Metódy oceňovania finančných derivátov

Karol Mikula

1. ÚVOD – EURÓPSKE CALL A PUT OPCIE

Európska call opcia (opcia na kúpu) je kontrakt, ktorým jedna strana získava **právo**, ale nie povinnosť **kúpiť** od druhej strany v určenom **čase (expirácie) T** za vopred stanovenú **(expiračnú) cenu E** určitý počet a druh akcií.

Ako uvidíme, toto právo má potenciálnu hodnotu a preto zaň treba v čase uzavretia kontraktu zaplatiť tzv. **prémiu**. Pre obe strany, vypisovateľa opcie (writera) a jej budúceho vlastníka (holdera), ktoré vstupujú do opčného kontraktu, je prirodzenou a naliehavou otázkou, koľko treba zaplatiť. Obe strany majú záujem zistiť **optimálnu hodnotu** európskej call opcie, optimálnu v takom zmysle, že v čase uzatvárania kontraktu ani jedna zo strán nie je dopredu zvýhodnená. Je zrejmé, že takáto analýza bude musieť rešpektovať určité "zákony rovnováhy", reprezentované vo finančníctve takzvaným **argumentom arbitrage**. Takto stanovená hodnota finančného práva či záväzku sa môže potom stať rozumným východiskom pri stanovovaní prémie.

Arbitrage argument hovorí, že bezrizikový zisk, alebo inak povedané arbitrážna možnosť, sú možné len vo výnimočných prípadoch a môžu trvať len krátky čas. Jednoduchým dôvodom je to, že po objavení sa takejto možnosti, snažia sa ju využiť všetci potenciálni účastníci trhu a tým ju prakticky likvidujú.

Príklad 1 (na ilustráciu argumentu arbitrage):

Uvažujme nasledujúcu situáciu:

cena akcie na burze v New Yorku je	172 dolárov,
cena akcie na burze v Londýne je	100 libier,
výmenný kurz je	1 libra = 1.75 dolára.

Arbitrager, t.j. subjekt, ktorý vyhľadáva takéto situácie, si všimne možnosť bezrizikového zisku a súčasne kupuje akcie v New Yorku a predáva v Londýne. Jeho profit (neuvažujúc prevody) z tejto operácie je 3 doláre. Takáto situácia nemôže trvať dlho, do hry vstúpia ďalší arbitrageri nakupujúci v New Yorku a predávajúci v Londýne. Zo zákona ponuky a dopytu cena akcie na burze v New Yorku stúpa, naopak jej cena v Londýne klesá až kým príde k ich vyrovnaniu. Pri masívnych nákupoch v dolároch a predaji v librách cena dolára stúpa a cena libry klesá a tak v krátkom čase môže dôjsť aj k zmene kurzu v prospech dolára a opäť ku koncu profitu.

Pristúpme teraz k matematickému modelovaniu optimálnej hodnoty call opcie. Označme

S - cenu akcie (stock price),
V_{ec} - optimálnu hodnotu (fair value) európskej call opcie,
E - expiračnú cenu (exercise price)
T - čas expirácie (expiration date),
t - čas, $t \in [0, T]$.

Problém ocenenia európskej call opcie môžeme formulovať ako úlohu určiť funkciu $V_{ec}=V_{ec}(S,t)$ v ľubovoľnom časovom okamihu $t \in [0, T]$ a pri ľubovoľnej cene akcie $S \geq 0$. Vyriešiť túto úlohu pomôžu metódy stochastického diferenciálneho počtu a techniky riešenia parciálnych diferenciálnych rovníc. Úloha je komplikovaná tým, že jedna z premenných, od ktorých cena opcie závisí, totiž S – cena akcie, vykazuje náhodné správanie.

Na modelovanie vývoja cien akcií v čase sa používa **stochastická diferenciálna rovnica**

$$dS = \mu\, S\, dt + \sigma\, S\, dw, \qquad (1)$$

kde

- dS je zmena ceny akcie za malý časový interval dt,
- w je **štandardný Wienerov proces**,
- μ očakávaná **návratnosť** akcie a
- σ je **volatilita** ceny akcie.

Pritom predpokladáme, že v čase $t = 0$ je cena akcie $S = S_0$. Náhodný proces definovaný rovnicou (1) sa nazýva **difúzny proces** alebo **geometrický Brownov pohyb**. Vysvetlíme si podrobnejšie zmysel (1) a význam jednotlivých členov v nej vystupujúcich.

Štandardný Wienerov proces je parametrický systém náhodných veličín $\{w(t),\ t \geq 0\}$, pre ktoré platí:

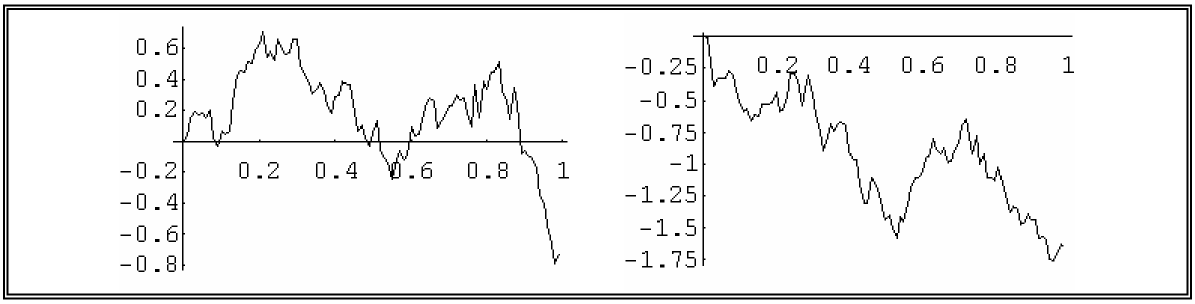
1. $w(0) = 0$,
2. $dw = \varepsilon\sqrt{dt}$, kde dw je prírastok w za malý časový interval dt a ε je náhodná premenná s normálnym rozdelením pravdepodobnosti so strednou hodnotou 0 a rozptylom 1, t.j. $\varepsilon \approx N(0,1)$,
3. prírastky dw pre rôzne malé (po sebe nasledujúce) časové intervaly dt sú nezávislé.

Na ilustráciu predchádzajúcej definície uvádzame niekoľko simulácií štandardného Wienerovho procesu získaných systémom Mathematica. Je dôležité si uvedomiť, že jednotlivé realizácie sa navzájom výrazne odlišujú. Používame pri tom balík diffuse.m dodávaný spolu s knihou [V]. Volíme dt=0.01 respektíve 0.001 a počet simulačných krokov je 100 respektíve 1000. Nasledujúce príkazy systému Mathematica najskôr natiahnu príslušný balík, potom vytvoria Wienerov proces a zobrazia výsledky simulácií.

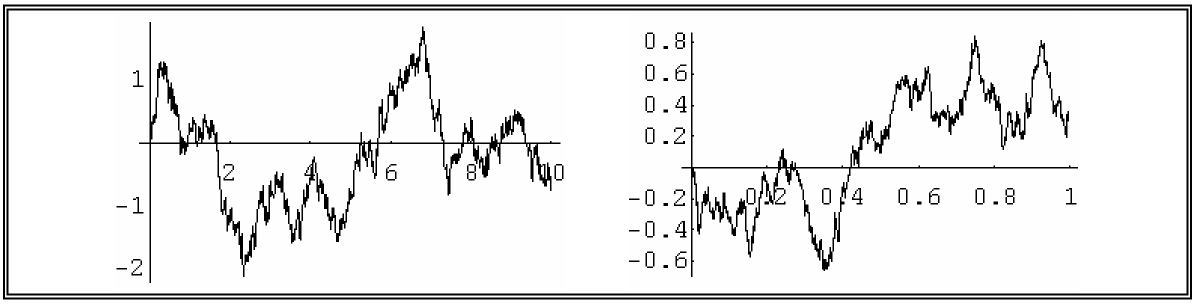
```
<<diffuse\diffuse.m

WeinerProcessMake[W]
DiffusionPrint[W]
```

```
W  = Wiener Process with scale 1
  t
```

```
simulacia1=DiffusionSimulate[W,100,0.01];
ListPlot[simulacia1,PlotJoined->True,PlotRange->All];
simulacia2=DiffusionSimulate[W,100,0.01];
ListPlot[simulacia2,PlotJoined->True,PlotRange->All];
```




```
simulacia3=DiffusionSimulate[W,1000,0.01];
ListPlot[simulacia3,PlotJoined->True,PlotRange->All];
simulacia4=DiffusionSimulate[W,1000,0.001];
ListPlot[simulacia4,PlotJoined->True,PlotRange->All];
```



Vráťme sa k rovnici (1). Vidíme, že prírastok ceny akcie závisí (deterministicky) od jej očakávanej návratnosti, jej momentálnej hodnoty a veľkosti časového intervalu. Zároveň je ovplyvňovaný stochastickým procesom w. K deterministickému prírastku sa pripočíta náhodná hodnota (ktorá môže byť kladná aj záporná) závislá od volatility, momentálnej ceny akcie a konkrétnej realizácie štandardného Wienerovho procesu.

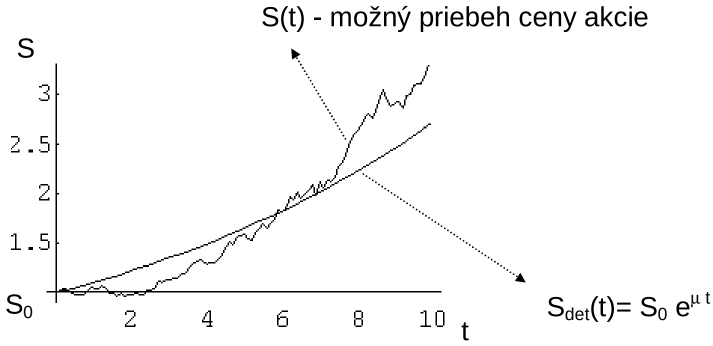
Bez stochastickej časti $\sigma S dw$ v rovnici (1) by sme pre vývoj ceny akcie dostali obyčajnú diferenciálnu rovnicu s počiatočnou podmienkou

$$\frac{dS}{dt} = \mu S , \qquad S(0) = S_0 , \tag{2}$$

ktorej riešením je funkcia

$$S_{det}(t) = S_0 \, e^{\mu t} . \tag{3}$$

Riešenie stochastickej diferenciálnej rovnice (1), t.j. možný časový priebeh ceny akcie, môžeme potom ilustrovať nasledujúcim obrázkom:

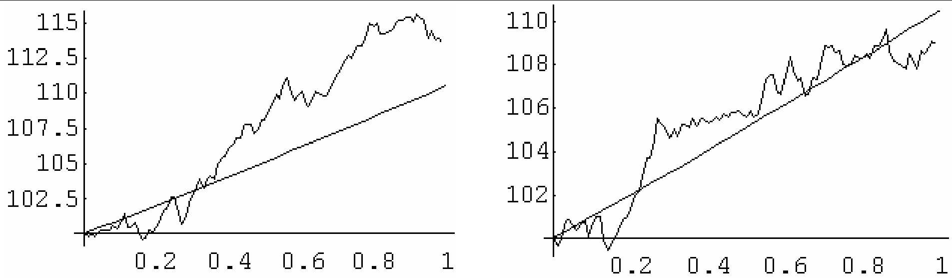


Odchýlka možného stochastického časového vývoja ceny akcie S(t) od deterministického priebehu je daná veľkosťou volatility σ. Ukážeme si niekoľko simulácií S(t) získaných systémom Mathematica pri rôznych parametroch rovnice (1). Najskôr zvolíme volatilitu 4% a nadefinujeme príslušný difúzny proces (viď prvý rámček), potom dvakrát spustíme príkazy v druhom rámčeku so vstupmi. Dostali sme dva rôzne možné časové priebehy ceny akcie S v intervale [0,1], napríklad od času uzavretia opčného kontraktu, t=0, po čas expirácie t=T=1 rok. Ak by expiračná cena E bola stanovená s pomocou deterministickej exponenciály (strednej hodnoty očakávaného vývoja ceny akcie) ako jej hodnota v čase 1, tak ľavý priebeh je výhodný pre vlastníka call opcie. Ak rozdiel koncovej hodnoty realizácie a expiračnej ceny presiahne hodnotu bezrizikovo zúročenej prémie dosiahne vlastník opcie kladný profit. Pri druhom, pravom priebehu, prichádza o prémiu.

```
mi=0.1;
sigma=0.04;
s0=100;
Clear[S];
grdet=Plot[s0*Exp[mi*t],{t,0,1},PlotRange->All, DisplayFunction->Identity];
DiffusionMake[S,W,mi S,sigma S,s0]
DiffusionPrint[S]
```

$dS_t = 0.1\, S_t\, dt + 0.04\, S_t\, dW_t \;;\; s_0 = 100$

```
simulacia=DiffusionSimulate[S,100,0.01];
grdiff=ListPlot[simulacia,PlotJoined->True,PlotRange->All,
      DisplayFunction->Identity];
Show[grdet,grdiff,DisplayFunction->$DisplayFunction];
```

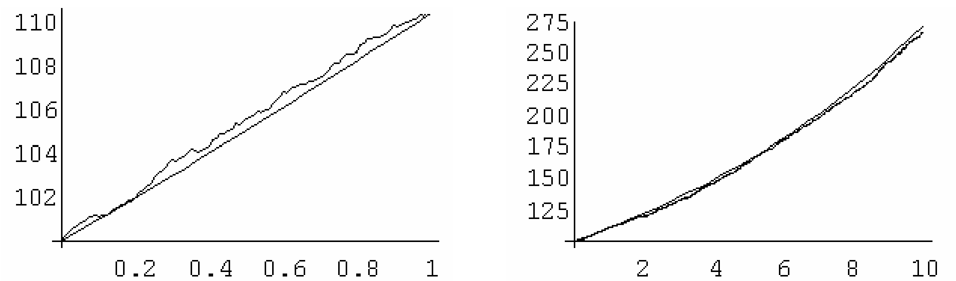


Teraz zmenšime volatilitu a potom zväčšime čas do exprirácie. Z nasledujúcich obrázkov vidno, že odchýlky od deterministickej exponenciály sú len veľmi malé.

```
mi=0.1;
sigma=0.01;
s0=100;
Clear[S];
grdet=Plot[s0*Exp[mi*t],{t,0,1},PlotRange->All, DisplayFunction->Identity];
DiffusionMake[S,W,mi S,sigma S,s0]
DiffusionPrint[S]
```

$$dS_t = 0.1\, S_t\, dt + 0.01\, S_t\, dW_t\ ;\ s_0 = 100$$

```
simulacia=DiffusionSimulate[S,100,0.01];

grdiff=ListPlot[simulacia,PlotJoined->True,PlotRange->All,
      DisplayFunction->Identity];

Show[grdet,grdiff,DisplayFunction->$DisplayFunction];
```

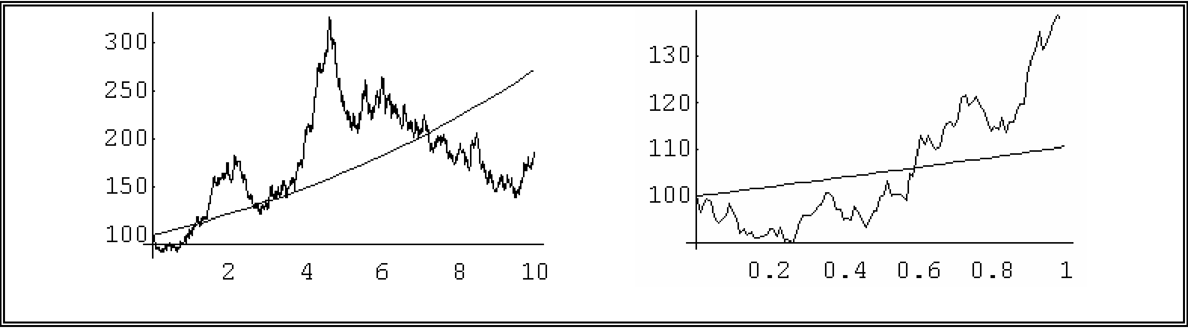


Na rozdiel od predchádzajúceho príkladu, pri pomerne veľkej volatilite (20 %, pozri nasledujúce príkazy a obrázky) je deterministická exponenciála len veľmi slabým orientačným bodom. V čase expirácie môže byť teda cena akcie oveľa vyššia alebo nižšia ako jej predpokladaná hodnota. To je jeden z motívov, prečo môže byť výhodné vlastniť call opciu - **zisk je teoreticky neohraničený, strata je limitovaná prémiou** (v prípade, že trhová cena akcie v čase expirácie je nižšia ako dohodnutá expiračná cena E, právo na kúpu sa neuplatní).

```
mi=0.1;
sigma=0.2;
s0=100;
Clear[S];
grdet=Plot[s0*Exp[mi*t],{t,0,10},PlotRange->All, DisplayFunction->Identity];
DiffusionMake[S,W,mi S,sigma S,s0]
DiffusionPrint[S]
```

$$dS_t = 0.1\, S_t\, dt + 0.2\, S_t\, dW_t\ ;\ s_0 = 100$$

```
simulacia=DiffusionSimulate[S,1000,0.01];

grdiff=ListPlot[simulacia,PlotJoined->True,PlotRange->All,
      DisplayFunction->Identity];

Show[grdet,grdiff,DisplayFunction->$DisplayFunction];
```



Ďalším motívom obchodovania s finančnými derivátmi je vytváranie tzv. **bezrizikových portfólií** a teda snaha o odstraňovanie trhového rizika. S týmito otázkami sa stretneme v nasledujúcej časti, už teraz však uvedieme typický príklad.

Európska put opcia (opcia na predaj) je kontrakt, ktorým jedna strana získava **právo**, ale nie povinnosť **predať** druhej strane v určenom **čase (expirácie) T** za vopred stanovenú **(expiračnú) cenu E** určitý počet a druh akcií.

Je zrejmé, že so znižovaním ceny akcie stúpa hodnota put opcie na túto akciu. Rozumná kombinácia vlastníctva akcií a put opcií môže umožniť elimináciu rizika vyplývajúceho z možného poklesu ceny akcie.

Zatiaľ sme sa venovali dôvodom obchodovania s finančnými derivátmi z hľadiska ich vlastníka, držiteľa (holdera). Na trhu sa vždy vyskytujú subjekty predpokladajúce nárast ceny akcií nad „všeobecne očakávanú hodnotu“ (potenciálni vlastníci call opcií a vypisovatelia put opcií), ako aj takí, ktorí predpokladajú ich pokles pod túto hodnotu (potenciálni vypisovatelia call opcií a vlastníci put opcií). Je to tak preto, lebo ak by všetci predpokladali rovnakú tendenciu vývoja ceny akcie, už teraz by jej hodnota bola nižšia, resp. vyššia. Vypisovateľ call opcie, očakávajúci cenový pokles akcie pod dohodnutú expiračnú cenu, počíta s tým, že získa prémiu. Je zrejmé, že vlastník opcie nebude chcieť v čase expirácie od neho kúpiť akcie za dohodnutú cenu, ktorá je vyššia ako cena trhová. To ale znamená, že ak je jeho očakávanie správne, akcie na ktoré call opciu vypisuje nemusí vôbec vlastniť - takejto situácii sa hovorí **"short selling"**. To, že je prípustná na mnohých burzách, je tiež jedným z motívov vypisovania opcií (samozrejme, že vypisovateľ musí splniť isté podmienky burzy, aby bolo zaručené, že bude schopný splniť svoj záväzok v prípade vystúpania ceny akcie nad dohodnutú expiračnú cenu). Vypisovateľ call opcie tak získava prémiu teoreticky bez akejkoľvek počiatočnej investície. V takej istej situácii je vypisovateľ put opcie v prípade nárastu trhovej ceny akcie nad expiračnú cenu.

Zopakujme faktory, ktoré majú zrejme vplyv na určenie optimálnej hodnoty či už call alebo put opcie:

- stochastičnosť pohybu ceny akcií a s ňou súvisiaca
  - veľkosť volatility σ,
  - dĺžka času do expirácie $\tau = T - t$,
- momentálna trhová cena akcie S a dohodnutá expiračná cena E,
- možnosť bezrizikového zúročenia prémie na bankovom účte daná

- veľkosťou spojitého bezrizikového úroku r.

Skutočne, všetky tieto intuitívne vyšpecifikované faktory budú vystupovať vo všeobecne používaných vzťahoch oceňovania opcií získaných Blackovou-Scholesovou a Mertonovou analýzou. Predpokladá-me pritom, že E, T, σ, r sa v čase od uzavretia kontraktu po jeho vypršanie nemenia. Mení sa však t a S. Preto budeme hľadať hodnotu finančného derivátu v závislosti od $S \geq 0$ a $t \in [0, T]$.

2. ITÔOVA VETA

Vráťme sa opäť k stochastickému diferenciálnemu počtu. Vo všeobecnosti, stochastický proces $\{x(t), t \geq 0\}$ sa nazýva **Itôov proces**, ak

$$dx = \overline{\mu}(x,t)dt + \overline{\sigma}(x,t)dw \tag{4}$$

kde $\overline{\mu}(x,t)$, $\overline{\sigma}(x,t)$ sú spojité funkcie reprezentujúce tendenciu (drift) respektíve rozptyl (disperziu) procesu. V difúznom procese (1) reprezentujúcom časový vývoj cien akcií, sú teda tendencia $\overline{\mu}(x,t) = \mu x$ aj rozptyl $\overline{\sigma}(x,t) = \sigma x$ dané ako lineárne funkcie.

Nech x je Itôov proces daný vzťahom (4) a f=f(x,t) nech je funkcia dvoch premenných. Skúsme nájsť (nepôjdeme však pri tom do všetkých detailov) ako vyzerá jej prvý diferenciál. Ak označíme $dx = x - \tilde{x}$, $dt = t - \tilde{t}$, pomocou Taylorovho rozvoja dostaneme pre prírastok δf = $f(x,t)$ - $f(\tilde{x},\tilde{t})$ funkcie f v okolí bodu $(\tilde{x},\tilde{t})$ postupne vzťahy:

$$\begin{aligned}
\delta f &= \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(dx)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial t}dx\,dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(dt)^2 + \ldots = \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\overline{\mu}(x,t)\,dt + \overline{\sigma}(x,t)\,dw\right)^2 + \\
&+ \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial t}\left(\overline{\mu}(x,t)\,dt + \overline{\sigma}(x,t)\,dw\right)dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(dt)^2 + \ldots = \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\overline{\mu}(x,t)\,dt + \overline{\sigma}(x,t)\,dw\right)^2 + \\
&+ \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial t}\left(\overline{\mu}(x,t)\,dt + \overline{\sigma}(x,t)\,dw\right)dt + o(dt),
\end{aligned} \tag{5}$$

kde o(dt) je výraz, pre ktorý platí $\lim\limits_{dt \to 0} \frac{o(dt)}{dt} = 0$. Každý výraz typu $(dt)^{1+\delta}$, kde $\delta > 0$ je pevné číslo, je výrazom typu o(dt).

Analyzujme jednotlivé členy v (5). Keďže $dw = \varepsilon\sqrt{dt} = \varepsilon\,(dt)^{1/2}$ je

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}\left(\overline{\mu}(x,t)dt + \overline{\sigma}(x,t)dw\right)dt$ výrazom typu o(dt). Ďalej vo výraze

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\underbrace{\overline{\mu}^2(x,t)(dt)^2}_{o(dt)} + \underbrace{2\overline{\mu}(x,t)\overline{\sigma}(x,t)dt\,dw}_{o(dt)} + \overline{\sigma}^2(x,t)(dw)^2\right) \tag{6}$$

potrebujeme zistiť, čomu sa rovná $(dw)^2$. Vieme, že $dw = \varepsilon\sqrt{dt}$, $\varepsilon \approx N(0, 1)$. Pretože pre stredné hodnoty E(.) a rozptyl Var(.) náhodných premenných platí $E(\varepsilon^2) - [E(\varepsilon)]^2 = Var(\varepsilon) = 1$ a $E(\varepsilon) = 0$, dostaneme že $E(\varepsilon^2) = 1$ a tiež $E(\varepsilon^2\, dt) = dt$. Odtiaľ a z vlastnosti $Var(\varepsilon^2 dt) = (dt)^2 Var(\varepsilon^2) = o(dt)$ dostaneme, že pre dt dostatočne malé je $(dw)^2 = \varepsilon^2 dt$ procesom nadobúdajúcim svoju strednú hodnotu dt. T.j., že platí

$$(dw)^2 = dt + o(dt).$$

Vzťah (6) sa tak redukuje na $\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\bar{\sigma}^2(x,t)\,dt + o(dt)$. Uvažujúc dt dostatočne malé, dostaneme potom z (5) pre prvý diferenciál funkcie f(x,t) nasledujúce tvrdenie.

Itôova veta:

Nech f(x, t) je hladká funkcia premenných x a t, pričom

$$dx = \bar{\mu}(x,t)dt + \bar{\sigma}(x,t)dw$$

je Itôov proces. Potom prvý diferenciál funkcie f je daný vzťahom

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2(x,t)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)dt\,.$$

Z predchádzajúcej vety teda vyplýva, že prírastok funkcie f za dostatočne malý časový interval dt je daný nasledovne:

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{\mu}(x,t)dt + \bar{\sigma}(x,t)dw) + \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2(x,t)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)dt = \\ &\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \bar{\mu}(x,t)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2(x,t)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)dt + \bar{\sigma}(x,t)\frac{\partial f}{\partial x}dw. \end{aligned} \tag{7}$$

Takže samotné f, napríklad hodnota opcie, je tiež Itôovým procesom $\{f(t), t \geq 0\}$ s tendenciou a rozptylom získanými pomocou Itôovej vety a neurčitosťou toho istého typu ako má stochastický proces x, reprezentujúci napríklad cenu akcie. V nasledujúcej kapitole uvidíme, ako sa dá tento fakt využiť na konštrukciu bezrizikového portfólia obsahuj[ceho akcie a opcie (alebo inak povedané na elimináciu jeho neurčitosti).

3. BLACKOVA – SCHOLESOVA A MERTONOVA ANALÝZA

Nech S je proces reprezentujúci časový vývoj ceny akcie s návratnosťou μ a volatilitou σ:

$$dS = \mu\, S\, dt + \sigma\, S\, dw, \tag{8}$$

Nech V(S, t) je optimálna hodnota finančného derivátu súvisiaceho s akciou S. Nebudeme špecifikovať akého konkrétne (čitateľ môže ako príklad uvažovať európsku call opciu diskutovanú v prvej kapitole), pretože analýza, ktorá bude nasledovať, má všeobecný charakter. Jednotlivé typy derivátov (call, put opcie a mnohé ďalšie) budú spĺňať tú istú parciálnu diferenciálnu rovnicu, rozlíšené budú prostredníctvom **expiračnej podmienky**, čiže svojej hodnoty v čase expirácie.
Z Itôovej vety vyplýva, že optimálne hodnota finančného derivátu V je tiež difúznym procesom a zo vzťahu (7) dostaneme

$$dV = \underbrace{\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)}_{\text{tendencia - drift}} dt + \underbrace{\sigma S \frac{\partial V}{\partial S}}_{\text{rozptylt}} dw. \tag{9}$$

Stratégia Blacka a Scholesa je nasledovná: skombinovať dva náhodné procesy (8) a (9) tak, aby sa podarilo vytvoriť bezrizikové portfólio. Takémuto postupu sa vo finančnom inžinierstve hovorí **hedging** alebo **zaisťovanie**. Uvažujme **portfólio** P, ktoré v čase t obsahuje jeden finančný derivát s hodnotou V a Δ akcií s hodnotou S. Skúmajme, ako sa zmení hodnota tohoto portfólia počas malého časového kroku dt. Pritom počet akcií Δ je kontrolovaný držiteľom portfólia – hedgerom a je pevný v časovom intervale dt. Poznamenajme, že Δ bude v prípade call a put opcií reálne číslo (s absolútnou hodnotou ležiacou medzi 0 a 1) vyjadrujúce pomer počtu akcií k počtu opcií v portfóliu počas časového kroku dt. Hodnota portfólia v čase t je teda daná vzťahom ako

$$P = V + \Delta\ S. \tag{10}$$

Prírastok hodnoty portfólia za malý časový interval dt sa potom rovná

$$dP = dV + \Delta\, dS. \tag{11}$$

Ak skombinujeme (8), (9) a (11), dostaneme pre nárast hodnoty portfólia vzťah

$$dP = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S\left(\frac{\partial V}{\partial S} + \Delta\right) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right) dt + \sigma S \left(\frac{\partial V}{\partial S} + \Delta\right) dw \tag{12}$$

Hedger môže eliminovať stochastickú časť výberom

$$\Delta = -\frac{\partial V}{\partial S} \tag{13}$$

kde $-\frac{\partial V}{\partial S}$ je uvažované v čase t, t.j. na začiatku časového kroku dt. Pri takomto výbere Δ je zmena hodnoty portfólia na malom časovom intervale dt deterministická (neobsahuje žiadne stochastické členy) a rovná sa

$$dP = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\ \sigma^2 S^2\ \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt. \tag{14}$$

Na druhej strane arbitrage argument spôsobí, že táto bezriziková zmena dP musí sa rovnať prírastku, ktorý sa dosiahne zúročením hodnoty P v bankovom depozite za čas dt, t.j.

$$dP = r\ P\ dt,$$

kde r je spojitý bezrizikový bankový úrok (konštantný počas časového intervalu dt). Platí teda

$$r\ P\ dt = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\ \sigma^2 S^2\ \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt. \tag{15}$$

Ak by prírastok na ľavej strane bol nižší ako prírastok na pravej strane, tak si arbitrager požičia v banke hotovosť P a kúpi za ňu portfólio. Po čase dt portfólio predá a splatí pôžičku. Zostane mu zisk rovný rozdielu prírastkov. Naopak, ak by prírastok na ľavej strane bol vyšší ako prírastok na pravej strane, arbitrager predá portfólio a príslušnú hotovosť P vloží do banky. Po čase dt peniaze z banky vyberie a so ziskom kúpi späť portfólio.

Využijúc vzťahy (10), (13) a (15) potom dostaneme pre neznámu funkciu V(S, t) **Black – Scholesovu parciálnu diferenciálnu rovnicu**

$$\frac{\partial V}{\partial t} + r\,S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2\ S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - r\,V = 0. \tag{16}$$

Táto rovnica je základným kameňom modernej finančnej matematiky. Odvodili sme ju pre ľubovolný čas $t \in [0, T]$. Pritom Δ - pomer počtu akcií k počtu opcií sa mení s časom podľa vzťahu (13). Časový vývoj Δ predstavuje tzv. spojitý rehedging portfólia, pomocou ktorého zabezpečujeme determiničnosť jeho vývoja na nasledujúcom malom časovom úseku.

4. OPCIE VYPLÁCAJÚCE DIVIDENDY

Teraz uvedieme jedno dôležité zovšeobecnenie predchádzajúcej analýzy. Nech sú akcionárom vyplácané tzv. **spojité dividendy** proporcionálne cene akcie. Arbitrage argument spôsobí, že s výplatou dividend sa hodnota akcií znižuje. To znamená, že musíme modifikovať vzťah (1) na tvar

$$dS = (\mu - D)\ S\ dt + \sigma\ S\ dw,$$

kde konštanta D predstavuje tzv. spojitý dividendový úrok. V prípade takejto výplaty dividend, akcionár za malý časový interval dt získa vďaka vlastníctvu akcie hodnotu D S dt. Takže, ak vlastníme Δ akcií v portfóliu P, dostaneme za dt aj hodnotu Δ D S dt, t. j. rovnica (11) sa zmení na

$$dP = dV + \Delta\ dS + \Delta\ D\ S\ dt.$$

Rovnakým eliminovaním neurčitosti ako v klasickom Blackovom – Scholesovom postupe dostaneme vzťah

$$dP = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - D S \frac{\partial V}{\partial S} \right) dt.$$

Použitím argumentu arbitrage opäť získame rovnosť

$$\underbrace{\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - D S \frac{\partial V}{\partial S}}_{\text{bezrizikový prírastok z } \Delta\text{-hedgovaného portfolia}} = \underbrace{r \left(V - S \frac{\partial V}{\partial S} \right)}_{\substack{\text{bezrizikový prírastok} \\ \text{z bankového depozitu}}} .$$

Modifikovaná Blackova - Scholesova parciálna diferenciálna rovnica na určenie optimálnej hodnoty finančného derivátu na akciu vyplácajúcu spojité dividendy má teda tvar

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (r - D) S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - r V = 0. \tag{17}$$

5. RIEŠENIE BLACK – SCHOLESOVEJ ROVNICE V PRÍPADE EURÓPSKYCH OPCIÍ

Rovnica (17), a samozrejme i jej špeciálny prípad rovnica (16), sa z matematického hľadiska radí medzi **difúzne parciálne diferenciálne rovnice**. Hľadáme jej riešenie $V(S, t)$ pre $S \geq 0$ a $t \in [0, T]$. K tomu, aby sme ho našli jednoznačne, musíme pridať tzv. **okrajové podmienky** v krajných bodoch „priestorovej premennej" S a podmienku na hodnoty finančného derivátu v určitom bode „časovej premennej" t. My tak urobíme pre t = T, t.j zadáme hodnotu finančného derivátu v čase jeho expirácie. Preto rešpektujúc tento finančný kontext budeme hovoriť o **expiračnej podmienke**. Poznamenajme, že ak obrátime čas a do T umiestnime 0, pôjde o tzv. začiatočnú podmienku. Pri takejto transformácii sa zmení znamienko pri časovej derivácii v (17) a dostaneme klasickú doprednú difúznu rovnicu študovanú v mnohých aplikáciach. Tú vieme riešiť smerom do budúcnosti. Poznamenajme, že v originálnej formulácii je Black – Scholesova rovnica (17) **spätnou difúznou rovnicou**. Ak pre ňu teda zadáme koncovú (expiračnú) podmienku, je všetko v poriadku, úloha je dobre postavená a má jediné riešenie. Okrajové podmienky pre difúzne parciálne diferenciálne rovnice mávajú rôzny tvar, v našom prípade určíme hodnoty V pre cenu akcie S rovnú nule a pre S nadobúdajúce veľké hodnoty.

Expiračná a okrajové podmienky pre európsku call opciu:

Je zrejmé, že pre call opciu platí:

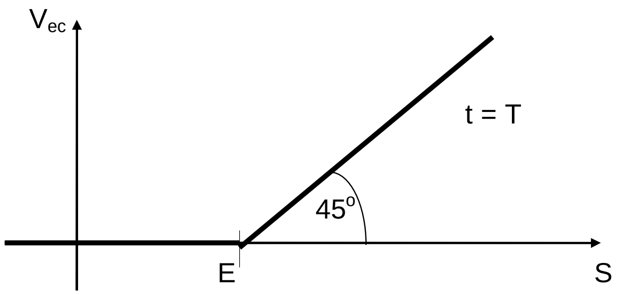
Ak $S \leq E$ v čase expirácie $\Rightarrow V_{ec}(S,T) = 0$, t.j. ak trhová cena S je v čase expirácie nižšia nanajvýš rovná expiračnej cene E, vlastník svoje právo na kúpu neuplatní a má pre neho teda nulovú hodnotu.

Ak $S > E$ v čase expirácie $\Rightarrow V_{ec}(S,T) = S – E$, t.j. naopak, ak trhová cena S je v čase expirácie vyššia ako expiračná cena E je profit vlastníka call opcie rovný ich rozdielu.

Takže **expiračnú podmienku pre call opciu** môžme zapísať v tvare

$$V_{ec}(S, T) = \max(0, S - E). \tag{18}$$

Funkcia $V_{ec}(S, T)$ daná vzťahom (18) sa nazýva vnútornou hodnotou call opcie (intrinsic value) alebo **call-payoff** diagram (viď nasledujúci obrázok).



Okrajové podmienky pre call opciu:

Ak S = 0 v nejakom čase t, tak z rovnice (1) či (17) vyplýva, že S zostane nulová aj v ďalšom časovom priebehu, opcia bude expirovať ako bezcenná a teda je pre vlastníka nevyhnutne bezcenná už v čase t. Takže

$$V_{ec}(0,t) = 0 \qquad \text{pre } t \in [0, T], \tag{19}$$

A takú istú podmienku dostaneme I pre call opciu V_{ecd} vyplácajúcu spojité dividendy.

Ak $S \to \infty$, t.j. cena akcie stúpa nad všetky ohraničenia, potom cena opcie je blízka cene akcie zredukovanej o príjmy z dividend (až do času expirácie akciu nevlastníme), t.j.

$$V_{ecd}(S, t) \to S\, e^{-D(T - t)} - E \qquad \text{pre } S \to \infty, \text{ pre } t \in [0, T] \tag{20}$$

A pre D = 0 sa táto podmienka zjednoduší na tvar

$$V_{ec}(S, t) \to S - E \qquad \text{pre } S \to \infty, \text{ pre } t \in [0, T]$$

Rovnica (17) spolu s podmienkami (18) - (20) sa dá **explicitne riešiť** (pozri napr. [WDH], [Š]). Jej riešenie má tvar :

$$V_{ecd}(S, t) = e^{-D(T - t)}\, S\, N(d_1) - E\, e^{-r(T - t)}\, N(d_2), \tag{21}$$

kde

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{E}\right) + \left(r - D + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}, \qquad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T - t},$$

a

$$N(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u} e^{-\frac{x^2}{2}} \, dx$$

je distribučná funkcia normálneho rozdelenia pravdepodobnosti N(0,1). Riešenie (21) pri D=0 je známe ako **Blackova - Scholesova formula (funkcia)** oceňovania opcií. Pre úplnosť ju tiež uvádzame:

$$V_{ec}(S, t) = S\, N(d_1) - E\, e^{-r(T-t)}\, N(d_2), \qquad (21b)$$

Príklad 2.

Nájdime optimálnu hodnotu európskej call opcie na akciu spoločnosti DEC ak

expiračná cena	$E = \$60$,
momentálna trhová cena	$S = \$58.5$,
čas do expirácie	$\tau = T - t = 0.3$ roka,
volatilita akcie	$\sigma = 0.29$ (29 %),
bezriziková úroková miera	$r = 0.04$ (4 %).

Na riešenie využijeme balík **optvalue.m** dodávaný k systému Mathematica spolu s knihou [V]. S pomocou systému Mathematica zistíme, že optimálna hodnota opcie je \$3.34886. Získame ju volaním funkcie

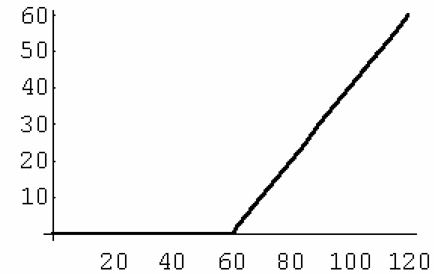
BlackScholes[S, E, σ, r, τ],

ktorá sa nachádza v spomínanom balíku a predstavuje vlastne implementáciu vzťahu (21b). Ďalej nakreslíme payoff diagram tejto call opcie, niekoľko časových rezov Black-Scholesovej funkcie (v časových okamihoch 0.9, 0.7, 0.5, 0.3, 0.1 roka do expirácie) ako aj 3D graf Blackovej - Scholesovej formule ako funkcie ceny akcie S a času do expirácie τ. Bunky systému Mathematica, v ktorých sú grafy časových rezov je možné označiť a potom zanimovať. Animácia nam dá dobrý obraz o časovom priebehu hodnoty opcie.

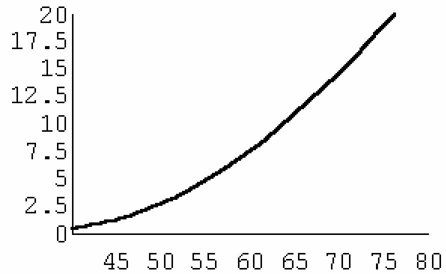
```
<<options\optvalue.m

BlackScholes[58.5,60,0.29,0.04,0.3]
```

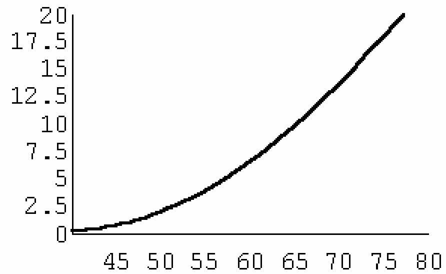
```
3.34886
```

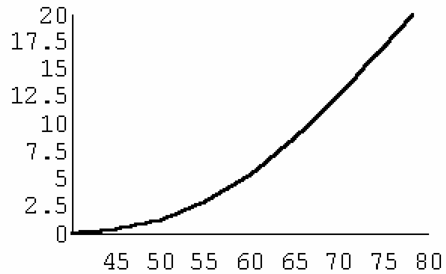
```
Plot[CallPayoff[S,60],{S,0,120},PlotStyle->Thickness[0.01]];
```

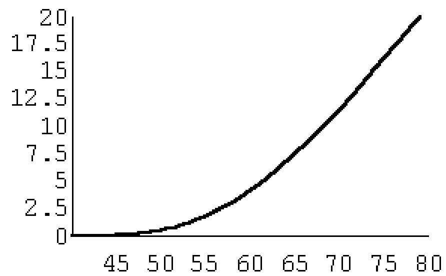


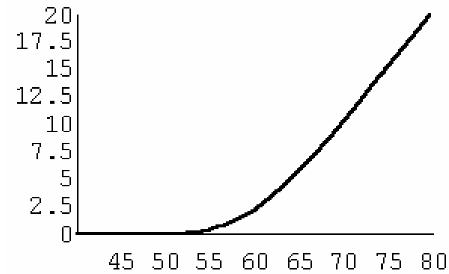

```
Do[Plot[BlackScholes[S,60,0.29,0.04,tau],{S,40,80},PlotRange->{{40,80},{0,20}},
PlotStyle→Thickness[0.01]],{tau,0.9,0.1,-0.2}]
```



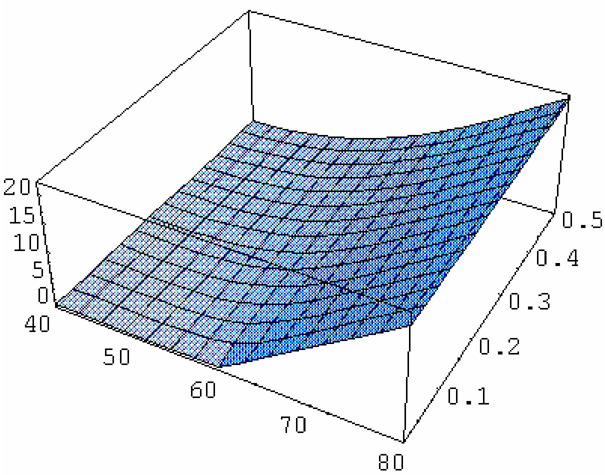




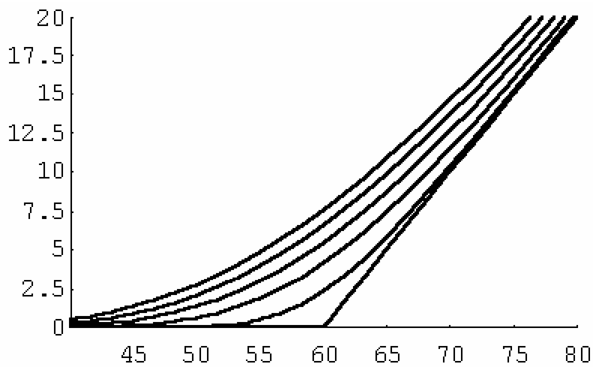





```
Plot3D[BlackScholes[S,60,0.29,0.04,tau],{S,40,80},{tau,0.001,0.5}];
```




```
Plot[Evaluate[Flatten[{ CallPayoff[S, 60], Table[ BlackScholes[S, 60, 0.29, 0.04, tau], {tau, 0.9,
0.1, -0.2}]}]], {S, 40, 80}, PlotRange->{{40, 80}, {0, 20}},PlotStyle->Thickness[0.005]];
```



Obr. 1

Na obrázku 1 sme zobrazili súčasne viac grafov, payoff diagram a vyššie uvedené časové rezy. Vidíme, že v prípade call opcie na akciu nevyplácajúcu dividendy sú všetky rezy nad payoff diagramom.

Expiračná podmienka a okrajové podmienky pre európsku put opciu:

Je zrejmé, že pre put opciu platí:

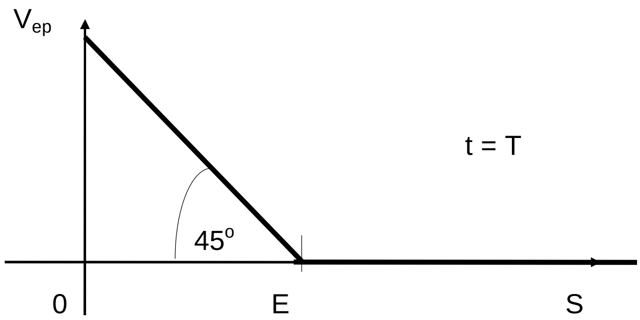
Ak $S < E$ v čase expirácie $\Rightarrow V_{ep}(S,T) = E - S$, t.j. ak je trhová cena akcie S v čase expirácie nižšia ako dohodnutá expiračná cena E je profit vlastníka opcie rovný ich rozdielu.

Ak $S \geq E$ v čase expirácie $\Rightarrow V_{ep}(S,T) = 0$, t.j. naopak, ak je trhová cena akcie S vyššia nanajvýš rovná expiračnej cene E, vlastník právo na predaj za E neuplatní a teda opcia má pre neho nulovú hodnotu.

Takže **expiračnú podmienku pre put opciu** môžme zapísať v tvare

$$V_{ep}(S, T) = \max(E - S, 0) \tag{22}$$

Funkcia $V_{ep}(S, T)$ daná vzťahom (22) sa nazýva vnútornou hodnotou put opcie alebo **put-payoff** diagram.



Okrajové podmienky pre put opciu vyzerajú nasledovne:

$$V_{ep}(0, t) = Ee^{-r(T-t)} \qquad \text{pre } t \in [0, T] \tag{23}$$

T.j. ak v nejakom čase t hodnota akcie S klesne na nulu, vďaka vzťahu (8) či (17) bude nulová až do expirácie a teda vlastník put opcie má zaručenú hotovosť E o čas T-t. Táto hotovosť má v čase t pre neho hodnotu danú vzťahom (23).

V prípade, že cena akcie stúpa nad všetky medze, hodnota put opcie sa zrejme blíži k nule, t.j.

$$V_{ep}(S, t) \to 0 \qquad \text{pre } S \to \infty,\ t \in [0, T] \tag{24}$$

Uvažujme najskôr opcie na akciu nevyplácajúcu dividendy, t.j. nech D=0. Potom **explicitné riešenie problému európskej put opcie** sa dá nájsť v tvare

$$\boxed{V_{ep}(S, t) = V_{ec}(S, t) - S + E\,e^{-r(T-t)}}$$

Využije sa pri tom princíp nazývaný **put - call parita** spočívajúci v nasledujúcom triku. Skonštruujme portfólio P v ktorom sa nachádza:

1 akcia, 1 put opcia, 1 vypísaná call opcia
(long one asset, long one put, short one call)

Hodnota takéhoto portfólia P v čase expirácie T pri ľubovolnej cene akcie S je rovná

$$P(T) = S + \max(E - S, 0) - \max(S - E, 0),$$

t.j.

$$P(T) = S + E - S - 0 = E \qquad \text{pre } S \leq E$$
$$P(T) = S + 0 - (S - E) = E \qquad \text{pre } S \geq E.$$

Takže za každých okolností (pri ľubovoľnej cene akcie) je v čase T zaručené, že hodnota portfólia bude rovná E. Jeho hodnota v čase t musí teda byť

$$P(t) = Ee^{-r(T-t)}, \tag{25}$$

čo je hodnota, ktorá pri bezrizikovom úrokovaní narastie za čas T-t na hodnotu E, pretože

$$P(t)\, e^{\,r\,(T\,-\,t)} = E\, e^{\,-r\,(T\,-\,t)}\, e^{\,r\,(T\,-\,t)} = E.$$

Na druhej strane, hodnota portfólia P v čase t pri ľubovolnej cene akcie S sa rovná

$$P(t) = S + V_{ep}(S,t) - V_{ec}(S,t). \tag{26}$$

Porovnaním vzťahov (24) a (25) dostaneme (23).

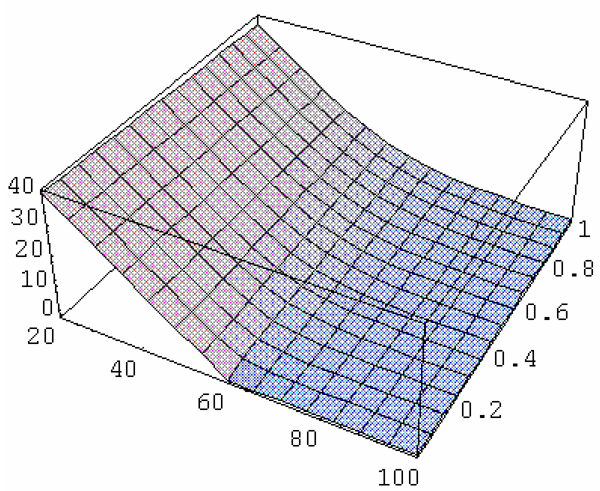
S využitím vzťahu (23) nadefinujme v systéme Mathematica novú funkciu na výpočet hodnoty európskej put opcie a vypočítajme jej hodnotu pri parametroch z príkladu 2.

```
EuropeanPut[S_,E_,sigma_,r_,tau_]:=BlackScholes[S,E,sigma,r,tau] - S +
                                          E*Exp[-r*tau]

EuropeanPut[58.5,60,0.29,0.04,0.3]
```

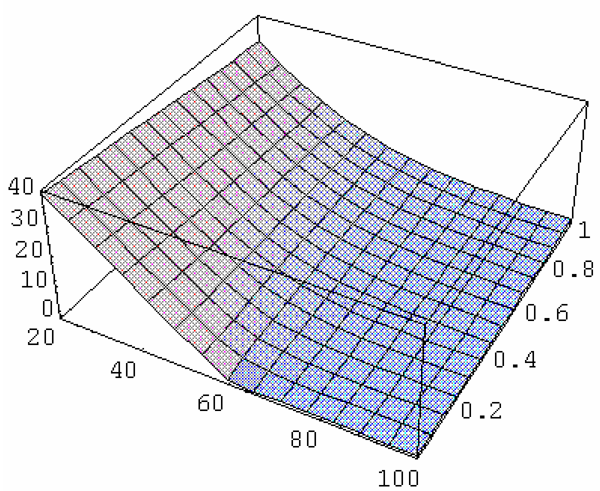
```
4.13317
```

Ďalej si nakreslime 3D grafy (pri rôznych parametroch σ a r) a niekoľko časových rezov funkcie $V_{ep}(S,t)$:

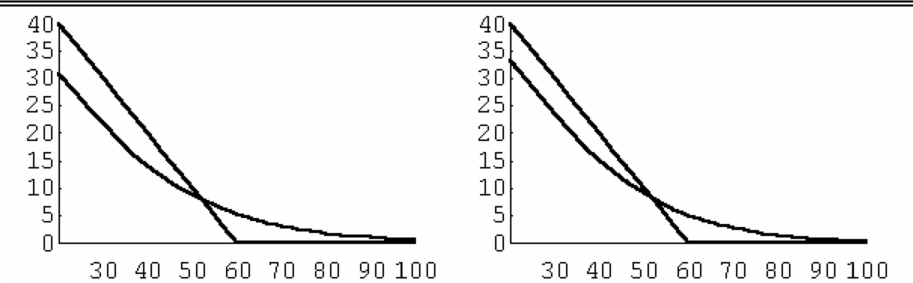
```
Plot3D[EuropeanPut[S,60.,0.29,0.04,tau], {S,20,100}, {tau,0.001,1}];
```

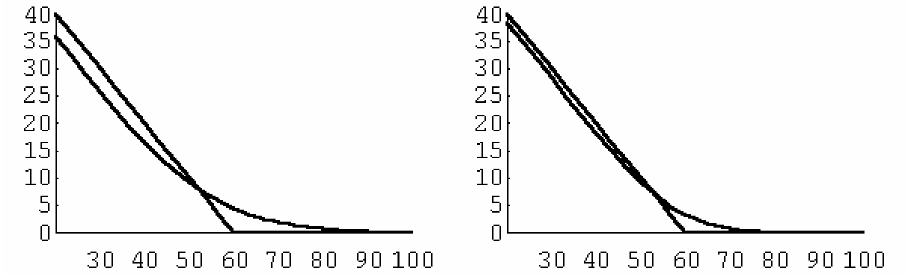



```
Plot3D[EuropeanPut[S,60.,0.4,0.15,tau], {S,20,100}, {tau,0.001,1}];
```




```
Do[Plot[{PutPayoff[S,60], EuropeanPut[S,60,0.4,0.15,tau]},{S,20,100},
PlotRange->{{20,100},{0,40}}, PlotStyle->Thickness[0.01]],{tau,1.1,0.2,-0.3}]
```





Obr. 2

Z obrázka 2 je vidieť, že v každom časovom reze t pred expiráciou existuje cena akcie S_p taká, že funkcia V_{ep} pre $S<S_p$ nadobúda menšie hodnoty ako put-payoff diagram. Tohto faktu sa bližšie dotkneme o chvíľu pri diskusii o amerických opciach.

Zadefinujme teraz vlastnú užívateľskú funkciu EuropeanCall počítajúcu hodnotu európskej call opcie na akciu vyplácajúcu spojité dividendy,t.j. vzťah (21) prenesieme do jazyka systému Mathematica. Využijeme pritom vyjadrenie pre (kumulatívnu) distribučnú funkciu normálneho rozdelenia pravdepodobnosti N(0,1) pomocou takzvanej error funkcie, nachádzajúcej sa v jadre systému Mathematica.

```
<<statisti\continuo.m

??CDF
```

CDF[distribution, x]   gives the cumulative distribution function of distribution at the point x, defined as the integral of the probability density of the distribution from the lowest value in the domain to x.

```
CDF[NormalDistribution[0,1],u]
```

```
             u
1 + Erf [-----------]
           Sqrt[2]
------------------------
         2
```

Pomocou predchádzajúcich dvoch viacmenej pre nás informačných príkazov sme zistili, že v balíku statisti\continuo.m sa nachádzajú kumulatívne distribučné funkcie rôznych rozdelení pravdepodobnosti a teda aj normálneho rozdelenia N(0,1). Mohli by sme ju využiť pri implementácii vzťahu (21). Ak sa chceme vyhnúť použitiu balíka, môžme postupovať inak. Zadefinujeme vlastnú funkciu N zo vzťahu (21), ktorú nazveme NormalCDF. Potom pomocou nej definujeme funkciu na výpočet V_{ecd} so zahrnutím dividendového úroku D. Overíme, či naša definícia súhlasí s pôvodnou Black-Scholesovou funkciou pri D = 0:

```
NormalCDF[u_]:=0.5+0.5*Erf[u/Sqrt[2]]

EuropeanCall[S_,E_,sigma_,r_,D_,tau_]:=Module[{d1,d2},
d1=(Log[S/E]+(r-D+sigma^2/2)*tau)/(sigma*Sqrt[tau]);
d2=d1-sigma*Sqrt[tau];
Return[Exp[-D*tau]*S*NormalCDF[d1]-E*Exp[-r*tau]*NormalCDF[d2]]]
```

```
EuropeanCall[58.5,60,0.29,0.04,0,0.3]
```

```
3.34886
```

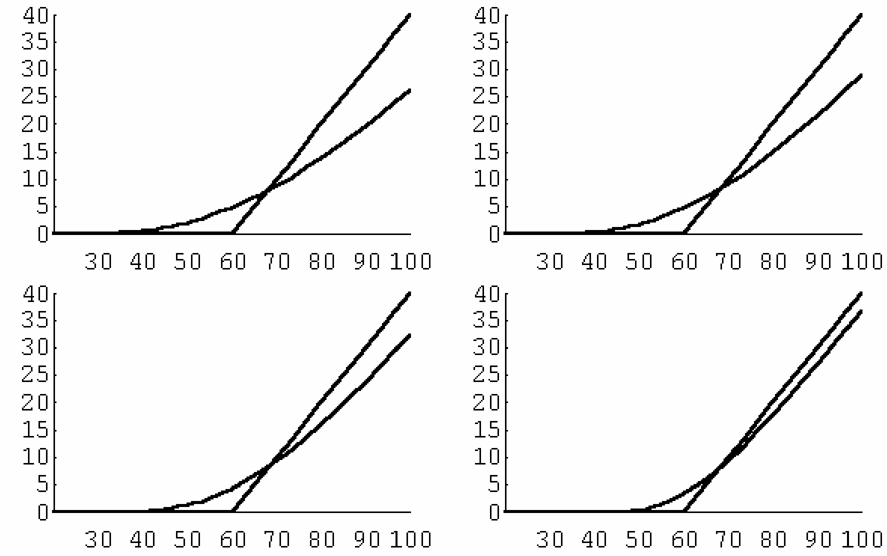
Je zrejmé, že hodnota call opcie s nenulovým dividendovým úrokom (10%) je nižšia:

```
EuropeanCall[58.5,60,0.29,0.04,0.1,0.3]
```

```
2.55205
```

Nakreslime niekoľko časových rezov riešenia spolu s call-payoff diagramom:

```
Do[Plot[{CallPayoff[S,60], EuropeanCall[S,60,0.4,0.04,0.2,tau]},{S,20,100},
PlotRange->{{20,100},{0,40}}, PlotStyle->Thickness[0.01]],{tau,1.1,0.2,-0.3}]
```



Obrázok 3

Opäť si všimnime na obrázku 3, že v každom časovom reze t pred expiráciou existuje cena akcie S_p taká, že funkcia V_{ec} pre $S \geq S_p$ nadobúda menšie hodnoty ako call-payoff diagram. To podobne ako v prípade put opcií indikuje, že môže nastať situácia keď hodnota opcie klesne pod svoju expiračnú hodnotu. Pre držiteľa opcie by teda bolo výhodné opciu uplatniť práve v takejto situácii, nemá zmysel ju naďalej vlastniť a znižovať tak jej hodnotu. Takáto možnosť sa ponúka v prípade tzv. amerických opcií.