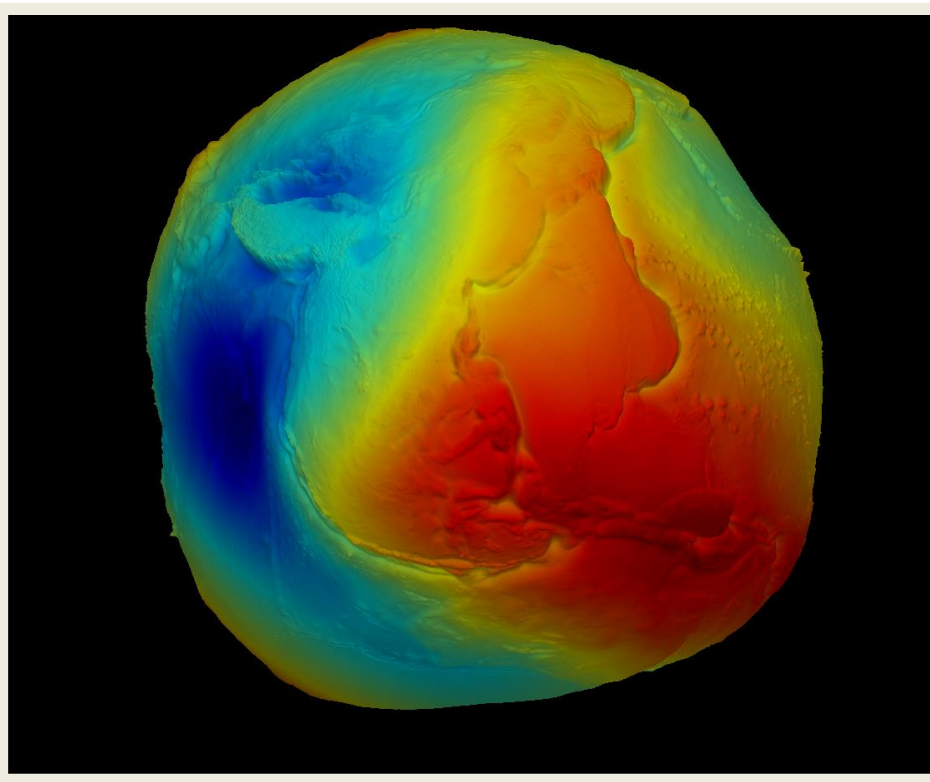


Matematické modelovanie v monitorovaní tiažového poľa Zeme

M. Macák, R. Čunderlík, Z. Minarechová



Fyzikálna geodézia

GEODÉZIA

určovanie veľkosti, tvaru a
tiažového poľa Zeme

Skutočná Zem:

- tiažový potenciál
(gravitačný + odstredivý)
- tiažové zrýchlenie

$$W_0 \approx 62\,636\,856.0 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$$
$$g \approx 9.813456789 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

 W

$$g = \text{grad } W$$

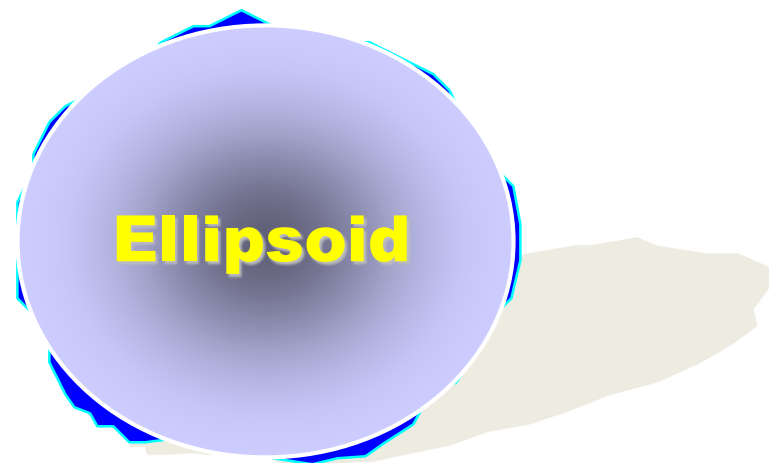
Normálne teleso:

(napr. referenčný elipsoid)

- normálny tiažový potenciál
(gravitačný + odstredivý)
- normálne tiažové zrýchlenie

 U

$$\gamma = \text{grad } U$$



Poruchový potenciál

$$T = W - U$$

Ak parametre normálneho telesa
odvodené zo skutočnej Zeme



$$\Delta T = 0$$

- mimo Zeme

Gravimetrická okrajová úloha

$$\begin{aligned}\Delta T(\mathbf{x}) &= 0 & \mathbf{x} \in \text{ext. } \Omega \\ \langle \nabla T(\mathbf{x}), \mathbf{s}(\mathbf{x}) \rangle &= -\delta g(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \Gamma \\ T(\mathbf{x}) &= O(|\mathbf{x}|^{-1})\end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned}T(\mathbf{x}) &= W(\mathbf{x}) - U(\mathbf{x}) \\ \mathbf{s}(\mathbf{x}) &= -\nabla U(\mathbf{x}) / |\nabla U(\mathbf{x})| \\ \Omega &- \text{the Earth} \\ \Gamma &- \text{the Earth's surface}\end{aligned}$$

Vstupné dáta – tiažové poruchy

$$\delta g(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) - \gamma(\mathbf{x})$$

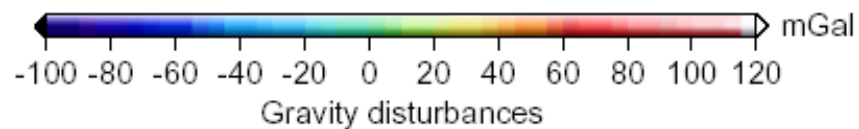
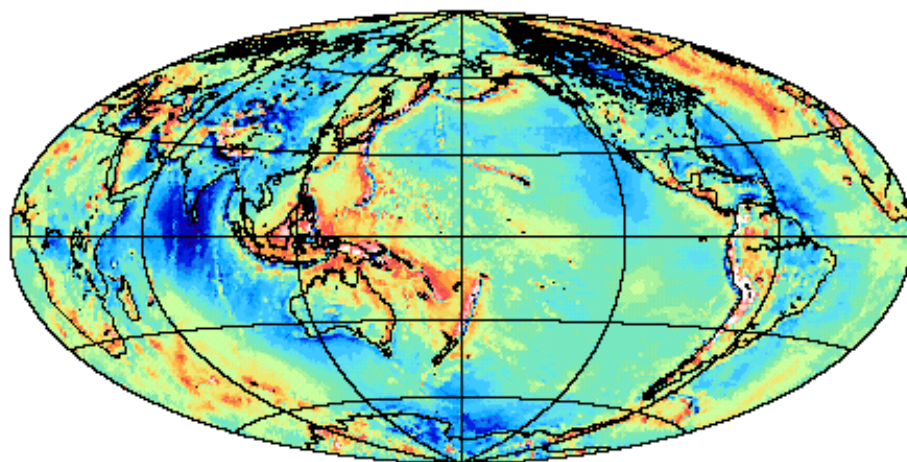
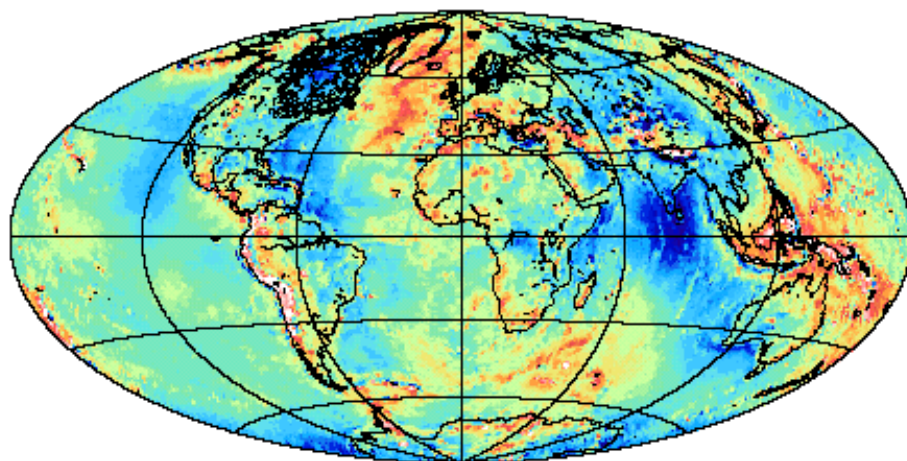
kde

$$\begin{aligned}g(\mathbf{x}) &= |\nabla W(\mathbf{x})| \\ \gamma(\mathbf{x}) &= |\nabla U(\mathbf{x})|\end{aligned}$$



Vstupné data – tiažové poruchy

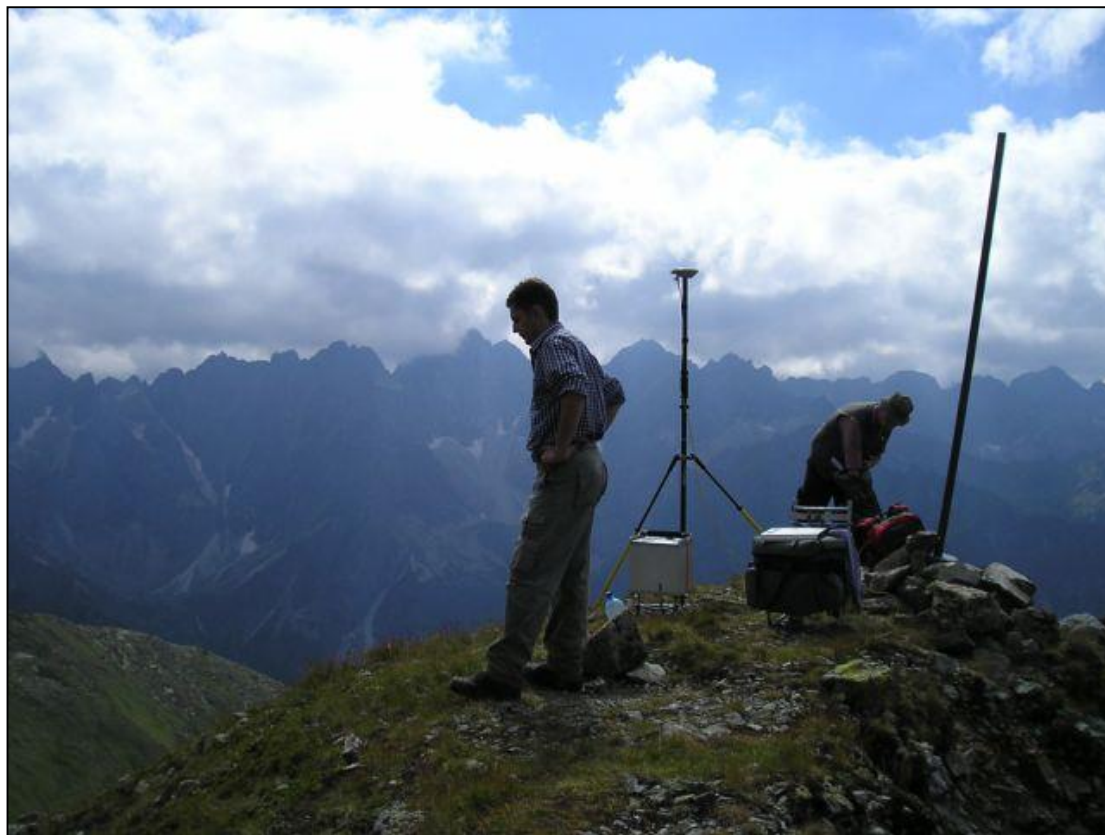
$$\delta g = g - \gamma$$



TATRY-2004

- **meranie tiažového zrýchlenia
(gravimetrické mapovanie)**

(spolupráca s geodetmi a geofyzikmi)



Tiažové poruchy na Slovensku

(podrobné gravimetrické mapovanie: vyše 200 000 diskretných meraní v SR)

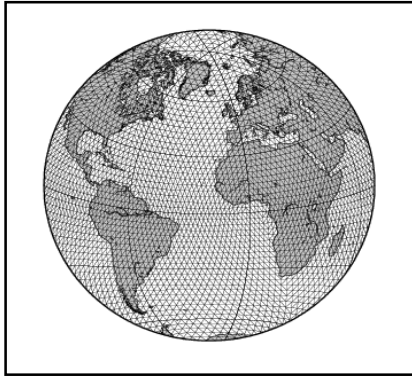
$$\delta g = g - \gamma$$



$$1 \text{ mGal} = 10^{-5} \text{ m.s}^{-2}$$

Numerické riešenie gravimetrickej okrajovej úlohy

MOP – Metóda okrajových (hraničných) prvkov



Výhody:

- diskretizujeme iba hranicu oblasti

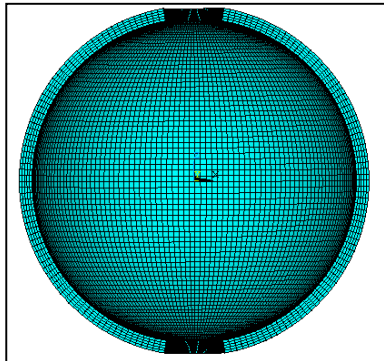
Nevýhody:

- plná nesymetrická matica systému → veľké pamäťové nároky

MKP – Metóda konečných prvkov

MKO – Metóda konečných objemov

alebo



Výhody:

- riedka matica systému

Nevýhody:

- diskretizujeme celú 3D oblasť nad zemským povrchom

Numerické riešenie gravimetrickej okrajovej úlohy

Súpis výpočtových zdrojov klastrov:

Katedra:

- 128 CPU
- 1TB RAM

Stuba HPC:

- 624 CPU
- 2,5TB RAM
- 200TB HDD



Metóda okrajových prvkov

Priama formulácia MOP

- okrajová integrálna rovnica

$$\frac{1}{2}T(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma} \frac{\partial G}{\partial n_{\Gamma}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) T(\mathbf{y}) d\Gamma_y = \int_{\Gamma} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial T}{\partial n_{\Gamma}}(\mathbf{y}) d\Gamma_y$$

kde

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi \cdot |\mathbf{x} - \mathbf{y}|}$$

\Rightarrow fundamentálne riešenie Laplaceovej rovnice

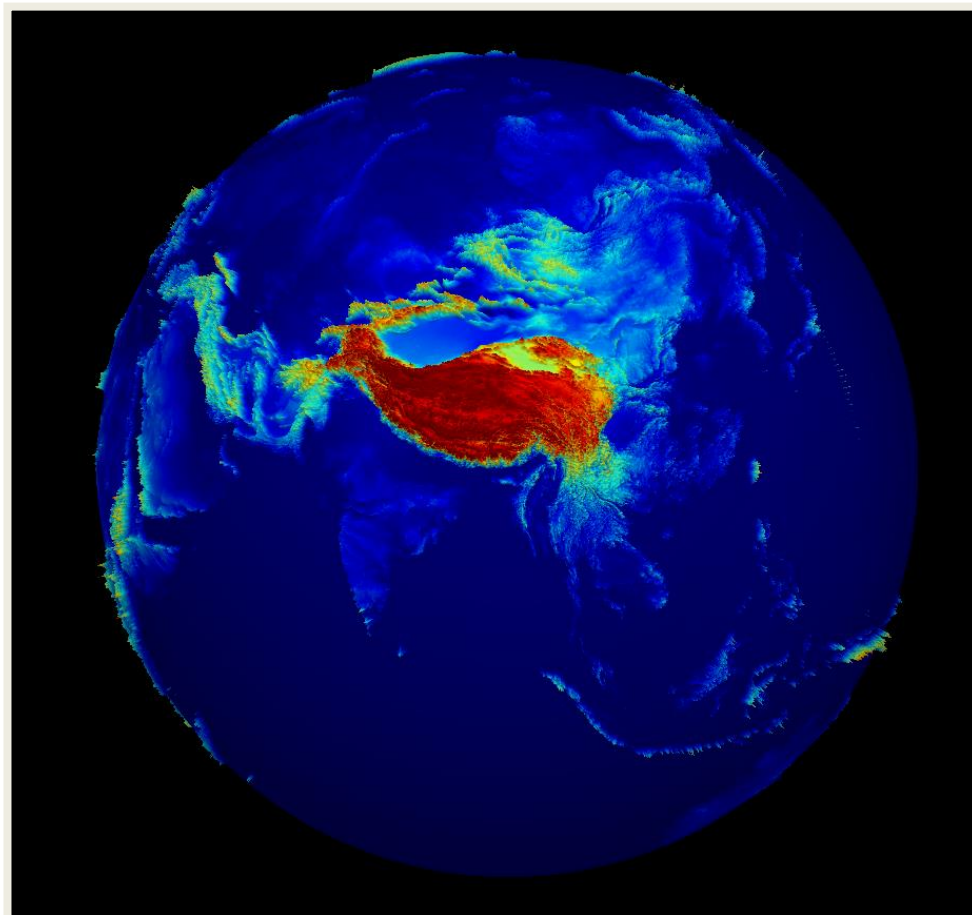
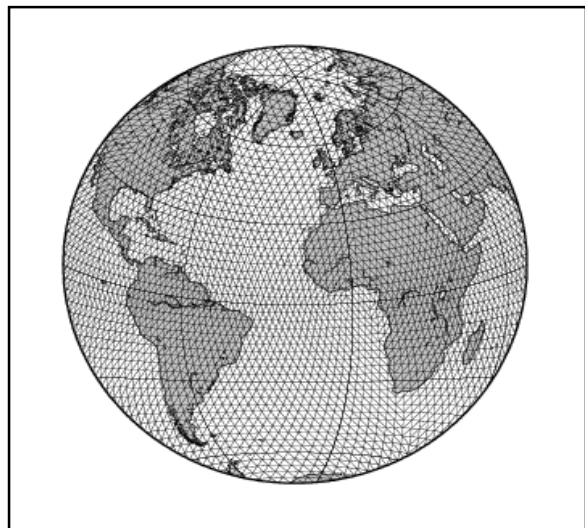
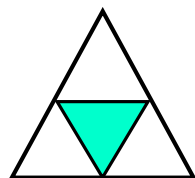
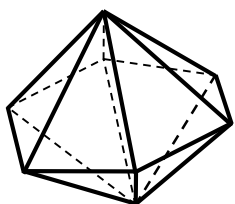
transformácia:
poruchový potenciál
 \Downarrow
výška geoidu

Brunsova formula

$$\zeta(P) \cong \frac{T(P)}{\gamma(P)}$$

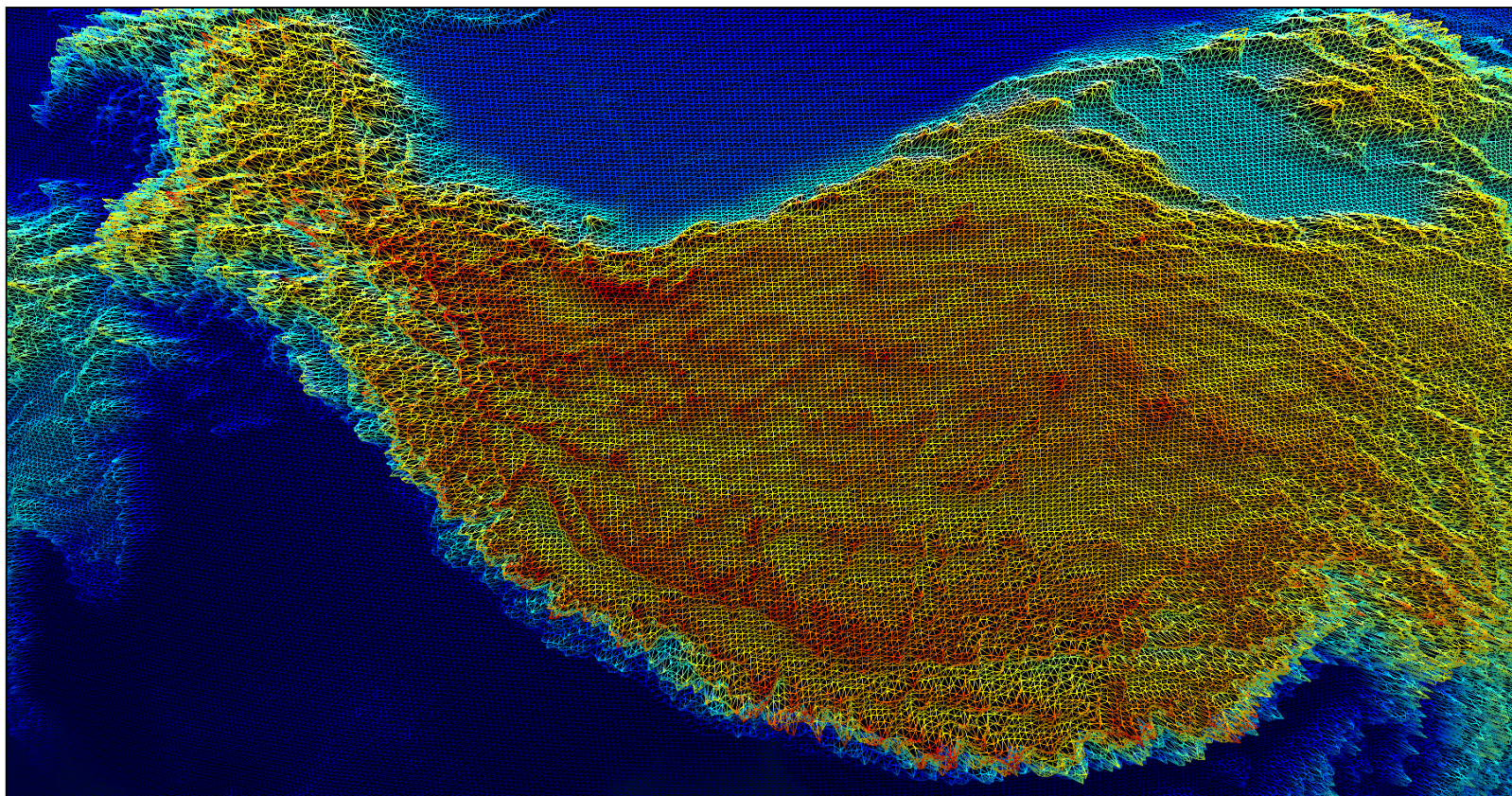
Triangulácia zemského povrchu

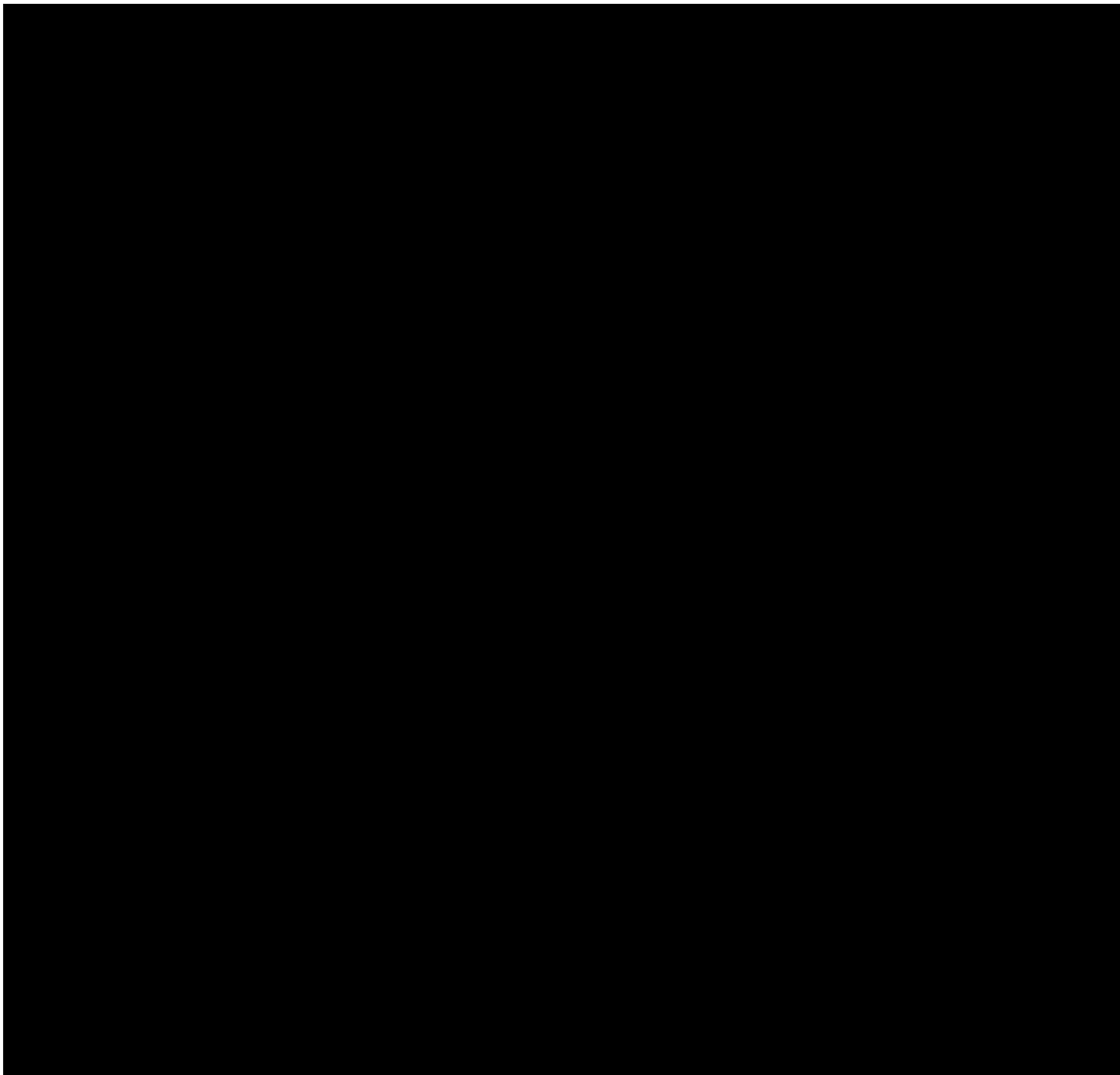
Globálna triangulácia na reálnej topografii



Triangulácia zemského povrchu

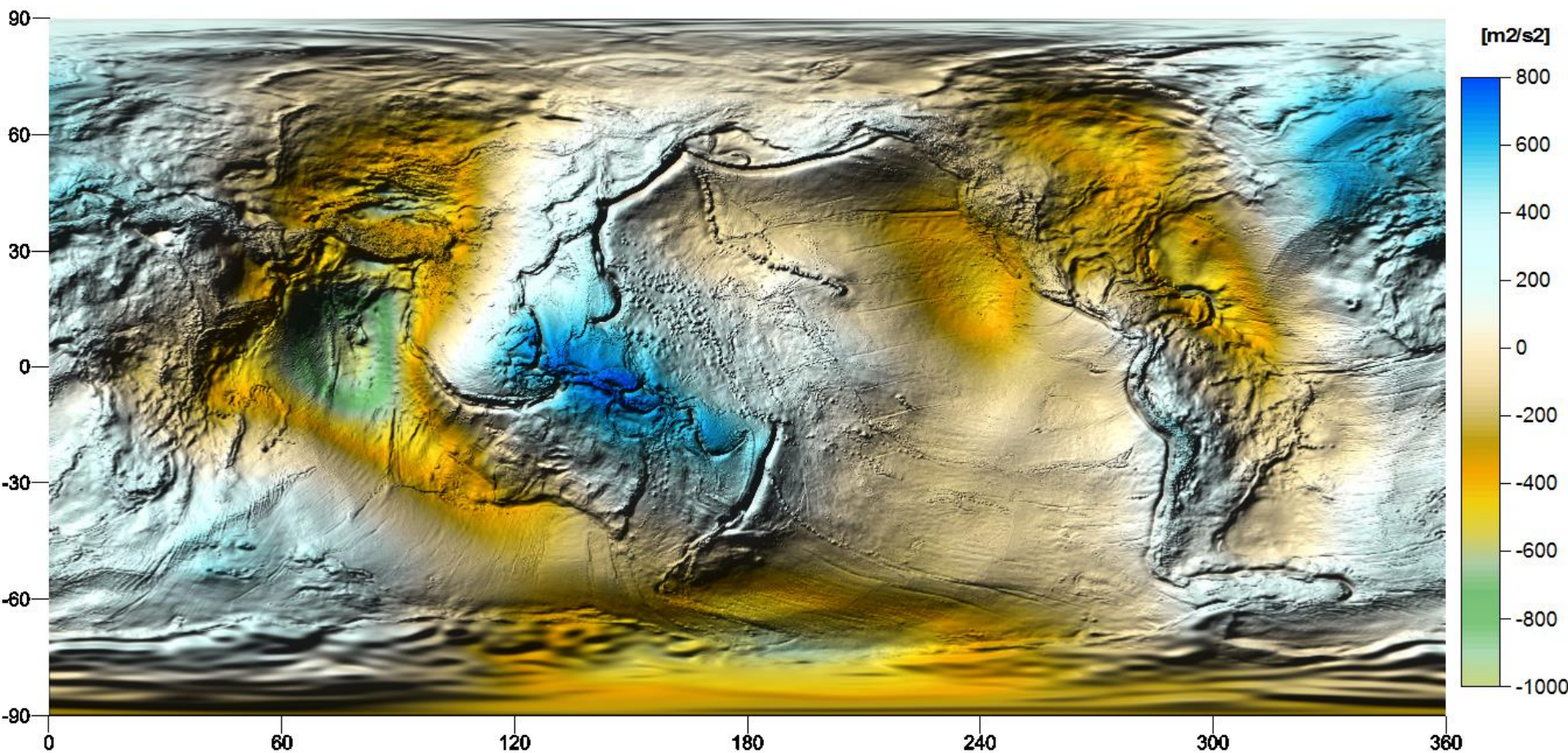
Himaláje - detail



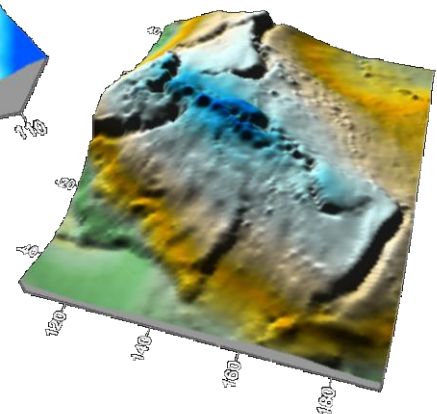
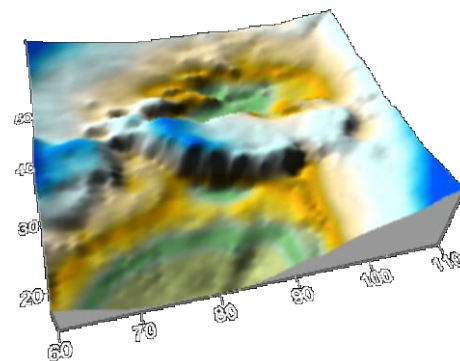
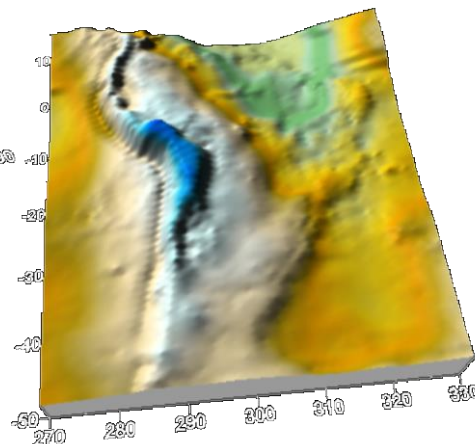
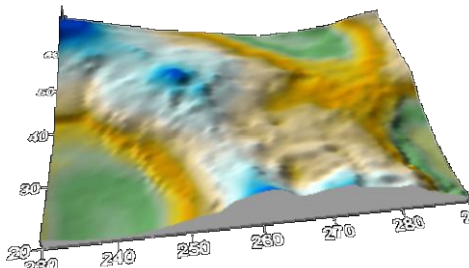
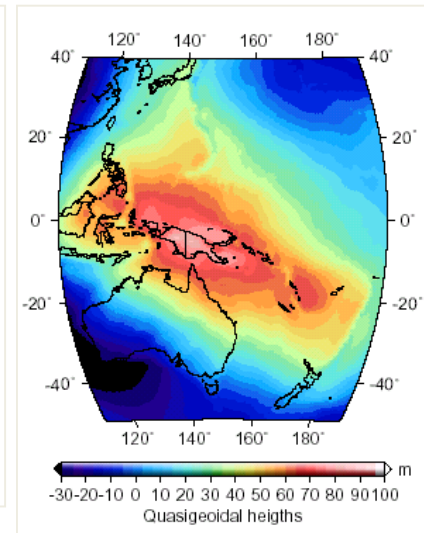
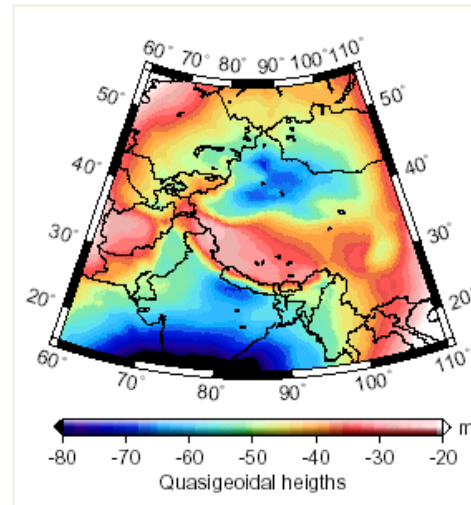
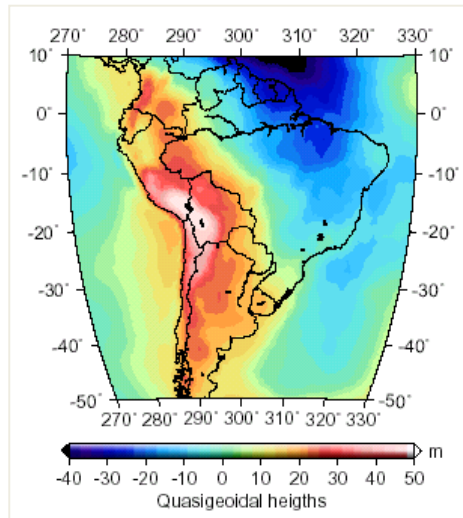
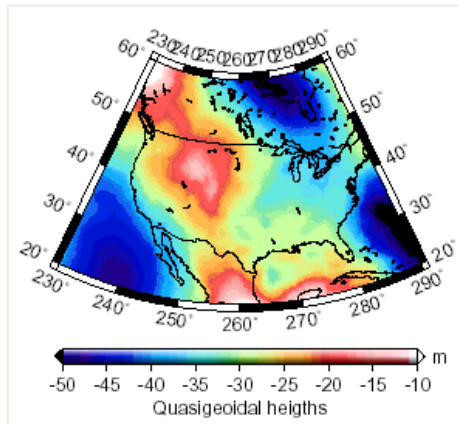


Globálne riešenie pomocou MOP

Disturbing potential

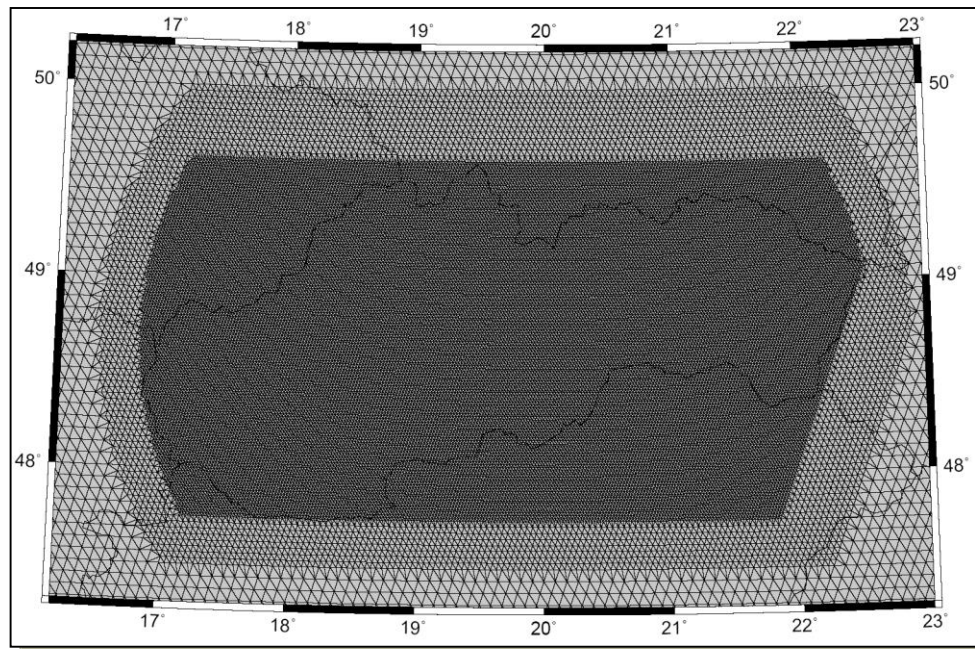
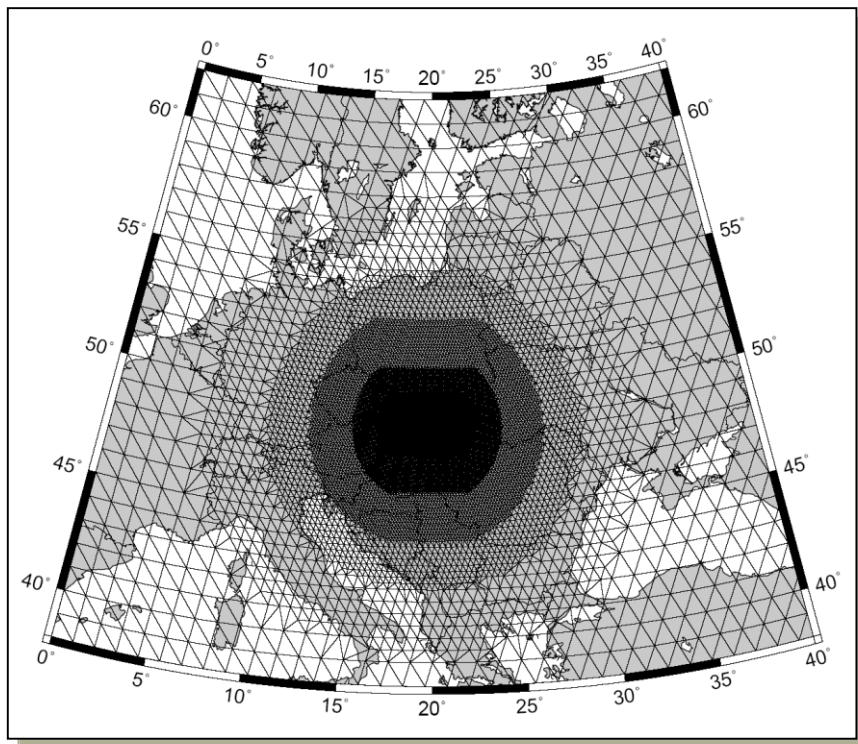


Globálne riešenie - detaily

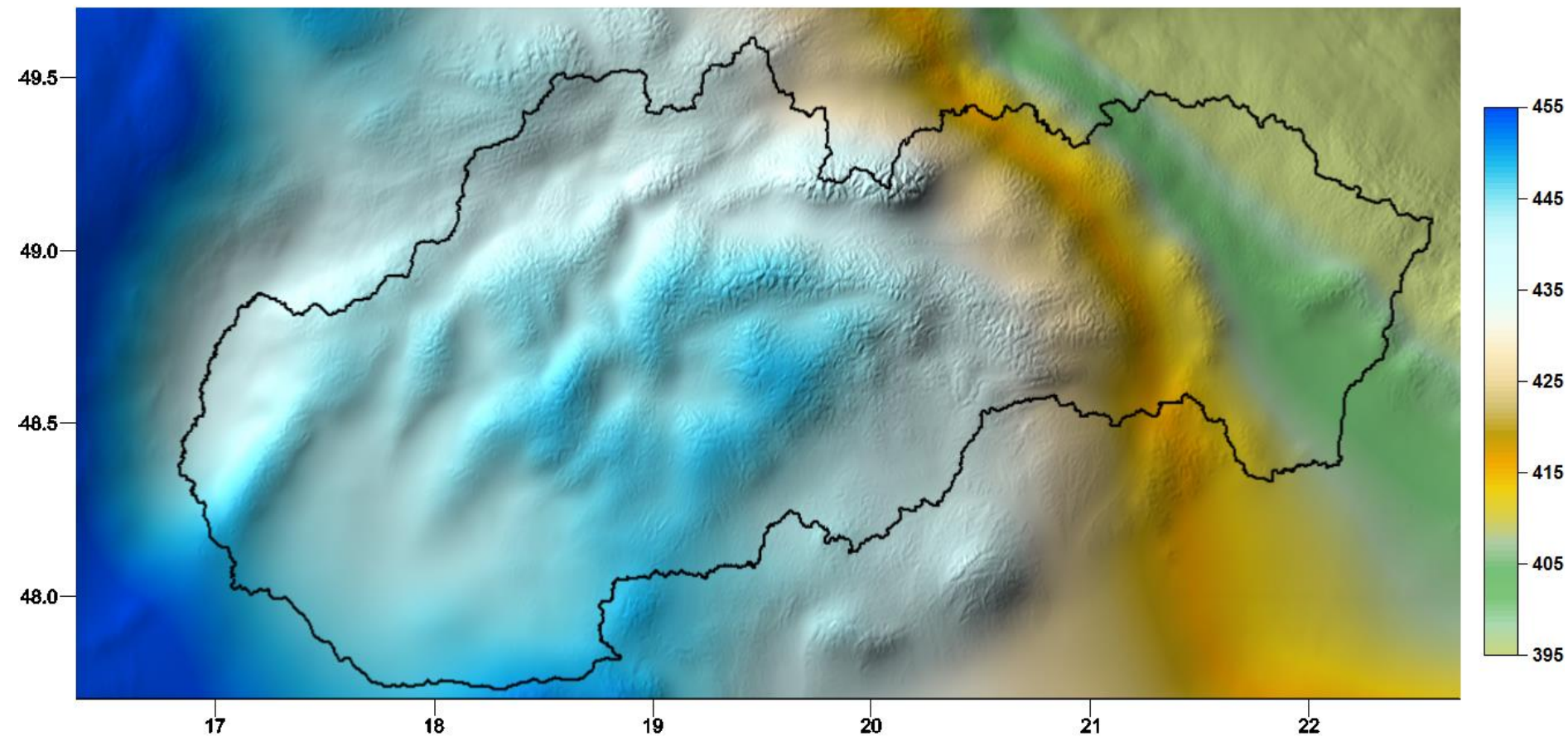


Lokálne riešenie na Slovensku

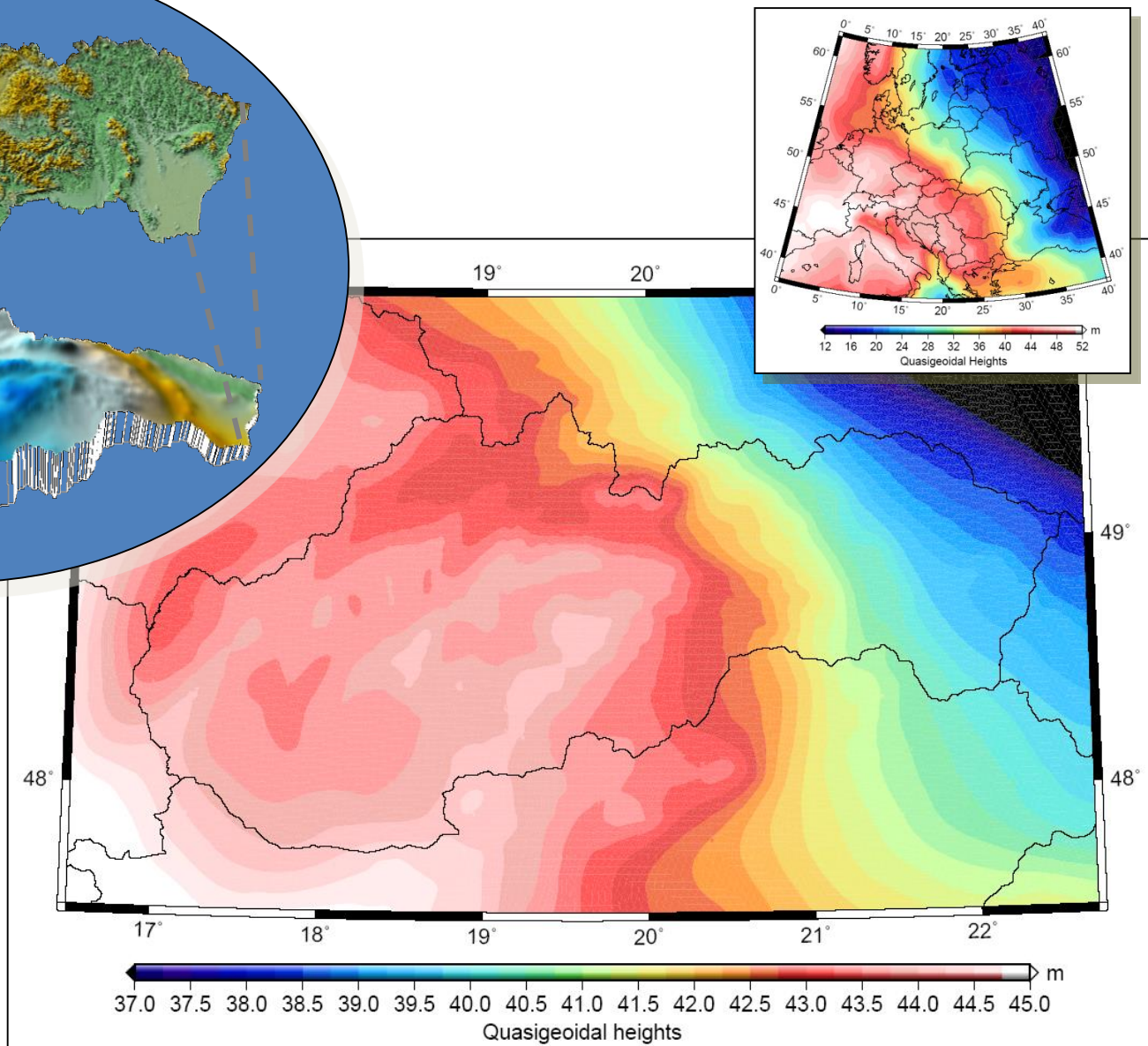
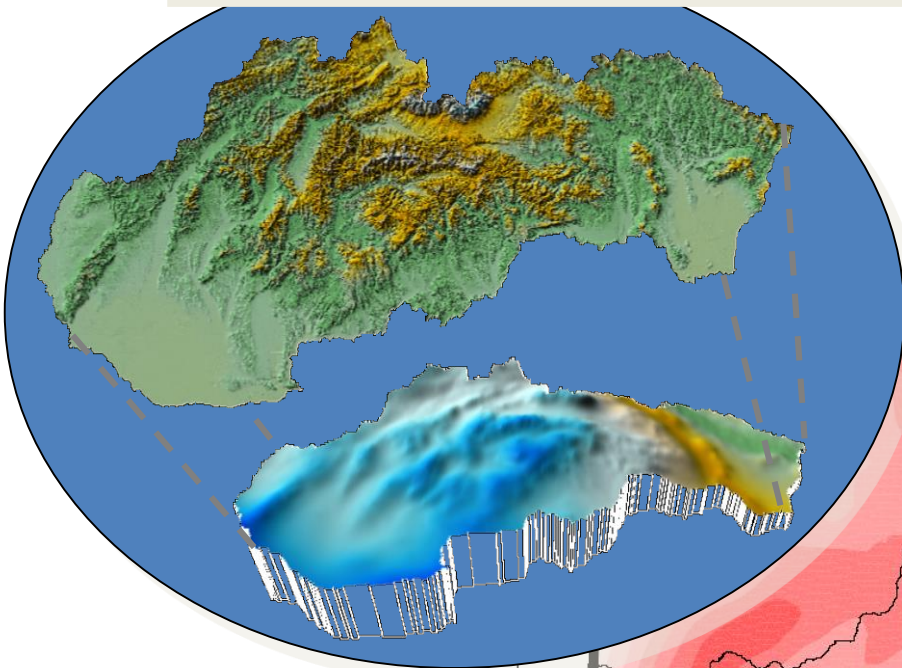
Lokálne zjemnenie triangulácie



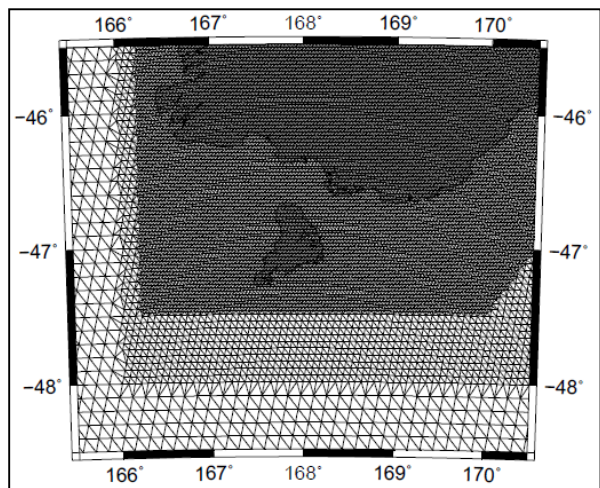
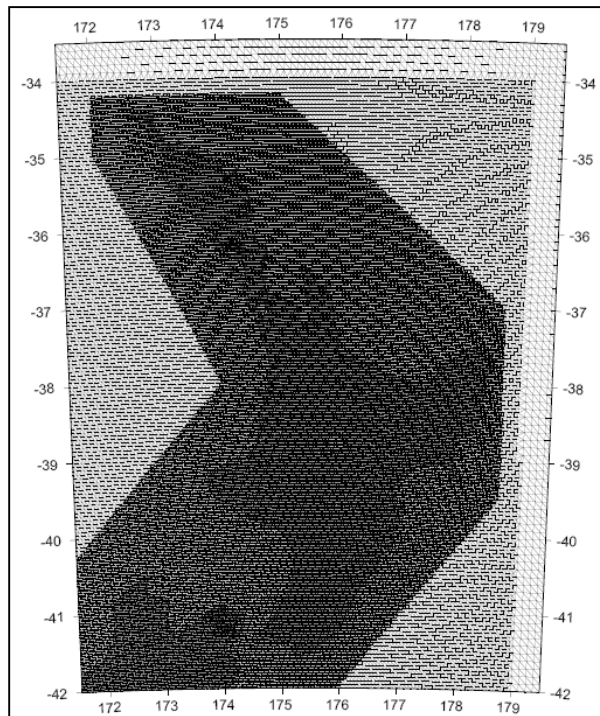
Lokálne riešenie na Slovensku



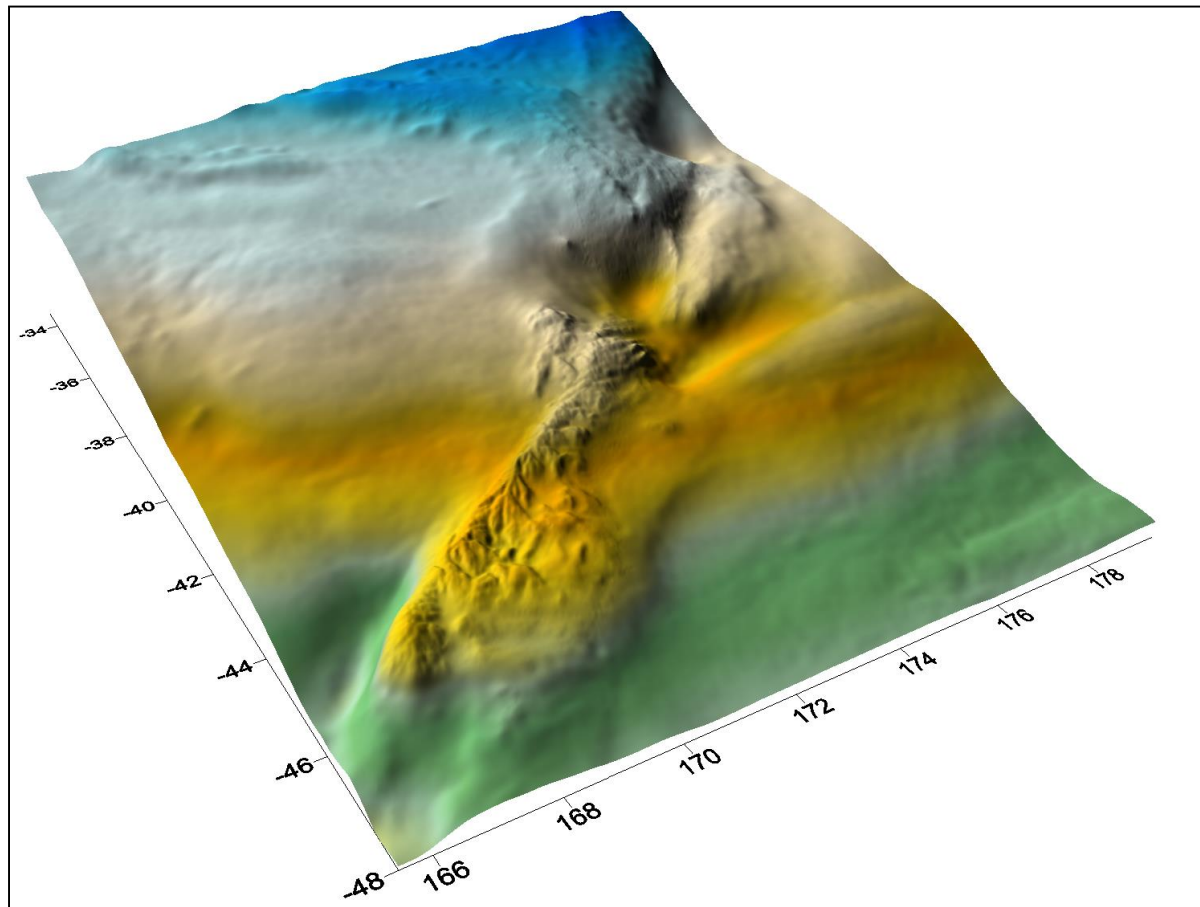
Lokálne riešenie na Slovensku



Lokálne riešenie na Novom Zélande

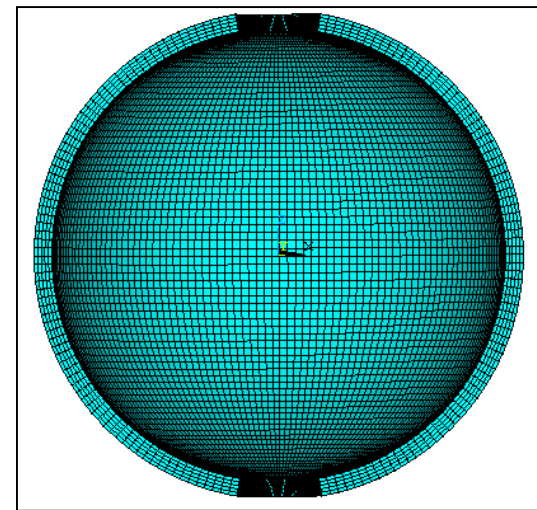
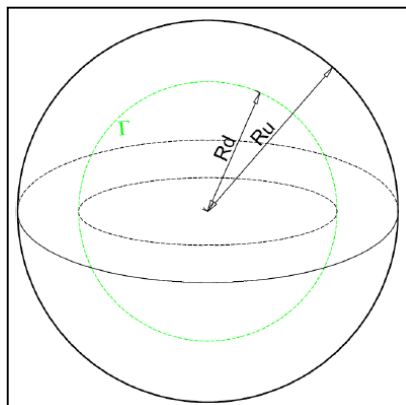
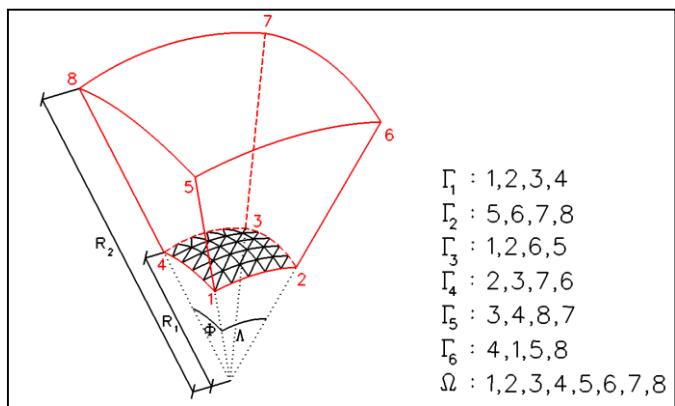


Riešenie MOP



Metóda konečných objemov

3D výpočtová oblasť nad zemským povrchom



Geodetická okrajová podmienka

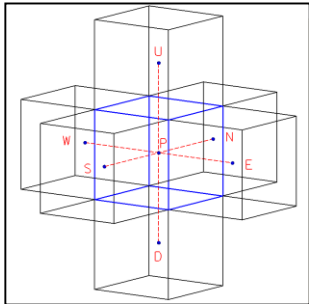
$$\begin{aligned}
 \Delta T(\mathbf{x}) &= 0 & \mathbf{x} \in \Omega \\
 \langle \nabla T(\mathbf{x}), \mathbf{s}(\mathbf{x}) \rangle &= -\delta g(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \Gamma_1 \\
 T(\mathbf{x}) &= T^{\text{SAT}}(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \Gamma_i \quad i=2,\dots,6
 \end{aligned}$$

Metóda konečných objemov

Lineárny systém:

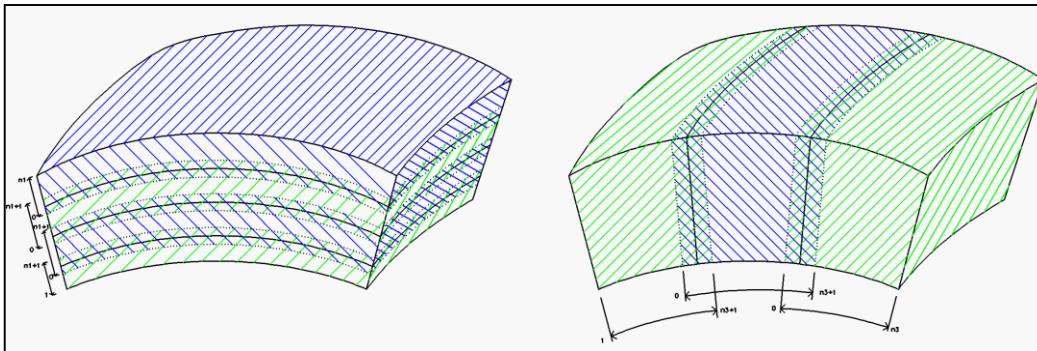
$$P_{i,j,k}T_{i,j,k} - W_{i,j,k}T_{i-1,j,k} - E_{i+1,j,k}T_{i,j,k} - N_{i,j+1,k}T_{i,j,k} - S_{i,j-1,k}T_{i,j,k} - U_{i,j,k+1}T_{i,j,k} - D_{i,j,k}T_{i,j,k-1} = b_{i,j,k}$$

⇒ koeficienty P, W, E, N, S, U, D dané geometriou konečných objemov



Výpočty na paralelných počítačoch

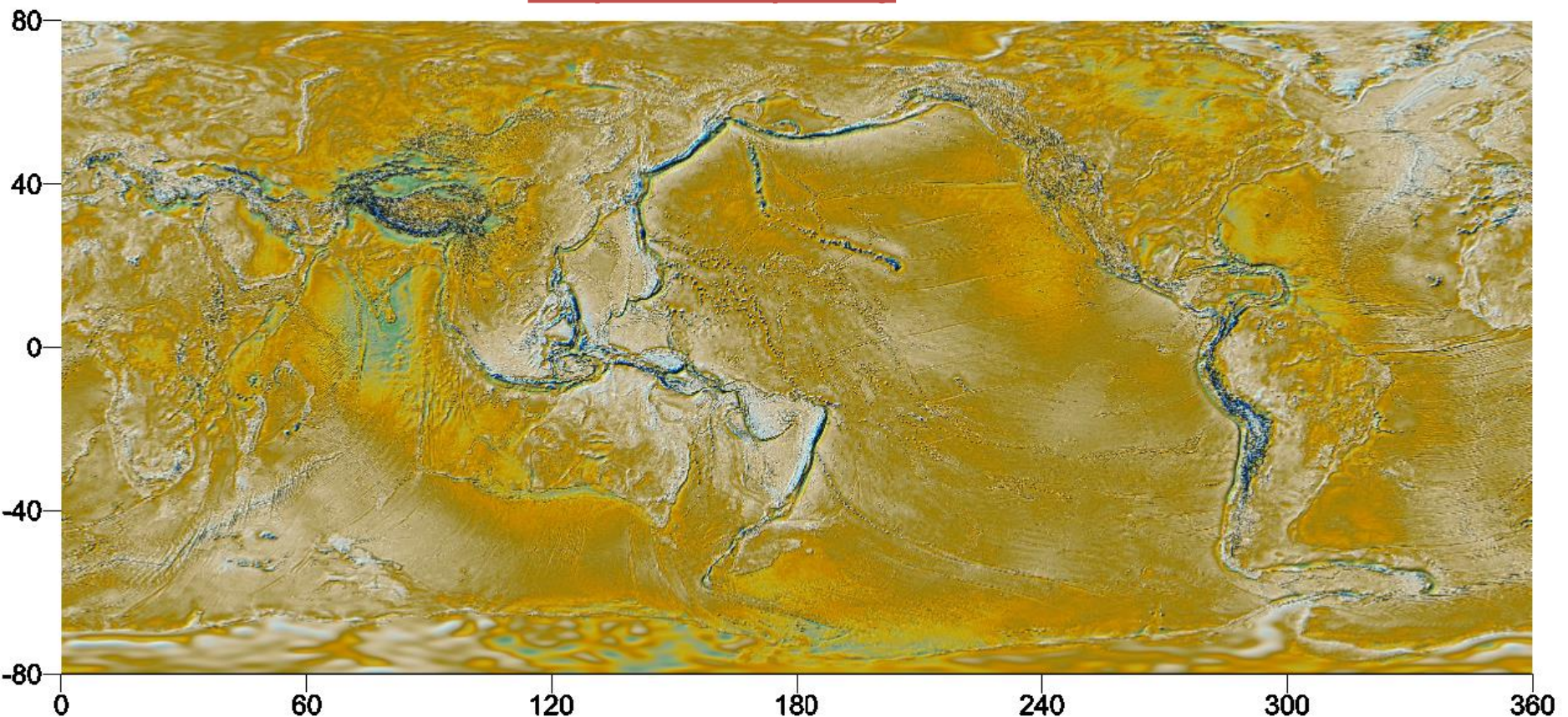
⇒ **rozdelenie 3D výpočtovej oblasti na pásy s prekrytmi**



Metóda konečných objemov

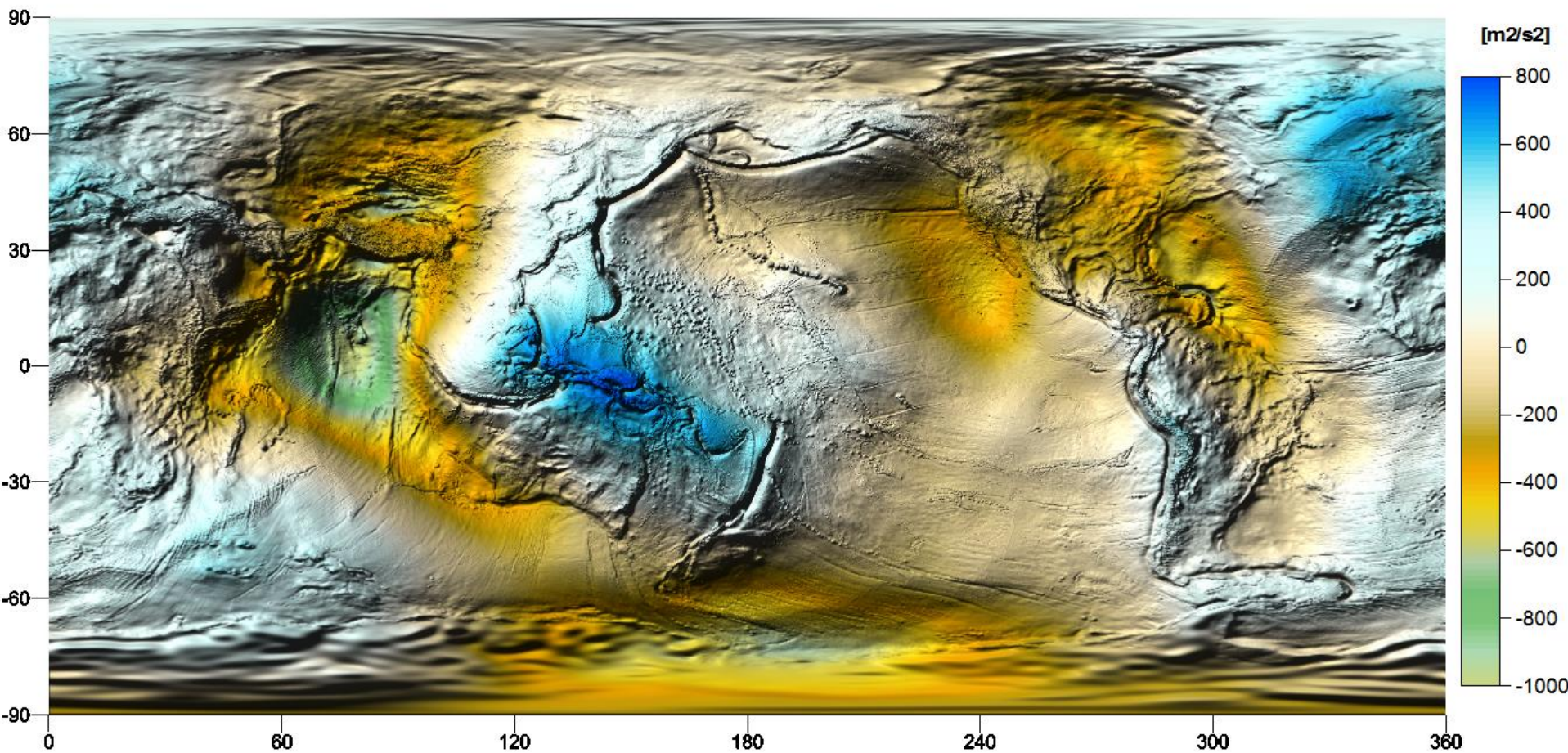
- ⇒ **rozlíšenie: 5 arc min x 5 arc min x 0.5 km (4320 x 1920 x 480)**
- ⇒ **počet objemov: 3 981 312 000**
- ⇒ **paralelné výpočty na 64 procesoroch s 512 GB distribuovanej pamäte**
- ⇒ **celkový výpočtový čas na procesor: cca. 23 hod**

Vstupné tiažové poruchy

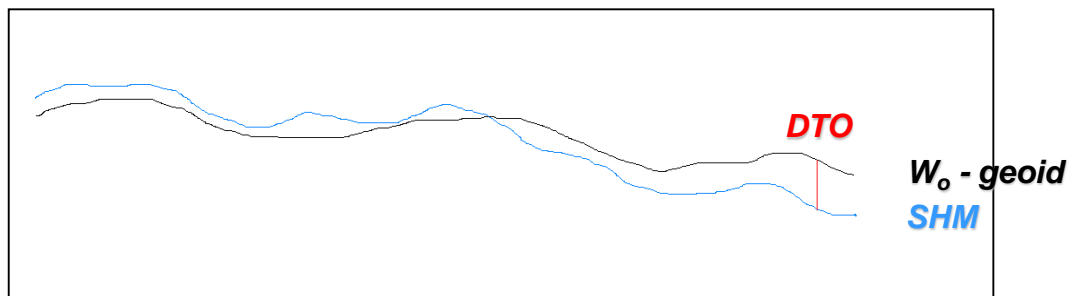


Metóda konečných objemov

⇒ rozlíšenie: 5 min x 5 min x 0.5 km (4320 x 1920 x 480)



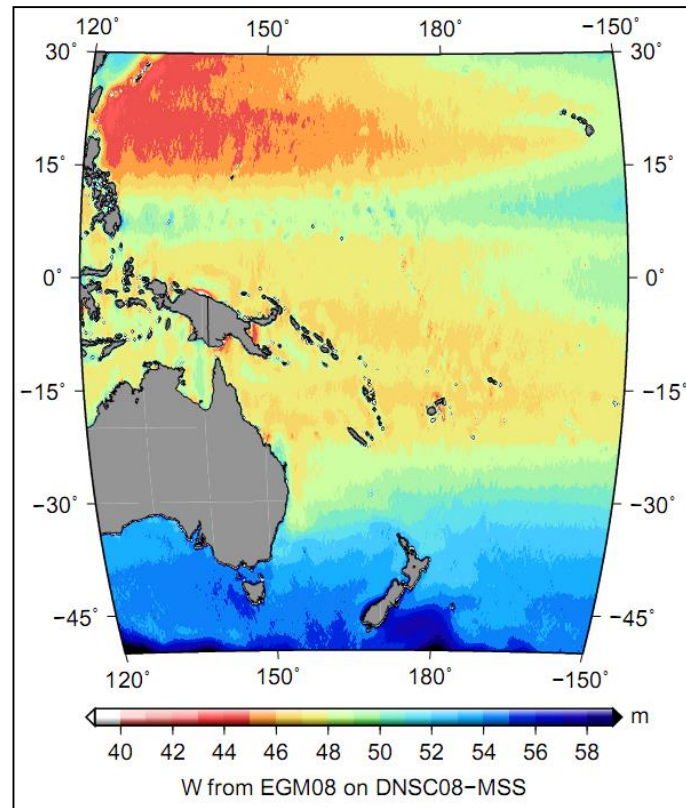
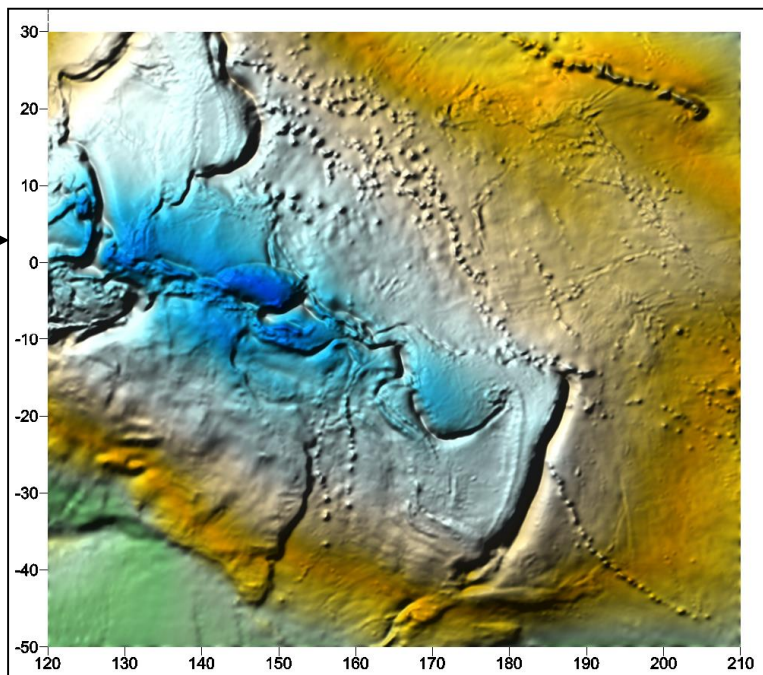
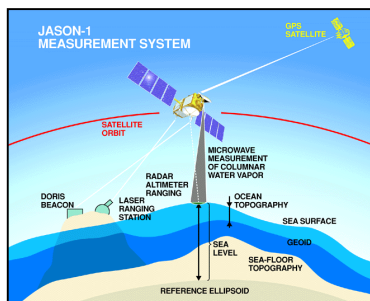
Využitie v oceánografii



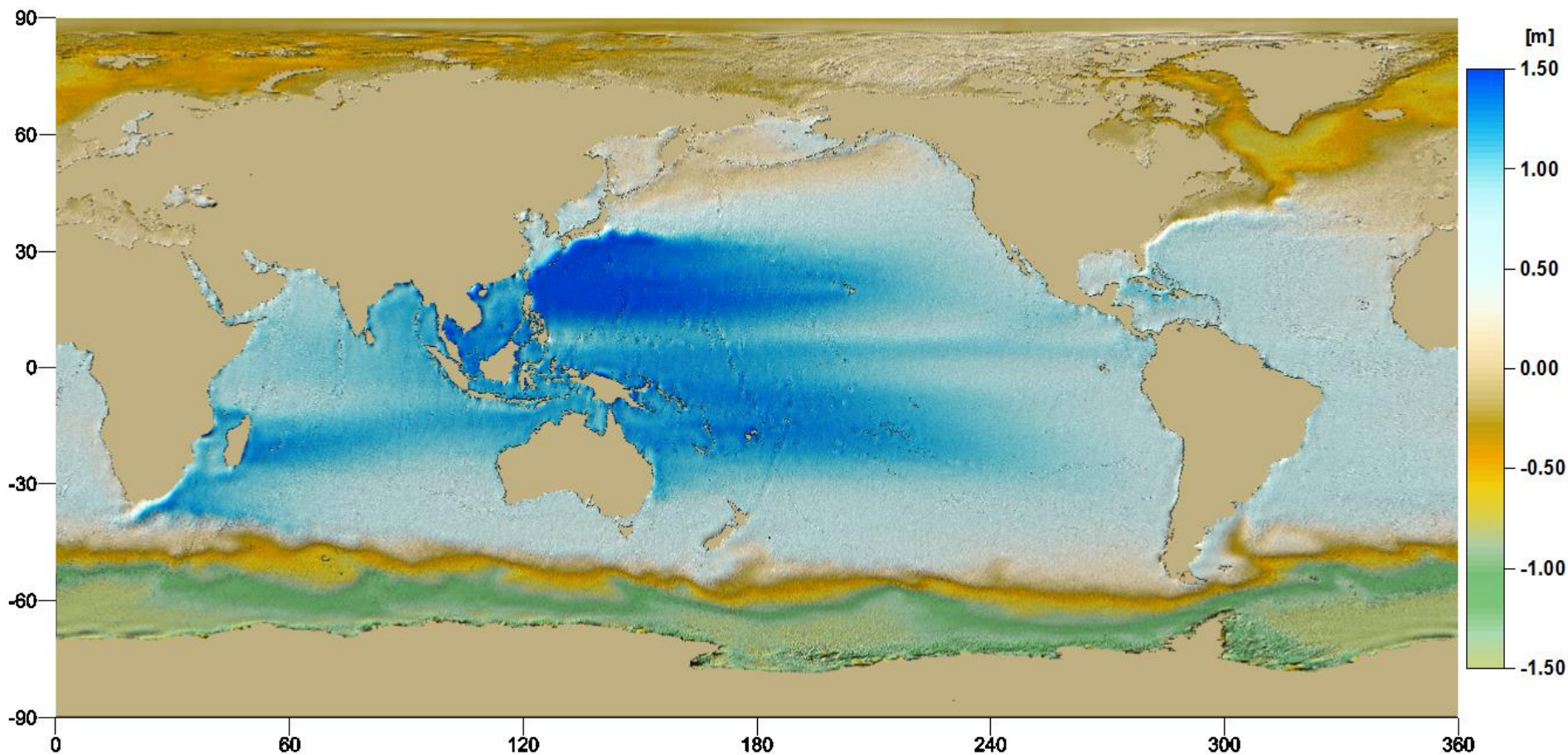
Stredná hladina morí (SHM)

Geopotenciál na SHM

Družicová altimetria



Stredná dynamická topografia oceánov



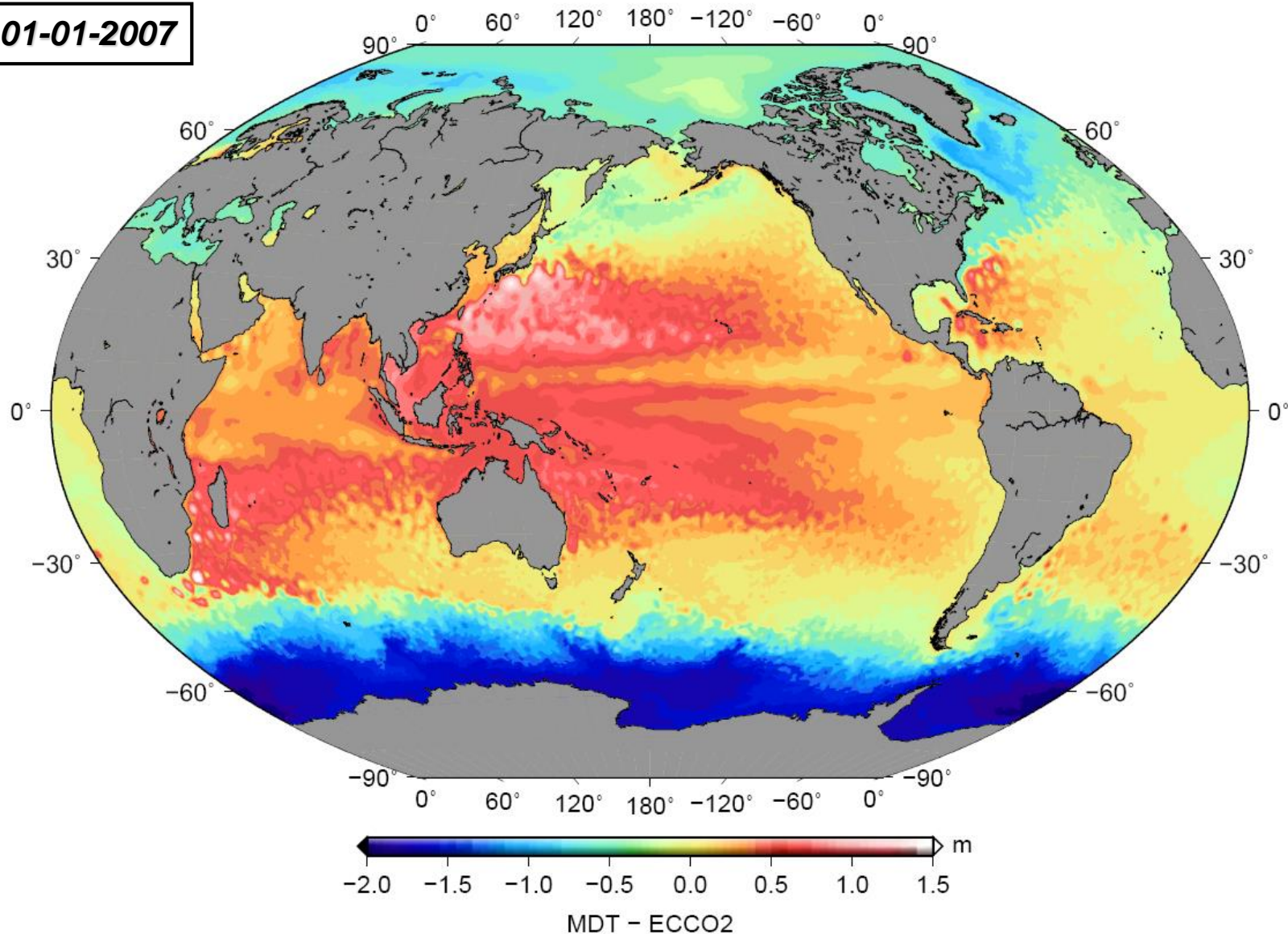
“geodetický prístup”

$$\text{SDTO} = \text{SHM} - \text{geoid}$$

SDTO – stredná dynamická topografia oceánov
SHM – stredná hladina morí

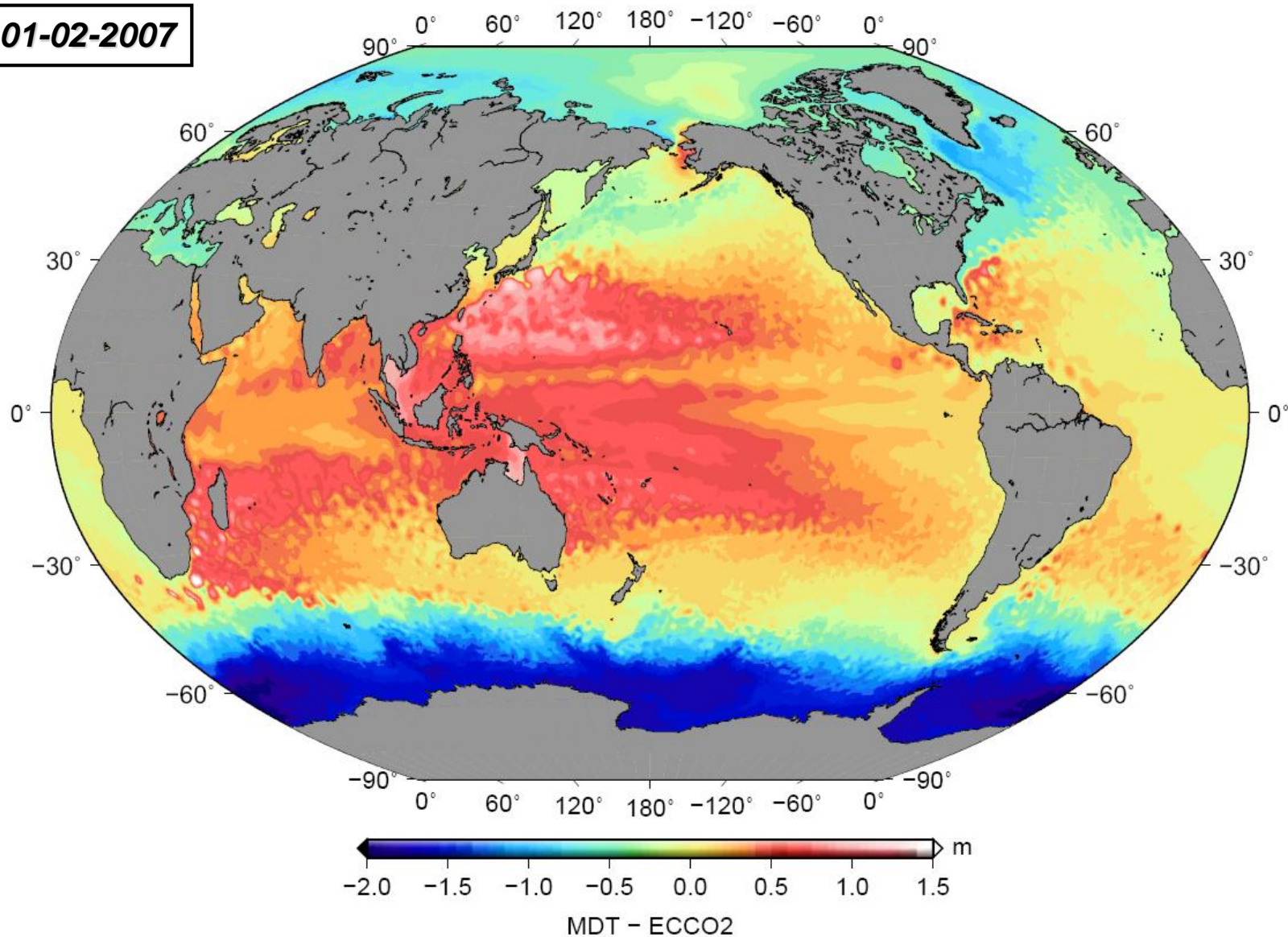
Dynamická topografia oceánov

01-01-2007



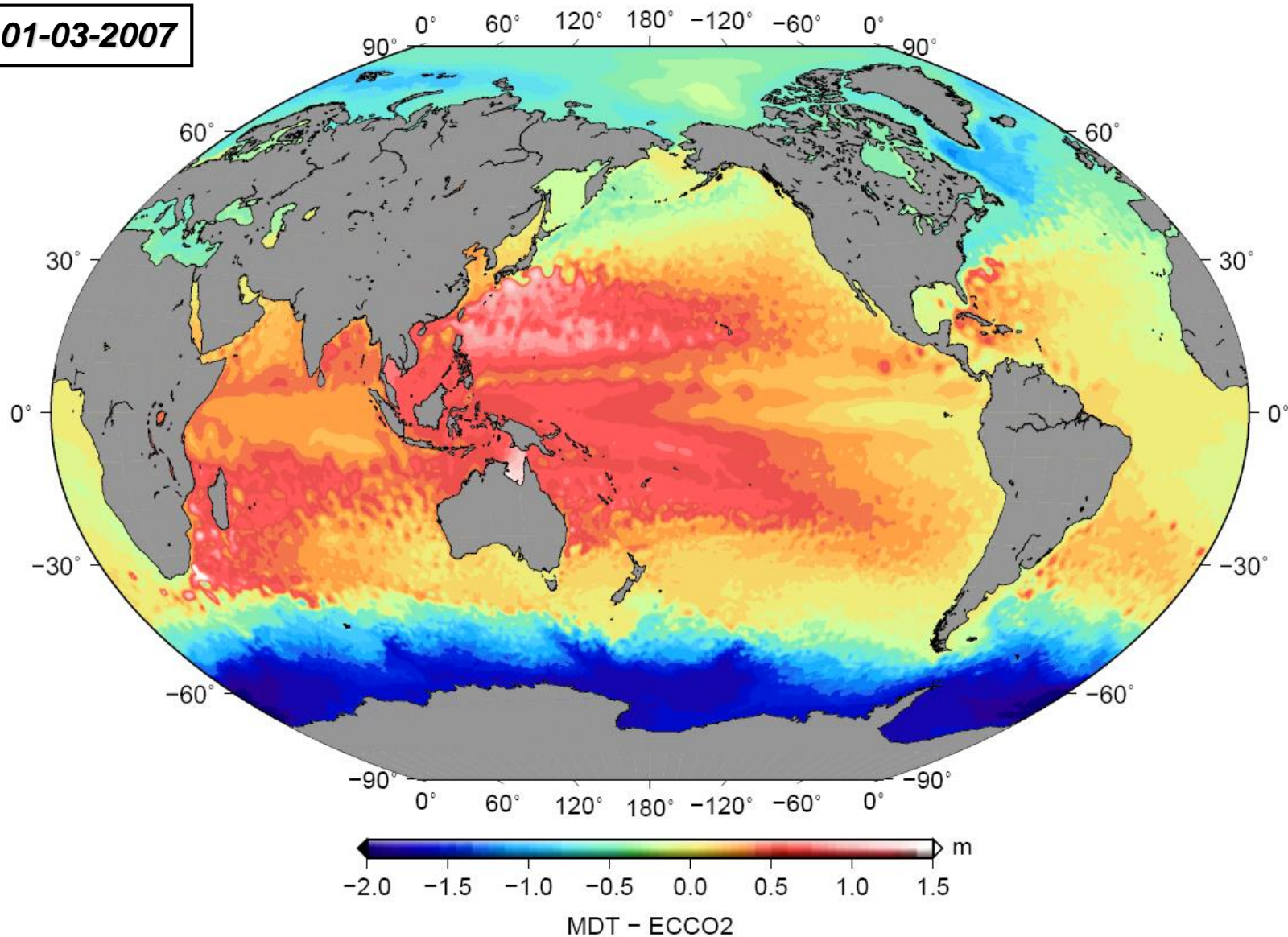
Dynamická topografia oceánov

01-02-2007



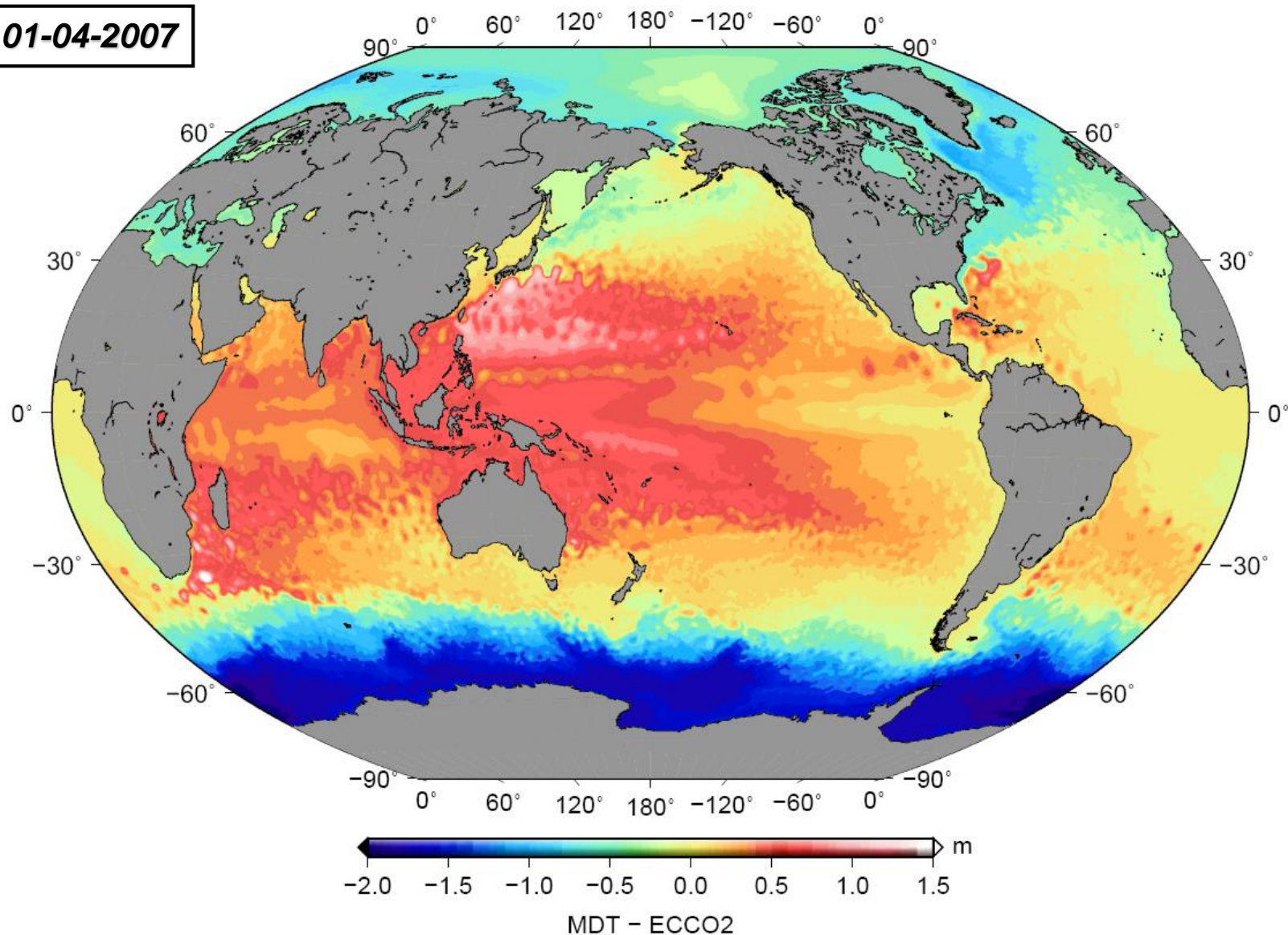
Dynamická topografia oceánov

01-03-2007



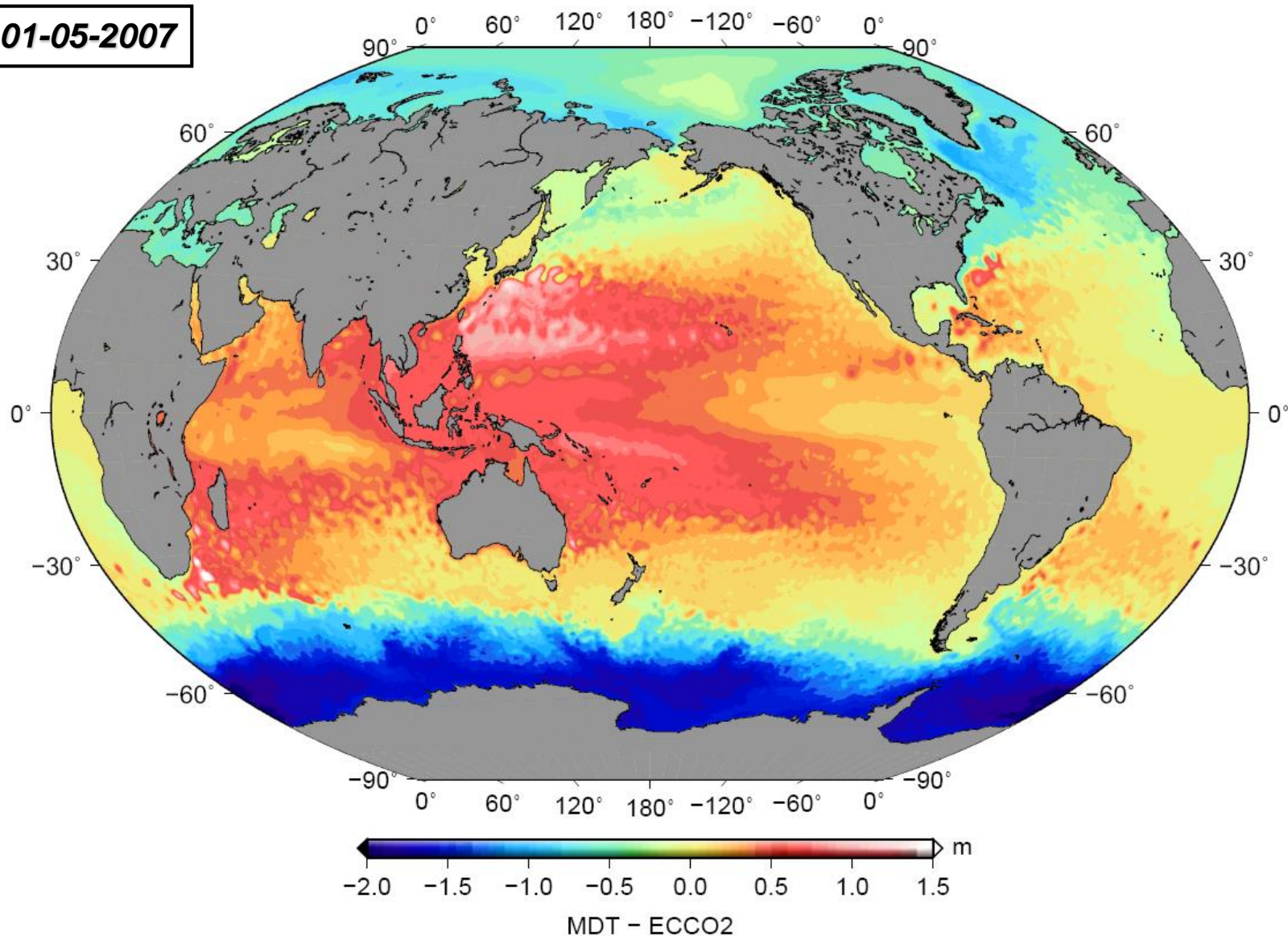
Dynamická topografia oceánov

01-04-2007



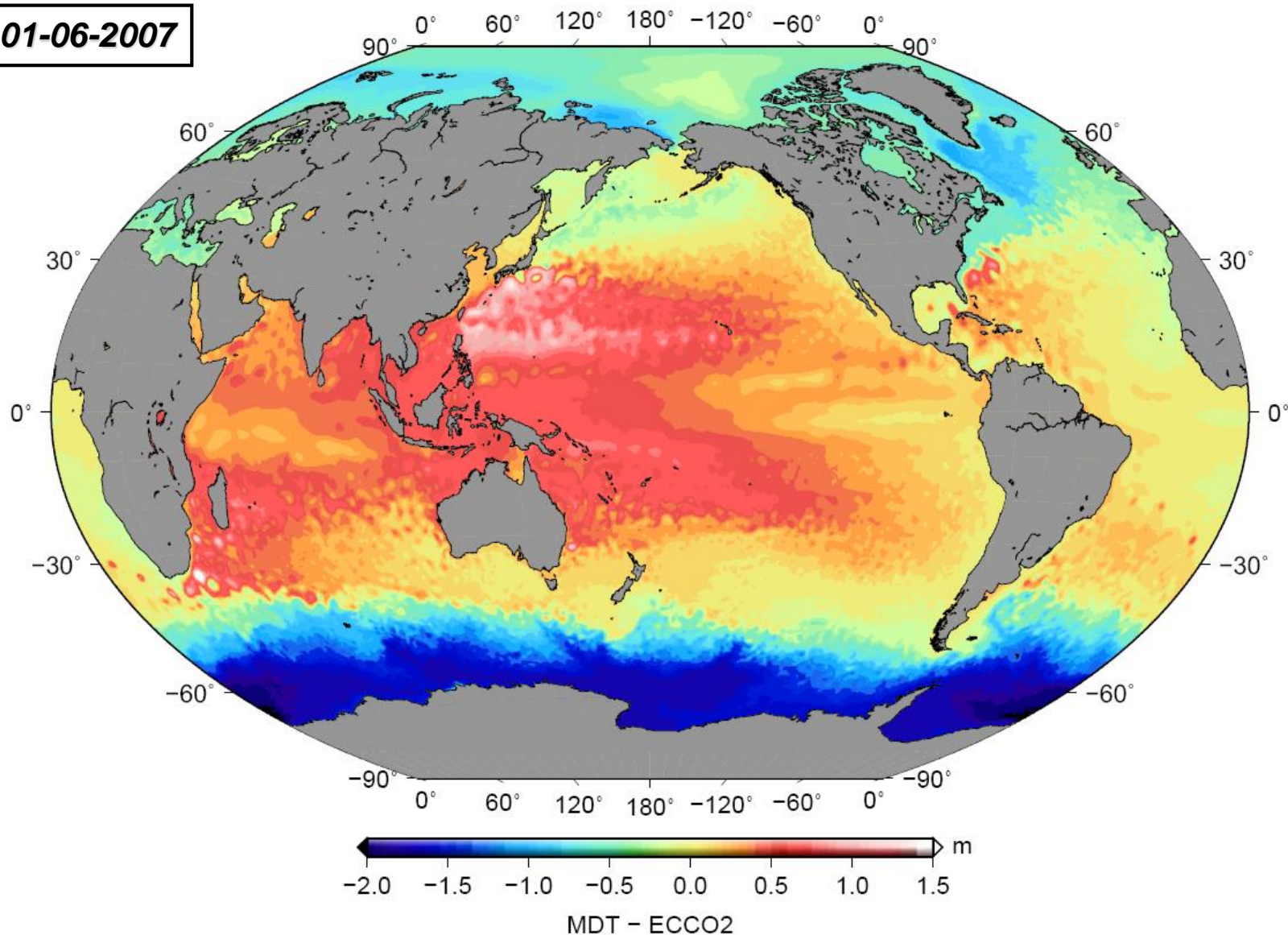
Dynamická topografia oceánov

01-05-2007



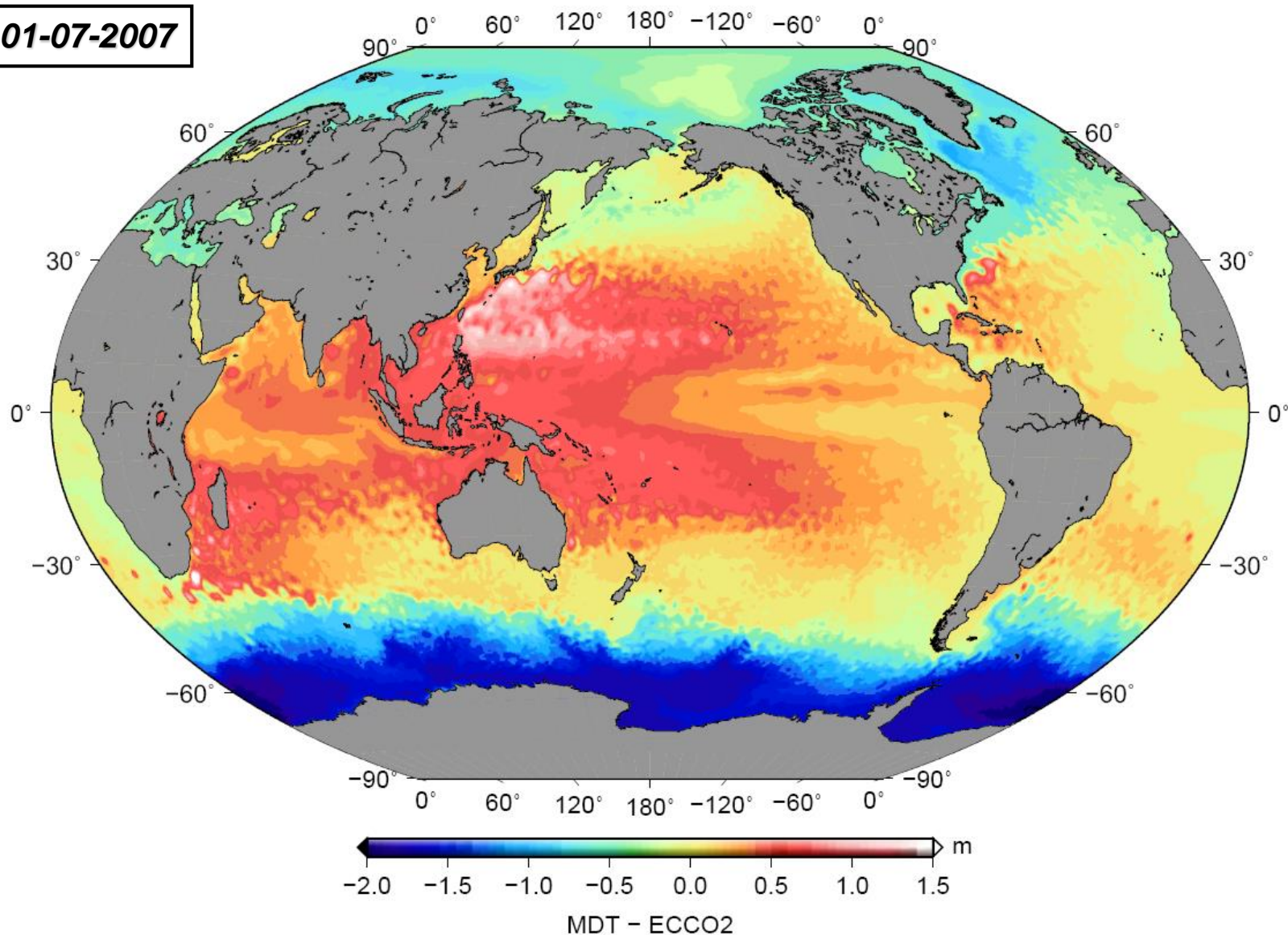
Dynamická topografia oceánov

01-06-2007



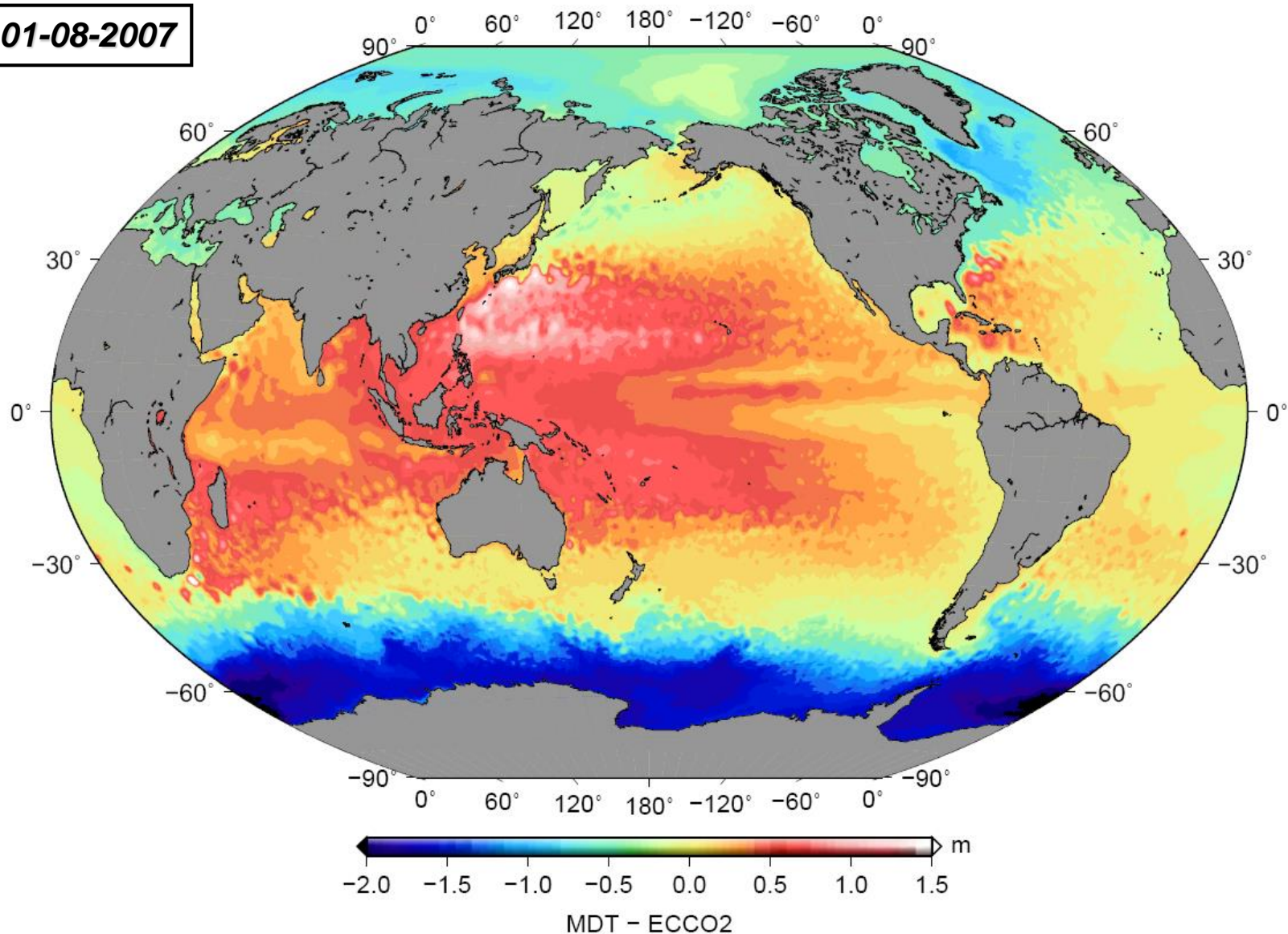
Dynamická topografia oceánov

01-07-2007



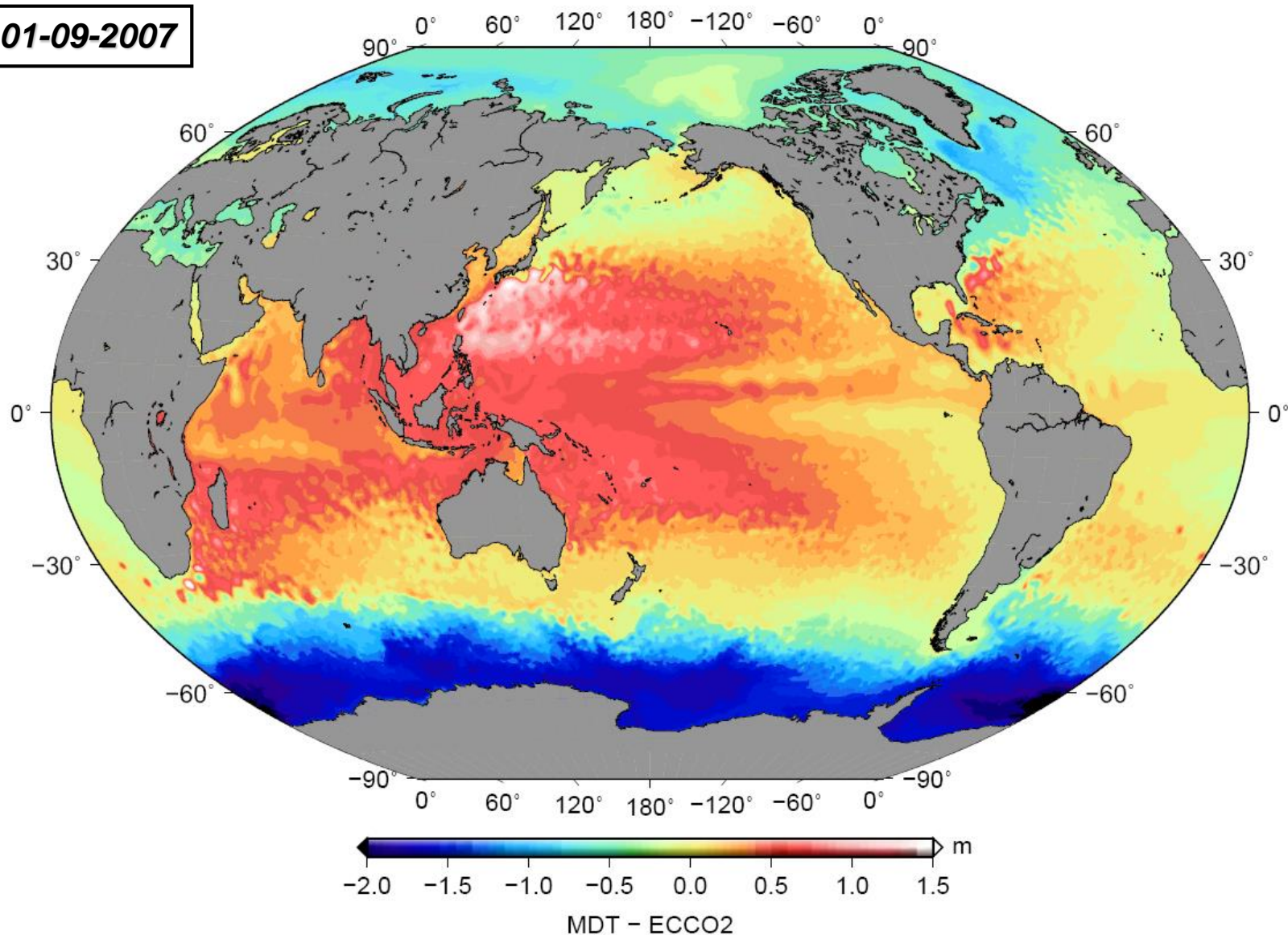
Dynamická topografia oceánov

01-08-2007



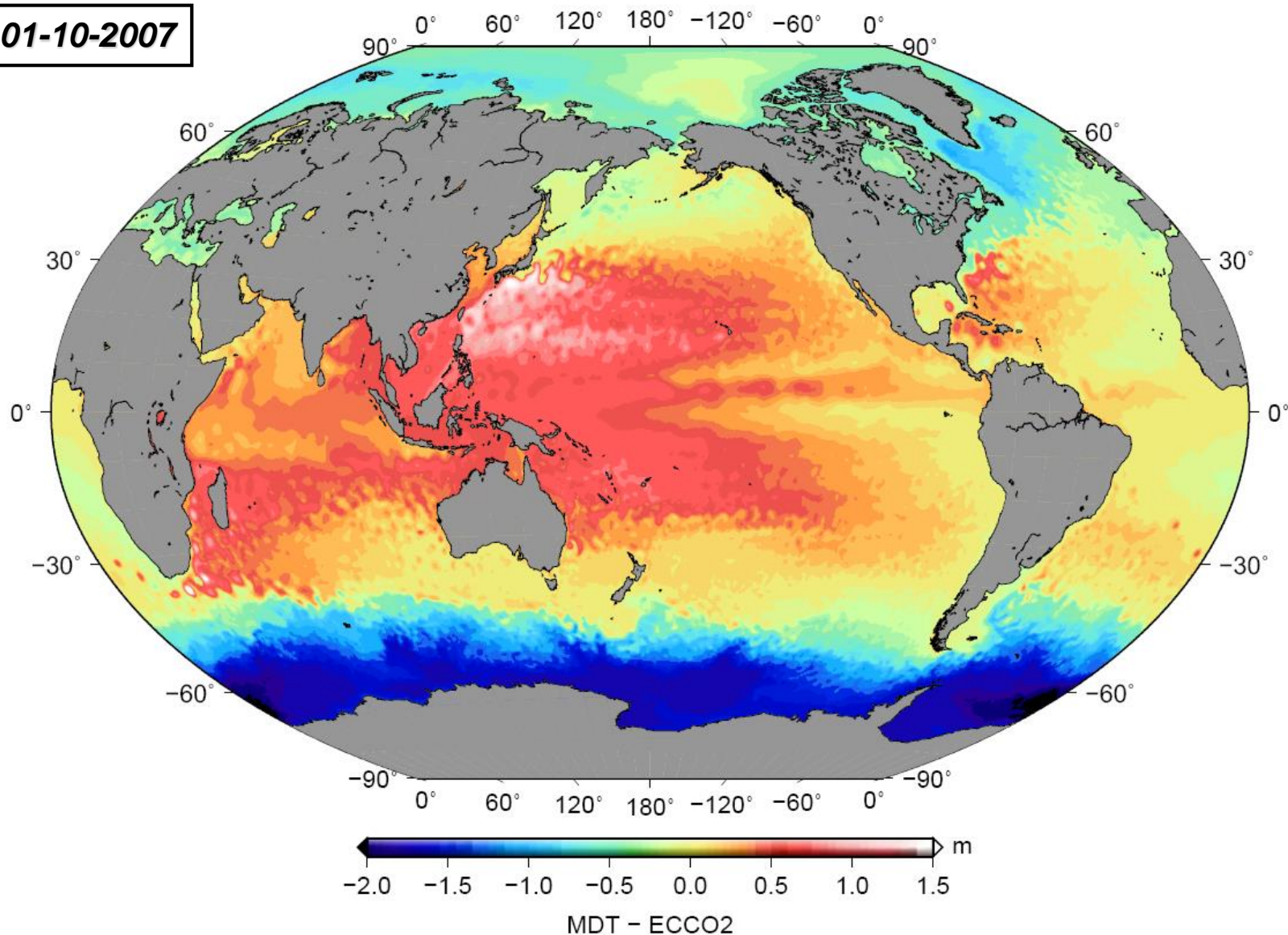
Dynamická topografia oceánov

01-09-2007



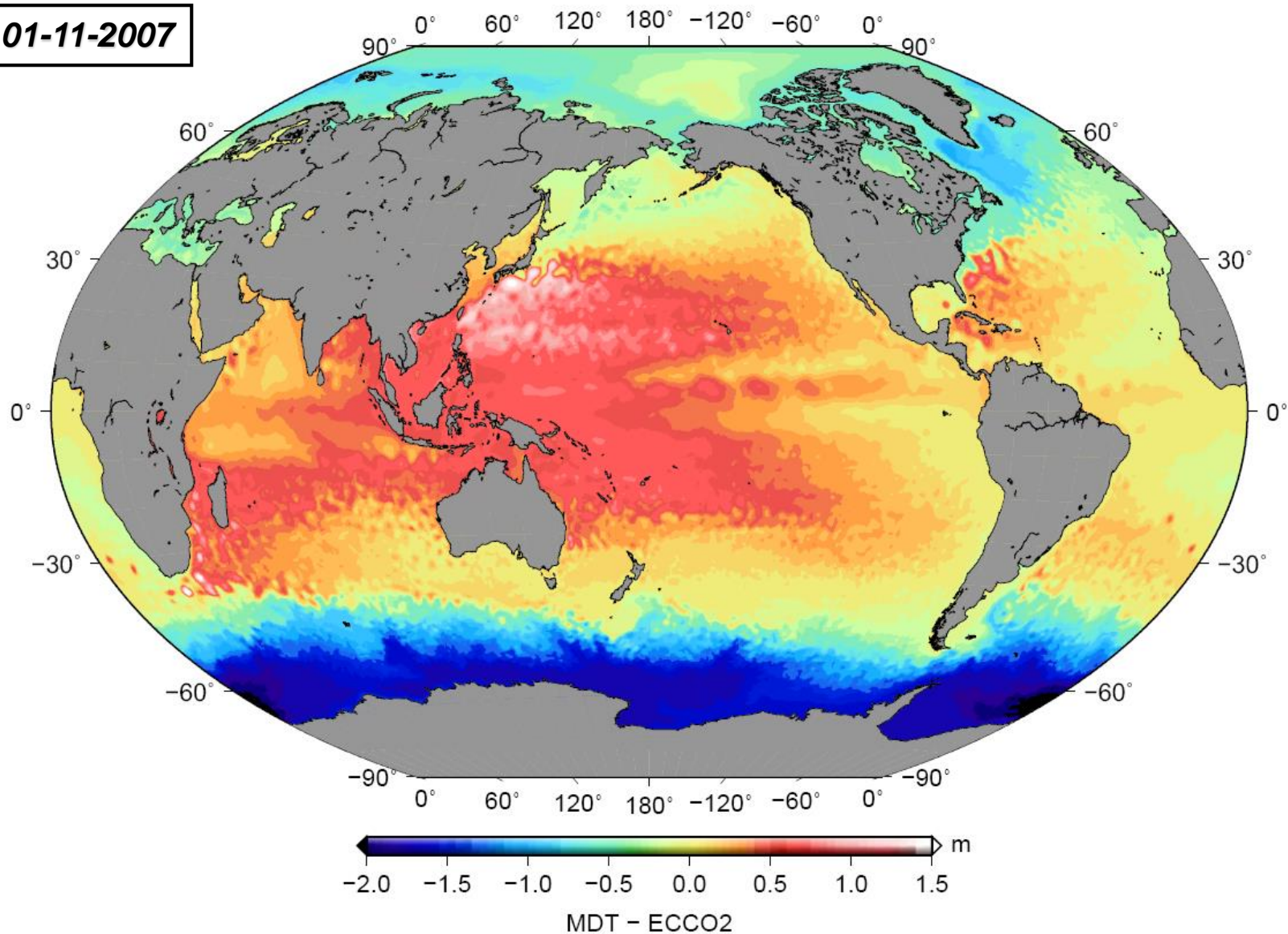
Dynamická topografia oceánov

01-10-2007



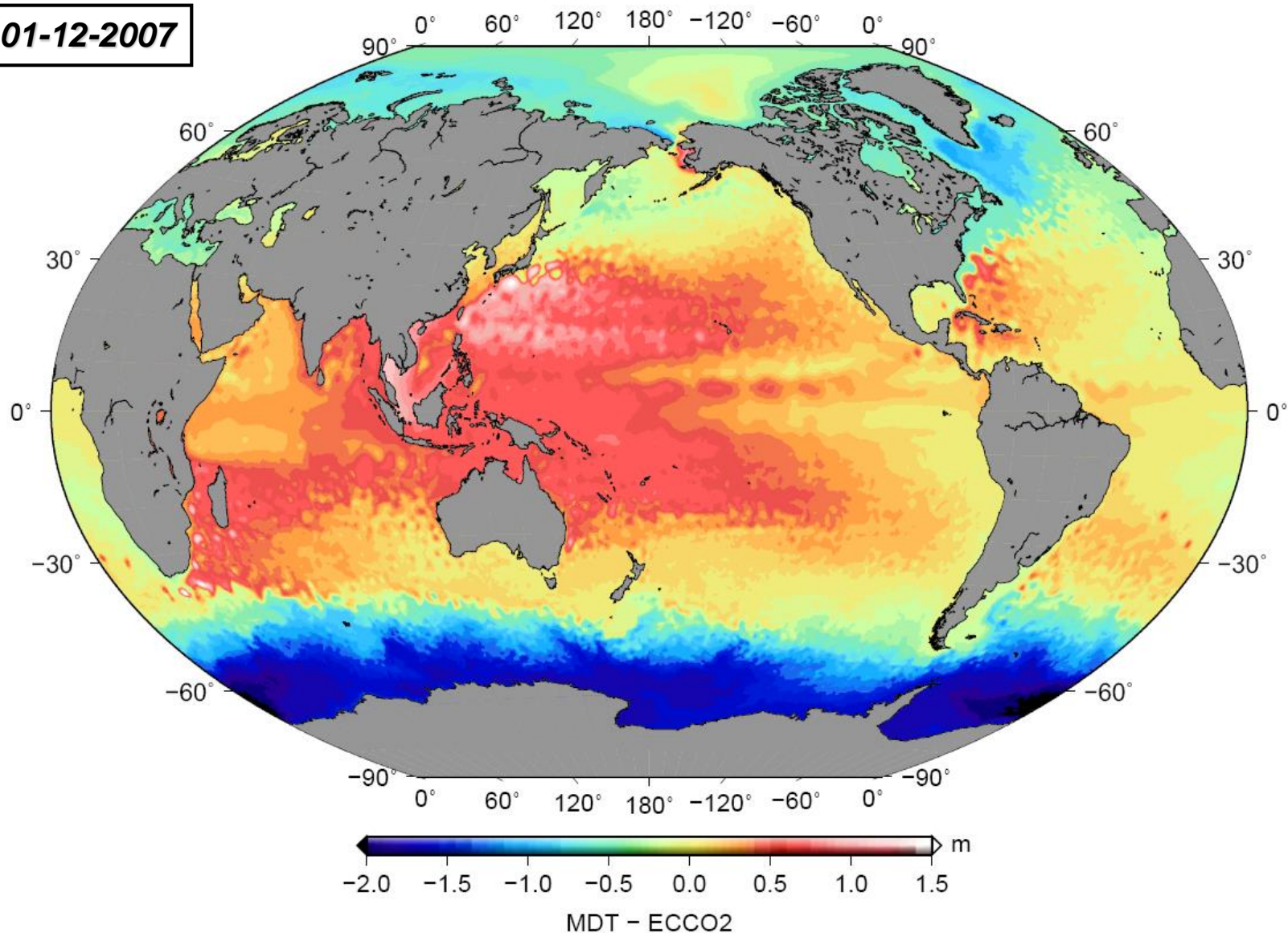
Dynamická topografia oceánov

01-11-2007

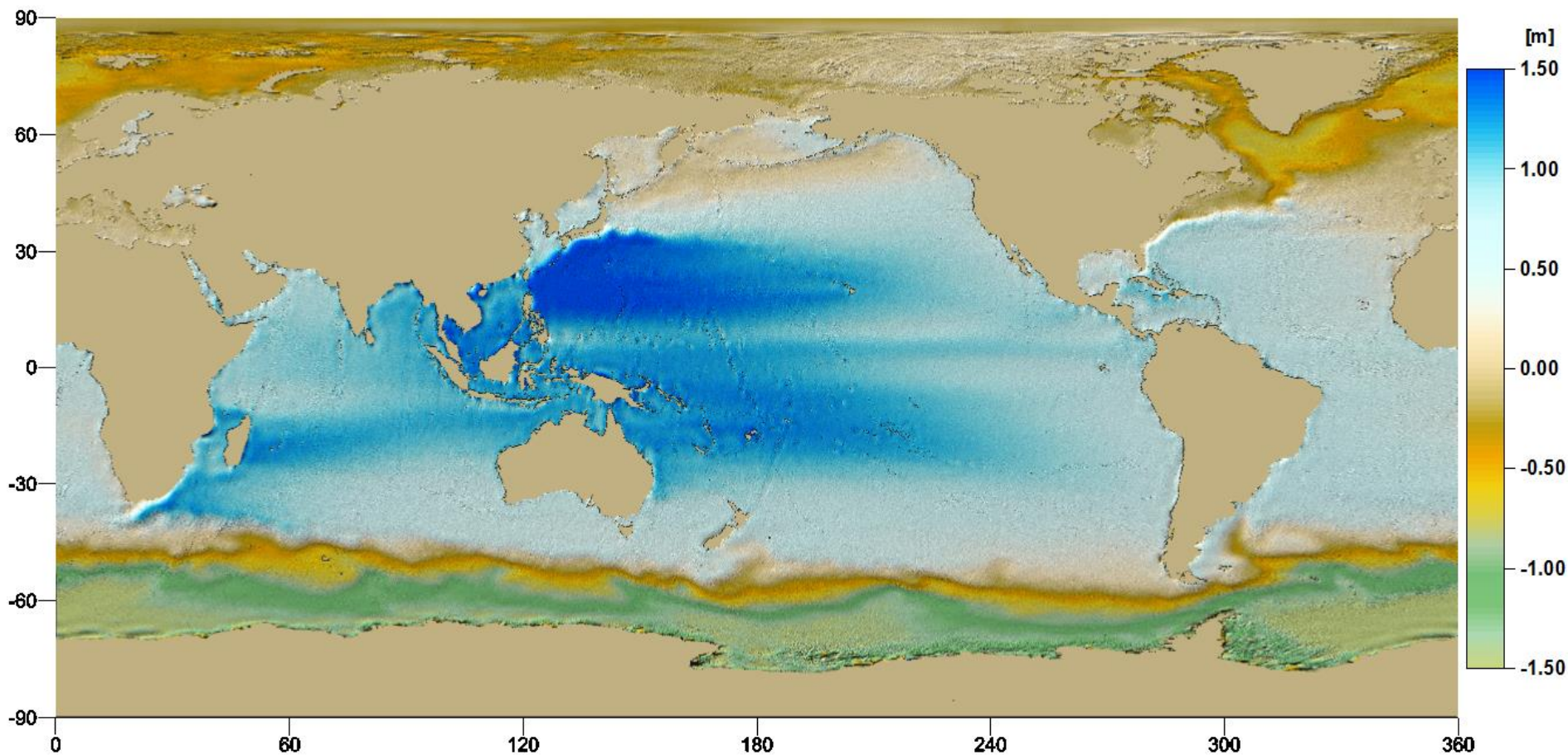


Dynamická topografia oceánov

01-12-2007



Stredná dynamická topografia oceánov

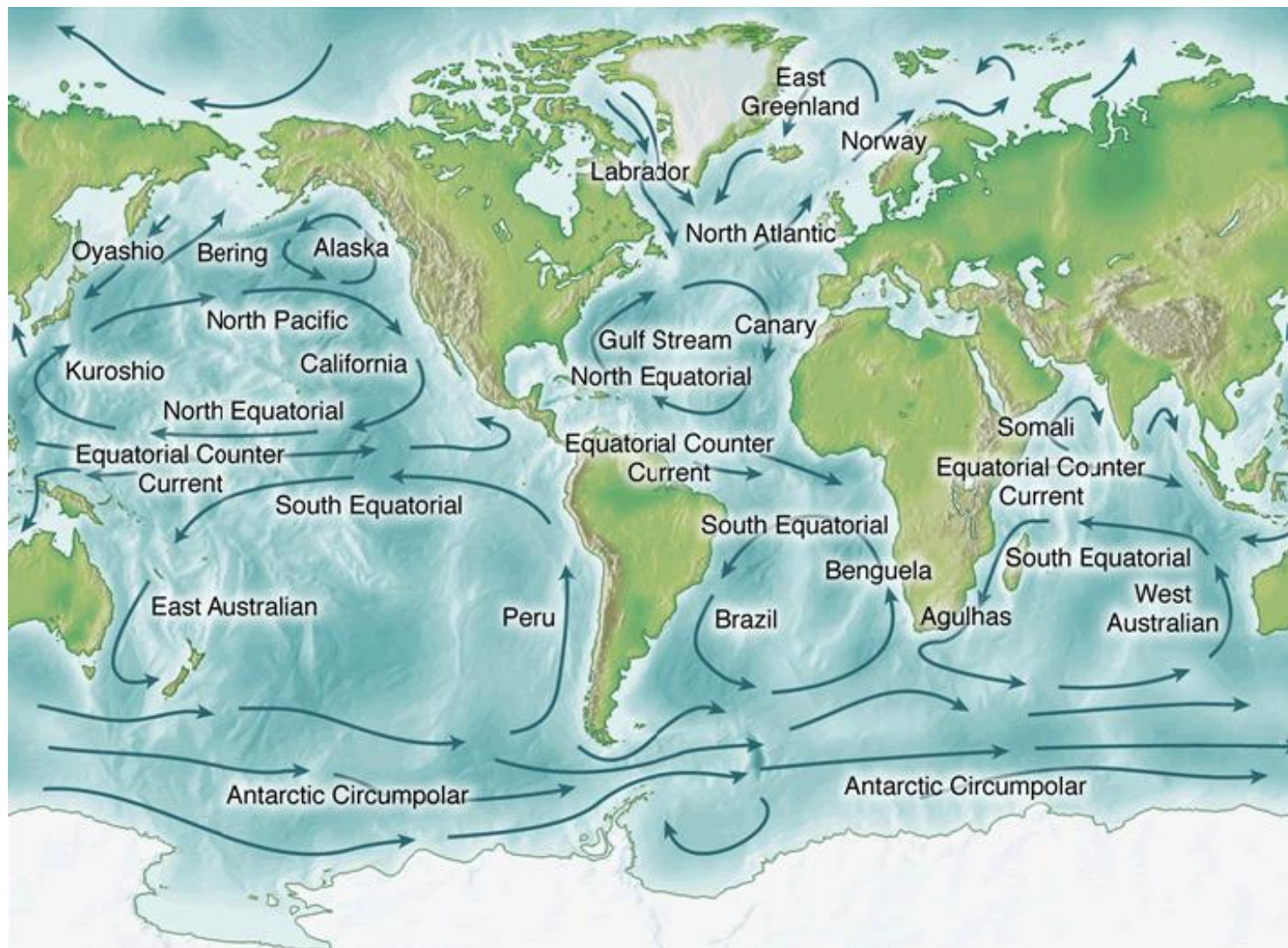


“geodetický prístup”

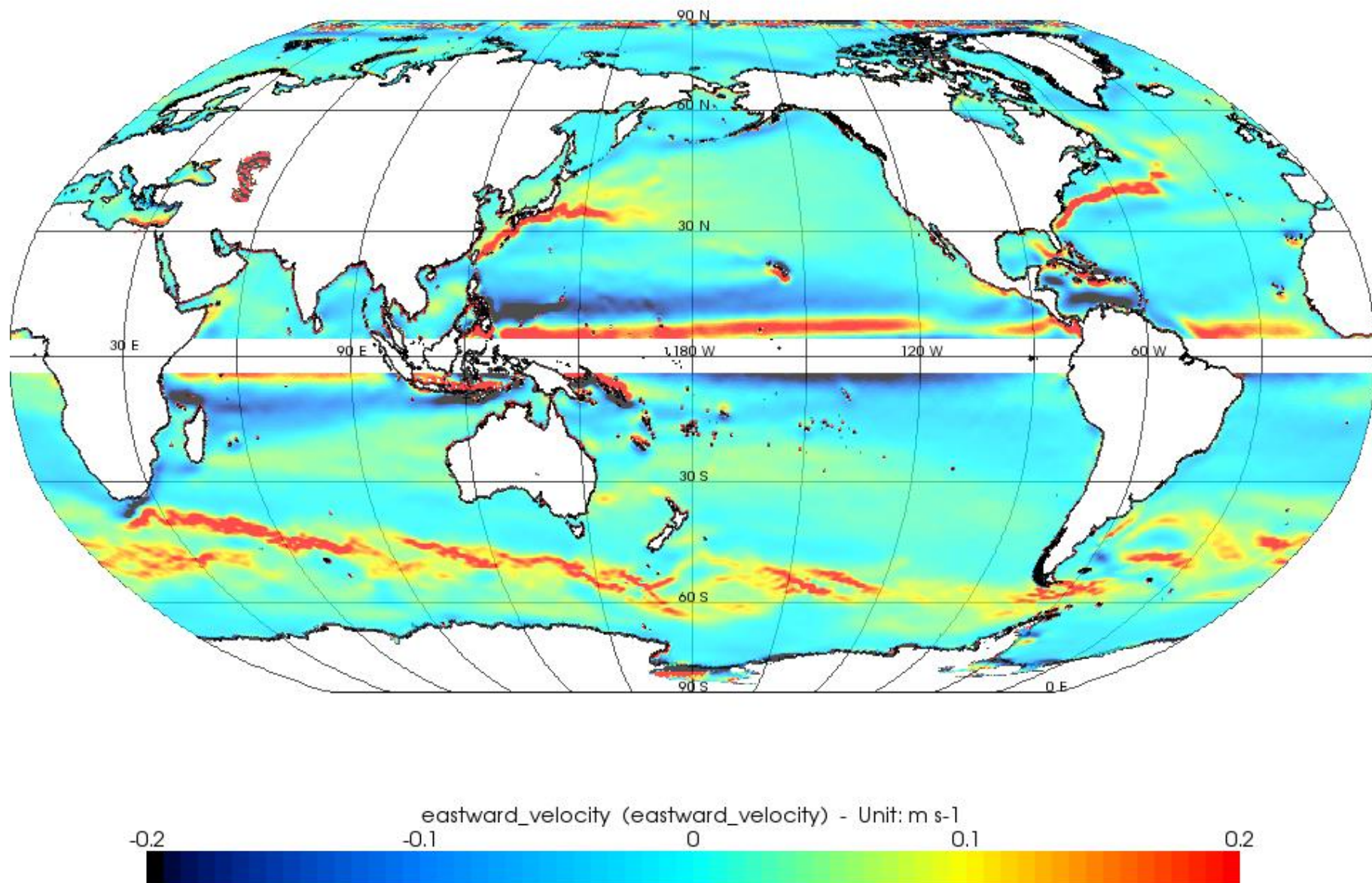
$$\text{SDTO} = \text{SHM} - \text{geoid}$$

SDTO – stredná dynamická topografia oceánov
SHM – stredná hladina morí

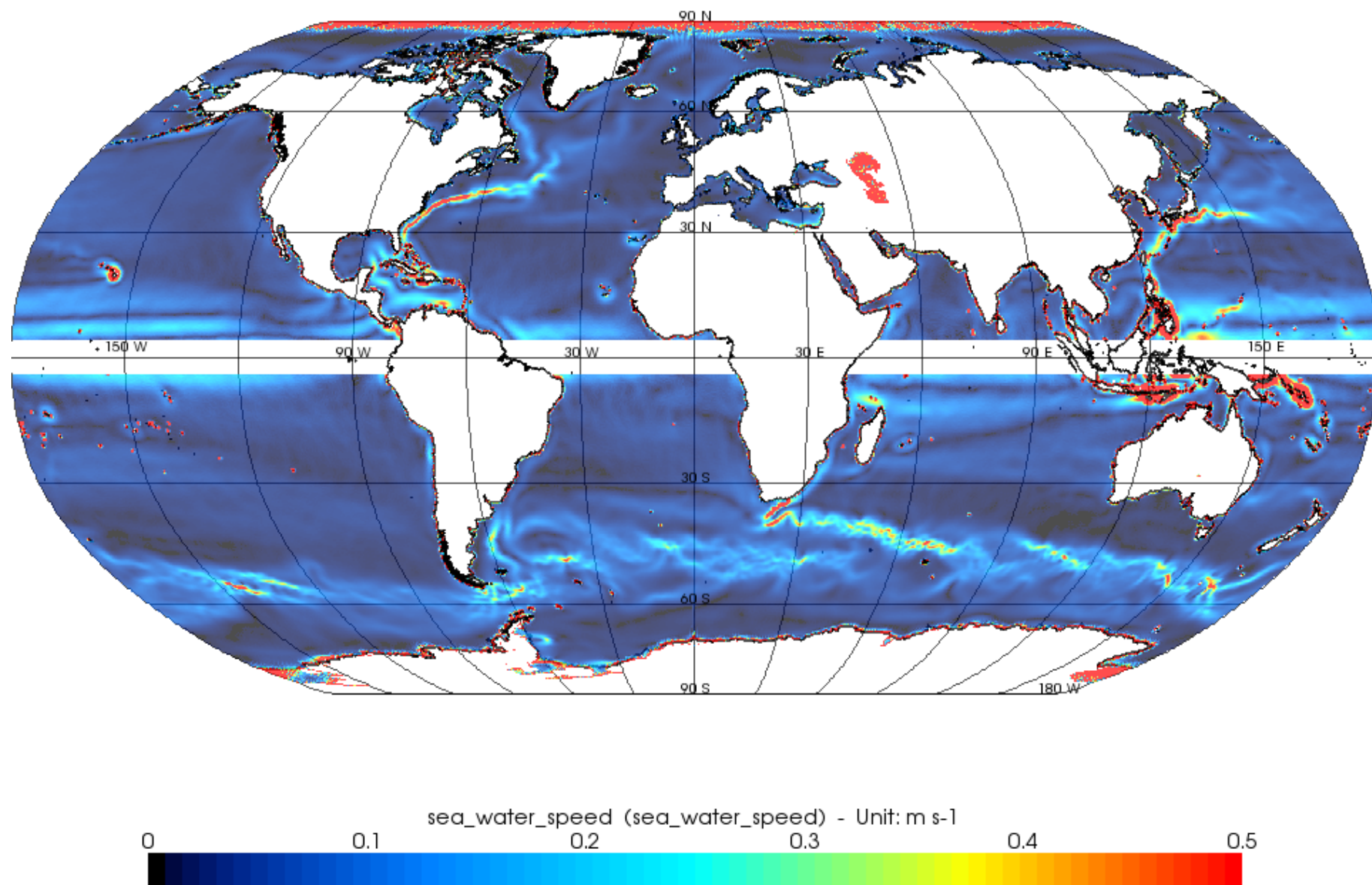
Rýchlosti geostrofických prúdov



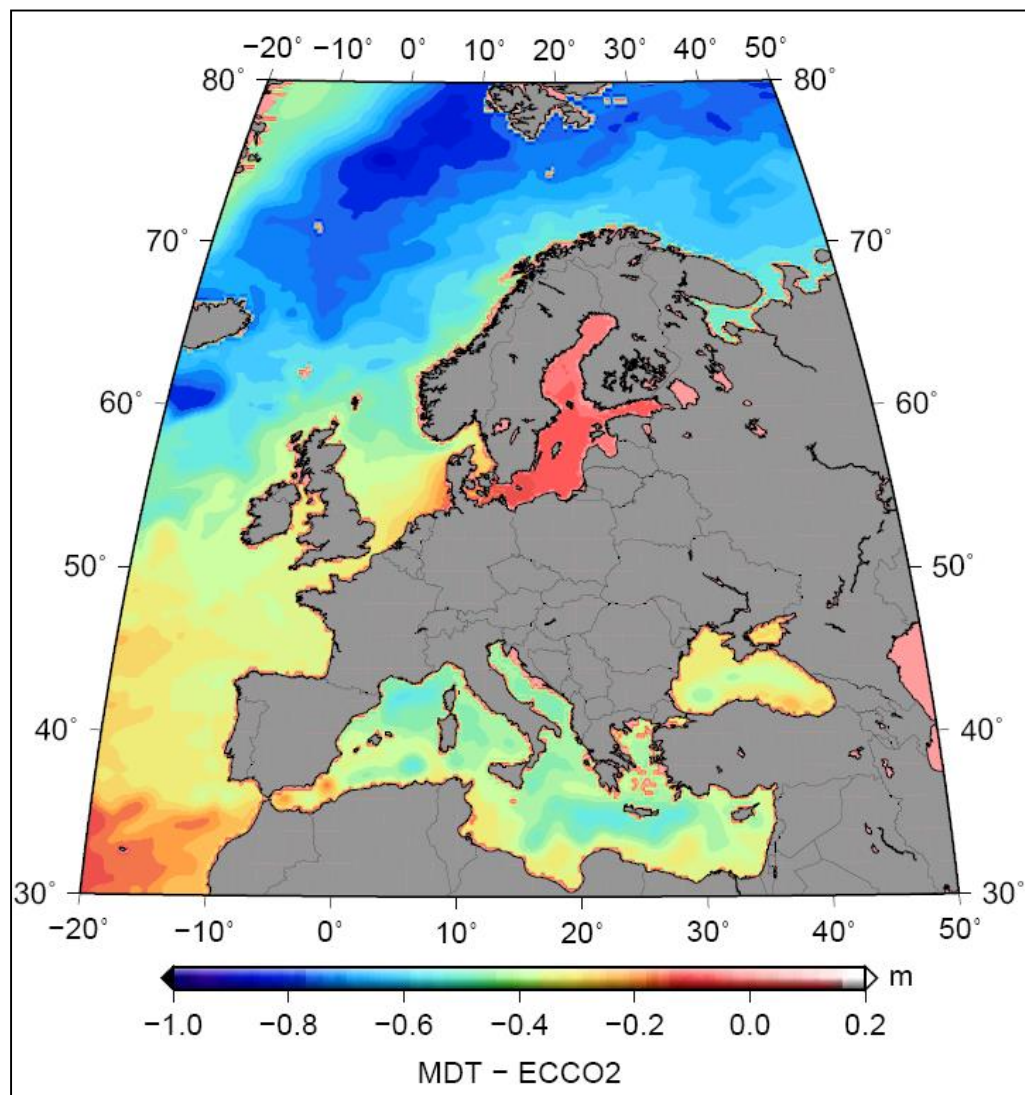
Rýchlosti geostrofických prúdov



Rýchlosti geostrofických prúdov



SDTO a posuny výškových systémů v Evropě



Differences between UELN heights and national heights in Europe (in cm)

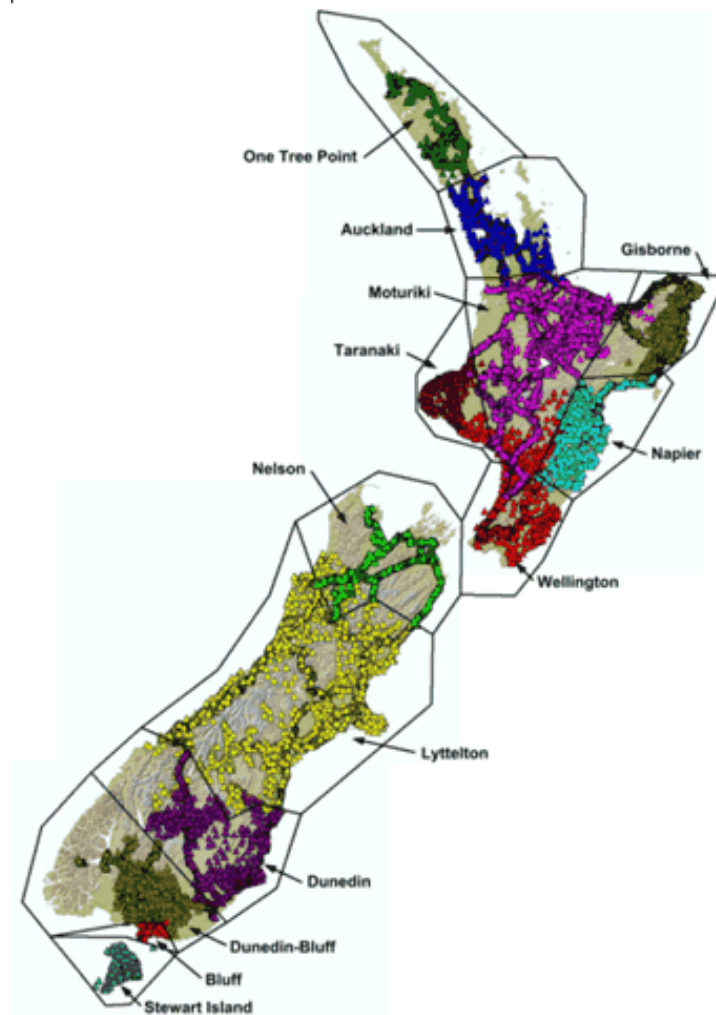
SDTO a posuny výškových systémov v Európe



- hraničný most medzi Švajčiarskom a Nemeckom v Laufenburgu
- rozdiel medzi Švajčiarskym a Nemeckým výškovým systémom je 27 cm.
- projektanti omylom odpočítali na švajčiarskej strane 27 cm, mali pripočítať, vznikla tak chyba 54 cm.

SDTO a posuny výškových systémov v Európe

Nový Zéland – 13 rôznych výškových systémov, vzájomne posunutých a naklonených



Monitorovanie tiažového poľa

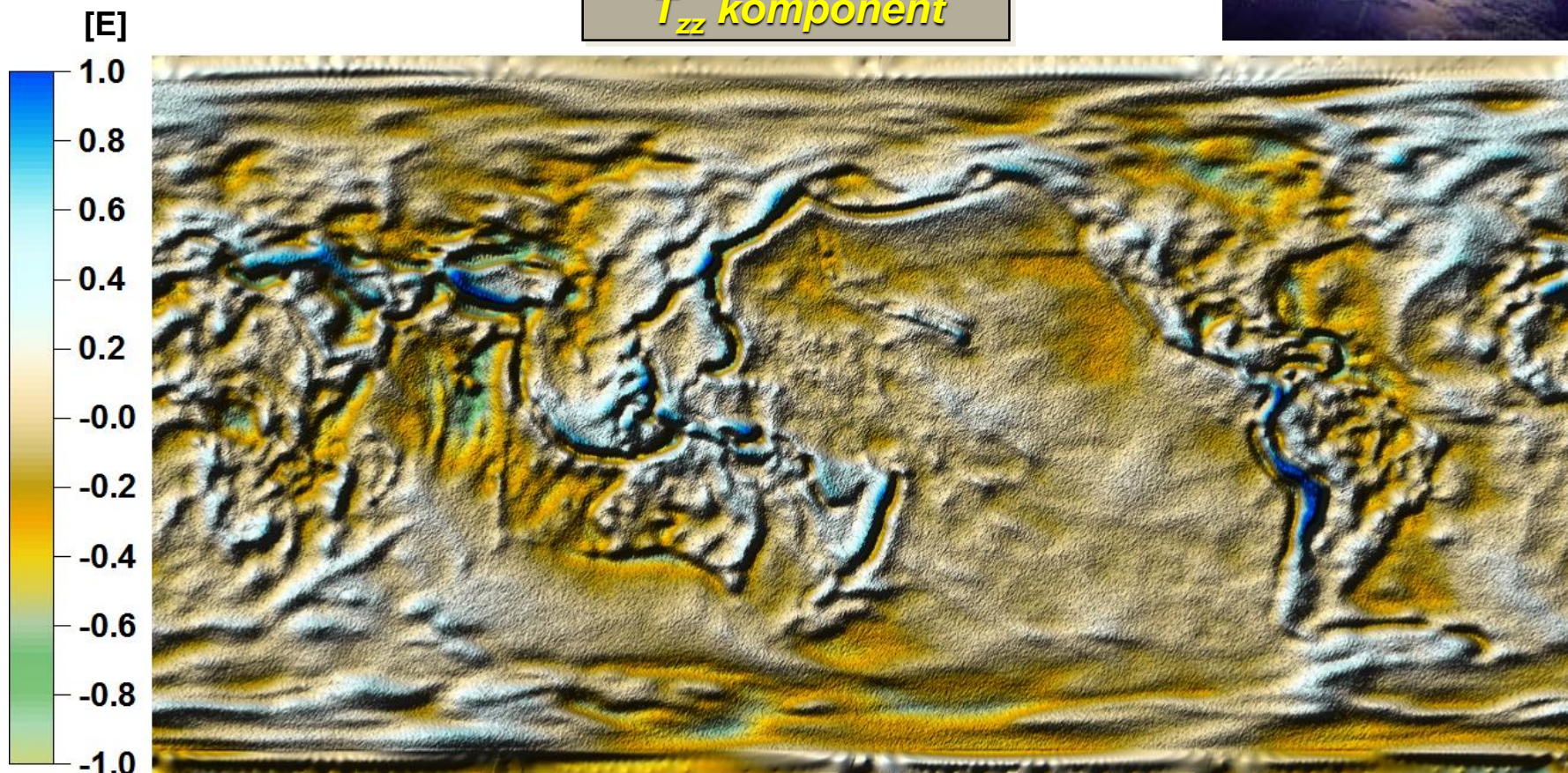
GOCE

Gravity field and Ocean Circulation Explorer
(ESA)

- meria komponenty tiažového tenzora (druhé derivácie)



T_{zz} komponent

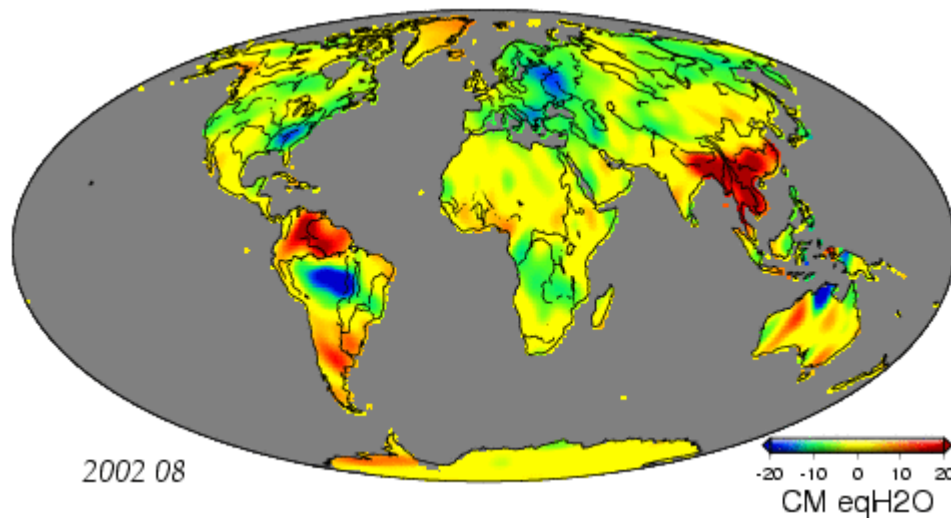
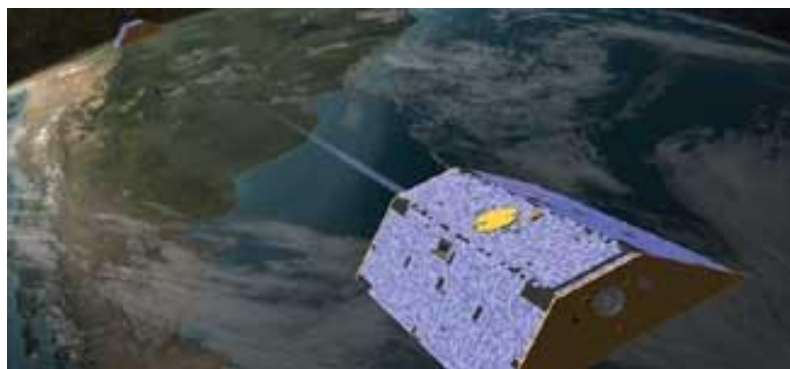


Monitorovanie variácii tiažového poľa

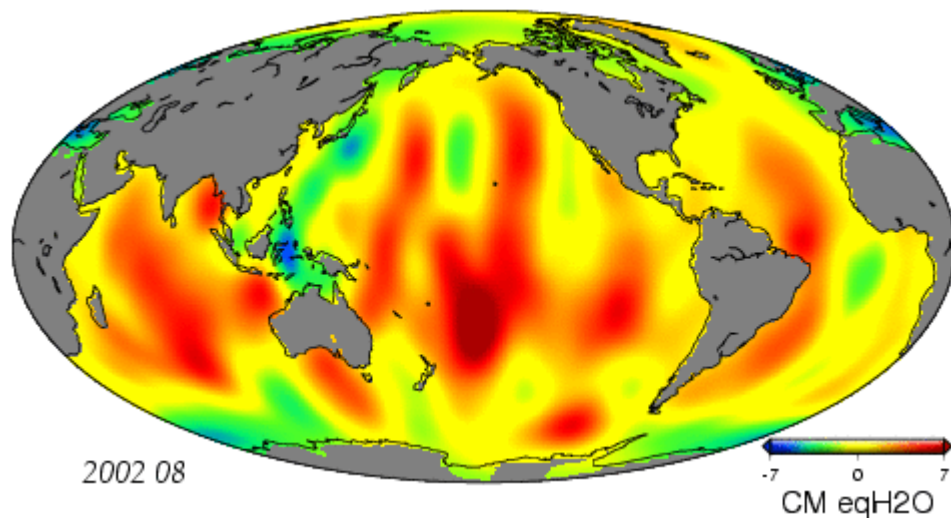
GRACE

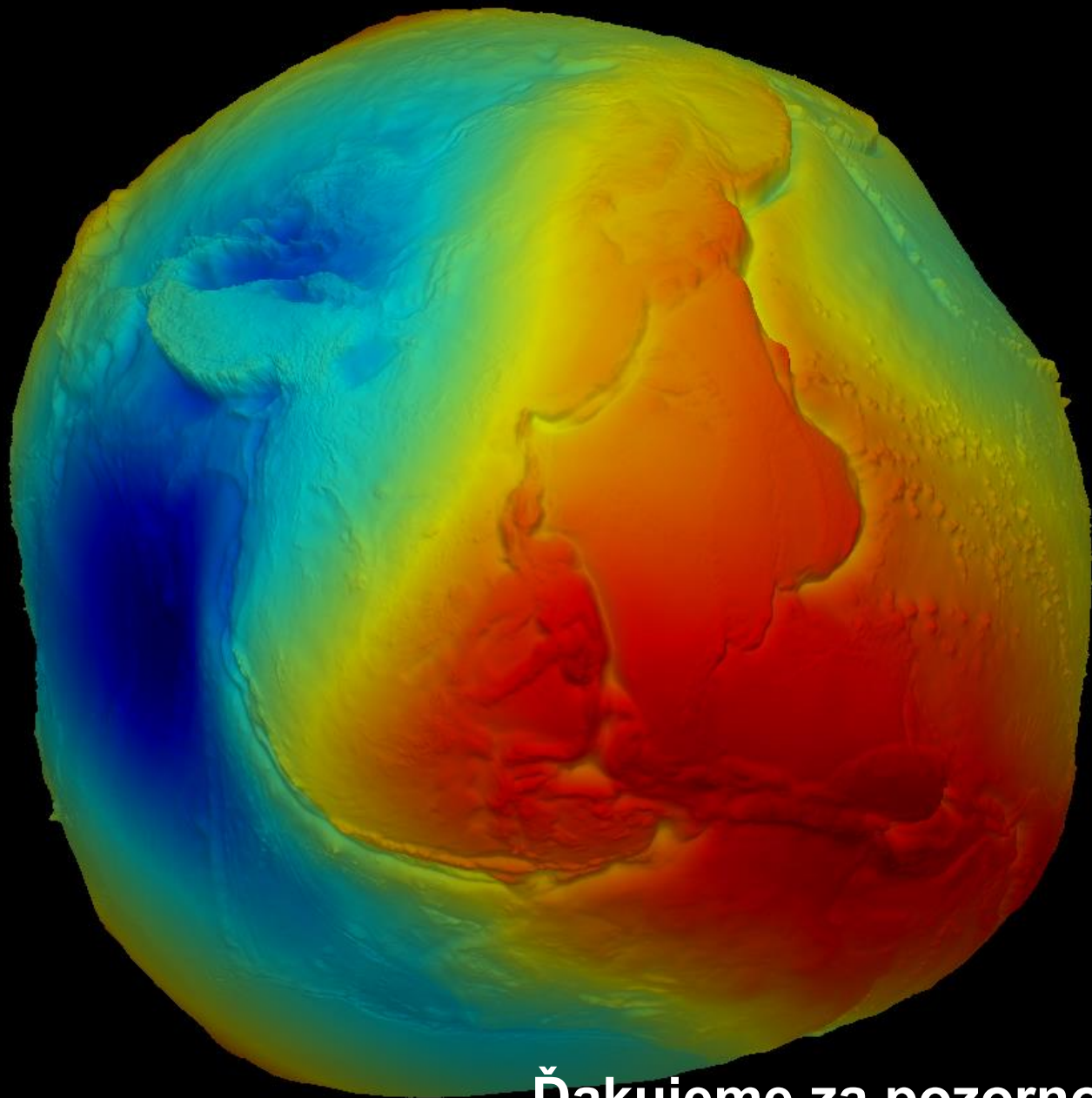
Gravity Recovery and Climate Experiment

- dvojica satelitov monitorujúcich časové variácie tiažové pole Zeme



(zdroj: NASA)





Ďakujeme za pozornosť!