Kanonický tvar úlohy lineárneho programovania a simplexový algoritmus

Martin Knor

Výťah zo skrípt: Martin Knor, Lineárna a nelineárna optimalixácia, SvF STU, Bratislava, 2008 (submitted).

1 LINEÁRNE PROGRAMOVANIE

Definície

Úloha lineárneho programovania je optimalizačný problém, ktorý má nasledujúce vlastnosti:

(1) Optimalizuje (a to buď maximalizuje, alebo minimalizuje) **lineárnu účelovú funkciu** viacerých premenných.
(2) Premenné, ktoré sa vyskytujú v účelovej funkcii, musia spĺňať dané **lineárne ohraničenia**. Pritom každé ohraničenie je buď rovnicou, alebo neostrou nerovnicou, čiže v ohraničeniach nemôžu byť ostré nerovnice.
(3) Premenné môžu nadobúdať reálne hodnoty, avšak na niektoré z nich môže byť kladená podmienka, že musia byť nezáporné.

Podľa predchádzajúceho, úloha lineárneho programovania má tvar

$$\begin{aligned} & \text{opt}\, z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \\ \text{ak platí}\quad & a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n \ \Box_1\, b_1 \\ & a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n \ \Box_2\, b_2 \\ & \qquad \vdots \\ & a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \ldots + a_{m,n}x_n \Box_m\, b_m \\ & \text{pričom } x_i \geq 0 \text{ pre } i \in I, \text{ kde } I \subseteq \{1, \ldots, n\} \end{aligned}$$

Tu „opt“ je „max“, alebo „min“; každý symbol „$\Box_i$“ je buď „$=$“, alebo „$\leq$“, alebo „$\geq$“; $x_1, \ldots, x_n$ sú premenné; $c_1, \ldots c_n$, $a_{1,1}, \ldots, a_{m,n}$ a $b_1, \ldots, b_m$ sú reálne čísla.

Prípustné riešenie úlohy lineárneho programovania je taká n-tica premenných, ktorá spĺňa všetky ohraničenia. Pre maximalizačný (minimalizačný) problém je **optimálne riešenie** také, ktoré je prípustné, a naviac spomedzi všetkých prípustných riešení práve v tomto nadobúda účelová funkcia najväčšiu (najmenšiu) hodnotu.

Úvodné príklady

Uvedieme tri príklady úlohy lineárneho programovania. Tieto príklady uvádzame vo všeobecnej forme, pretože v konkrétnom tvare ich budeme rozoberať v kapitole 3.

Príklad 1.1. Predpokladajme, že podnik vyrába tovary $T_1, T_2, \dots T_n$ zo surovín $S_1, S_2, \dots, S_m$, pričom každý týždeň je k dispozícii b_i jednotiek suroviny S_i. Pri výrobe jednej jednotky tovaru T_j sa spotrebuje $a_{i,j}$ jednotiek suroviny S_i, pričom $1 \le i \le m$ a $1 \le j \le n$. Zostrojte matematický model, ktorý maximalizuje zisk podniku, ak zisk z výroby jednej jednotky tovaru T_j je c_j.

Riešenie. Ak označíme symbolom x_j počet jednotiek tovaru T_j, ktoré má podnik vyrábať, tak matematickým modelom je

$$\begin{array}{rl} & \max z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\ \text{ak} & a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n \le b_1 \\ & a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n \le b_2 \\ & \vdots \\ & a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \ldots + a_{m,n}x_n \le b_m \\ & \text{kde} \quad x_1, x_2 \ldots x_n \ge 0 \end{array} \qquad \square$$

Príklad 1.2. Poľnohospodársky podnik chce zostaviť kŕmnu zmes pre kravy. Vie sa, že krava má denne skonzumovať látky $L_1, L_2, \dots, L_m$, pričom minimálna spotreba i-tej látky na kravu je b_i-jednotiek. K dispozícii sú krmivá $K_1, K_2, \dots, K_n$, pričom v jednom kilograme krmiva K_j je $a_{i,j}$ jednotiek látky L_i ($1 \le i \le m$ a $1 \le j \le n$). Zostrojte matematický model, ktorý minimalizuje náklady podniku, ak cena jedného kilogramu krmiva K_j je c_j.

Riešenie. Ak označíme symbolom x_j počet kilogramov krmiva K_j, ktoré má podnik nakupovať, tak matematickým modelom je

$$\begin{array}{rl} & \min z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\ \text{ak} & a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n \ge b_1 \\ & a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n \ge b_2 \\ & \vdots \\ & a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \ldots + a_{m,n}x_n \ge b_m \\ & \text{kde} \quad x_i, x_2 \ldots x_n \ge 0 \end{array} \qquad \square$$

Príklad 1.3 (Dopravná úloha). Pre istý tovar máme k dispozícii m dodávateľských miest $D_1, D_2, \dots, D_m$ a n odberateľských staníc $S_1, S_2, \dots, S_n$. Dodávatelia majú daný tovar v množstvách $d_1, d_2, \dots, d_m$ a spotrebitelia ho žiadajú v množstvách $s_1, s_2, \dots, s_n$. Vieme, že cena za prepravu jednej jednotky tovaru od dodávateľa D_i k spotrebiteľovi S_j je $c_{i,j}$. Zostavte matematický model minimalizujúci náklady a zabezpečujúci požiadavky všetkých odberateľov.

Riešenie. Označme symbolom $x_{i,j}$ počet jednotiek tovaru prepraveného od dodávateľa D_i k spotrebiteľovi S_j. Potom matematickým modelom je

$$\min z = (c_{1,1}x_{1,1} + \cdots + c_{1,n}x_{1,n}) + (c_{2,1}x_{2,1} + \cdots + c_{2,n}x_{2,n}) + \\ + \ldots + (c_{m,1}x_{m,1} + \cdots + c_{m,n}x_{m,n})$$

$$\begin{array}{rl} \text{ak} & x_{1,1}+ x_{1,2}+ \ldots + x_{1,n} \le d_1 \\ & \vdots \\ & x_{m,1}+ x_{m,2}+ \ldots + x_{m,n} \le d_m \\ & x_{1,1}+ x_{2,1}+ \ldots + x_{m,1} = s_1 \\ & \vdots \\ & x_{1,n}+ x_{2,n}+ \ldots + x_{m,n} = s_n \\ & \text{kde všetky} \quad x_{i,j} \ge 0 \qquad \square \end{array}$$

Grafické riešenie

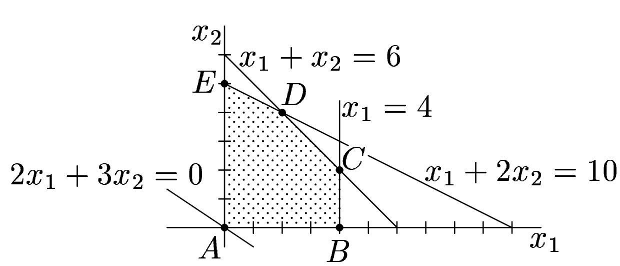
Ak máme v úlohe lineárneho programovania len dve premenné, povedzme x_1 a x_2, potom možno túto úlohu riešiť graficky v rovine s osami x_1 a x_2.

Postup vysvetlíme na nasledujúcom príklade.

Príklad 1.4. Vyriešte úlohu lineárneho programovania

$$\begin{array}{rl} & \max z = 2x_1 + 3x_2 \\ \text{ak} & x_1 + 2x_2 \le 10 \\ & x_1 + x_2 \le 6 \\ & x_1 \le 4 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{array}$$

Riešenie. Keďže sú všetky ohraničenia lineárne, je jednoduché nájsť množinu prípustných riešení, pozri vyšrafovanú časť na Obrázku 1.



Obrázok 1

Účelová funkcia je $z = 2x_1 + 3x_2$. Teda našu úlohu vyriešime, keď zostrojíme priamku rovnobežnú s $2x_1 + 3x_2 = 0$, ktorá sa „zhora“ dotýka vyšrafovanej oblasti. Bod dotyku je potom optimálnym riešením.

Všimnime si, že takto zostrojená rovnobežka musí prechádzať aspoň jedným vrcholom vyšrafovanej oblasti (bodom, v ktorom sa pretínajú dve „hraničné“ priamky). Teda riešenie môžeme nájsť aj tak, že určíme súradnice všetkých vrcholov vyšrafovanej oblasti a následne zistíme, v ktorom z nich je hodnota účelovej funkcie najväčšia.

V našom príklade má vyšrafovaná oblasť len päť vrcholov, ktorými sú $A = (0,0)$, $B = (4,0)$, $C = (4,2)$, $D = (2,4)$ a $E = (0,5)$. Keďže

$$
\begin{aligned}
2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 &= 0 \\
2 \cdot 4 + 3 \cdot 0 &= 8 \\
2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 &= 14 \\
2 \cdot 2 + 3 \cdot 4 &= 16 \\
2 \cdot 0 + 3 \cdot 5 &= 15
\end{aligned}
$$

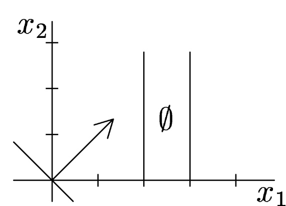
tak optimálne riešenie sa nadobúda pre $x_1 = 2$ a $x_2 = 4$, pričom optimálna hodnota účelovej funkcie je $z = 16$. $\square$

Typy riešení úlohy lineárneho programovania

Úloha lineárneho programovania môže mať štyri zásadne rôzne typy riešení. V nasledujúcom uvádzame príklad pre každý z týchto typov. Keďže tieto príklady majú len dve premenné, tak pre každý príklad zobrazíme množinu prípustných riešení (šrafovaná oblasť) a optimálne riešenia (tučné body).

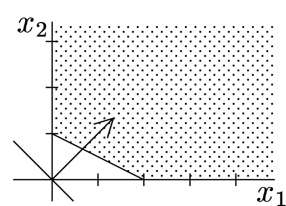
(1) **Úloha nemá prípustné riešenie**.

$$
\begin{aligned}
&\max z = x_1 + x_2 \\
&\text{ak} \quad x_1 \geq 3 \\
&\qquad\;\; x_1 \leq 2 \\
&\qquad x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$



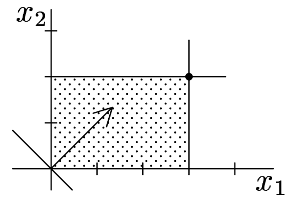
(2) **Úloha má prípustné riešenie, avšak nemá optimálne riešenie**.

$$
\begin{aligned}
&\max z = x_1 + x_2 \\
&\text{ak} \quad x_1 + 2x_2 \geq 2 \\
&\qquad x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$



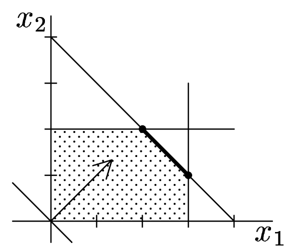
(3) **Úloha má jediné optimálne riešenie.**

$$\begin{aligned} &\max z = x_1 + x_2 \\ \text{ak} \quad & x_1 \leq 3 \\ & x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



(4) **Úloha má nekonečne veľa optimálnych riešení.**

$$\begin{aligned} &\max z = x_1 + x_2 \\ \text{ak} \quad & x_1 \leq 3 \\ & x_2 \leq 2 \\ & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



Všimnime si, že hoci sú koeficienty úlohy lineárneho programovania zväčša celočíselné, riešenia môžu obsahovať racionálne čísla. To znamená, že lineárne programovanie sa používa vtedy, keď očakávame veľké hodnoty premenných, alebo keď očakávame (a vieme interpretovať) racionálne riešenie. Ak riešením musia byť celé čísla, tak musíme použiť metódy celočíselného programovania (pozri kapitolu 6), no aj tieto metódy využívajú (racionálne) riešenie zodpovedajúcej úlohy lineárneho programovania.

Transformácia úlohy lineárneho programovania

V nasledujúcej kapitole opíšeme algoritmus riešiaci úlohu lineárneho programovania. Tento algoritmus rieši úlohu, ktorá je v kanonickom tvare. Preto potrebujeme tento tvar zaviesť. **Kanonický tvar** úlohy lineárneho programovania je maximalizačný problém

$$\begin{aligned} &\max z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\ \text{ak} \quad & a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ & a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ & \vdots \\ & a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \ldots + a_{m,n}x_n = b_m \\ & x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0 \end{aligned}$$

v ktorom $b_1, b_2, \dots, b_m \geq 0$.

Každá úloha lineárneho programovania sa dá transformovať na s ňou ekvivalentnú úlohu v kanonickom tvare, pričom stačí použiť štyri pravidlá:

(1) **Zmena problému na maximalizačný**.
Ak má účelová funkcia tvar $\min z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$, tak ekvivalentná formulácia je

$$\max(-z) = (-c_1)x_1 + (-c_2)x_2 + \cdots + (-c_n)x_n.$$

(2) **Zmena nerovníc na rovnice**.
Do každej nerovnice pridáme jednu novú (pre každú nerovnicu inú) premennú. Nerovnicu

$$\begin{array}{ll} a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \cdots + a_{i,n}x_n \geq b_i & \text{nahradíme rovnicou} \\ a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \cdots + a_{i,n}x_n - v = b_i, & \qquad v \geq 0, \end{array}$$

zatiaľ čo nerovnicu

$$\begin{array}{ll} a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \cdots + a_{i,n}x_n \leq b_i & \text{nahradíme rovnicou} \\ a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \cdots + a_{i,n}x_n + v = b_i, & \qquad v \geq 0. \end{array}$$

(3) **Zmena koeficientov na pravej strane na nezáporné**.
Ak je niektorý z týchto koeficientov záporný, tak prenásobíme príslušnú rovnicu konštantou -1.

(4) **Zmena premenných na nezáporné**.
Ak premená x_i môže nadobúdať aj záporné hodnoty, tak každý jej výskyt v úlohe nahradíme výrazom $(x_i^+ - x_i^-)$ a pridáme ohraničenia $x_i^+ \geq 0$ a $x_i^- \geq 0$.

Keď prevedieme všetky uvedené transformácie, dostaneme novú úlohu lineárneho programovania, pričom táto úloha je ekvivalentná s pôvodnou. To znamená, že z optimálneho riešenia ľubovoľnej z týchto úloh vieme (v podstate okamžite) zostrojiť optimálne riešenie druhej.

Príklad 1.5. Transformujte nasledujúcu úlohu lineárneho programovania na úlohu v kanonickom tvare.

$$\min z = 2x_1 - 3x_2 + x_3$$

$$\begin{array}{lrcl} \text{ak} & x_1 + x_2 - 2x_3 & \geq & 4 \\ & x_1 + x_2 & = & -2 \\ & x_1 - 2x_2 + x_3 & \leq & 6 \end{array}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Riešenie. Aplikáciou pravidiel (1), (2), (3) a (4) okamžite dostávame úlohu lineárneho programovania v tvare:

$$
\begin{aligned}
\max(-z) &= -2x_1 + 3x_2 - x_3^+ + x_3^- \\
\text{ak} \quad x_1 + x_2 - 2x_3^+ + 2x_3^- - v_1 &= 4 \\
-x_1 - x_2 &= 2 \\
x_1 - 2x_2 + x_3^+ - x_3^- + v_2 &= 6 \\
x_1, x_2, x_3^+, x_3^-, v_1, v_2 &\geq 0 \quad \square
\end{aligned}
$$

Cvičenia

Cvičenie 1.1. Graficky vyriešte úlohy lineárneho programovania

a)
$$
\begin{aligned}
\max z &= x_1 + x_2 \\
\text{ak} \quad x_1 + x_2 &\leq 3 \\
x_1 - x_2 &\geq 4 \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

b)
$$
\begin{aligned}
\max z &= 4x_1 + x_2 \\
\text{ak} \quad 5x_1 + x_2 &\leq 9 \\
x_1 + 2x_2 &\leq 5 \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

c)
$$
\begin{aligned}
\max z &= -x_1 + 2x_2 \\
\text{ak} \quad x_1 - x_2 &\leq 2 \\
x_1 + x_2 &\geq 2 \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

d)
$$
\begin{aligned}
\max z &= 3x_1 + x_2 \\
\text{ak} \quad 3x_1 + 2x_2 &\leq 9 \\
2x_1 + 3x_2 &\leq 9 \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

e)
$$
\begin{aligned}
\min z &= -x_1 + 3x_2 \\
\text{ak} \quad -x_1 + 2x_2 &\leq 1 \\
x_1 - 3x_2 &\leq 3 \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

f)
$$
\begin{aligned}
\min z &= 3x_1 + 5x_2 \\
\text{ak} \quad 3x_1 + 4x_2 &\geq 39 \\
3x_1 + 5x_2 &\geq 45 \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

g)
$$
\begin{aligned}
\max z &= 2x_1 - 8x_2 \\
\text{ak} \quad -4x_1 + 3x_2 &\leq 12 \\
x_1 - 4x_2 &\leq 4 \\
2x_1 + 3x_2 &\leq 12 \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

h)
$$
\begin{aligned}
\min z &= x_1 - x_2 \\
\text{ak} \quad x_1 + x_2 &\leq 6 \\
x_1 - x_2 &\geq 0 \\
-x_1 + x_2 &\geq 3 \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

CVIČENIE 1.2. Graficky vyriešte úlohu lineárneho programovania

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\begin{array}{lrcl}
\text{ak} & x_1 + x_2 \geq 6 & \qquad & 2x_1 + x_2 \geq 9 \\
& 3x_1 + x_2 \geq 11 & & x_1 + 2x_2 \geq 8 \\
& x_1 + 3x_2 \geq 9 & & x_1\,,\ x_2 \geq 0
\end{array}$$

CVIČENIE 1.3. Nadnárodná korporácia vyrába limuzíny a terénne autá. Je známe, že jej typickí zákazníci sú muži a ženy s vysokým príjmom. Vedenie spoločnosti sa rozhodlo, že spustí masívnu reklamnú kampaň v televízii, aby zvýšilo predaj svojich vozidiel. Ich reklamné 1-minútové spoty sa budú púšťať v komédiách a v športových prenosoch. Každú reklamu v komédii bude vidieť 70 tisíc žien s vysokým príjmom a 20 tisíc mužov s vysokým príjmom. Každú reklamu počas športového prenosu bude vidieť 20 tisíc žien s vysokým príjmom a 120 tisíc mužov s vysokým príjmom. Minútový spot počas komédie stojí 10 000 dolárov a minútový spot počas športového prenosu stojí 20 000 dolárov. Spoločnosť chce mať istotu, že jej reklamné spoty bude vidieť aspoň 280 tisíc žien s vysokým príjmom a aspoň 240 tisíc mužov s vysokým príjmom (keď potenciálny zákazník vidí dva spoty, počíta sa za dvoch). Sformulujte úlohu lineárneho programovania, ktorá rieši nároky firmy a na výstupe dá rozpis reklám minimalizujúci ich cenu. Následne graficky vyriešte túto úlohu.

CVIČENIE 1.4. Transformujte nasledujúcu úlohu lineárneho programovania na úlohu v kanonickom tvare

$$\min z = x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5$$

$$\begin{array}{ll}
\text{ak} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 5 \\
& 2x_1 - 3x_2 + 6x_4 = -8 \\
& 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 6x_5 \leq 60 \\
& 6x_1 + 7x_2 - x_4 \leq 45 \\
& 2x_1 + x_4 + 5x_5 \geq 7
\end{array}$$

$$x_1, x_2, x_4 \geq 0 \qquad x_3, x_5 \in \mathbb{R}$$

2 SIMPLEXOVÝ ALGORITMUS

Simplexový algoritmus je postup, ktorým sa dá vyriešiť ľubovoľná úloha lineárneho programovania. Vysvetlíme si tento algoritmus na príklade.

PRÍKLAD 2.1. Vyriešte úlohu lineárneho programovania

$$
\begin{aligned}
&\max z = 2x_1 + 3x_2 \\
&\text{ak} \quad x_1 + 2x_2 \le 10 \\
&\qquad x_1 + x_2 \le 6 \\
&\qquad x_1 \le 4 \\
&\qquad x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

RIEŠENIE. Najprv transformujeme problém na úlohu lineárneho programovania v kanonickom tvare, čiže pridáme nové premenné $v_1, v_2, v_3 \ge 0$.

$$
\begin{aligned}
&\max z = 2x_1 + 3x_2 \\
&\text{ak} \quad x_1 + 2x_2 + v_1 = 10 \\
&\qquad x_1 + x_2 + v_2 = 6 \\
&\qquad x_1 + v_3 = 4 \\
&\qquad x_1, x_2, v_1, v_2, v_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

Teraz zapíšeme **úvodnú simplexovú tabuľku**. V prvom riadku tejto tabuľky budú zoradené všetky premenné. Do riadkov v strednej časti tabuľky zapíšeme koeficienty rovníc, a to tak, že každý koeficient bude v stĺpci tej premennej, pri ktorej stojí. Na pravej strane za čiarou budú pravé strany príslušných rovníc. Na ľavú stranu zapíšeme premenné, ktoré sú eliminované, čiže v im zodpovedajúcom stĺpci je len jeden koeficient nenulový a tento má hodnotu 1 (premenná sa vyskytuje v tom riadku, v ktorom je hodnota 1). Premenné na ľavej strane nazývame **bázické**. Do spodného riadku pod čiaru zapíšeme koeficienty účelovej funkcie v tvare

$$z - 2x_1 - 3x_2 = \text{„vhodná hodnota“}.$$

Túto tabuľku interpretujeme tak, že všetky premenné s výnimkou bázických majú hodnotu nula. Hodnota bázických premenných je na pravej strane. To znamená, že v našej úvodnej tabuľke máme $v_1 = 10$, $v_2 = 6$, $v_3 = 4$, $x_1 = 0$ a $x_2 = 0$. Keďže x_1 aj x_2 majú hodnotu 0, tak „vhodná hodnota“ na pravej strane posledného riadku úvodnej tabuľky bude 0.

	x_1	x_2	v_1	v_2	v_3	
v_1	1	2	1	0	0	10
v_2	1	1	0	1	0	6
v_3	1	0	0	0	1	4
z	-2	-3	0	0	0	0

Test optimálnosti. Ak sú všetky koeficienty v poslednom riadku simplexovej tabuľky nezáporné, tak je súčasné riešenie optimálne. V takom prípade je na pravej strane posledného riadku optimálna hodnota účelovej funkcie.

Ak súčasné riešenie nie je optimálne, tak si zvolíme jeden zo stĺpcov, v ktorom sa v poslednom riadku vyskytuje záporné číslo. V našom príklade si vyberieme druhý stĺpec (stĺpec premennej x_2). Teraz nájdeme minimum zo zlomkov $\frac{b_i}{a_{i,2}}$, čiže $\min\{\frac{10}{2}, \frac{6}{1}\}$ (koeficienty $a_{i,2} \leq 0$ neuvažujeme). Keďže minimom je $\frac{10}{2} = 5$, koeficient 2 v prvom riadku zakrúžkujeme. Tento koeficient sa nazýva **pivot**.

Teraz vyeliminujeme čísla v druhom stĺpci ekvivalentnými riadkovými operáciami (Gaussovou eliminačnou metódou) tak, aby sa pivot zmenil na 1. Všimnime si, že ak je pivotom $a_{i,j}$, na pravej strane i-teho riadku je b_i a prvok posledného riadku v j-tom stĺpci je $-c_j$, tak hodnota účelovej funkcie sa zvýši o

$$c_j \cdot \frac{b_i}{a_{i,j}},$$

čiže v našom prípade o $3 \cdot \frac{10}{2} = 15$. Dostávame novú simplexovú tabuľku, v ktorej sú hodnoty bázických premenných $x_2 = 5$, $v_2 = 1$ a $v_3 = 4$.

	x_1	x_2	v_1	v_2	v_3	
x_2	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	0	5
v_2	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	0	1
v_3	1	0	0	0	1	4
z	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{4}$	0	0	15

V tejto tabuľke je už len jeden stĺpec so zápornou hodnotou v poslednom riadku. Keďže $\min\{\frac{5}{1/2}, \frac{1}{1/2}, \frac{4}{1}\} = \frac{1}{1/2}$, tak pivot leží v druhom riadku. Po vyeliminovaní prvého stĺpca dostávame

	x_1	x_2	v_1	v_2	v_3	
x_2	0	1	1	-1	0	4
x_1	1	0	-1	2	0	2
v_3	0	0	1	-2	1	2
z	0	0	1	1	0	16

Keďže koeficienty v poslednom riadku sú nezáporné, získaná tabuľka je optimálna. Teda optimálnym riešením našej úlohy je $x_1 = 2$, $x_2 = 4$ $(v_3 = 2)$ a $z = 16$. □

Poznamenajme, že Príklad 2.1 je totožný s Príkladom 1.1. Tento sme v minulej kapitole vyriešili graficky. Všimnime si, že úvodná simplexová tabuľka zodpovedá bodu A z Obrázku 1, druhá tabuľka bodu E a optimálna tabuľka bodu D. V skutočnosti toto je princíp práce simplexovej metódy. Prechádzaním od jednej simplexovej tabuľky k ďalšej vlastne „chodíme“ po hranách akéhosi konvexného telesa v priestore (v našom prípade bol tento priestor dvojrozmerný), a jednotlivé stavy algoritmu (tabuľky) zodpovedajú vrcholom tohoto telesa.

V nasledujúcom príklade si ukážeme, ako sa dá rozpoznať, že daná úloha má nekonečne veľa riešení.

Príklad 2.2. Vyriešte úlohu lineárneho programovania

$$\begin{aligned} \max z &= x_1 + x_2 \\ \text{ak} \quad x_1 + x_2 &\leq 4 \\ x_1 \quad &\leq 3 \\ x_2 &\leq 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Riešenie. Pridaním nových premenných $v_1, v_2, v_3 \geq 0$ prevedieme úlohu na kanonický tvar a postupom, ktorý sme opísali v Príklade 2.1, zostrojíme úvodnú simplexovú tabuľku

	x_1	x_2	v_1	v_2	v_3	
v_1	1	1	1	0	0	4
v_2	1	0	0	1	0	3
v_3	0	1	0	0	1	2
z	-1	-1	0	0	0	0

V poslednom riadku máme dve záporné čísla, takže máme dve možnosti na výber stĺpca. Vyberme si prvý. Keďže $\min\{\frac{4}{1}, \frac{3}{1}\} = \frac{3}{1}$, pivot je v druhom riadku. Eliminovaním ostatných prvkov v prvom stĺpci dostávame

	x_1	x_2	v_1	v_2	v_3	
v_1	0	1	1	-1	0	1
x_1	1	0	0	1	0	3
v_3	0	1	0	0	1	2
z	0	-1	0	1	0	3

Teraz máme v poslednom riadku jediné záporné číslo, takže si zvolíme druhý stĺpec. Keďže $\min\{\frac{1}{1}, \frac{2}{1}\} = \frac{1}{1}$, pivot je v prvom riadku. Eliminovaním ostatných prvkov v druhom stĺpci dostaneme

	x_1	x_2	v_1	v_2	v_3	
x_2	0	1	1	-1	0	1
x_1	1	0	0	1	0	3
v_3	0	0	-1	1	1	1
z	0	0	1	0	0	4

Táto tabuľka je optimálna, avšak v poslednom riadku máme 0 aj v stĺpci nebázickej premennej v_2. Toto nám indikuje, že úloha má nekonečne veľa riešení. To preto, lebo môžeme zaviesť v_2 medzi bázické premenné a hodnota účelovej funkcie sa zvýši o $c_j \cdot \frac{b_i}{a_{i,j}} = 0 \cdot \frac{b_i}{a_{i,j}} = 0$. Keďže $\min\{\frac{3}{1}, \frac{1}{1}\} = \frac{1}{1}$, náš pivot je v treťom riadku. Eliminovaním prvkov vo štvrtom stĺpci dostávame ďalšie optimálne riešenie

	x_1	x_2	v_1	v_2	v_3	
x_2	0	1	0	0	1	2
x_1	1	0	1	0	-1	2
v_2	0	0	-1	1	1	1
z	0	0	1	0	0	4

V prvom optimálnom riešení sme mali $x_1 = 3$ a $x_2 = 1$, zatiaľ čo druhým optimálnym riešením je $x_1 = 2$ a $x_2 = 2$. $\square$

Poznamenajme, že ak je $A_1, A_2, \ldots, A_k$ úplnou množinou bázických riešení úlohy lineárneho programovania, tak prípustné riešenie A je optimálnym práve vtedy, keď je **konvexnou kombináciou** riešení $A_1, A_2, \ldots, A_k$. To znamená, že A je optimálnym riešením práve vtedy, keď existujú čísla $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ také, že

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot A_i = A \qquad\qquad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$$

a $0 \leq \lambda_i \leq 1$ pre každé $i = 1, 2, \ldots, k$.

Teraz si ukážeme správanie sa simplexového algoritmu na úlohe, ktorá má prípustné, avšak nemá optimálne riešenie.

PRÍKLAD 2.3. Vyriešte úlohu lineárneho programovania

$$\begin{aligned} \max z &= x_1 + x_2 \\ \text{ak} \qquad x_1 - x_2 &\leq 2 \\ -x_1 + x_2 &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

RIEŠENIE. Pridaním nových premenných $v_1, v_2 \geq 0$ prevedieme úlohu na kanonický tvar a zostrojíme úvodnú simplexovú tabuľku

	x_1	x_2	v_1	v_2	
v_1	1	-1	1	0	2
v_2	-1	1	0	1	3
z	-1	-1	0	0	0

V poslednom riadku máme dve záporné čísla, takže máme dve možnosti na výber stĺpca. Vyberieme si prvý. Keďže v tomto stĺpci je jediné kladné číslo, toto číslo je pivotom. Eliminovaním ostatných prvkov v prvom stĺpci dostávame

	x_1	x_2	v_1	v_2	
x_1	1	-1	1	0	2
v_2	0	0	1	1	5
z	0	-2	1	0	2

Táto tabuľka nie je optimálna, lebo v poslednom riadku je v druhom stĺpci záporné číslo. Avšak v tomto stĺpci nevieme vybrať pivota, pretože nemáme k dispozícii kladný koeficient. To nám indikuje, že hoci má daná úloha prípustné riešenie, nemá optimálne riešenie. □

Úlohy lineárneho programovania, ktoré sme prezentovali v Príkladoch 2.1, 2.2 a 2.3, sú veľmi špeciálne. Vo všetkých troch prípadoch sme zavedením nových premenných v_1, v_2 a v_3 ihneď získali bázu a prípustné riešenie, v ktorom bola hodnota všetkých pôvodných premenných 0.

Ak zavedením nových premenných nezískame bázu, tak do úlohy zavedieme **umelé premenné**. Pridanie týchto premenných môže prekrútiť význam pôvodných rovníc, a preto spočiatku musíme minimalizovať novú účelovú funkciu, ktorá je súčtom umelých premenných. Keď na tento súčet aplikujeme simplexový algoritmus a mimimum novej účelovej funkcie bude 0, získame prípustné riešenie. Môžeme vynechať novú účelovú funkciu s umelými premennými a pokračovať klasickým simplexovým algoritmom. Ak je však minimum novej účelovej funkcie (ktorá je súčtom umelých premenných) väčšie ako 0, tak úloha nemá prípustné riešenie.

Vysvetlíme si tento postup na príklade.

PRÍKLAD 2.4. Vyriešte úlohu lineárneho programovania

$$\max z = 2x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4$$

$$\begin{aligned} \text{ak} \quad 2x_1 + 4x_2 + \ \ x_3 \qquad\quad &\le 100 \\ x_1 \qquad\ + 5x_3 + \ \ x_4 &\le 200 \\ x_2 + 4x_3 + 2x_4 &= 200 \\ x_1 + \ \ x_2 \qquad\ + \ \ x_4 &= 150 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$$

RIEŠENIE. Najprv transformujeme problém na kanonický tvar pridaním nových premenných. Získame ohraničenia

$$\begin{array}{rrrrrrl} 2x_1+ & 4x_2+ & x_3 & & +v_1 & & =100 \\ x_1 & & +5x_3+ & x_4 & & +v_2 & =200 \\ & x_2+ & 4x_3+ & 2x_4 & & & =200 \\ x_1+ & x_2 & + & x_4 & & & =150 \end{array}$$

V prvých dvoch riadkoch máme premenné v_1 a v_2, ktoré sú vhodné na úvodnú bázu. Aby sme ju skompletizovali, pridáme umelé premenné p_1 a p_2 do zvyšných dvoch riadkov

$$\begin{array}{rrrrrrrrl} 2x_1+ & 4x_2+ & x_3 & & +v_1 & & & & =100 \\ x_1 & & +5x_3+ & x_4 & & +v_2 & & & =200 \\ & x_2+ & 4x_3+ & 2x_4 & & & +p_1 & & =200 \\ x_1+ & x_2 & + & x_4 & & & & +p_2 & =150 \end{array}$$

Teraz budeme minimalizovať $q = p_1 + p_2$, čo je ekvivalentné maximalizácii výrazu $-q = -p_1 - p_2$. Keďže premenné majú byť na jednej strane rovnice (pozri začiatok riešenia Príkladu 2.1), potrebujeme tento výraz zapísať v tvare $-q + p_1 + p_2 = 0$. Problém je, že p_1 aj p_2 musia byť vyeliminované z posledného riadku. Toto možno získať určením hodnôt týchto premenných z posledných dvoch rovníc. Keďže

$$\begin{array}{rl} p_1 = & \quad - x_2 - 4x_3 - 2x_4 + 200 \qquad \text{a} \\ p_2 = & - x_1 - x_2 \quad - x_4 + 150, \qquad \text{tak platí} \\ p_1 + p_2 = & - x_1 - 2x_2 - 4x_3 - 3x_4 + 350 \end{array}$$

Dostávame úvodnú simplexovú tabuľku

	x_1	x_2	x_3	x_4	v_1	v_2	p_1	p_2	
v_1	2	4	1	0	1	0	0	0	100
v_2	1	0	5	1	0	1	0	0	200
p_1	0	1	4	2	0	0	1	0	200
p_2	1	1	0	1	0	0	0	1	150
z	-2	2	-5	-1	0	0	0	0	0
$-q$	-1	-2	-4	-3	0	0	0	0	-350

Teraz budeme pokračovať simplexovým algoritmom, pričom určujúcim je posledný riadok. V tomto riadku sú štyri záporné čísla a my si zvolíme jedno z nich, povedzme to, ktoré je vo štvrtom stĺpci (pripomeňme, že hodnota účelovej funkcie vzrastie o $c_j \cdot \frac{b_i}{a_{i,j}}$). Keďže $\min\{\frac{200}{1}, \frac{200}{2}, \frac{150}{1}\} = \frac{200}{2}$, pivot je v treťom riadku. Eliminovaním ostatných prvkov vo štvrtom stĺpci dostávame

	x_1	x_2	x_3	x_4	v_1	v_2	p_1	p_2	
v_1	2	4	1	0	1	0	0	0	100
v_2	1	$-\frac{1}{2}$	3	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	100
x_4	0	$\frac{1}{2}$	2	1	0	0	$\frac{1}{2}$	0	100
p_2	1	$\frac{1}{2}$	-2	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	1	50
z	-2	$\frac{5}{2}$	-3	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0	100
$-q$	-1	$-\frac{1}{2}$	2	0	0	0	$\frac{3}{2}$	0	-50

Teraz nájdeme pivota v prvom stĺpci, lebo v tomto stĺpci je v poslednom riadku záporné číslo. Keďže $\min\{\frac{100}{2}, \frac{100}{1}, \frac{50}{1}\} = \frac{100}{2} = \frac{50}{1}$, pivota si môžeme zvoliť buď v prvom, alebo vo štvrtom riadku. Lepšou voľbou je štvrtý riadok, lebo pri jeho výbere vypustíme z bázy poslednú umelú premennú p_2. My si však vyberieme horšiu možnosť, aby sme demonštrovali možné komplikácie simplexového algoritmu. Eliminovaním ostatných prvkov v prvom stĺpci dostávame

	x_1	x_2	x_3	x_4	v_1	v_2	p_1	p_2	
x_1	1	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0	0	50
v_2	0	$-\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	0	50
x_4	0	$\frac{1}{2}$	2	1	0	0	$\frac{1}{2}$	0	100
p_2	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	0
z	0	$\frac{13}{2}$	-2	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	200
$-q$	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	0	0

Teraz $-q$ dosiahlo teoretické maximum 0, čiže obidve umelé premenné p_1 a p_2 majú hodnotu 0. To znamená, že riešenie $x_1 = 50$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ a $x_4 = 100$ je prípustné. Nepríjemné je to, že p_2 zostalo v báze. Preto nemôžeme z tabuľky vypustiť posledný riadok a stĺpce zodpovedajúce umelým premenným p_1 a p_2. Máme problém. V ďalšom kroku „musíme" vypustiť p_2 z bázy, hoci tým narušíme štandardný postup simplexového algoritmu.

Pripomeňme, že hodnota účelovej funkcie vzrastie o $c_j \cdot \frac{b_i}{a_{i,j}}$. Z toho dôvodu si zvolíme pivot vo štvrtom riadku, v ktorom máme $b_4 = 0$. Táto voľba nám pri následnej eliminácii nezmení žiade číslo z pravej strany, takže čísla na pravej strane zostanú nezáporné. Eliminovaním tretieho stĺpca dostávame

	x_1	x_2	x_3	x_4	v_1	v_2	p_1	p_2	
x_1	1	$\frac{17}{10}$	0	0	$\frac{4}{10}$	0	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{5}$	50
v_2	0	-4	0	0	-1	1	-1	1	50
x_4	0	$-\frac{7}{10}$	0	1	$-\frac{2}{5}$	0	$\frac{1}{10}$	$-\frac{4}{5}$	100
x_3	0	$\frac{3}{5}$	1	0	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	0
z	0	$\frac{17}{10}$	0	0	$\frac{7}{5}$	0	$\frac{9}{10}$	$-\frac{4}{5}$	200
$-q$	0	0	0	0	0	0	1	1	0

Teraz sú obidve umelé premenné p_1 a p_2 mimo bázy (čo značí, že ich hodnoty sú 0), takže im zodpovedajúce stĺpce môžeme z tabuľky vypustiť a vynecháme aj posledný riadok. Dostávame tabuľku

	x_1	x_2	x_3	x_4	v_1	v_2	
x_1	1	$\frac{17}{10}$	0	0	$\frac{4}{10}$	0	50
v_2	0	-4	0	0	-1	1	50
x_4	0	$-\frac{7}{10}$	0	1	$-\frac{2}{5}$	0	100
x_3	0	$\frac{3}{5}$	1	0	$\frac{1}{5}$	0	0
z	0	$\frac{17}{10}$	0	0	$\frac{7}{5}$	0	200

V poslednom riadku sú už len nezáporné čísla, čo znamená, že riešenie $x_1 = 50$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ a $x_4 = 100$ je optimálne. $\square$

Ak je na pravej strane simplexovej tabuľky v nejakom (avšak nie v poslednom) riadku 0, tak simplexový algoritmus **degeneruje**. Toto pôsobí veľké problémy, a práve táto degenerácia má za následok, že je simplexový algoritmus v niektorých prípadoch veľmi pomalý. (Presnejšie, simplexový algoritmus je v najhoršom prípade exponenciálny.) Avšak toto je jediná nevýhoda simplexového algoritmu.

Cvičenia

Cvičenie 2.1. Vyriešte nasledujúcu úlohu lineárneho programovania graficky aj simplexovým algoritmom.

$$\begin{aligned} \max z &= x_1 + x_2 \\ \text{ak} \quad x_2 &\le 6 \\ 2x_1 + x_2 &\le 8 \\ 3x_1 + 4x_2 &\le 25 \\ x_1 &\le 7 \end{aligned}$$

Cvičenie 2.2. Vyriešte nasledujúce úlohy lineárneho programovania simplexovým algoritmom.

a)
$$\begin{aligned} \max z &= 5x_1 + x_2 + 3x_3 \\ \text{ak} \quad x_1 + 3x_2 + x_3 &\le 6 \\ 5x_1 + 6x_2 + 3x_3 &\le 15 \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} \max z &= 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\ \text{ak} \quad 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 &\le 12{,}000 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 &\le 8000 \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

c) $\min z = -3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4$

$$\begin{aligned} \text{ak}\quad 2x_1 + x_2 + 3x_3 \phantom{{}+x_4} &= 7 \\ x_1 \phantom{{}+x_2} + 2x_3 + x_4 &= 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

d) $\max z = 4x_1 + 4x_2 + 6x_3$

$$\begin{aligned} \text{ak}\quad x_1 \phantom{{}+2x_2} + 3x_3 &\leq 5 \\ x_1 + 2x_2 \phantom{{}+3x_3} &\geq 2 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Cvičenie 2.3. Vyriešte nasledujúce úlohy lineárneho programovania simplexovým algoritmom

a) $\min z = x_1 - x_2 + x_3$

$$\begin{aligned} \text{ak}\quad 2x_1 \phantom{{}-3x_2} + x_3 &\leq 10 \\ x_1 \phantom{{}-3x_2} + 4x_3 &\leq 9 \\ x_1 - 3x_2 \phantom{{}+4x_3} &= 1 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

b) $\min z = 2x_1 + 3x_2 + x_3$

$$\begin{aligned} \text{ak}\quad x_1 - 4x_2 + x_3 &\leq 2 \\ x_1 + 3x_2 \phantom{{}+3x_3} &\leq 3 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &\geq 3 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

c) $\max z = 7x_1 + 5x_2 + 3x_3$

$$\begin{aligned} \text{ak}\quad 2x_1 + x_2 \phantom{{}+x_3} &\leq 5 \\ x_1 \phantom{{}+2x_2} + x_3 &= 4 \\ x_1 + 2x_2 \phantom{{}+x_3} &\geq 7 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

d) $\max z = x_1 - x_2 + x_3$

$$\begin{aligned} \text{ak}\quad x_1 + x_2 - 3x_3 &\geq 2 \\ x_1 + x_2 \phantom{{}-3x_3} &\leq 5 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 &\leq 4 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Cvičenie 2.4. Spoločnosť vyrába štyri druhy výrobkov a výroba každého z nich si vyžaduje tri typy činností. Počty hodín týchto činností potrebných na výrobu jednotlivých výrobkov, ako aj celkové množstvo hodín k dispozícii a cena výrobkov, sú zobrazené v nasledujúcej tabuľke.

	výrobok 1	výrobok 2	výrobok 3	výrobok 4	celkovo
činnosť 1	4	6	3	6	3000
činnosť 2	2	1	1	3	1100
činnosť 3	2	1	2	1	900
cena	18	21	13	25	

Zostavte úlohu lineárneho programovania, ktorá nájde spoločnosti plán produkcie maximalizujúci zisk. Následne vyriešte túto úlohu simplexovým algoritmom.

Cvičenie 2.5. Pokúste sa vyriešiť nasledujúcu úlohu pomocou simplexového algoritmu

$$\min z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5$$

$$\begin{array}{lrrrrrl}
\text{ak} & x_1+ & x_2+ & x_3+ & x_4+ & x_5 & \geq\ \ 5 \\
& 2x_1+ & 3x_2 & & +6x_4 & & = 12 \\
& 3x_1+ & 3x_2+ & 2x_3+ & 2x_4+ & 6x_5 & \leq 60 \\
& 6x_1+ & 7x_2 & & - \ \ x_4 & & \geq 45 \\
& 2x_1 & & & + \ \ x_4+ & 5x_5 & \geq\ \ 7
\end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$