Kapitola 6. A

Intervaly spoľahlivosti

Majme pozorovanie x_1, x_2, …., x_n, tzv. výberový súbor. O normalite výberu nemáme pochybnosti (môžu to byť napr. chyby meraní). Chceme nejakým spôsobom odhadnúť charakteristiky, parametre normálneho rozdelenia, strednú hodnotu a disperziu. Najjednoduchší je ***bodový odhad***. ***Bodovým odhadom*** strednej hodnoty $E(X)=\mu$ je výberový aritmetický priemer

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum x_i$$

Bodovým odhadom disperzie je výberový rozptyl a jeho odmocnina je odhad smerodajnej odchýlky

$$s_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum (x_i - \bar{x})^2$$

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum (x_i - \bar{x})^2}$$

Platí pritom, že ak náhodná premenná X má $N(\mu;\sigma^2)$ rozdelenie, bodové odhady jej parametrov majú rozdelenie:

- $\bar{x} \approx N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$
- $\frac{n-1}{\sigma^2} s_x^2 \approx \chi^2_{n-1}$ (chí- kvadrát rozdelenie s n-1 stupňami voľnosti)

Bodový odhad je *prvá informácia* o parametroch daného rozdelenia, v praxi však zvyčajne nestačí. Aby sme mohli ohraničiť chybu, ktorej sa dopúšťame pri odhade, používame na určenie odhadu sledovaných parametrov intervaly spoľahlivosti. ***Prípustná chyba*** sa zvykne označovať gréckym písmenom ***c***, **1-α** je ***koeficient spoľahlivosti*** a príslušný ***interval spoľahlivosti*** nazývame (1-α).100 % - ný interval spoľahlivosti.
Znamená to, že ak by sme urobili veľký počet meraní (výberových súborov) zo sledovanej náhodnej premennej a pre každý súbor by sme určili príslušný interval spoľahlivosti v (1-α).100 % prípadoch by skutočná hodnota hľadaného parametra ležala v intervale spoľahlivosti.

Poznámka 1.
Chyba α, ktorej sa dopúšťame, býva v odbornej literatúre a v štatistických softvéroch niekedy nazývaná aj ***úroveň spoľahlivosti***. My pri intervaloch spoľahlivosti budeme dodržiavať terminológiu z predchádzajúcich riadkov a o úrovni spoľahlivosti hovoriť až pri testoch hypotéz (pozri kapitolu 6.A). Terminológiu používanú v Exceli pozri v kapitole 6.B.

Podľa toho, či určujeme v intervale spoľahlivosti jednu alebo dve hranice, rozoznávame ***jednostranný*** (pravostranný, ľavostranný) alebo ***obojstranný interval spoľahlivosti.*** Našou úlohou teraz bude určiť ***intervaly spoľahlivosti pre strednú hodnotu*** normálne rozdeleného výberového súboru v prípade

1. *ak disperzia σ^2 je známa, alebo počet meraní je veľký n>120*
2. *ak disperzia σ^2 nie je známa a musíme ju nahradiť bodovým odhadom*

<u>Interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu pri známom σ^2</u>

<u>Vzorový príklad 1</u>

Zo základného súboru s rozdelením N(μ;σ^2) a so známym rozptylom σ^2 =20,28 sa urobil náhodný výber s nasledujúcimi výsledkami

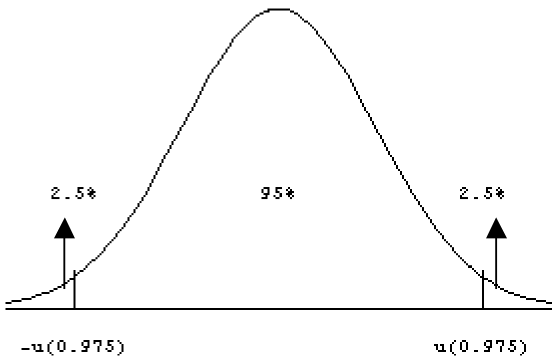
51,3	62,8	51,9	57	55,3	52,1	58,4

a) vypočítajte 95 % obojstranný interval spoľahlivosti pre parameter μ,
b) vypočítajte 90 % ľavostranný a pravostranný interval spoľahlivosti pre parameter μ.

Riešenie

a) Z nameraných hodnôt vypočítame bodový odhad strednej hodnoty $\bar{x} = 55{,}54$, σ^2 je známe a rovné $\sigma^2 = 20{,}28$, $\bar{x} \approx N(\mu; \frac{\sigma^2}{n})$, aby sme mohli použiť tabuľku normálneho normovaného rozdelenia vypočítame hodnotu štatistiky T:

$$T = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \quad \approx \quad N(0,1)$$



Obr. 6.1

V tabuľke T.3 nájdeme hodnotu u(0,975) kvantilu, dosadíme do nerovnosti a odvodíme interval spoľahlivosti pre μ (pozri obr. 6.1).

$$-u(0{,}975) \le \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \le u(0{,}975)$$

$$\bar{x} - \frac{u(0{,}975)\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x} + \frac{u(0{,}975)\sigma}{\sqrt{n}}$$

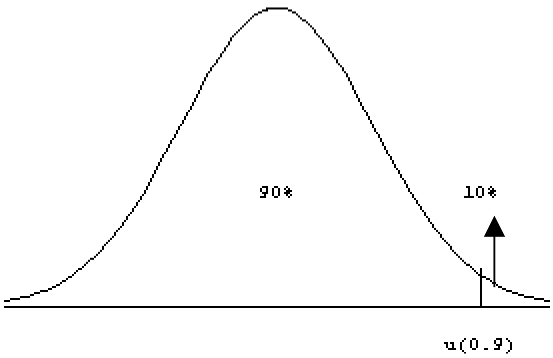
Dosadíme tabuľkovú hodnotu u(0,975)=1,96 a vypočítame 95 % interval spoľahlivosti pre μ pri známom σ čo je (52,2; 58,87).

Vo všeobecnosti je (1-α)100 % interval spoľahlivosti pre μ pri známom σ v tvare

$$\left(\bar{x}-\frac{u(1-\frac{\alpha}{2})\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \bar{x}+\frac{u(1-\frac{\alpha}{2})\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

kde $u(1-\frac{\alpha}{2})$ je príslušný kvantil N(0; 1) rozdelenia.

b) vypočítajme ľavostranný a pravostranný 90 % interval spoľahlivosti t.j. interval v tvare (T_1; ∞) a v tvare (-∞; T_2).



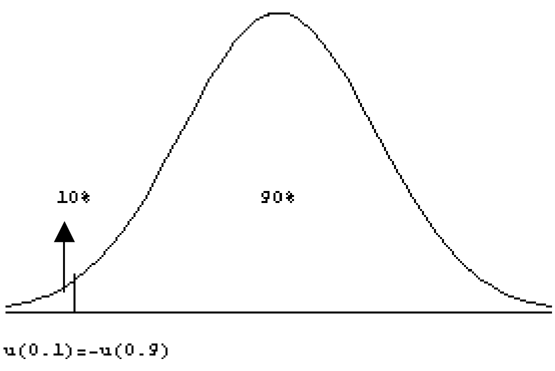
Obr. 6.2

Z grafu hustoty normálneho rozdelenia je zrejmé (pozri obrázok 6.2), že musí platiť nerovnosť $\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma}\sqrt{n} \leq u(0,9)$. Vyjadríme z tejto nerovnosti μ a príslušný ľavostranný interval spoľahlivosti :

$$\mu \geq \bar{x}-\frac{u(0,9)\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\left(\bar{x}-\frac{u(0,9)\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\infty\right)$$

Po nájdení a dosadení tabuľkovej hodnoty u(0,9) =1,28 je interval v tvare (53,36; ∞). Pre pravostranný interval z grafu hustoty normálneho rozdelenia platí: $\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma}\sqrt{n} \geq -u(0,9)$.



Obr. 6.3

Vyjadríme z tejto nerovnosti μ a príslušný pravostranný interval spoľahlivosti je v tvare:

$$\mu \le \bar{x} + \frac{u(0,9)\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\left(-\infty;\, \bar{x} + \frac{u(0,9)\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Po nájdení a dosadení tabuľkovej hodnoty -u(0,9)=-1,28 je interval v tvare (-∞; 57,72). Vo všeobecnosti teda (1-α)100 % pravostranný a ľavostranný interval spoľahlivosti pre μ pri známom σ je v tvare:

$$\left(-\infty,\, \bar{x} + \frac{u(1-\alpha)\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\left(\bar{x} - \frac{u(1-\alpha)\sigma}{\sqrt{n}}\,,\, \infty\right)$$

kde $u(1-\alpha)$ je príslušný kvantil N(0; 1) rozdelenia.

Interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu pri neznámom σ

Ak σ nie je známe, treba ho odhadnúť z nameraných údajov. Odhadom $\sigma = \sqrt{Var(X)}$ je výberová smerodajná odchýlka v tvare $s_x = \sqrt{\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n(\bar{x})^2\right)}$. K odvodeniu príslušných intervalov spoľahlivosti slúži štatistika

$$T = \frac{\bar{x}-\mu}{s_x}\sqrt{n} \quad \approx \quad t_{n-1}$$

Táto štatistika má ***Studentovo t-rozdelenie s (n-1) stupňami voľnosti***, t-rozdelenie je symetrické rozdelenie, ktorého hodnoty sú pre príslušné stupne voľnosti a hladiny významnosti tabelované. Hodnoty kvantilov Studentovho t-rozdelenia sú v tabuľke T.4.

Vzorový príklad 2

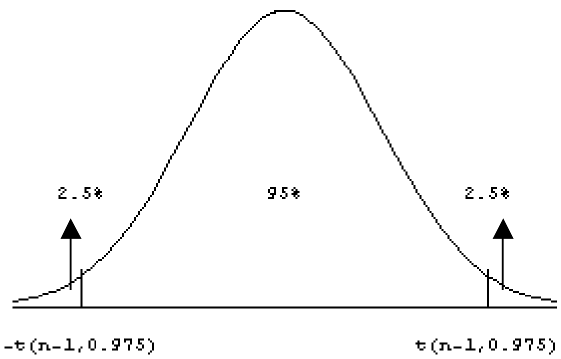
Zo základného súboru s rozdelením N(μ; σ^2) sa urobil náhodný výber s nasledujúcimi výsledkami

51,3	62,8	51,9	57	55,3	52,1	58,4

a) vypočítajte 95 % obojstranný interval spoľahlivosti pre parameter μ,
b) vypočítajte 90 % ľavostranný a pravostranný interval spoľahlivosti pre parameter μ.

Riešenie

Na výpočet obojstranného intervalu spoľahlivosti potrebujeme aj odhad smerodajnej odchýlky s_x=4,205 a počet meraní je v našom prípade n = 7.



Obr. 6.4

Z grafu príslušného t-rozdelenia vyplýva (pozri obrázok 6.4), že v tabuľke je treba nájsť hodnotu kvantilu $t_{n-1}(0{,}975)$, tú dosadíme do nerovnosti a odvodíme interval spoľahlivosti pre μ.

$$-t_{n-1}(0{,}975) \le \frac{\bar{x}-\mu}{s_x}\sqrt{n} \le t_{n-1}(0{,}975)$$

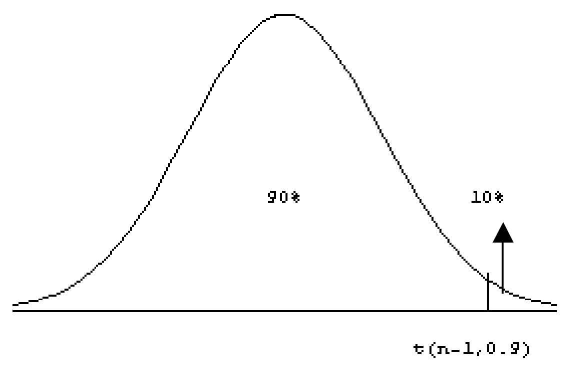
$$\bar{x} - \frac{t_{n-1}(0{,}975)s_x}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x} + \frac{t_{n-1}(0{,}975)s_x}{\sqrt{n}}$$

Dosadíme tabuľkovú hodnotu $t_6(0{,}975) = 2{,}447$ a vypočítame 95 % interval spoľahlivosti pre μ pri neznámom σ, čo je (51,65; 59,43). Vo všeobecnosti potom (1-α)100 % interval spoľahlivosti pre μ pri neznámom σ je v tvare

$$\left(\bar{x} - \frac{t_{n-1}(1-\frac{\alpha}{2})s_x}{\sqrt{n}}\ ,\ \bar{x} + \frac{t_{n-1}(1-\frac{\alpha}{2})s_x}{\sqrt{n}}\right)$$

kde $t_{n-1}(1-\frac{\alpha}{2})$ je kvantil t rozdelenia.

b)vypočítajme pravostranný a ľavostranný 90 % interval spoľahlivosti, t.j. interval v tvare $(-\infty; T_2)$ a v tvare $(T_1; \infty)$.



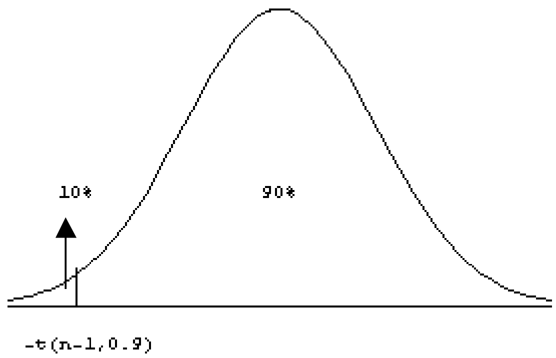
Obr. 6.5

Z grafu hustoty t-rozdelenia je zrejmé (pozri obrázok 6.5), že musí platiť nerovnosť $\frac{\bar{x}-\mu}{s_x}\sqrt{n} \le t_{n-1}(0{,}9)$. Vyjadríme z tejto nerovnosti μ a tvar príslušného ľavostranného intervalu spoľahlivosti :

$$\mu \ge \bar{x} - \frac{t_{n-1}(0{,}9)\, s_x}{\sqrt{n}}$$

$$\left(\bar{x} - \frac{t_{n-1}(0{,}9)\, s_x}{\sqrt{n}} \ , \ \infty \right)$$

Po nájdení a dosadení tabuľkovej hodnoty $t_6(0{,}9) = 1{,}44$ je interval v tvare (53,25; ∞). Pre pravostranný interval z grafu hustoty t-rozdelenia (pozri obrázok 6.6) platí: $\frac{\bar{x}-\mu}{s_x}\sqrt{n} \ge -t_{n-1}(0{,}9)$.



Obr. 6.6

Vyjadríme z tejto nerovnosti μ a vypočítame príslušný pravostranný interval spoľahlivosti :

$$\mu \le \bar{x} + \frac{t_{n-1}(0{,}9)\, s_x}{\sqrt{n}}$$

$$\left(-\infty, \quad \bar{x} + \frac{t_{n-1}(0{,}9)\, s_x}{\sqrt{n}} \right)$$

Vo všeobecnosti pre ľavostranný a pravostranný interval spoľahlivosti platí:

$$\left(\bar{x} - \frac{t_{n-1}(1-\alpha)\, s_x}{\sqrt{n}} \ , \ \infty \right)$$

$$\left(-\infty, \quad \bar{x} + \frac{t_{n-1}(1-\alpha)\, s_x}{\sqrt{n}} \right)$$

kde t_{n-1} je príslušný kvantil t-rozdelenia.

Intervaly spoľahlivosti pre neznáme σ alebo σ^2

Vzorový príklad 3

Zo základného súboru s rozdelením N(μ; σ^2) sa urobil náhodný výber s nasledujúcimi výsledkami

51,3	62,8	51,9	57	55,3	52,1	58,4

a) vypočítajte 95 % obojstranný interval spoľahlivosti pre parameter σ^2,

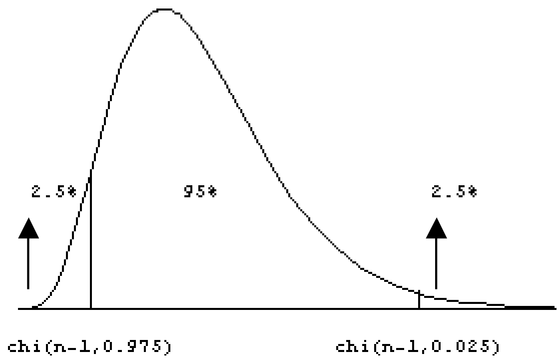
b) vypočítajte 90 % ľavostranný a pravostranný interval spoľahlivosti pre parameter σ^2.

Riešenie

a) Z nameraných hodnôt vypočítame odhad $s_x = 4{,}205$ resp. $s_x^2 = 17{,}689$. Štatistika pre odvodenie intervalu spoľahlivosti má tvar $\frac{n-1}{\sigma^2} s_x^2 \approx \chi^2_{n-1}$ a má chí- kvadrát rozdelenie s (n-1) stupňami voľnosti. Z tvaru hustoty chí kvadrát rozdelenia (pozri obrázok 6.7.) a tabuliek ***kritických hodnôt*** (tabuľka T.5) tohto rozdelenia

$$\chi^2_{n-1}(1-\frac{\alpha}{2}) \le \frac{n-1}{\sigma^2} s_x^2 \le \chi^2_{n-1}(\frac{\alpha}{2})$$

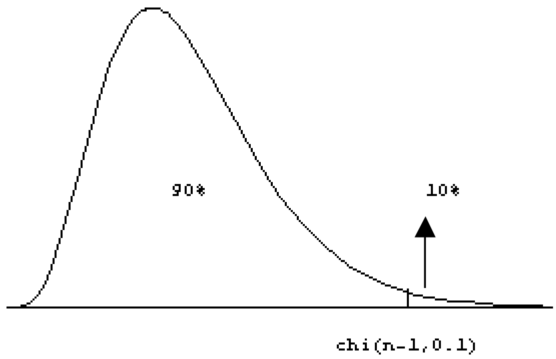
$$\frac{(n-1)s_x^2}{\chi^2_{n-1}(\frac{\alpha}{2})} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)s_x^2}{\chi^2_{n-1}(1-\frac{\alpha}{2})}$$



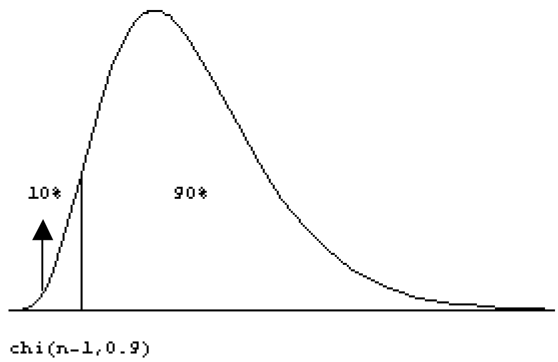
Obr. 6.7

kde kritická hodnota $\chi^2_6(0{,}025) = 14{,}449$ a $\chi^2_6(0{,}975) = 1{,}237$. Všetky známe hodnoty dosadíme do predchádzajúcich vzťahov a vypočítame 95 % obojstranný interval spoľahlivosti pre parameter σ^2. 95 % interval spoľahlivosti je (7,34; 85,8)

b)Podobne pre ľavostranný resp. pravostranný interval spoľahlivosti platia vzťahy, ktoré opäť odvodíme pomocou hustoty chi kvadrát rozdelenia a ***tabuľky kritických hodnôt***.



Obr. 6.8



Obr. 6.9

Ľavostranný interval spoľahlivosti:

$$\frac{n-1}{\sigma^2}s_x^2 \quad \leq \quad \chi_{n-1}^2(\alpha)$$

$$\frac{(n-1)s_x^2}{\chi_{n-1}^2(\alpha)} \quad \leq \quad \sigma^2$$

Pravostranný interval spoľahlivosti:

$$\frac{n-1}{\sigma^2}s_x^2 \quad \geq \quad \chi_{n-1}^2(1-\alpha)$$

$$\frac{(n-1)s_x^2}{\chi_{n-1}^2(1-\alpha)} \quad \geq \quad \sigma^2 \quad \geq \quad 0$$

Pričom $\chi_6^2(0{,}1)$=10,644 a $\chi_6^2(0{,}9)$=2,204. Všetky známe hodnoty dosadíme do predchádzajúcich vzťahov a vypočítame 90 % ľavostranný a pravostranný interval spoľahlivosti pre parameter σ.

Poznámka

Matematické vyjadrenie krivky hustôt χ^2 a Studentovho t-rozdelenia a tvary kriviek týchto rozdelení možno nájsť v kapitole 4.B.

Nové pojmy a definície kapitoly 6. A

- *bodový odhad*
- *prípustná chyba*
- *koeficient spoľahlivosti*
- *interval spoľahlivosti*

Cvičenia

Príklad 1
Vykonali sme n=32 analýz na overenie koncentrácie chemickej látky v nátere. Výsledky sme zaznamenali do tabuľky.

x_i	9	11	12	14	15	16	17	18	20	21
n_i	1	2	3	4	7	5	4	3	2	1

Koncentrácia chemickej látky sa riadi normálnym rozdelením s parametrami N(μ; 7,4). Vypočítajte 99 % obojstranný interval spoľahlivosti pre μ.

Príklad 2
Výstupná kontrola merala výšku panelov. Výsledky sú uvedené v tabuľke.

x_i	258,5	259	259,5	260	260,5	261	261,5
n_i	3	1	9	15	15	9	6

Vypočítajte
a) 9 5% obojstranný interval pre μ,
b) 99 % ľavostranný interval pre μ ,
c) 99 % obojstranný interval spoľahlivosti pre σ^2,
d) 95 % pravostranný interval spoľahlivosti pre σ^2.

Príklad 3
Počas ôsmich pracovných dní sa sledoval v závode odber elektrickej energie v MWh, výsledky sú uvedené v tabuľke.

x_i	31,1	31,8	30,7	30,5	30,9	31,5	31,1	32,1

Vypočítajte
a) 95 % obojstranný interval pre μ,
b) 99 % ľavostranný interval pre σ^2.

Riešenia

Príklad 1

(14,10507; 16,58243)

Príklad 2
a) (260,069; 260,464)
b) (260,031; ∞)
c) (0,363; 0,965)
d) (0; 0,789)

Príklad 3
a) (30,753; 31,671)

b) $(0{,}114; \infty)$