie geodetickej okrajovej úlohy

---

## MOP

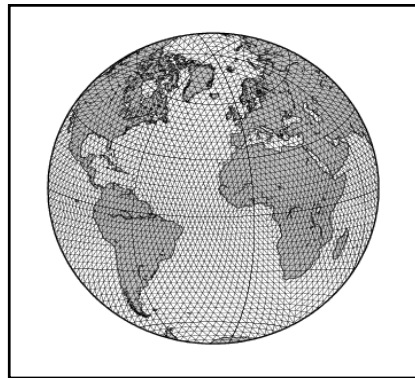
### Metóda okrajových prvkov

#### Výhody:

- diskretizujeme iba hranicu oblasti

#### Nevýhody:

- plná nesymetrická matica systému  
→ veľké pamäťové nároky



## MKP – Metóda konečných prvkov

alebo

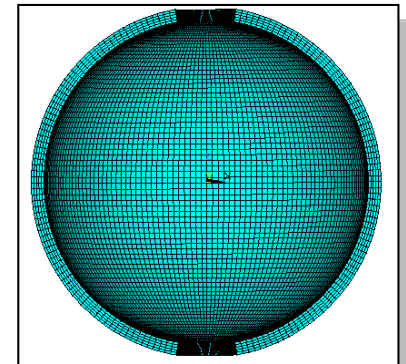
## MKO – Metóda konečných objemov

#### Výhody:

- riedka matica systému

#### Nevýhody:

- diskretizujeme celú 3D oblasť nad zemským povrchom



# Numerické riešenie geodetickej okrajovej úlohy

Súpis výpočtových zdrojov:

- Karedra
  - 160 CPU
  - 1,2 TB RAM (8GB/CPU)
- Stuba
  - 624 CPU
  - 2,5TB RAM (4GB/CPU)
- SAV Bratislava
  - 3072 CPU
  - 25TB RAM (8GB/CPU)





# Metóda okrajových prvkov

Priama formulácia MOP - okrajová integrálna rovnica

$$\frac{1}{2}T(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma} \frac{\partial G}{\partial n_{\Gamma}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})T(\mathbf{y})d\Gamma_y = \int_{\Gamma} G(\mathbf{x}, \mathbf{y})\frac{\partial T}{\partial n_{\Gamma}}(\mathbf{y})d\Gamma_y$$

kde

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi \cdot |\mathbf{x} - \mathbf{y}|}$$

$\Rightarrow$  fundamentálne riešenie Laplaceovej rovnice

transformácia:

poruchový potenciál



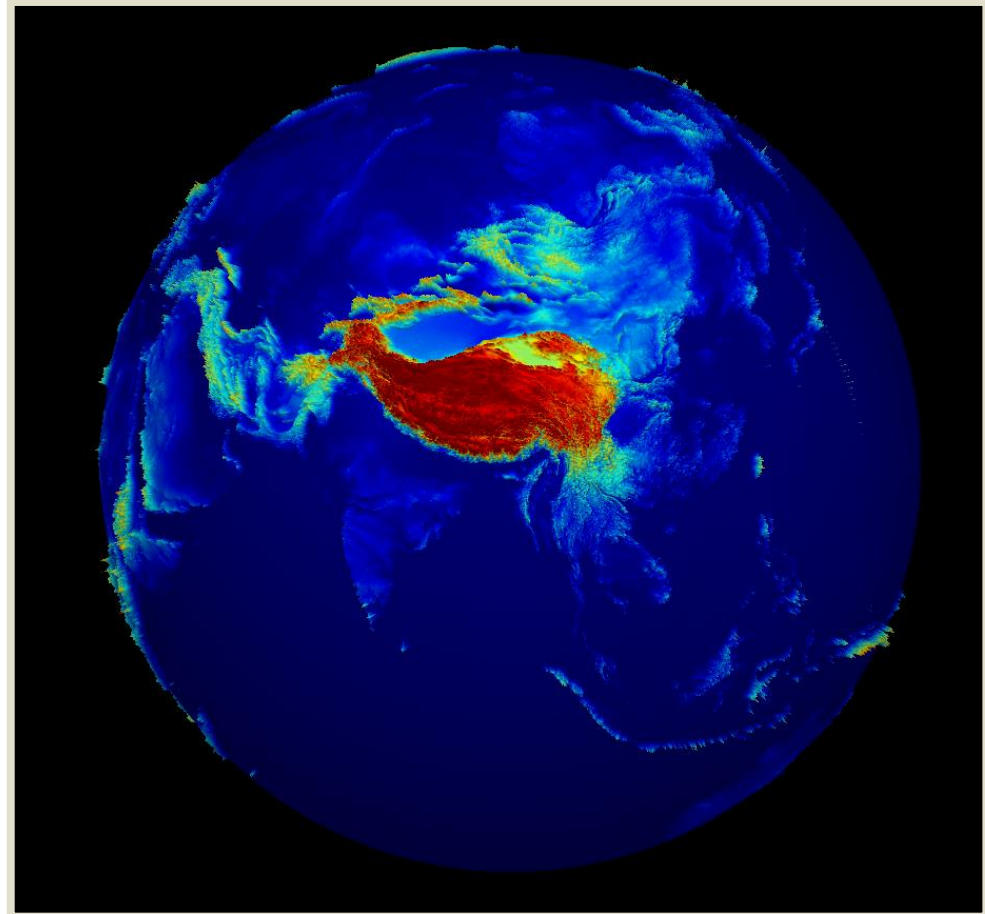
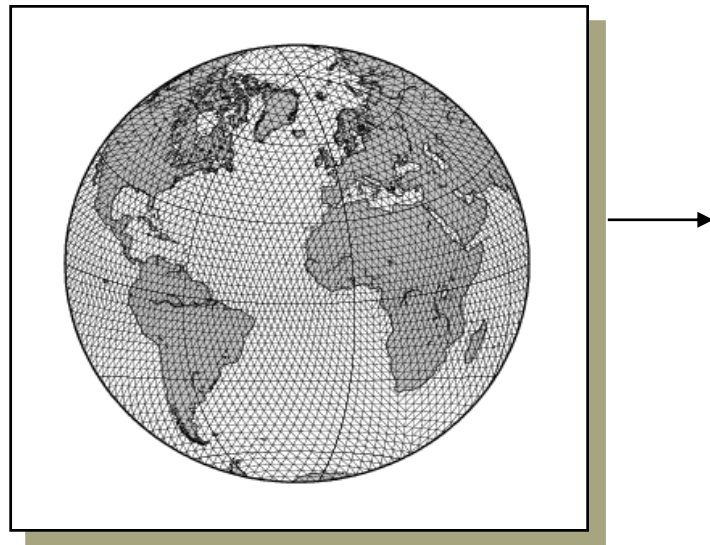
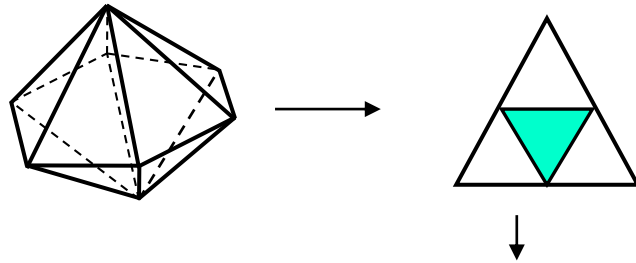
výška geoidu

Brunsova formula

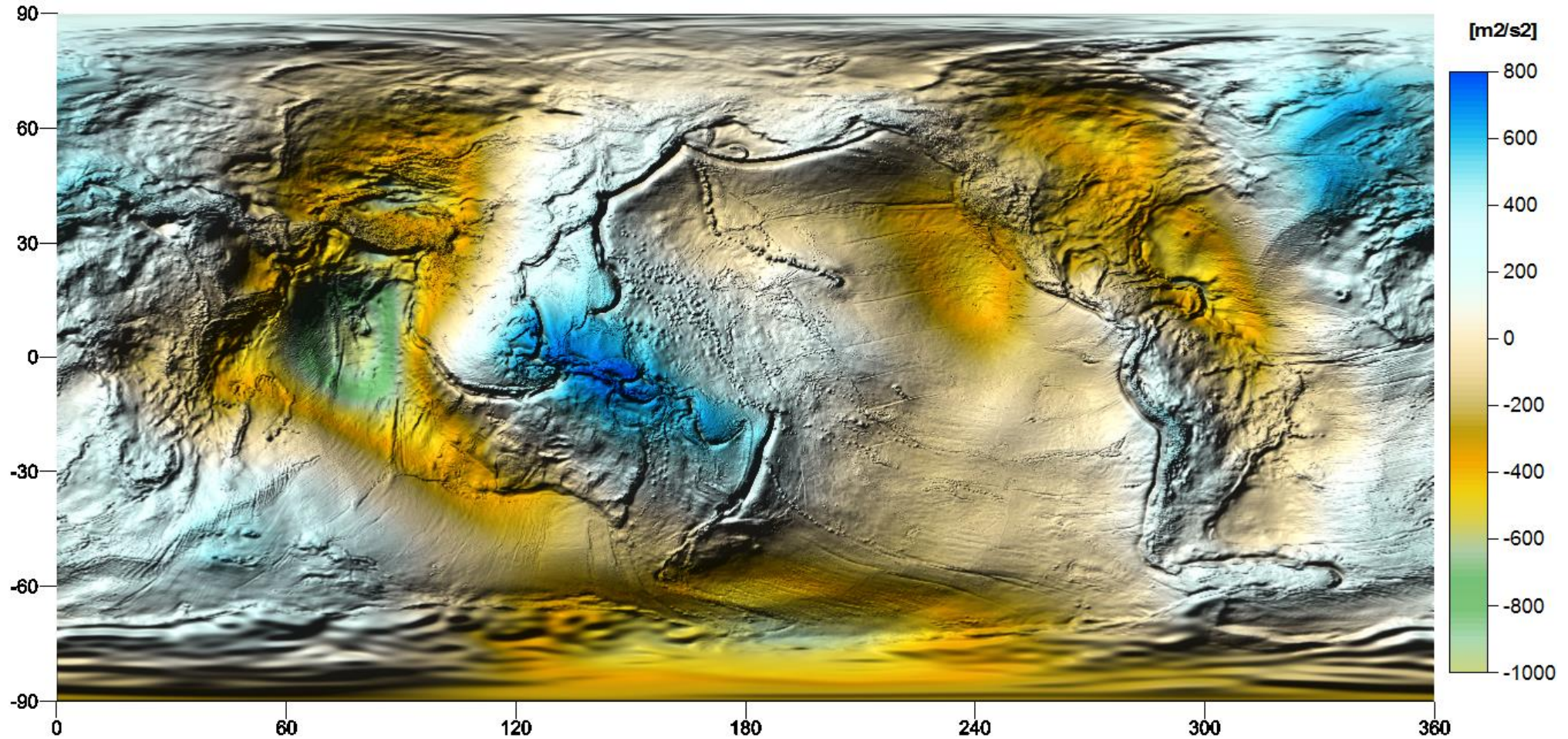


$$\zeta(P) \cong \frac{T(P)}{\gamma(P)}$$

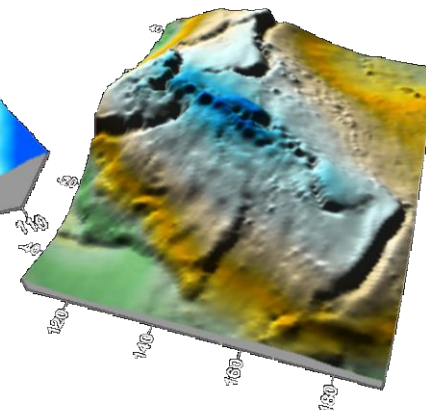
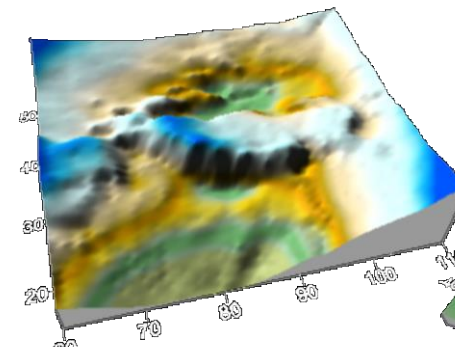
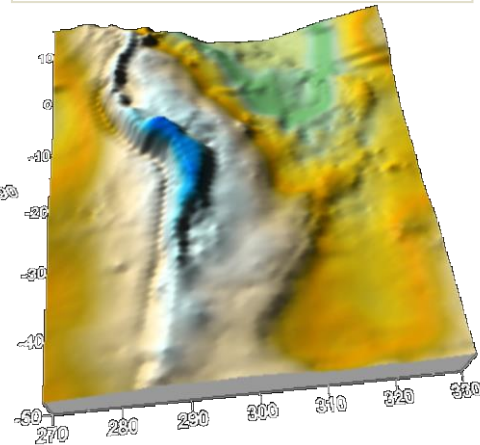
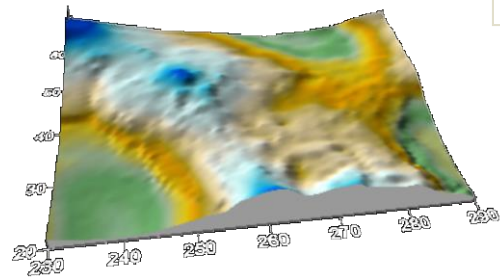
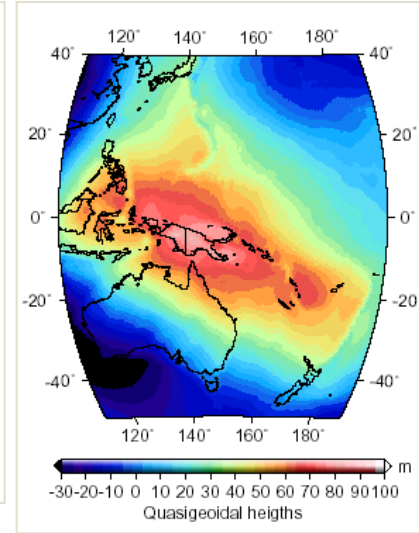
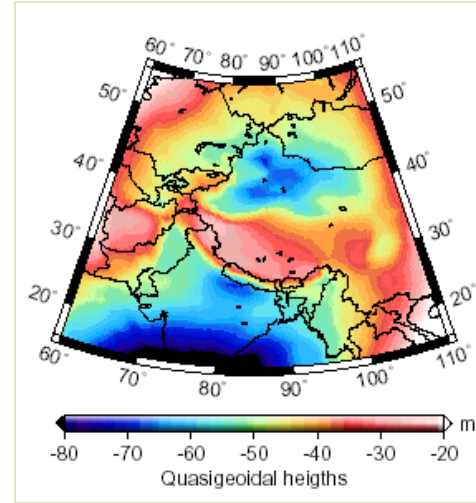
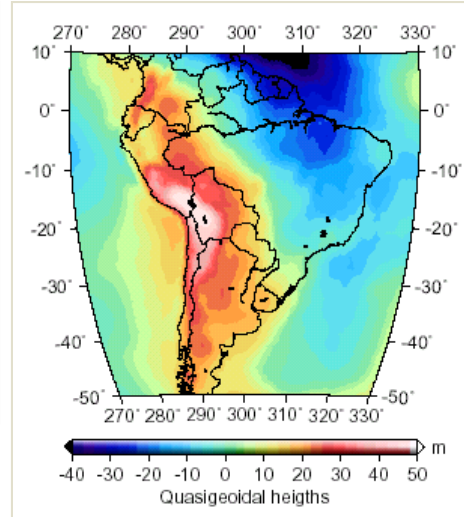
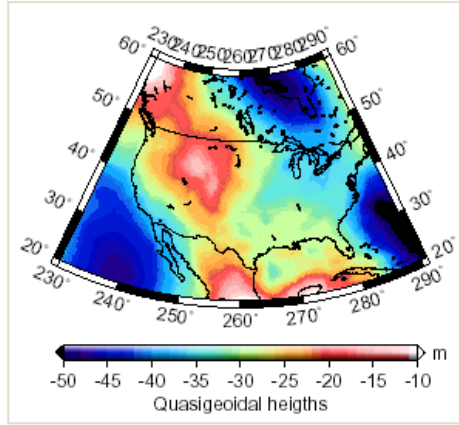
# Triangulácia zemského povrchu



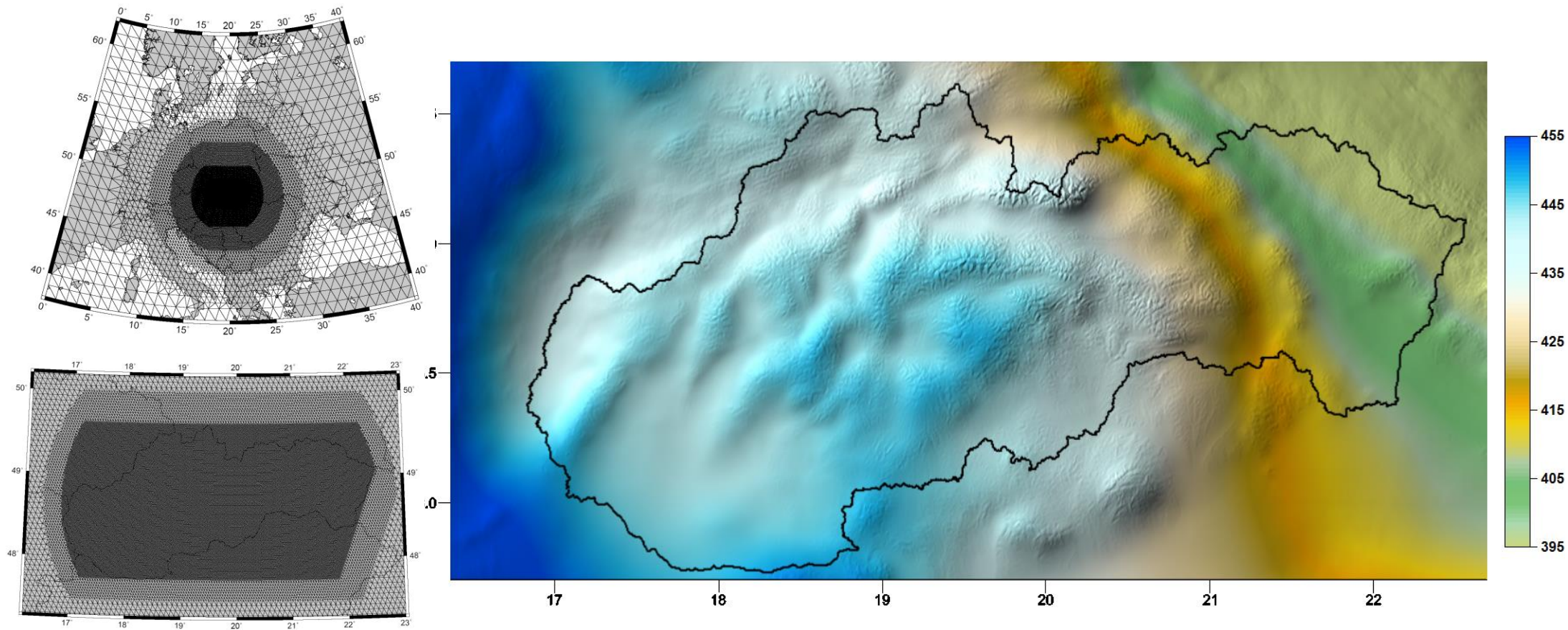
# Globálne riešenie pomocou MOP



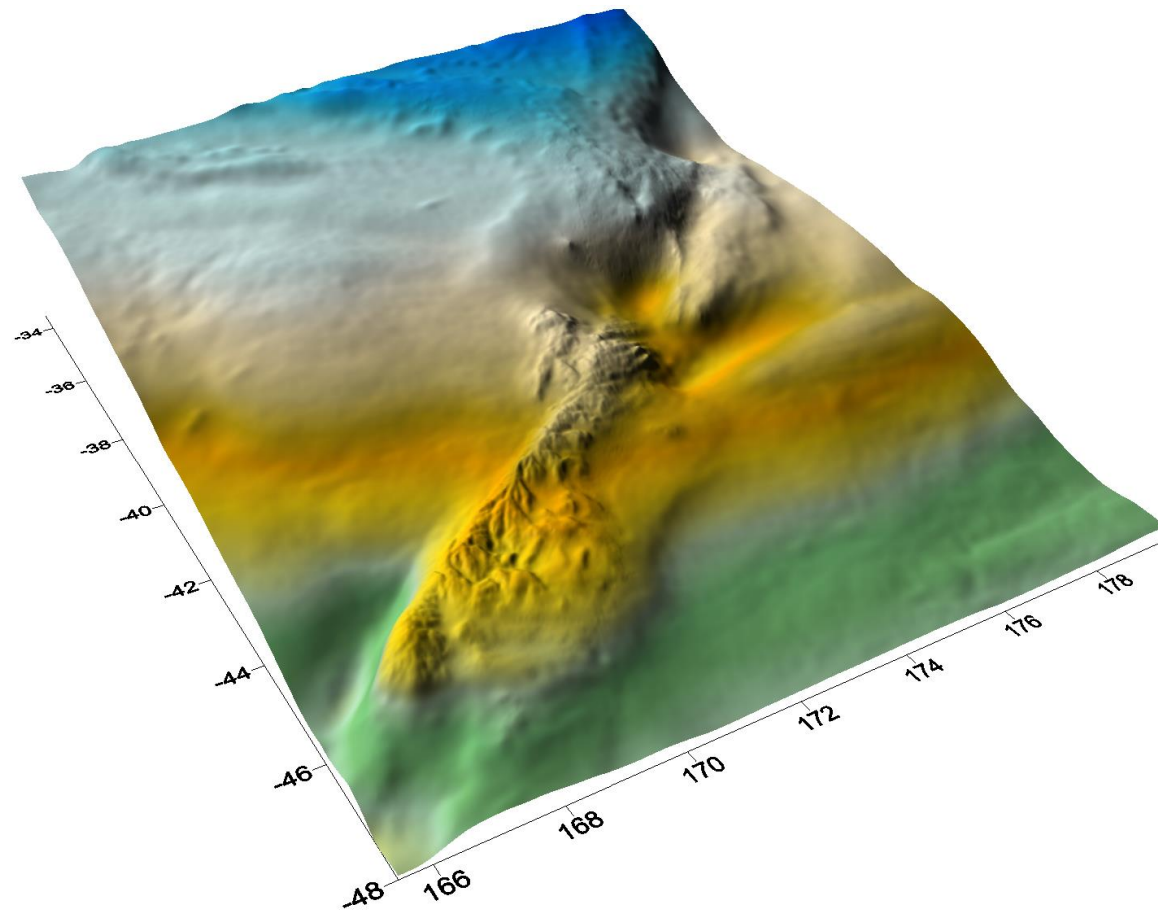
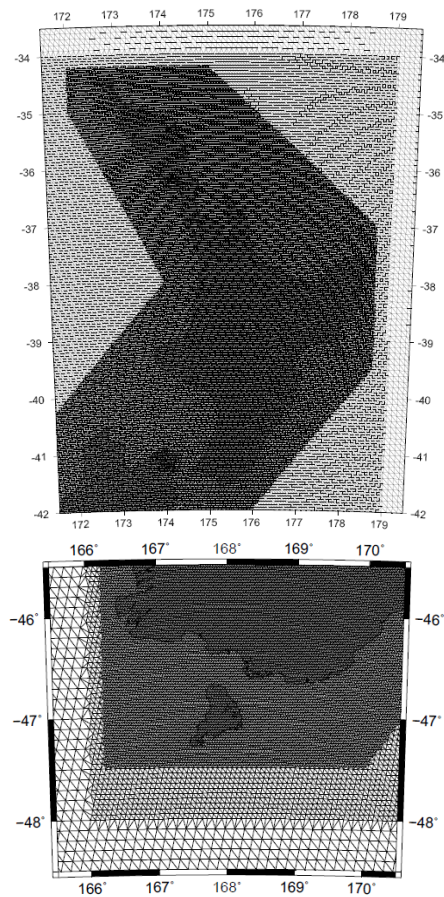
# Globálne riešenie pomocou MOP - detail



# Lokálne riešenie na Slovensku



# Lokálne riešenie na Novom Zélande



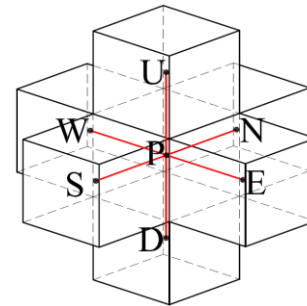
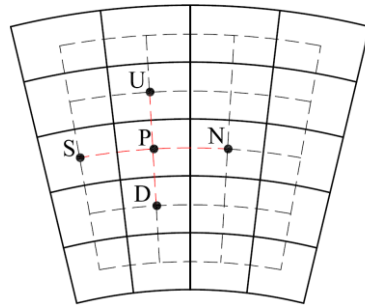
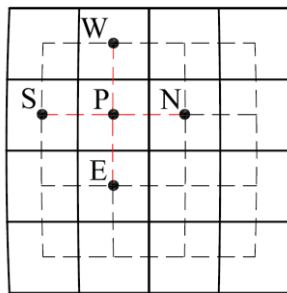
# Metoda konečných objemov

## Slabá formulácia

$$-\int_p \Delta T dx dy dz = -\int_{\partial p} \nabla T \cdot n d\sigma = -\int_{\partial p} \frac{\partial T}{\partial n} d\sigma = 0$$

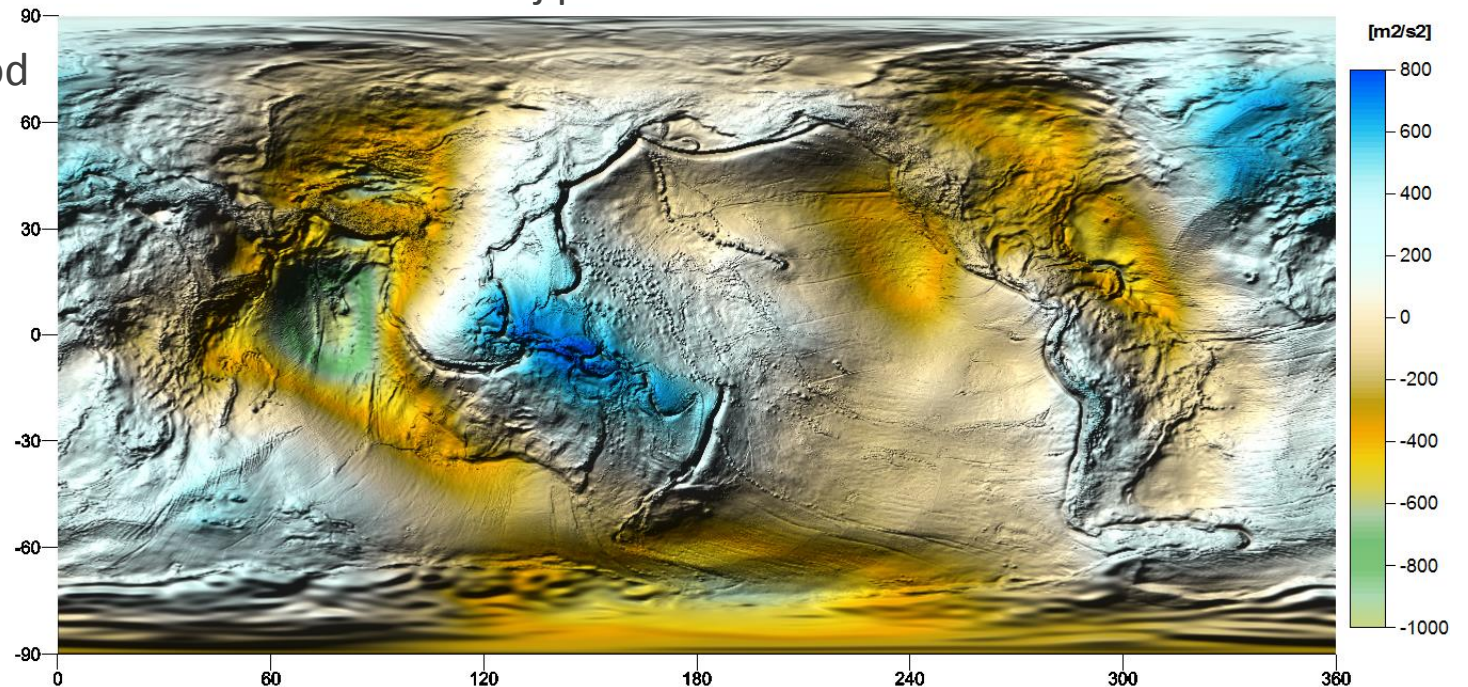
Finálny lineárny systém:

$$P_{i,j,k} T_{i,j,k} - W_{i,j,k} T_{i-1,j,k} - E_{i,j,k} T_{i+1,j,k} - N_{i,j,k} T_{i,j+1,k} - S_{i,j,k} T_{i,j-1,k} - U_{i,j,k} T_{i,j,k+1} - D_{i,j,k} T_{i,j,k-1} = 0$$



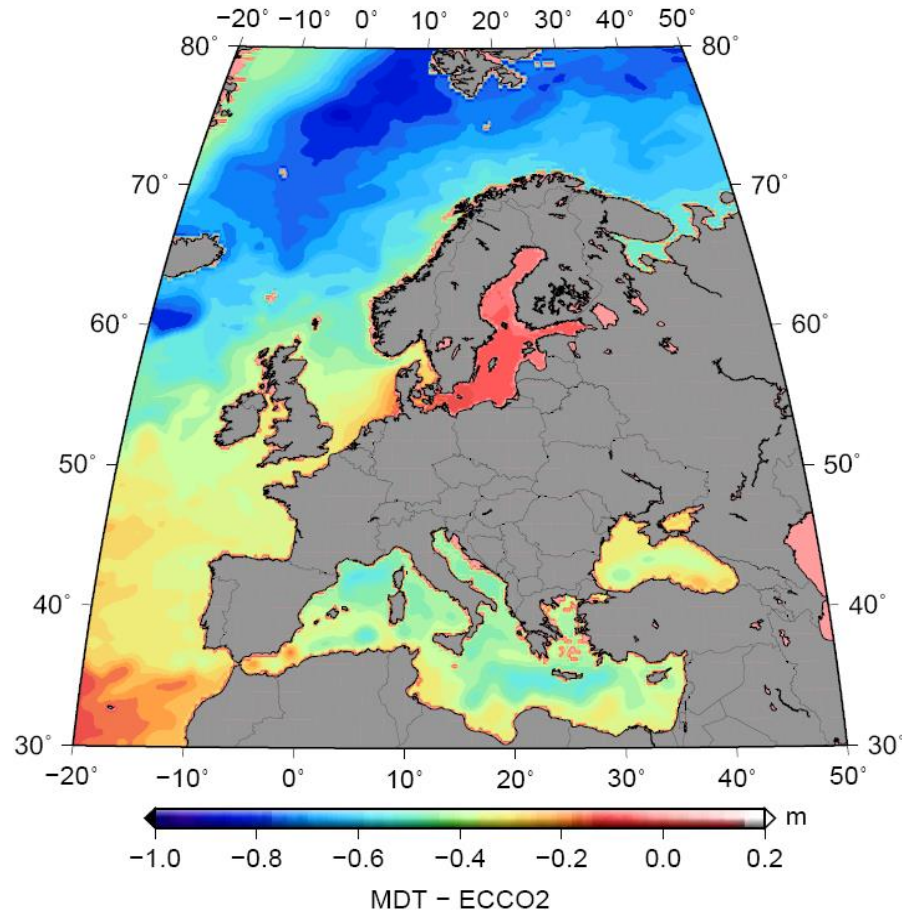
# Globálne riešenie pomocou MKO

- rozlíšenie: 5 arc min x 5 arc min x 0.5 km (4320 x 1920 x 480)
- počet objemov: 3 981 312 000
- paralelné výpočty na 64 procesoroch s 512 GB distribuovanej pamäte
- celkový výpočtový čas: cca. 23 hod





# Posuny výškových systémů v Evropě



Reference tide gauges

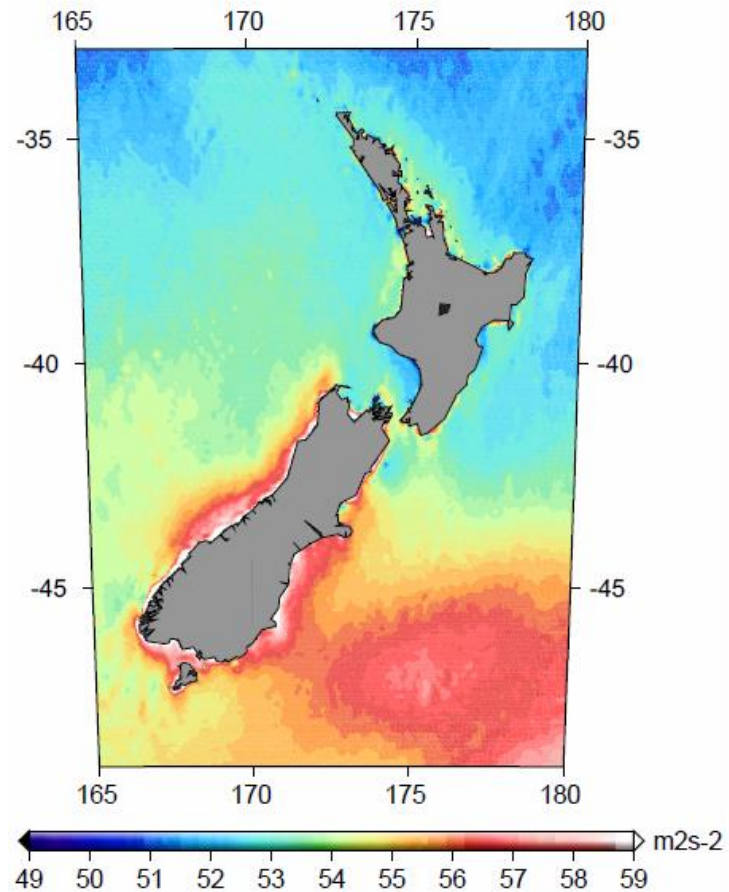
<span style="color: red;">■</span> Alicante	<span style="color: blue;">■</span> Cascais	<span style="color: brown;">■</span> Kronstadt	<span style="color: pink;">■</span> Ostend
<span style="color: cyan;">■</span> Amsterdam	<span style="color: teal;">■</span> Constanta	<span style="color: orange;">■</span> Malin Head	<span style="color: lightgreen;">■</span> Trieste
<span style="color: purple;">■</span> Antalya	<span style="color: tan;">■</span> Durres	<span style="color: yellow;">■</span> Marseilles	<span style="color: darkpurple;">■</span> other
<span style="color: yellowgreen;">■</span> Belfast	<span style="color: darkgreen;">■</span> Genoa	<span style="color: green;">■</span> Newlyn	<span style="color: white;">■</span> no information

# Posuny výškových systémov v Európe



- hraničný most medzi Švajčiarskom a Nemeckom v Laufenburgu
- rozdiel medzi Švajčiarskym a Nemeckým výškovým systémom je 27 cm.
- projektanti omylom odpočítali na švajčiarskej strane 27 cm, mali pripočítať, vznikla tak chyba 54 cm.

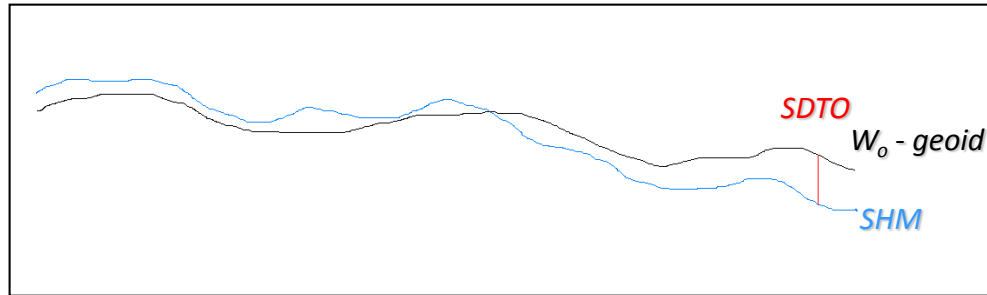
# Posuny výškových systémov vo svete



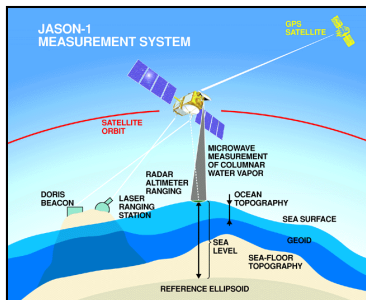
Nový Zéland – 13 rôznych výškových systémov, vzájomne posunutých a naklonených



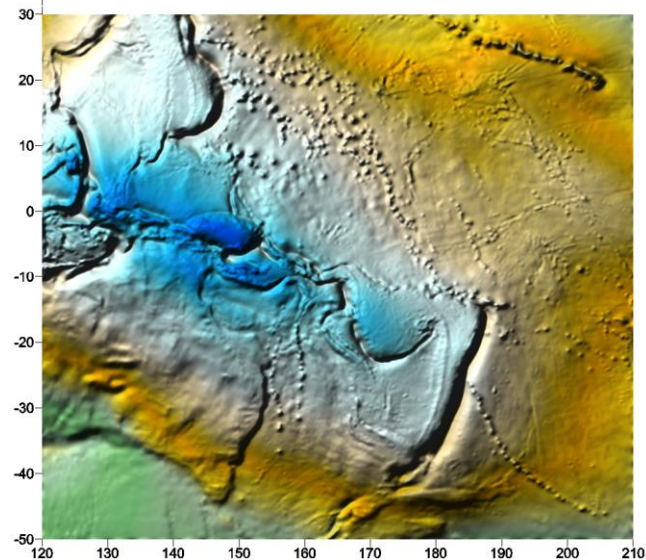
# Využitie v oceánografii



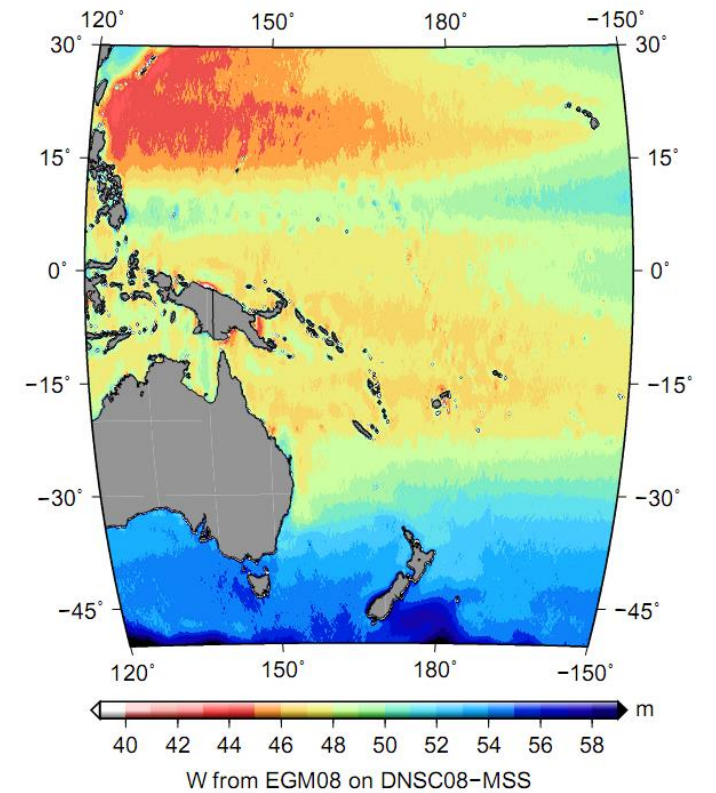
## Družicová altimetria



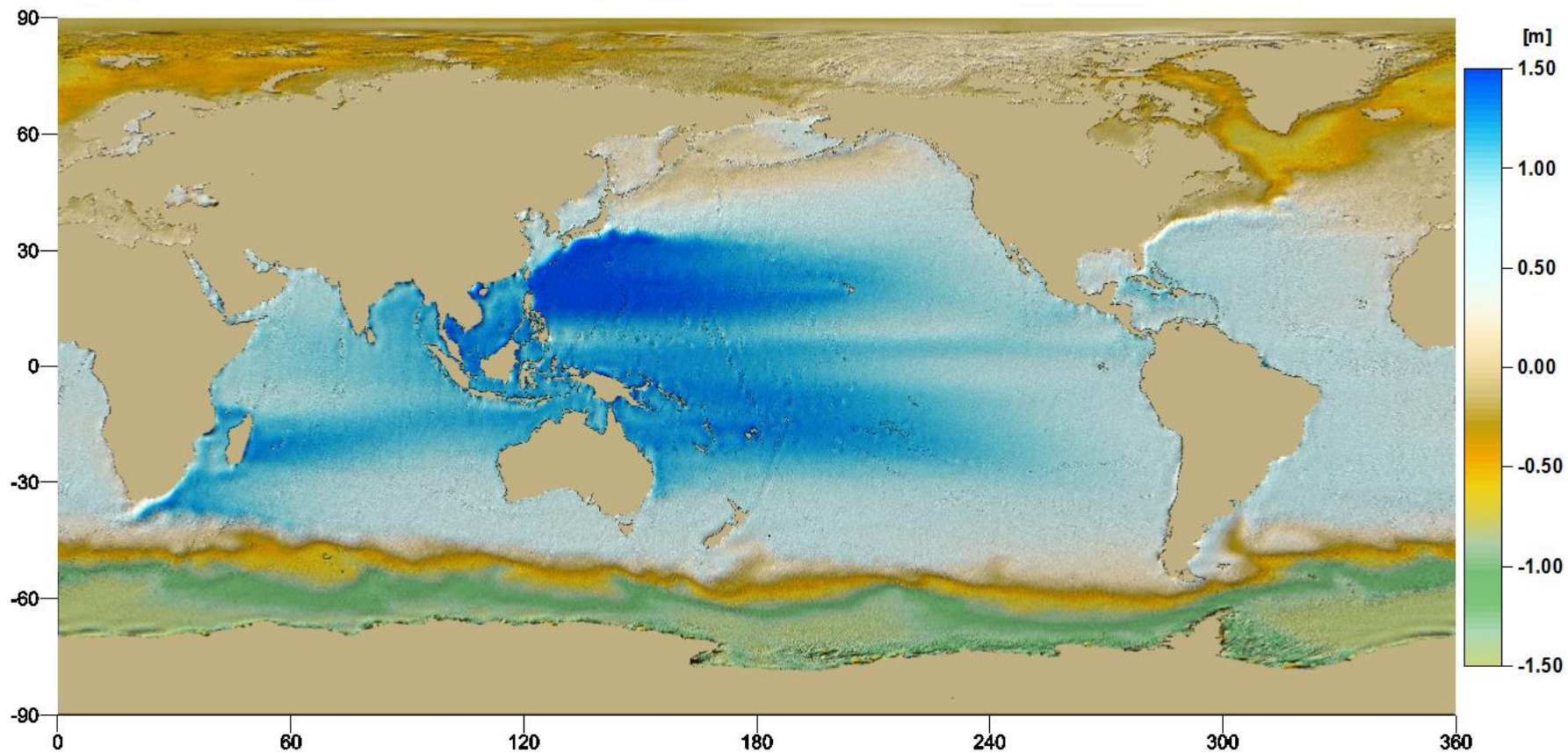
## Stredná hladina morí (SHM)



## Geopotenciál na SHM



# Stredná dynamická topografia oceánov



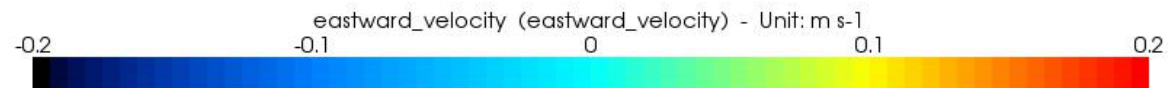
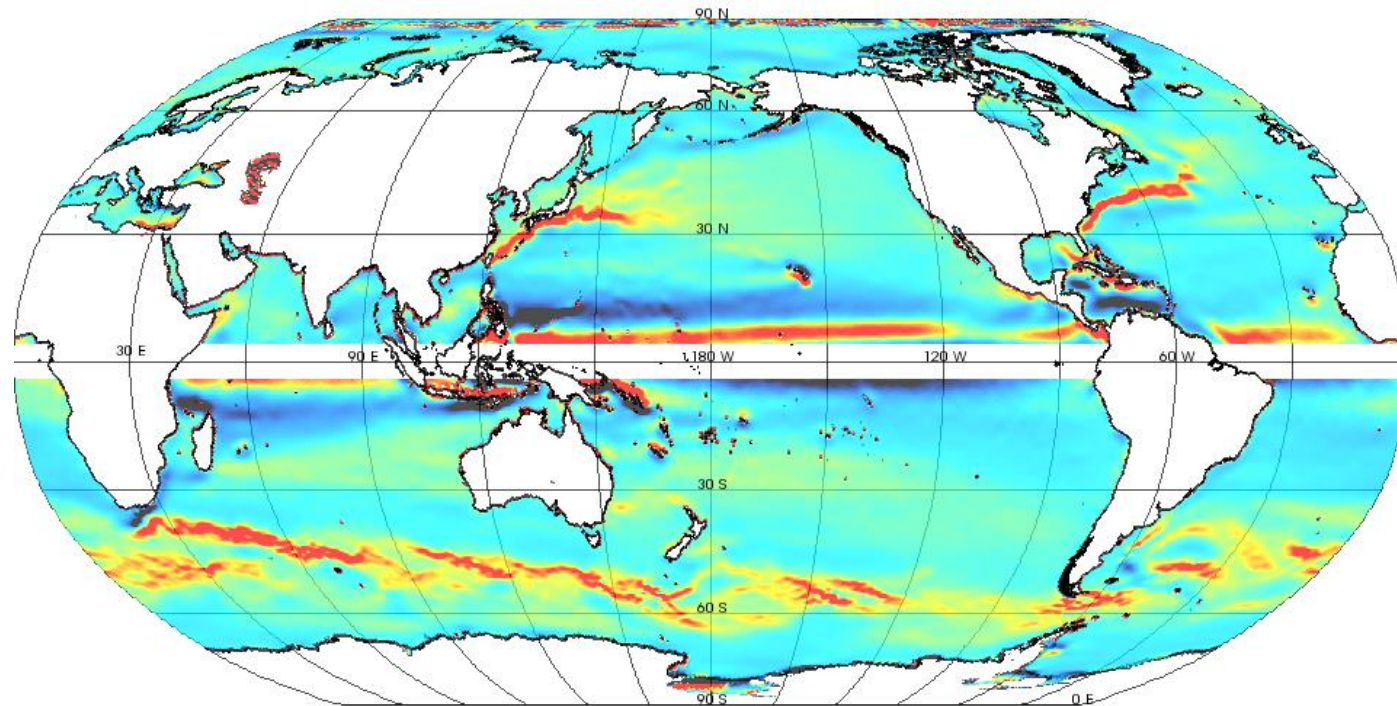
“geodetický prístup”

SDTO = SHM - geoid

*SDTO – stredná dynamická topografia oceánov*  
*SHM – stredná hladina morí*

# Rýchlosti geostrofických prúdov

---



---

Ďakujem za pozornosť

