SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE

Stavebná fakulta

Evidenčné číslo: SvF-104292-55411

Modelovanie účinkov vetra v prostredí ANSYS

Bakalárska práca

Študijný program: Matematické a počítačové modelovanie

Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika

Školiace pracovisko: Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie

Vedúci záverečnej práce: Ing. Marek Macák, PhD.

Bratislava 2016 **Svetlana Šaušová**

Poďakovanie

Rada by som sa poďakovala vedúcemu práce Ing. Marekovi Macákovi, PhD., za veľmi praktické tipy a kvalifikovanú pomoc, ktoré mi poskytol pri vypracovaní bakalárskej práce. A samozrejme, aj za množstvo času, ktoré mi bol ochotný venovať počas častých konzultácií. Veľká vďaka patrí aj pánovi Ing. Michalovi Franekovi za to, že mi poskytol dáta z veterného tunela, bez ktorých by táto práce ani nemala zmysel. Osobitné poďakovanie patrí mojim priateľom, ktorí to so mnou zvládli aj napriek tomu, že mesiace počúvali len o tejto práci.

Čestné prehlásenie

Vyhlasujem, že som bakalársku prácu vypracovala samostatne s použitím citovanej literatúry a s odbornou pomocou vedúceho práce.

Bratislava, 12. 5. 2016

....

Svetlana Šaušová

Obsah

Abstrakt

Cieľom práce je vytvorenie simulácie, ktorá by hodnoverne modelovala vplyvu vetra na budovu Troch veží v Bratislave, pomocou softwera ANSYS-FLUENT. Výsledky tejto simulácie by sa mali, čo najviac približovať k dátam nameraným vo veternom tuneli STU. V teoretickej časti venujeme najväčšiu pozornosť odvodeniu matematickej podoby $k - \epsilon$ modelu, ktorý je v rámci Fluentu implemntovaný. V menšej miere sa oboznamujeme s kompozíciou veterného tunela STU a s vytváraním medznej vrstvy. V aplikačnej časti práce sa snažíme vytvoriť, čo najkvalitnejšie simulácie. Vytvoríme tri najlepšie simulácie, ktoré si nastavíme na základe teórie vysvetlenej v tejto práci.

Kľúčové slova: turbulencia, $k - \epsilon$ model, veterný tunel, medzná vrstva, Navier-Stokesove rovnice, Fluent

Abstract

The aim of this bachelor thesis is to create a simulation using the ANSYS-FLUENT software which would authentically model the influence of wind on the “Tri Veže” building in Bratislava. The results of this simulation should be as close as possible to the data measured in the STU wind tunnel. In the theoretical part of this work we pay attention to the derivation of the mathematical version of the $k - \epsilon$ model which is already implemented in Fluent. We become familiar with the composition of the STU wind tunnel and the boundary layer formation to a lesser extent. In the application part of the thesis we try to find the simulation of the best quality. Overall, we have run three simulations which were set up using the theory explained in the earlier parts of the work.

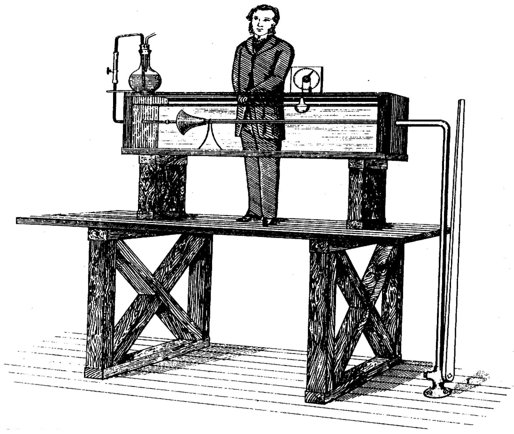
Key words: turbulence, $k - \epsilon$ model, wind tunel, boundary layer, Navier-Stokes equations, Fluent

Úvod

Modelovanie prúdenia sa v širokej miere realizuje pri rôznych inžinierskych aplikáciách. Laicky najviditeľnejšie využitie má v leteckom a automobilovom priemysle, kde sa skúma aerodynamika jednotlivých častí ako aj celku. Už menej ľudí si uvedomuje, že vplyv prúdenia pociťujeme každý deň. Tým prúdením je vietor. Každý z nás zažil, že pri chôdzi medzi vysokými budovami sa poryvy vetra zosilnili. Vietor významne vplýva aj na stabilitu stavieb. Práve keď si toto uvedomíme, zistíme, že prúdenie a jeho modelovanie je dôležité pre modernú architektúru a stavebníctvo, predovšetkým v mestskom prostredí. Spolu s rozvojom informačných technológií sa počítačové simulácie prúdenia stávajú dostupnejšími a ich výsledky stále lepšie aproximujúce realitu.

Práca sa skladá zo štyroch kapitol. V prvej kapitole sa zameriavame na zoznámenie sa so všeobecnými pojmami a terminológiou prúdenia tekutín. V druhej kapitole sa venujeme odvodeniu diferenciálnych rovníc popisujúcich kinematiku skutočných kvapalín, ktoré vedú až k sformulovaniu matematického tvaru $k-\epsilon$ modelu. Analýza kompozície veterných tunelov, ako aj konkrétneho veterného tunelu STU, sa nachádza v tretej kapitole. Okrem toho sa v nej zaoberáme aj medznou vrstvou a jej tvorbou v rámci tunela. V štvrtej kapitole simulujeme vplyv vetra na budovu Troch veží v Bratislave a výsledky simulácií porovnávame s experimentálnymi dátami získanými z veterného tunela. V závere zhodnocujeme výsledky a vyberáme simuláciu, ktorá je kvalitatívne najbližšie k nameraným dátam.

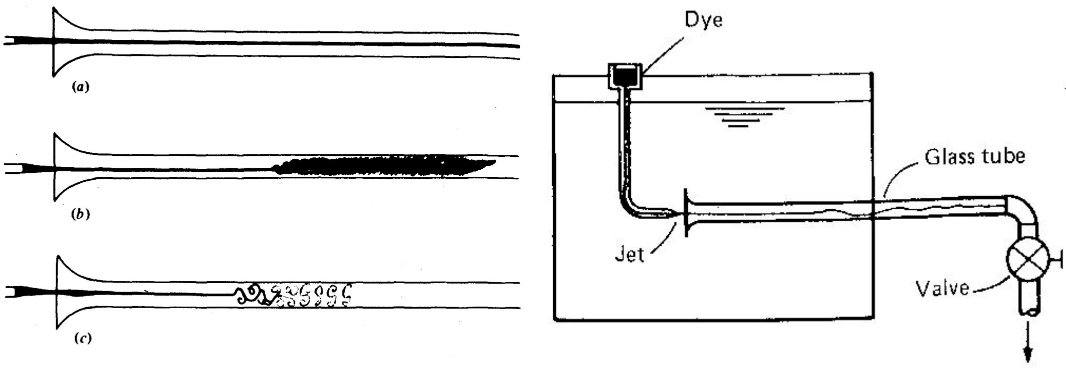
Prúdenie



Obr. 4.1: Osborne Reynolds pri predvádzaní svojho experimentu (r.1883) [22]

Už v 19. storočí vedec menom Osborne Reynolds zistil, že reálna (viskózna, stlačiteľná) kvapalina môže prúdiť dvojakým spôsobom. Reynolds vo svojom článku z roku 1883 popisuje svoj experiment skúmania stability prúdenia v potrubí s kruhovým prierezom.

Podľa výsledkov tohoto experimentu prišiel Reynolds k nasledujúcim záverom.



Obr. 4.2: Originálny náčrt experimentu od Osborna Reynoldsa z roku 1883 [22]

- Ak je rýchlosť prúdenia dostatočne nízka, tak prúžok farbiva pridavaný do stredu toku, vytvára takmer dokonale rovnú čiaru vo vnútri potrubia (obr.4.2-a).

- Ak nie je voda v zásobníku, z ktorého je sledované potrubie zásobované, dokonale kľudná, tak sa prúžok farbiva aj napriek nízkej rýchlosti môže v potrubí vlniť. Ale nebude vytvárať pravidelné poruchy (obr.4.2-b).

- Ak budeme postupne pomaly rýchlosť prúdenia zvyšovať, potom v určitom mieste, dostatočne vzdialenom od vtoku, dôjde k náhlemu zmiešaniu vody a farbiva v celom priereze. Ak budeme aj naďalej rýchlosť prúdenia zvyšovať, tak sa bude miesto premiešania približovať ku miestu vtoku farbiva do potrubia, nikdy ho však nedosiahne (obr.4.2-c).

Reynolds spávne vyhodnotil zásadnú úlohu rýchlostnej bezrozmernej charakteristiky, ktorú dnes nazývame *Reynoldsové číslo*

$$Re = \frac{\boldsymbol{v}d}{\nu} \ ,$$

kde $\boldsymbol{v}$ rýchlosť prúdenia v potrubí, d je prierez potrubia ν kinematická viskozita [22].

Reynolds z tohoto experimentu zistil, že ak jeho bezrozmerný parameter Re narastie nad hodnotu približne 2000, tak prúdenie zmení svoju povahu. Dnes nazývame prúdenie, ktorého hodnota Re je menšia ako 2000 *laminárne* a prúdenie s Re väčším ako 2000 *turbulentné*. Zmena laminárneho prúdenia na turbuentné nenastane okamžite ale môžeme pozorovať *prechodový stav.*

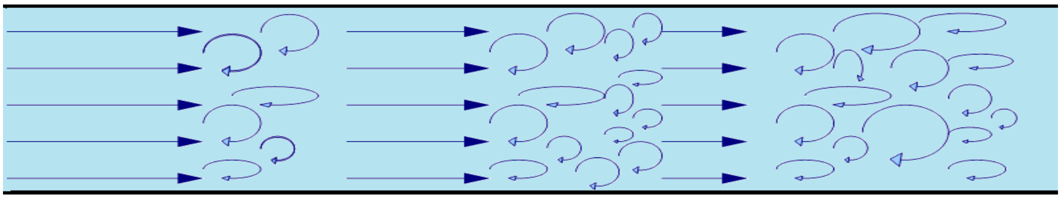
4.1 Laminárne prúdenie

Pri laminárnom prúdení platí, že častice látky prúdia plynule. Tok si môžeme predstaviť ako pozostávajúci z vrstvičiek tekutiny, ktoré sú navzájom rovnobežné a neprekrývajú sa. Vrstvičky sa šmýkajú jedna po druhej a strhávajú so sebou susediace vrstvy. Rýchlejšie vrstvy sú teda vďaka medzimolekulárnym silám (t.j. viskozita) schopné zrýchľovať tie pomalšie a opačne. Ak uvažujeme kontinum častíc, tak podstatou laminárneho prúdenia je, že častice z rôznych vrstiev sa nepremiešavajú, t.j. častice neprúdia medzi vrstvami. Pri laminárnom prúdení skutočných tekutín, však dochádza aj k istému prenosu hybnosti (tepla, hmoty, atď.) v smere kolmom na smer rýchlosti prúdenia. V tomto smere však dochádza len ku molekulárnemu (difúznemu) prenosu hybnosti (tepla, hmoty). To sa deje relatívne pomaly. Molekulárny prenos nie je možné popísať v rámci teórie kontinua, pretože neuvažujeme skutočné molekuly ale len častice kontinua. Do teórie laminárneho prúdenia sa efekty spôsobené molekulárnym prenosom zahrnuli v rámci pojmu viskozity tekutiny ako materiálovej charakteristiky. Pri menších Reynoldsových číslach má viskozita významný účinok na celkový priebeh prúdenia a vyrovnáva malé nehomogénosti, ktoré v prúdení vznikli. Preto je prúdenie schopné si udržať laminárny charakter.

4.2 Turbulentné prúdenie

Možno si to nie vždy uvedomujeme ale sme neustálom kontakte s nejakou prúdiacou tekutinou. Takmer všetko toto prúdenie má turbulentný charakter, či už sa pozrieme na prírodu alebo inžiniersku prax. Napr.Troposféra prúdi turbulentne čoho dôsledkom je aj vznik cykón a anticyklón, ktoré ovplyvňujú globálne počasie. Turbulentné prúdenie by sme snáď mohli charakterizovať ako trojdimenzionálny, časovo premenný pohyb tekutiny, kde každá veličina (napr. rýchlosť, tlak, hustota či teplota) je podriadená chaotickým zmenám v čase a priestore. Ak je možné tieto zmeny popísať stochasticky, tak ich nazývame *fluktuácie*. Z Reynoldsovho pokusu vieme, že turbulentné prúdenia vzniká prechodom od laminárneho. Pri turbulentnom prúdení sú trajektórie častíc nepravidelné a okamžité hodnoty všetkých veličín kolísajú okolo ich stredných hodnôt. V laminárnom prúdení sa turbulencie začínajú objavovať, keď Reynoldsové číslo presiahne kritickú hodnotu. Po prekročení kritickej hodnoty vplyv vyrovnávajúceho účinku viskóznych (molekulárnych) síl na celkový obraz prúdenia slabne. Ak si vezmeme prúdenie v potrubí, tak tu sa najskôr objavujú kratšie úseky turbulentého prúdu, ktoré sú striedané dlhšími, kde tekutina prúdi laminárne (pozn. Intermitentné prúdenie). Tvoria sa *tzv. turbulentné zátky*.

Následne sa turbulentné úseky predlžujú a laminárne skracujú, až kým úplne nevymiznú. Ak bola kritická hodnota Reynoldsového čísla prekročená, malé perturbácie sa objavujú a rastú spontánne až do stavu, keď je prúdenie plne turbulentné. Od kritickej hodnoty Reynoldsového čísla začína prevládať prenos vlastnosti (hybnosti, tepla, atď.)



Obr. 4.3: Intermitentné prúdenie

v priečnom smerem pomocou vírov, ktoré sú mnoho násobne väčšie ako molekuly prúdiacej tekutiny. Vzniknuté víry následne zintenzívňujú difúziu. V každom prúdení s turbulentným charakterom sa vyskytujú víry rôznych veľkostí. Najväčšie víry majú spravidla rozmer približne rovný veľkosti turbulentnej časti prúdu. Takéto víry sa postupne rozpadajú na menšie a menšie. Až na také, ktorých priemer je len niekoľko stotín milimetra. Rozmer takýchto extrémne malých vírov nazývame Kolmogorova mikromierka. Víry vo veľkosti Kolmogorového mirkomerítka sú silne tlmené viskozitou tekutiny a ich kinetická energia sa mení teplo. Takýto jav nenávratnej premeny energie sa nazýva *disipácia*.

Rovnice prúdenia a ich numerické riešenie

5.1 Popis prúdenia - Eulerovský a Lagrangeovský prístup

Existujú dva spôsoby ako študovať pohyb tekuiny. Pri prvom spôsobe si vyberieme jednu elementárnu časticu a pri predpoklade spojitosti tekutiny sledujeme pohyb tejto častice. Takýto popis nazývame Lagrangeovský. Pri druhom spôsobe popisu sledujeme zmeny kinematických veličín v jednotlivých bodoch oblasti prúdenia. Tento druhý spôsob popisu predstavil Euler a po ňom je aj pomenovaný.

5.1.1 Lagrangeovský prístup

Z hľadiska predstavivosti je Lagrangeovský popis jednoduchší. Sledujeme pri ňom trajektóriu jednej, a tej istej častice, a skúmame čo sa s ňou deje. Môžeme si predstaviť, že vybranú časticu $x(x_1, x_2, x_3)$ nejako odlíšime od ostatných (napr. ju zafarbíme) a označíme ju $\hat{x}$. Jej trajektóriu popíšeme funkciou $x = \varphi(\hat{x}, t)$. Tento vzťah nám hovorí, že zafarbená častica $\hat{x}$ (s Lagrangeovskou suradnicou) sa v čase t nachádza v priestorovom bode x. Tento prístup je využívaný k popisu prúdenia, tak je potrebné zadefinovať vzťahy pre rýchlosť $\hat{\boldsymbol{v}}$ a zrýchlenie $\hat{\boldsymbol{a}}$. Tieto vzťahy sa dajú jednoducho vyjadriť ako derivácie polohy podľa času. Rýchlosť častice ako

$$\hat{\boldsymbol{v}}(\hat{x}, t) = \frac{\partial \varphi(\hat{x}, t)}{\partial t}, \tag{5.1.1}$$

zrýchlenie častice ako

$$\hat{\boldsymbol{a}}(\hat{x}, t) = \frac{\partial^2 \varphi(\hat{x}, t)}{\partial t^2}. \tag{5.1.2}$$

5.1.2 Eulerovský prístup

Pri použití Eulerovského spôsobu popisu nesledujeme jednu konkrétnu časticu ale jeden konkrétny priestorový bod. Nezaujíma nás, ktorá častica sa v danom časovom okamihu nachádza práve v sledovanom bode x. Ale z fundamentálnej hypotézy vieme, že je to práve jedna častica, tak kinematický stav tekutiny v pozorovanom bode môžeme charakterizovať vektorom rýchlosti $\boldsymbol{v}(x, t)$. Počas časového intervalu dt sa zmení súradnica častice x o dx. Potom pre i-tú zložku vektoru rýchlosti $v_i + dv_i$ v čase $t + dt$ môžeme napísať Taylorov rozvoj, v ktorom sme zanedbali členy vyšších rádov ako:

$$\begin{aligned} v_i(x_1, x_2, x_3, t) + dv_i &= v_i(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3, t + dt) \\ &= v_i(x_1, x_2, x_3, t) + \frac{\partial v_i}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial v_i}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial v_i}{\partial x_3}dx_3 + \frac{\partial v_i}{\partial t}dt. \end{aligned} \tag{5.1.3}$$

Pri použití *nabla* operátora môžeme vektorovú rovnicu prepísať ako

$$\boldsymbol{v}(x, t) + d\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(x + dx, t + dt) = \boldsymbol{v}(x, t) + (dx.\triangledown)\boldsymbol{v} + \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial xt}dt. \tag{5.1.4}$$

Potom pre eulerovské zrýchlenie $\boldsymbol{a}$ dostaneme vzťah:

$$\boldsymbol{a} = \frac{D\boldsymbol{v}}{Dt} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}.\triangledown)\boldsymbol{v}, \tag{5.1.5}$$

kde $\frac{D}{Dt}$ chápeme ako deriváciu pozdĺž trajektorie. Tento postup môžeme zovšeobecniť a použiť pre akúkoľvek funkciu Eulerovských premenných $f(x, t)$, ktorú chceme derivovať podľa času sledujúceho pohyb častice (t.j. čas je zviazaný s polohou)

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + (f.\triangledown)f. \tag{5.1.6}$$

Takúto totálnu deriváciu pozdĺž trajektórie nazývame materiálová derivácia, a budeme ju využívať pri odvodzovaní v nasledujúcich kapitolách. V praxi sa prevažne využíva Eulerovský popis, kde riešime pole sledovaných veličín v danej oblasti.

5.2 Zákony zachovania

5.2.1 Rovnica kontiuity

Rovnica kontinuity vyjadruje aplikáciu zákonu zachovania hmoty *(V kontrolnom objeme sa súčet hmotnosti častíc kvapaliny, ktoré vstupujú do kontrolného objemu, rovná súčtu hmotnosti častíc kvapaliny, ktoré z objemu vystupujú)* pre mechaniku tekutín. Budeme skúmať zmenu hmotnosti v ľubovoľnom objeme V a v ľubovoľnom časovom intervale $t = \langle t_1, t_2 \rangle$. Zmena hmotnosti vo vybranom objeme môže byť dvojaká:

• časová/lokálna zmena hmotnosti, ktorá prebieha v podobjeme (t.j. stlačenie alebo rozpínanie),

• konvektívna zmena hmotnosti, ktorú spôsobuje rozdiel medzi prítokom a odtokom.

Aby platil zákon zachovania hmotnosti, musí byť súčet lokálnej a konvektívnej zmeny rovný nule. Nás bude zaujímať akú hmotnosť má tekutina nachádzajúca sa vo vybranom podobjeme V v čase t_1 a čase t_2

$$\int_V \rho(x, t_2) dV = \int_V \rho(x, t_1) dV + \text{inflow} - \text{outflow (cez } \partial V). \tag{5.2.1}$$

Inflow -to čo do objemu vtečie je $\boldsymbol{v}.\boldsymbol{n} < 0$, kde $\boldsymbol{v}$ je vektor rýchlosti prudenia a $\boldsymbol{n}$ je normála ku ploche cez ktorú prebieha inflow/outflow do kontrolného objemu V.
Outflow -to čo z objemu vytečie je $\boldsymbol{v}.\boldsymbol{n} > 0$. Hmotnostný prietok tekutiny cez časť hranice dS(plôška) kontrolného objemu za malý časový interval dt počas, ktorého sa rýchlosť $\boldsymbol{v}$ nemení, je daný ako:

$$\rho(\boldsymbol{v}.\boldsymbol{n}) dS dt. \tag{5.2.2}$$

Hranicu rozdelíme na 2 časti. Na časť *inflow* ∂V^{in} a časť *outflow* ∂V^{out}. Celkový prietok cez celú hranicu ($\partial V = \partial V^{in} \cup \partial V^{out}$) sa bude rovnať sume prietokov cez jednotlivé plôšky dS. Keďže uvažujeme dS ako elementárne (nekonečne) malú plôšku, tak suma plôšok bude vyjadrená ako integrál cez hranicu. Tak získame celkový *inflow resp. outflow* za časový interval $t = \langle t_1, t_2 \rangle$ cez celú hranicu $\partial V = \partial V^{in} \cup \partial V^{out}$

$$\int_{t^1}^{t^2} \int_{\partial V} \rho \boldsymbol{v}.(-\boldsymbol{n}) dS dt - \int_{t^1}^{t^2} \int_{\partial V} \rho(\boldsymbol{v}.\boldsymbol{n}) dS dt \ . \tag{5.2.3}$$

Ak vzťah (5.2.3) dostadíme do bilancie (5.2.1) získame:

$$\begin{aligned} \int_V \rho(x,t_2)dx = \int_V \rho(x,t_2)dx + \int_{t^1}^{t^2} \int_{\partial V} \rho \boldsymbol{v}.(-\boldsymbol{n}) dS dt - \int_{t^1}^{t^2} \int_{\partial V} \rho(\boldsymbol{v}.\boldsymbol{n}) dS dt \\ \Longleftrightarrow \int_V (\rho(x,t_2) - \rho(x,t_1))dx + \int_{t^1}^{t^2} \int_{\partial V} \rho(\boldsymbol{v}.\boldsymbol{n}) dS dt = 0 \Longleftrightarrow \\ \Longleftrightarrow \int_{t^1}^{t^2} \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dt + \int_{t^1}^{t^2} \int_V \nabla.(\rho v) dx dt = 0 \Longleftrightarrow \\ \Longleftrightarrow \int_{t^1}^{t^2} \int_V (\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla.(\rho \boldsymbol{v})) dx dt = 0. \end{aligned} \tag{5.2.4}$$

Pretože rovnica (5.2.4) platí pre ľubovoľný objem V a ľubovoľný čas $t = \langle t_1, t_2 \rangle$, tak je možné dokázať, že platí aj rovnosť výrazov pod integrálom

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla.(\rho \boldsymbol{v}) = 0. \tag{5.2.5}$$

Ak budeme uvažovať nestlačiteľné prúdenie, čo my pre účely tejto práce uvažovať budeme, tak lokálna zmena bude rovná nule t.j. $\rho =$konšt. Z toho vyplýva, že $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ a teda rovnica kontinuity pre nestlačiteľné prúdenie bude mať tvar

$$\nabla.(\rho \boldsymbol{v}) = 0. \tag{5.2.6}$$

5.2.2 Zákon zachovania hybnosti

Zákon zachovania hybnosti vychádza z 2. Newtonovho zákona - **Zákona sily**

$$\begin{gathered} \mathbf{F} = m\boldsymbol{a} \qquad \text{,kde} \qquad \boldsymbol{a} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} \\ \mathbf{F} = \frac{m \partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = \frac{\partial m \boldsymbol{v}}{\partial t}. \end{gathered} \tag{5.2.7}$$

Vieme, že hybnosť telesa $\boldsymbol{H}$, s hmotnosťou m, ktoré sa pohybuje rýchlosťou $\boldsymbol{v}$, je vyjadrená ako $\boldsymbol{H} = m\boldsymbol{v}$, využitím tohoto vzťahu v (5.2.7) získame

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \tag{5.2.8}$$

Pri kvapalinách budeme uvažovať celkovú hybnosť daného objemu $V(t)$. A preto si hmotnosť vyjadríme ako $m(x,t) = \int_{V(t)} \rho(x,t)dx$. Potom pre objem V(t), tvorený v každom čase t tými istými časticami, definujeme celkovú hybnosť objemu (vyjadrenú po zložkách) ako

$$H_i(t, V(t)) = \int_{V(t)} \rho(x,t)v_i(x,t)dx\ . \tag{5.2.9}$$

Celkovú silu pôbosobiacu na objem $V(t)$ môžeme označiť ako $F(t, V(t))$. Newtonov 2. zákon vyjadrený v tvare (8), ktorý budeme ďalej nazývať **zákon zachovania hybnosti** hovorí, že zmena celkovej hybnosti častíc v objeme $V(t)$ je rovná celkovej sile, ktorá pôsobí na objem $V(t)$. Jeho matematické vyjadrenie bude mať tvar:

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}(t, V(t))}{\partial t} = \mathbf{F}(t, V(t)). \tag{5.2.10}$$

Aplikovaním transportnej vety na ľavú stranu rovnice získame

$$\int_{V(t)} (\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} \nabla.(\rho v_i(\mathbf{v})))dx = F_i \tag{5.2.11}$$

Celkové sily pôsobiace na objem V(t) môžeme rozdeliť na:
•objemové sily $F^B(t,(V(t)))$ (napr.gravitačné,magnetické),
•povrchové/plošné sily $F^S(t,(V(t)))$.
Pre objemové sily zavedieme pojem **intenzity objemovej sily** $f(x,t)$, pre ktoré platí:

$$F^B(t, V(t)) = \int_{V(t)} \rho(x,t)f(x,t)dx. \tag{5.2.12}$$

Ak budeme ako objemovú silu uvažovať gravitačnú silu tak jej intezita je daná vektorom $(0,0,-g)$, kde g je gravitačné zrýchlenie ($g = 9.78$ až $9,83$) a súradnicový systém je orientovaný tak, že osi x, y ležia v dotykovej rovine povrchu zeme a os z smeruje von. Plošné sily opisujú ako na seba pôsobia dva vybrané objemy cez stykovú stenu (u nás cez $\partial V(t)$). Preto je okrem ich veľkosti veľmi dôležité vedieť aj ich smer pôsobenia.

Smer pôsobenia budeme charakterizovať pomocou normálového vektora $\boldsymbol{n}$ ku hranici oblasti $\partial V(t)$. Pre $\boldsymbol{n}$ platí, že ak $s \in \partial V(t)$, tak môžeme normálu definovať aj ako $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}(s)$. Tak ako sme si pri objemových silách zaviedli pojem intenzity objemovej sily, tak povrchové sily budeme charakterizovať pomocou **hustoty plošnej sily** $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}(t, s, \boldsymbol{n}(s))$. Vektor $\boldsymbol{T}$ sa nazýva aj **vektor napätí** a predstavuje plošnú silu pôsobiacu v čase t na jednotkovú rovinnú plochu, ktorá prechádza bodom s a je kolmá na vektor $\boldsymbol{n}(s)$. Potom pre objem $V(t)$ dostaneme vyjadrenie povrchových síl v tvare:

$$\boldsymbol{F}^s(t, \partial V(t)) = \int_{\partial V(t)} \boldsymbol{T}(t, s, \boldsymbol{n}(s)) ds. \tag{5.2.13}$$

Po dosadení rovníc (5.2.9), (5.2.12) a (5.2.13) do vzťahu

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = \boldsymbol{F}^s + \boldsymbol{F}^B, \tag{5.2.14}$$

pre celkovú silu posôbiacu na objem $V(t)$, získame integrálnu formu zákonu zachovania hybnosti

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V(t)} \rho(x,t) \boldsymbol{v}(x,t) dx = \int_{V(t)} \rho(x,t) \boldsymbol{f}(x,t) dx + \int_{\partial V(t)} \boldsymbol{T}(t, s, \boldsymbol{n}(s)) ds, \tag{5.2.15}$$

ktorá vyjadruje skutočnosť, že rýchlosť zmeny hybnosti objemu $V(t)$ v čase t sa rovná súčtu objemovej a plošnej sily pôsobiacej na $V(t)$ v danom čase. Na to, aby sme mohli rovnicu (5.2.15) vyjadriť v tvare parciálnej diferenciálnej rovnice, je nutné predpokladať, že závislosť vektora $\boldsymbol{T}$ od $\boldsymbol{n}$ je lineárna. Najjednoduchšia závislosť vektorovej plošnej sily $\boldsymbol{T}(x, t, \boldsymbol{n})$ od normálového vektora $\boldsymbol{n}$ je

$$\boldsymbol{T} = p\boldsymbol{n}, \tag{5.2.16}$$

kde $p = p(x,t)$ je funkcia predstavujúca **tlak**. Tlak je vyjadrený skalárnou hodnotou p a smer jeho pôsobenia je určený normálou ku ploche $\boldsymbol{n}$. Tlak je v ponímaní (5.2.16) plošná sila, ktorá pôsobí v bode x a v čase t všetkými smermi rovnako, pričom jej orientácia je určená len voľbou roviny S (teda jej normalovým vektorom $\boldsymbol{n}$) na ktorú pôsobí[10]. Ak pri opise tekutiny považujeme za jedinnú pôsobiacu povrchovú silu tlak, tak takúto tekutinu môžeme nazývať **ideálnou tekutinou** (nereálnou). Aby sme docielili to, že jediná uvažovaná povrchová sila bude tlak, tak musíme zanedbať vplyv trecích a šmykových síl. V mechanike kvapalín sa trecie a šmykové sily zahŕňajú pod pojem viskozity kvapaliny. Z toho vyplýva, že ideálnou kvapalinou je **neviskózna** kvapalina (pozn. kvapalina s nulovou viskozitou). Ďalej budeme predpokladať, že tlak $p = p(x,t)$ je v objeme $V(t)$ spojite rozložený, a teda vo všetkých bodoch hranice $\partial V(t)$ v čase t pôsobí napätie $\boldsymbol{T} = p(s,t)(-\boldsymbol{n}(s))$, kde $s \in \partial V(t)$.Potom vzťah (5.2.13) vieme prepisať na

$$\boldsymbol{F}^s(t, \partial V(t)) = -\int_{\partial V(t)} p(t,s)\boldsymbol{n}(s))ds. \tag{5.2.17}$$

Dosadením tohto vzťahu (19) do (17) dostávame *integrálnu formuláciu zákona zachovania hybnosti pre pohyblivý kontrolný objem ideálnej kvapaliny*

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{V(t)} \rho(x,t)\boldsymbol{v}(x,t)dx = \int_{V(t)} \rho(x,t)\boldsymbol{f}(x,t)dx - \int_{\partial V(t)} p(t,s)\boldsymbol{n}(s))ds. \tag{5.2.18}$$

Po aplikácií Greenovej (Divergenčnej) vety na túto rovnicu, je možné ju zapísať v tvare

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{V(t)} \rho(x,t)\boldsymbol{v}(x,t)dx = \int_{V(t)} \rho(x,t)\boldsymbol{f}(x,t)dx - \int_{V(t)} \nabla p(x,t)dx. \tag{5.2.19}$$

[10]

5.3 Rovnice ideálnej tekutiny

5.3.1 Eulerove pohybové rovnice

Pri odvodení Eulerových pohybovýh rovníc sa budeme zaoberať výhradne ideálnou kvapalinou. Tieto rovnice vyjadrujú rovnováhu objemových a povrchových síl od vlastného pohybu častíc ideálnej tekutiny. Tak ako sme už v predošlej podkapitole spomínali, pre ideálnu tekutinu budeme ako jediné povrchové sily uvažovať sily tlakové. Po jemnej úprave rovnice (5.2.19) dostaneme zákon zachovania hybnosti vo vektorovom tvare

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{V(t)} \rho(x,t)\boldsymbol{v}(x,t)dx = \int_{V(t)} (\rho(x,t)\boldsymbol{f}(x,t) - \nabla p(x,t))dx. \tag{5.3.1}$$

Ak si tento vektorový tvar rozpíšeme po zložkách a súčasne na jeho ľavú stranu aplikujme transportnú vetu tak dostávame

$$\int_{V(t)} (\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \nabla.(\rho v_i \boldsymbol{v}))dx = \int_{V(t)} \rho(x,t) f_i(x,t) - \frac{\partial p(x,t)}{\partial x_i} dx \quad \text{pre} \quad i = 1,2,3. \tag{5.3.2}$$

Už na začiatku sme si definovali, že $V(t)$ je ľubovoľný objem. Dá sa dokázať, že ak platí integrálna rovnosť (5.3.2), potom sa musia rovnať aj výrazy pod integrálom

$$(\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \nabla.(\rho v_i \boldsymbol{v})dx = \rho(x,t) f_i(x,t) - \frac{\partial p(x,t)}{\partial x_i} dx. \tag{5.3.3}$$

Týmto sme získali parciálne diferenciálne rovnice, ktoré nazývame **Eulerove pohybové rovnice** v *konzervatívnom resp. divergentom* tvare[17]. Iný tvar rovníc môžeme získať rozpísaním pravej strany ako

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial t} v_i + v_i \nabla.(\rho \boldsymbol{v}) + \rho \boldsymbol{v}.\nabla v_i = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} \Longrightarrow \\ \Longrightarrow \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i (\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla.(\rho \boldsymbol{v})) + \rho \boldsymbol{v}.\nabla v_i = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i}. \end{aligned} \tag{5.3.4}$$

Keď sa dobre pozrieme na zátvorku $(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla.(\rho \boldsymbol{v}))$ určite si všimneme že, ide o vyjadrenie rovnice kontinutity. Podľa toho, čo sme si v predchadzájúcich podkapitolách odvodili platí $(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla.(\rho \boldsymbol{v})) = 0$. Ak teda tento vzťah využijeme v rovniciach (5.3.4), tak získame *nekonzervatívnu* formuláciu Eulrových rovníc

$$\begin{gathered} \frac{\partial v_i}{\partial t} + \boldsymbol{v}.\nabla v_i = f_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} \\ \Longleftrightarrow \\ \frac{d}{dt} \boldsymbol{v} = \boldsymbol{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p. \end{gathered} \tag{5.3.5}$$

Po rozpísaní všetkých troch zložiek dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial x_3} = f_1 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_2}{\partial x_3} = f_2 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_2} \\ \frac{\partial v_3}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_3}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_3}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = f_3 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_3}, \end{aligned} \tag{5.3.6}$$

čo je systém troch rovníc, v ktorom je celkovo až päť neznámych. A sú to 3 zložky rýchlosti v_1, v_2, v_3, hustota ρ a tlak p. Aby sme mohli takýto systém riešiť potrebujeme ešte minimálne dve ďalšie rovnice, resp. jednu ak budeme uvažovať nestlačiteľné tekutiny pre ktoré platí $\rho = const.$ z čoho vyplýva, že budeme už mať len 4 neznáme [17]. Ak ale budeme uvažovať stlačiteľnú kvapalinu, tak môžeme použiť stavovú rovnicu a rovnicu kontinuity, ktorú sme si definovali už v predchadzajúcich podkapitolách. Celkovo teda budeme mať systém 5 rovníc (3 Eulerove pohybove rovnice, stavovú rovnicu a rovnicu kontinuity) o 5 neznámych, čo by sme už možno mohli analyticky, prípadne numericky riešiť [10].Keďže na pravej strane rovnice (5.3.3) nám vystupuje úplná derivácia rýchlosti podľa času, tak *nekonzervatívny* tvar Eulerových pohybových rovníc nám popisuje príčinu a priebeh prúdenia spôsobeného účinkami tlaku a vonkajších síl na kvapalinu.

5.4 Rovnice reálnej tekutiny

V podkapitole o zákone zachovania hybnosti sme si zaviedli pojem *hustoty plošných síl* $\boldsymbol{T}(t, x, \boldsymbol{n})$. Pomocou neho sme si definovali výsledné plošné sily ako

$$\boldsymbol{F}^s(t, \partial V(t)) = \int_{\partial V(t)} \boldsymbol{T}(t, x, \boldsymbol{n}) dS. \tag{5.4.1}$$

Ako sme už uviedli vyššie na to, aby sme mohli *zákon zachovania hybnosti resp. Eulerové pohybové rovnice* definovať v tvare parciálnej diferenciálnej rovnice, museli sme uvažovať, že závislosť $\boldsymbol{T}$ od orientácie plochy $\boldsymbol{n}$ je **lineárna**. Doposiaľ sme sa zameriavali len na prípad *ideálnej kvapaliny*, preto nám ako lineárna závislosť ($\boldsymbol{T}$ od $\boldsymbol{n}$) postačoval vzťah (5.2.16). Pri reálnej kvapaline si už s takouto jednoduchou závislosťou nevystačíme. Aby sme mohli hovoriť o *reálnej* tekutine musíme vziať do úvahy aj vplyv viskozity tekutiny. Teda šmykové a trecie sily, ktoré v skutočnej/reálnej kvapaline pôsobia. Preto ďalej už budeme uvažovať len všeobecnejšiu lineárnu závislosť ($\boldsymbol{T}$

od $\boldsymbol{n}$):

$$\boldsymbol{T} := (\sum_{j=1}^{3} \boldsymbol{n}_j \tau_{j1}, \sum_{j=1}^{3} \boldsymbol{n}_j \tau_{j2}, \sum_{j=1}^{3} \boldsymbol{n}_j \tau_{j3}) = \boldsymbol{n}.\boldsymbol{\tau}. \tag{5.4.2}$$

Kde $\boldsymbol{\tau}$ je **tenzor napätia**

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix} \tag{5.4.3}$$

$$\tau_{ij}(x,t) = T_i(x,t,\boldsymbol{e}_j) \qquad i,j = 1,2,3$$

a symbol $\boldsymbol{e}_j$ je jednotkový vektor v smere jednej zo súradnicových osí $\boldsymbol{e} = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$. Tri plošné sily $\tau_{i,j}$ *, kde* $\quad i = j$ budeme názývať *normálové napätia* a zvyšných šesť zložiek tenzora napätia $\tau_{i,j}$ *, kde* $\quad i \neq j$ sa nazývajú *tangenciálne napätia*. Vieme, že tenzor napätia je **symetrický** a teda platí

$$\tau_{ij}(x,t) = \tau_{ji}(x,t) \ . \tag{5.4.4}$$

Je veľmi dôležité si uvedomiť, že aj napriek tomu, že hodnoty napätí $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ sa formálne rovnajú, tak označujú dve rôzne fyzikálne veličiny. Tým pádom, aj keď platí (5.4.4), tak každá hodnota označuje inú zložku plošnej sily. Pomocou tenzora napätí $\boldsymbol{\tau}$ si môžeme plošné sily $\boldsymbol{F}^s$ definovať ako

$$\boldsymbol{F}^s(V(t)) = \int_{\partial V(t)} \boldsymbol{n}.\boldsymbol{\tau} dS = \int_{\partial V(t)} \sum_{j=1}^{3} n_j \tau_{ji} dS. \tag{5.4.5}$$

Na tento vzťah (5.4.5) môžeme aplikovať Greenovu vetu, za predpokladu, že τ_{ij} sú spojité diferencovateľné funkcie

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{F}^s(V(t)) = \int_{\partial V(t)} \boldsymbol{n}.\boldsymbol{\tau} dS = \int_{\partial V(t)} \sum_{j=1}^{3} n_j \tau_{ji} dS = \\
\int_{\partial V(t)} n_1\tau_{1i} + n_2\tau_{2i} + n_3\tau_{3i} \; dS \\
\Longleftrightarrow \qquad (Green) \qquad \Longleftrightarrow \\
\boldsymbol{F}^s(V(t)) = \int_{V(t)} \frac{\partial \tau_{1i}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{2i}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{3i}}{\partial x_3} \; dx = \int_{V(t)} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} dx.
\end{aligned}
\tag{5.4.6}
$$

Ak vzťah (5.4.5) pre plošné sily dosadíme do (5.2.15) *integrálnej formy zákonu zachovania hybnosti*, získame

$$
\frac{\partial}{\partial t} \int_{V(t)} \rho(x,t)\boldsymbol{v}(x,t) dx = \int_{V(t)} \rho(x,t)\boldsymbol{f}(x,t) dx + \int_{\partial V(t)} \sum_{j=1}^{3} n_j \tau_{ji} dS. \tag{5.4.7}
$$

Využitím transportnej vety a vzťahov (5.4.5) a (5.4.7) získame novú podobu zákonu zachovania hybnosti, kde budú už všetky integrály objemové

$$
\int_{V(t)} (\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \nabla.(\rho v_i \boldsymbol{v})) dx = \int_{V(t)} (\rho f_i + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j}) dx. \tag{5.4.8}
$$

Zo skutočnosti, že sme si $V(t)$ definovali ako ľubovoľný podobjem a t ako ľubovoľný čas, môžeme usúdiť, že platí aj parciálny diferenciálny tvar rovnice zákonu zachovania hybnosti s využitím tenzora napäti pre vyjadrenie plošných síl. Tým dostávame **základné pohybové rovnice reálnej kvapaliny**

$$
\frac{\partial (\rho v_i)}{\partial t} + \nabla.(\rho v_i \boldsymbol{v}) = \rho f_i + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j}, \qquad i = 1, 2, 3 \; . \tag{5.4.9}
$$

Pomocou rovnice kontinuity (5.2.5) môžeme odvodiť aj *nekonzevatívny* tvar základných pohybových rovníc reálnej kvapaliny, ktorý nám popisuje vzťah pre zrýchlenie a prúdenie

$$
\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{f} + \frac{1}{\rho} \nabla.\boldsymbol{\tau}. \tag{5.4.10}
$$

[10]. Keď si vzťah (5.4.10) porovnáme s nekonzervatívnym vyjadrením Eulerových pohybových rovníc (5.3.5), zistíme, že vzťah (5.3.5) je len špeciálnym prípadom (5.4.9), kde jediné nenulové napätia sú normálové. Tenzor $\boldsymbol{\tau}$ je v prípade Eulerových pohybových rovníc (5.3.5) vyjadrený ako

$$\boldsymbol{\tau} = -p\mathbb{I} \ , \tag{5.4.11}$$

kde p je tlak a $\mathbb{I}$ je jednotková matica s rozmermi 3×3 [10].

5.4.1 Navier-Stokesové rovnice

Vzťah medzi tenzorom napätí a ďalšími veličinami popisujúcimi prúdenie kvapalín, konkrétne rýchlosťou a jej derivátmi, popisujú tzv. *reologické rovnice*. Tú najjednoduchšiu reologickú rovnicu sme si už vlastne uviedli ako vzťah (5.4.11), ktorý ale dobre popisoval len neviskóznu kvapalinu. V prípade reálnej (viskóznej) tekutiny musíme brať do úvahy aj sily šmykového trenia. Z tohto dôvodu musíme vzťah (5.4.11) o niečo obohatiť tak, aby bol vyhovujúci aj pre viskóznu kvapalinu. Tento príspevok bude charakterizovať šmykové napätia, označme si ho $\dot{\boldsymbol{\tau}}$. Tenzor napätí pre viskóznu kvapalinu teda bude mať tvar:

$$\boldsymbol{\tau} = -p\mathbb{I} + \dot{\boldsymbol{\tau}} \ . \tag{5.4.12}$$

Na záklde týchto *Stokesových postulátov*

1. *Kvapalina je spojitá a jej tenzor napäti je lineárna funkcia tlakových prírastkov*

2. *Keď je napätie nulové, deformačný zákon sa zredukuje na hydrostatickú tlakovú podmienku* $\boldsymbol{\tau} = -p\mathbb{I}$

3. *Tekutina je izotropická látka, jej vlastnosti sú nezávislé na smere a teda deformačný zákon je nezávislý od suradnicových osí,*

môžeme odvodiť závislosť medzi tenzorom napätí $\boldsymbol{\tau}$, termodynamickými veličinami a tenzorom rýchlostnej deformácie $\mathbb{D}$.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{D}(\boldsymbol{v}) &= (d_{ij}(\boldsymbol{v}))^3{}_{i,j=1} \\
d_{ij}(\boldsymbol{v}) &= \frac{1}{2}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i})
\end{aligned}
\tag{5.4.13}
$$

Potom zo *Stokesových postulátov* ďalej vyplýva:

- $\dot{\boldsymbol{\tau}}$ *je hladkou funkciou tenzora rýchlostnej deformacie* $\mathbb{D}$,
- *ak* $\mathbb{D} = 0$ *potom* $\boldsymbol{\tau} = -p\mathbb{I}$,
- *vzťah medzi* $\dot{\boldsymbol{\tau}}$ *a* $\mathbb{D}$ *je lineárny.*

V dôsledku vyššie uvedených skutočností tenzor napätí $\boldsymbol{\tau}$ nadobudne tvar

$$\boldsymbol{\tau} = -p\mathbb{I} + \lambda\mathbb{I}\nabla.\boldsymbol{v} + 2\mu\mathbb{D} \ , \tag{5.4.14}$$

kde μ a λ sú konštanty alebo sklalárne funkcie termodynamických veličín, μ je prvý koeficient viskozity, tiež nazývaný *dynamická viskozita*, a λ je druhý koeficient viskozity. Ak platí (5.2.6) (prípad nestlačiteľných tekutín), tak nemá druhý koeficient λ význam. Vo všeobecnosti treba stlačiteľné tekutiny charakterizovať obomi koeficientmi. V kinetickej teórii plynov boli odvodené podmienky

$$\mu \geq 0, \qquad 3\lambda + 2\mu \geq 0 \ . \tag{5.4.15}$$

Pre monoatomické plyny platí $3\lambda + 2\mu = 0$, ale táto formulácia podmienky je často využívaná aj pre zložitejšie plyny.

Dosadením vzťahu (5.4.14) do *pohybových rovníc reálnej tekutiny* (5.4.10),

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \nabla.(\rho v_i \boldsymbol{v}) = \rho f_i + \frac{\partial \tau_{1i}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{2i}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_3 i}{\partial x_3}$$

,

pričom

(5.4.16)

$$\tau_{ji} = \begin{Bmatrix} -p + \lambda\nabla.\boldsymbol{v} + \mu(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}) \ , & ak \quad i = j, \\ \mu(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}) \ , & ak \quad i \neq j \end{Bmatrix}.$$

Dostávame **Navier-Stokesove rovnice pre prúdenie tekutiny** v *konzervatívnej* podobe

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \nabla.(\rho v_i \boldsymbol{v}) = \rho f_i + \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial(\lambda\nabla.\boldsymbol{v})}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}(\mu(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i})). \qquad (5.4.17)$$

Teraz máme **štyri** rovnice (*rovnica kontinuity, a tri Navier-Stokesove rovnice*) o **piatich** neznámych (ρ, p, v_1, v_2, v_3).

Podobnosť

O *Navier-Stokesových rovniciach* sme si už povedali, že popisujú prúdenie reálnej tekutiny. Možno, keby sme našli ich *analytické* riešenie, mali by sme dokonalú predstavu o viskóznom prúdení. Nikto však *analytické* riešenie zatiaľ nepozná, preto sa na riešenie *Navier-Stokesových rovníc* používajú rôzne numerické metódy, najčastejšie *metóda konečných objemov.* Nech sa budeme snažiť sebeviac, každý model prúdenia ktorý vytvoríme, bude stále len zjednodušením skutočnosti. Preto je užitočné modely konfrontovať s experimentmi. Veľmi často sa ale stáva, že nie je možné realizovať laborátorne experimenty za rovnakých okolností a rozmerov, v akých by sme prúdenie potrebovali študovať. Napríklad simulovanie vplyvu vetra na budovu vo veternom tuneli (prípad našej práce) by sme asi ťažko mohli uskutočnit v reálnych rozmeroch. Z tohoto dôvodu sa študuje **podobnosť matematických modelov**, kedy sa závádza tzv. *reprezentatívny model.* V zmysle tohoto si budeme aj už odvodené *Navier-Stokesové rovnice* upravovať na *reprezentatívny tvar.* Pre účely tejto práce si postup odvodzovania *reprezentatívnych Navier-Stokesových rovníc* môžeme trochu zjednodušiť a odvodzovať ich len pre *nestlačiteľné prúdenie.* Z toho vyplýva, že môžeme uvažovať takúto *rovnicu kontinuity*

$$\nabla.\boldsymbol{v} = 0 \tag{5.4.18}$$

a *Navier-Stokesové rovnice* (5.4.17) potom môžeme zjednodušiť na tvar

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = f_i - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \triangle v_i \ , \tag{5.4.19}$$

kde $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ je koeficient *kinetickej viskozity.* Budeme sa snažiť zaviesť taký reprezentatívny model, aby bolo z neho možné odvodiť podobné situácie *tzv. škálovaním.* Zvolíme si *tzv. reprezentatívnu (referenčnú)* dĺžku L^*, čo môže byť nejaký významný priesorový rozmer, napr. priemer potrubia či rozmer obtekanej budovy. Pomocou tejto referenčnej dĺžky zavedieme *bezrozmerné* priestorové súradnice

$$\tilde{x_i} = \frac{x_i}{L^*} \ . \tag{5.4.20}$$

Pri takejto transformácií prejde pôvodná oblasť V na preškálovanú oblasť $\tilde{V}$, v ktorej referenčná dĺžka L^* bude mať jednotkovú veľkosť. Ďalej si zvolíme *reprezentatívnu rýchlosť* $\boldsymbol{v}^*$ a zadefinujeme si *bezrozmernú* veličinu rýchlosti [10]

$$\tilde{\boldsymbol{v}} = \frac{\boldsymbol{v}}{\boldsymbol{v}^*} \ . \tag{5.4.21}$$

Pri odvodeniach budeme potrebovať aj bezrozmernú hustotu

$$\tilde{\rho} = \frac{\rho}{\rho^*} \tag{5.4.22}$$

a bezrozmernú časovú veličinu

$$\tilde{t} = \frac{\boldsymbol{v}^*}{L^*} t \ . \tag{5.4.23}$$

Pre nestalčiteľné prúdenie je $\tilde{\rho} = 0$. Odvodíme si rovnice pre bezrozmerné veličiny. Pre *rovnicu kontinuity* dostaneme

$$\nabla.\boldsymbol{v} \Longrightarrow \frac{1}{\boldsymbol{v^*}}\nabla.\boldsymbol{v} = 0 \Longrightarrow \nabla.\frac{\boldsymbol{v}}{\boldsymbol{v^*}} = 0 \Longrightarrow \nabla\tilde{\boldsymbol{v}} = 0 \tag{5.4.24}$$

ďalej je dôležité si všimnúť, že platí

$$d\tilde{x_i} = \frac{1}{L^*}dx_i \Longrightarrow \frac{\partial}{\partial x_i} = L^*\frac{\partial}{\partial \tilde{x_i}} \; . \tag{5.4.25}$$

Zjednodušené Navier-Stokesové rovnice(5.4.19) vynasobíme členom

$$\frac{L^*}{\boldsymbol{v^*v^*}} \tag{5.4.26}$$

a získame

$$\begin{aligned} \frac{L^*}{\boldsymbol{v^*}}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial v_i}{\partial \boldsymbol{v^*}} + \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial v_j}{\partial \boldsymbol{v^*}}L^*\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial v_i}{\partial \boldsymbol{v^*}} &= \frac{L^*}{\boldsymbol{v^*v^*}}f_i - \frac{1}{\boldsymbol{v^*v^*}}\frac{1}{\rho}L^*\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{L^*}{\boldsymbol{v^*v^*}}\nu\triangle v_i \\ \Longrightarrow \frac{\partial}{\partial \tilde{t}}\tilde{v_i} + \sum_{j=1}^{3}\tilde{v_j}\frac{\partial}{\partial \tilde{x_j}}\tilde{v_i} &= \frac{1}{Fr} - \frac{1}{\boldsymbol{v^*v^*}}\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \tilde{x_i}} + \frac{L^*}{\boldsymbol{v^*v^*}}\nu\triangle v_i \end{aligned} \tag{5.4.27}$$

, kde $Fr = \frac{\boldsymbol{(v^*)^2}}{fL^*}$ sa názýva *Froudeho číslo* a zvyčnajne (ak $f = g$ kde g je gravitačné zrýchlenie) označuje pomer reprezentatívnej rýchlosti ku gravitačnému zrýchleniu. Ak sa vonkajšia gravitačná sila neberie do úvahy, tak *Froudeho číslo* sa zanedbáva. Vzťah (5.4.27) ďalej upravíme

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{v_i}}{\partial \tilde{t}} + \sum_{j=1}^{3}\tilde{v_j}\frac{\partial \tilde{v_i}}{\partial \tilde{x_j}} &= \frac{1}{Fr} - \frac{1}{\boldsymbol{(v^*)^2}}\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \tilde{x_1}} + \frac{\nu}{L^*\boldsymbol{v^*}}\sum_{j=1}^{3}L^*\frac{\partial}{\partial x_j}L^*\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{v_i}{\boldsymbol{v^*}} \\ \Longrightarrow \frac{\partial \tilde{v_i}}{\partial \tilde{t}} + \sum_{j=1}^{3}\tilde{v_j}\frac{\partial \tilde{v_i}}{\partial \tilde{x_j}} &= \frac{1}{Fr} - \frac{1}{\boldsymbol{(v^*)^2}}\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \tilde{x_1}} + \frac{1}{Re}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial \tilde{x_j}}\frac{\partial}{\partial \tilde{x_j}}\tilde{v_i}. \end{aligned} \tag{5.4.28}$$

V odvodení sa nám objavil výraz $1/Re$. $Re = \frac{\rho^*\boldsymbol{v}^*L^*}{\mu}$, ktorý je *Reynoldsove číslo* a označuje pomer referenčnej rýchlosti ku viskozite kvapaliny. Reynodlsove číslo nikdy nezanedbávame pre reálne tekutiny, lebo je dôležitou charakteristikou podľa ktorej sa porovnávajú dve prúdenia. A ako sme si už v prvej kapitole spomínali Reynodsovým číslom sa určuje aj prechod *laminárneho* prúdenia ku *turbulentnému*. Ak si zadefinujeme aj bezrozmerný tlak

$$\tilde{p} = \frac{p}{\rho(\boldsymbol{v}^*)^2} \ , \tag{5.4.29}$$

a použijeme ho v rovnici (5.4.28) tak získame špeciálny tvar *Navier-Stokesových rovníc*

$$\frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial \tilde{t}} + \sum_{j=1}^{3} \tilde{v}_j \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial \tilde{x}_j} = \frac{1}{Fr} - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_j} + \frac{1}{Re} \tilde{\nabla} \tilde{v}_i \tag{5.4.30}$$

[10].

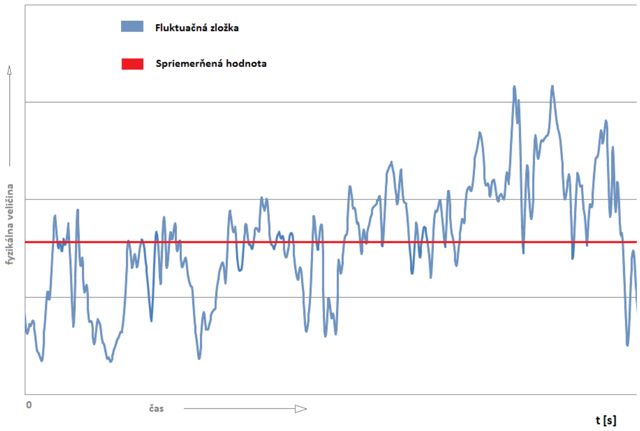
5.4.2 Reynoldsové rovnice

Spriemerňovanie

Bolo by skvelé, keby sme dokázali detailne modelovať každé turbulentné a zložitejšie laminárne prúdenie pomocou *Navier-Stokesových rovníc*. V prípade, že sa o to chceme pokúsiť, môžeme si napríklad vytvoriť takú hustú sieť bodov, ktorá zachytí aj najmenšie detaily. V tomto prípade by ale mal byť počet bodov 3D siete úmerný Reynodsovmu číslu. A to tak, že počet bodov siete by mal byť najmenej $Re^{\frac{9}{4}}$. Výpočtová náročnosť takejto siete napr. pre modelovanie prúdenia vetra okolo mrakodrapu Burj Khalifa v Dubaji ($Re \approx 2 \times 10^6$) je ale taká veľká, že so súčasnou techinkou to riešiť nedokážeme. Preto si potrebujeme *Navier-Stokesove rovnice* prisôsobiť, aby sme ich rátať dokázali. **Odvodíme si **spriemernené** Navier-Stokesove rovnice, ktoré sa nazývajú *Reynoldsove*, pre spriemernenú rýchlosť $\bar{\boldsymbol{v}}$ a spriemernený tlak $\bar{p}$ turbulentného nestlačiteľného prúdenia. Máme štyri rovnice (5.4.18) a (5.4.19) o štyroch neznámych v_1, v_2, v_3, p. Princíp modelovania turbulentného prúdenia spriemerňovaním *Navier-Stokesových rovníc* spočíva v nahradení pôvodných neznámych tvarom, ktorý obsahuje *spriemernenú* $\bar{v}_i$ *a fluktuačnú* v_i' zložku

$$v_i = \bar{v}_i + v_i', \qquad p = \bar{p} + p' \ . \tag{5.4.31}$$

Spriemernené zložky na časovom intervale s dĺžkou T vypočítame ako



Obr. 5.1: Spriemerňovanie [13]

$$\bar{v}_i(x,t) = \frac{1}{T}\int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} v_i(x,\tau)d\tau, \qquad \bar{p}(x,t) = \frac{1}{T}\int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} p(x,\tau)d\tau \ . \tag{5.4.32}$$

Predpokladáme, že stredná hodnota fluktuácií je rovná nule, pretože fluktuácie považujeme za čiste náhodne (stochastické) a popísané procesom bieleho šumu, ktorého stredná hodnota je známa a rovná nule

$$\frac{1}{T}\int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} v_i'(x,\tau)d\tau = 0, \qquad \frac{1}{T}\int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} p'(x,\tau)d\tau = 0 \ . \tag{5.4.33}$$

Ak si zovšeobecníme vzťah pre spriemernené veličiny, potom pre akúkoľvek spriemernenú veličinu $\varphi(x,t) = \bar{\varphi}(x,t) + \varphi'(x,t)$ platí

$$\bar{\varphi}(x,t) = \frac{1}{T}\int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} \varphi(x,\tau)d\tau \ . \tag{5.4.34}$$

Pričom pre strednú hodnotu fluktuácií aj naďalej uvažujeme $\bar{\varphi}'(x,t) = 0$. Pre spriemernené veličiny platia nasledujúce vzťahy

1. $\bar{\bar{\varphi}} = \bar{\varphi}$,
2. $\overline{\bar{\varphi}.\psi} = \bar{\varphi}.\bar{\psi}$,
3. $\overline{\varphi.\psi} \neq \bar{\varphi}.\bar{\psi}$,
4. $\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial\ x_i} = \overline{\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}}$,
5. $\frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial {x_i}^2} = \overline{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial {x_i}^2}}$,

6. $\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t} = \overline{\frac{\partial \varphi}{\partial t}}$.

Ak chceme získať spriemernený tvar rovnice kontinuity pre nestlačiteľné prúdenie, tak v rovnici (5.4.20) nahradíme rýchlosť vzťahom z (5.4.31)

$$0 = \nabla.\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial v_i'}{\partial x_i}. \tag{5.4.35}$$

Na obe strany aplikujeme spriemernenie

$$\begin{aligned} 0 = \bar{0} = \overline{\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial v_i'}{\partial x_i}} = \sum_{i=1}^{3} \overline{\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_i}} + \sum_{i=1}^{3} \overline{\frac{\partial v_i'}{\partial x_i}} = \\ = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \bar{\bar{v}}_i}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \overline{v_i'}}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial 0}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_i} + 0 = \nabla.\bar{\boldsymbol{v}} \end{aligned} \tag{5.4.36}$$

a získame spriemernenú rovnicu spojitosti

$$\nabla.\bar{\boldsymbol{v}} = 0. \tag{5.4.37}$$

Potrebujeme získať aj *spriemernené Navier-Stokesove rovnice* a tak uplatníme spriemernenie aj na vzťah

$$\overline{\frac{\partial v_i}{\partial t}} + \overline{\nabla.(v_i\boldsymbol{v})} = \bar{f}_i - \frac{1}{\rho}\overline{\frac{\partial p}{\partial x_i}} + \overline{\nu \nabla v_i}. \tag{5.4.38}$$

Členy rovnice budeme upravovať obdobnými operáciami ako pri rovnici kontinuity (5.4.36). Potom si divergentný člen vyjadríme ako

$$\begin{aligned} \nabla.(v_i\boldsymbol{v}) = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial (v_i v_j)}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial ((\bar{v}_i + v_i')(\bar{v}_j + v_j'))}{\partial x_j} = \\ = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial (\bar{v}_i.\bar{v}_j)}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial (v_i'\bar{v}_j)}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial (v_j'\bar{v}_i)}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial v_i'v_j'}{\partial x_j} \end{aligned} \tag{5.4.39}$$

a následne na obe strany (5.4.39) aplikujme spriemernenie, čím získame tvar

$$\begin{aligned}\overline{\nabla.(v_i\boldsymbol{v})} = \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial(\bar{v}_i.\bar{v}_j)}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial 0}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial 0}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\overline{v_i'.v_j'}}{\partial x_j} \\ \iff \nabla.(\bar{v}_i\bar{\boldsymbol{v}}) + \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\overline{v_i'.v_j'}}{\partial x_j}\ .\end{aligned} \tag{5.4.40}$$

Použitím vzťahu (5.4.40) na (5.4.38) dostáveme nasledujúci tvar *spriemernených Navier-Stokesových rovníc*

$$\frac{\overline{\partial v_i}}{\partial t} + \nabla.(\bar{v}_i\bar{\boldsymbol{v}}) = \bar{f}_i - \frac{1}{\rho}\frac{\partial\bar{p}}{\partial x_i} + \nu\triangle\bar{v}_i + \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\overline{v_i'.v_j'}}{\partial x_j}\ . \tag{5.4.41}$$

Zadefinujeme si **tenzor turbulentných napätí** $\mathbb{R}$

$$\mathbb{R}_{ji} = -\overline{v_i'v_j'} \qquad \mathbb{R} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix}. \tag{5.4.42}$$

Po spriemernení a dosadení *tenzora turbulentných napätí* do *Navier-Stokesových rovníc* (5.4.41) dostávame **Reynoldsove rovnice**

$$\frac{\overline{\partial v_i}}{\partial t} + \nabla.(\bar{v}_i.\bar{\boldsymbol{v}}) = \bar{f}_i - \frac{1}{\rho}\frac{\partial\bar{p}}{\partial x_i} + \nu\triangle\bar{v}_i + \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\mathbb{R}_{ji}}{\partial x_j}. \tag{5.4.43}$$

5.4.3 Modelovanie turbulencií

Boussinesqov model

V *Reynoldsových rovniciach* nám vystupuje celkovo 13 neznámych. Štyri, ktoré sme už mali, 3 rýchlostí v_i a tlak p, a 9 zložiek tenzora turbulentných napätí $\mathbb{R}_{ji}$. Vďaka symetrickosti tenzora turbulentných napätí možeme ich počet zredukovať na 10. Stále však platí, že máme veľký nepomer medzi počtom neznámych a počtom rovníc, ktoré sú len štyri. Je teda nutné nejakým spôsobom znížiť počet neznámych. Na to je možné využiť tzv. **Boussinesquovu hypotézu**, ktorá nám zviaže zložky *tenzora turbulentných napätí* $\mathbb{R}_{ji}$ s neznámymi $\bar{v}_i$ a $\bar{p}$. Tento model môžeme považovať za najstarší a najjednoduchší. **Boussinesq** v roku 1877 vyslovil hypototézu, ktorá hovorí, že celý vplyv turbulentných vírov na prúdenie môže byť modelovaný pomocou tzv. **turbulentnej viskozity** ν_T.

$$\mathbb{R}_{ji} = \nu_T(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i}) \tag{5.4.44}$$

Toto zjednodušenie vlastne nahrádza tenzor Reynoldsových napätí (šest neznámých), ktoré vznikly po spriemernení, tensorom viskóznych napätí, kde jedinou neznámou je turbulentná viskozita ν_T. Dôležité je si uvedomiť, že turbulentná viskozita vôbec nezávisí na prúdiacej tekutine, ale je vlastnosťou prúdenia a pri laminárnom prúdení je potom rovná nule [5]. Ak by ν_T bola zadaná, tak získame uzavretý systém rovníc. Po dosadení **Boussinesqovej hypotézy** (5.4.44) do (5.4.43) nadobudnú Reynoldsove rovnice zjednodušený tvar

$$\overline{\frac{\partial v_i}{\partial t}} + \nabla.(\bar{v}_i.\bar{\boldsymbol{v}}) = \bar{f}_i - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + (\nu + \nu_T)\nabla \bar{v}_i \ . \tag{5.4.45}$$

Na určenie ν_T sa najčastejšie využíva model LES (Large eddy simulation), kde je turbulentna viskozita ν_T daná vzťahom

$$\nu_T = 2cl^2(\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\bar{d}_{ji}^2)^{\frac{1}{2}} \tag{5.4.46}$$

a $\bar{d}_{ji}$ sú zložky spriemerneného tenzoru rýchlostnej deformácie $\overline{\mathbb{D}}$ (viď podkapitola 1.4.1), pre ktoré platí vzťah

$$\bar{d}_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i}) \ . \tag{5.4.47}$$

V (5.4.46) vystupuje aj empirická konštanta $c \approx 0.01$ a tzv.zmiešavacia dĺžka l, ktorá určuje priemer najväčších vírov, ktoré budú zanedbané (t.j. prispejú k turbulentnej viskozite ν_t)[17].

k-ϵ model

Model $k - \epsilon$ je tzv. dvojrovnicový model, ktorý je tiež založený na Boussinesquovej hypotéze. Model $k - \epsilon$ ako prví čiastočne odvodili Harlow a Nakayama (1968), ale za skútočných autorov sa v súčasnosti považujú Launder a Spalding (1974). Launder a Spalding pôužili pre zviazenie neznámych $\mathbb{R}_{ji}$,$\bar{v}_i$ a $\bar{p}$ namiesto pôvodnej Boussinesqovej hypotézy upravený vzťah

$$\mathbb{R}_{ij} = -\frac{2}{3}k\delta_{ij} + \frac{c1k^2}{\epsilon}(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i}). \tag{5.4.48}$$

Kde δ_{ij} je *Kroneckerova delta* ($\mathbb{I} = \delta_{ij} \quad i, j = 1, 2, 3$ pre predošlé vzťahy), c_1 je empirická konštanta, k je **turbulentná kinetická energia** definovaná ako

$$k = \frac{1}{2}\sum_i (\bar{v}_i)^2 \tag{5.4.49}$$

a ϵ je **rád disipácie turbulentnej kinetickej energie** daný vzťahom

$$\epsilon = \frac{\nu}{2}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i})^2. \tag{5.4.50}$$

V modeli $k - \epsilon$ pribudnú k pôvodnej sústave štyroch rovníc (tri Reynoldsove rovnice (5.4.43) a rovnica kontinuity (5.2.5) ďalšie dve rovnice, ktoré odvodili Launder a Spalding pre k a ϵ

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial t} + \boldsymbol{\bar{v}}.\nabla k &= \nabla.(c_1\frac{k^2}{\epsilon}\nabla k) + \frac{2c_1k^2}{\epsilon}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\bar{d}_{ji}^2 - \epsilon \\ \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \boldsymbol{\bar{v}}.\nabla \epsilon &= \nabla.(c_2\frac{k^2}{\epsilon}\nabla \epsilon) + 2c_3k\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\bar{d}_{ji}^2 - c_4\frac{\epsilon^2}{k}. \end{aligned} \tag{5.4.51}$$

Empirické konštanty c_i nie sú celkom univerzálne a môžu sa meniť v závislosti od využitej metódy. Konkrétne pre Launder a Spaldingovu metódu odvodenia $k - \epsilon$ sa rovnajú $c_1 = 0.09, \quad c_2 = 0.0692, \quad c_3 = 1.44, \quad c_4 = 1.92$. Získali sme uzavretý systém šestich rovníc o štiestich neznámych (tri rýchlosti v_i, tlak p, k, ϵ). Tieto rovnice budeme riešiť numericky. Pre riešenie sme si zvolili program ANSYS, ktorý ponúka modul FLUENT (numerické riešenie rovníc založené na metóde konečných objemov) a CFX (numerické riešenie rovníc založené na metóde konečných prvkov). Podrobnejšie informácie o softwearom riešení sú uvedené v kapitole Fluent.

Veterný tunel

Aerodynamický tunel je experimentálne zariadenie, ktoré slúži na modelovanie prúdenia vzduchu (resp. vetra). Tunely sa využívajú v rôznych inžinierských odvetviach. Veľké využitie majú napr. v stavebníctve, kde sa skúma vplyv vetra na budovy (prípad tejto práce), mosty a rôzne iné konštrukcie. V prípade stavebných konštrukcií sa merania realizujú takmer výlučne na zmenšených modeloch. Tieto makety však musia vykazovať dostatočne kvalitné ukazovatele podobnosti s originálnym predmetom skúmania. Ale takisto môžeme vidieť použitie tunelov väčších rozmerov v automobilovom priemysle, kde sa skúma aerodynamika automobilov v reálnych rozmeroch. Výhodou veterných tunelov je predovšetkým možnosť presne určiť okrajové podmienky a parametre vzdušného prúdenia, ktoré nebude rušené žiadnymi vonkajšími vplyvmi.

Počiatky vývoja veterných tunelov sa datujú ku koncu 19.storočia. Ale až v 60. až 80. rokoch minulého storočia nastal v konštrukcii veterných tunelov pre stavebníctvo veľký prielom. V tejto dobe sa prvý krát začali stavať veterné tunely s medznou vrstvou. Oproti starším modelom bez medznej vrstvy poskytovali simulácie, ktoré sa oveľa viac blížili realite. Tunely s medznou vrstvou poskytujú úplný štatistický opis záťaže objektov vo vetre s prírodnou štruktúrou. Okrem štatistických zaťažení poskytujú tieto tunely aj kompletné dáta o dynamických účinkoch vyvolaných náhodnou vírovou skladbou nabiehajúceho vetra a oscilácie tlaku na záveternej strane sledovaného modelu[14]. Využívanie nového typu tunelov prinieslo úsporu stavebných nákladov vďaka optimalizácii množstva použitého materiálu. V sučasnosti sa konštruujú 2 hlavné typy aerodynamických tunelov. Tunely

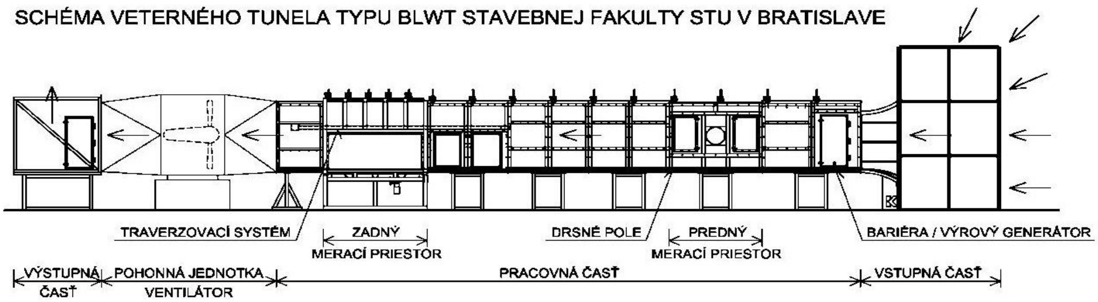
- a uzavretým obehom,
- s otvoreným obehom.(STU)

Tunely s otvoreným obehom bývajú menších rozmerov. Zvyčajne sa v nich realizujú experimenty na zmenšených modeloch. Takýmto typom tunela je aj *aerodynamický tunel Slovenskej technickej univerzity v Trnávke v Bratislave*. Typ tunela s uzavretým obehom lepšie vyhovuje požiadavkám automobilového resp. leteckého priemyslu, pretože vďaka svojim väčším rozmerom umožňuje testovanie veľkorozmerných častí lietadiel, či kompletných automobilov.

6.1 Kompozícia veterného tunela STU

Aerodynamický tunel STU je tunel s otvoreným obehom a uzavretým testovacím prietorom. Celková dĺžka je 25.6 m, šírka je 2.6 m a maximálna výška 1,6 m. Podľa Jirsáka sa veterný tunel s medznou vrstvou skladá z týchto častí

- vstupná časť,
- pracovná časť,
- výstupná časť,
- pohonná jednotka, t.j ventilátor,
- systém simulácie medznej vrstvy.



Obr. 6.1: Schéma veterného tunela STU [14]

6.1.1 Vstupná časť

Vo vstupnej časti tunela sa upravuje násavaný vzduch. Ak chceme, aby boli experimenty vyhotovené v dostatočnej kvalite, je potrebné, aby sme sa venovali aj kvalite vzduchu (prúdenia). O parametroch vzduchu, ktorý nasávame z miestnosti (vonku) v podstate nič nevieme. Môže byť znečistený prachovými alebo inými čiastočkami. Môže obsahovať víry rôznych rozmerov atď. Tieto všetky "rušivé"faktory je potrebné odstrániť pred tým, ako sa začneme venovať vytváraniu požadovaného prúdenia. Preto sa v tejto časti tunela nachádzajú ešte:

- **Filter** zabezpečuje odstránenie pevných čiastočiek zo vzduchu. Ak by čiastočky neboli zo vzduchu odstránené mohli by poškodiť citlivé meracie prístroje, ktoré sa nachádzajú v pracovnej časti tunela napr. anemometre. Ako materiál pre filtre sa zvyčajne používa netkaná textília.
- **Usmerňovač vírov** je umiestnený hneď za filtrom. Jeho úlohou je odstránenie vírivých turbulencií z nasávaného vyčisteného vzduchu. Odstránenie pôvodnej vírivosti je dôležité preto, aby sme následne dokázali vytvoriť požadovanú mieru turbulencií pre meranie.
- Keď vzduch opustí usmerňovač, je zbavený takmer všetkých vírov. Môže sa stať ale, že víry najmenších rozmerov odstranené ešte neboli. Tieto víry utlmíme a zjemníme **sitom**. Sito je zvyčajne vyrobené z nerezového pletiva.
- Poslednou časťou, ktorú prejde vzduch v procese homogenizácie je **tryska**. Hlavnou funkciou trysky je priečne vyrovnávnávanie prúdiaceho vzduchu pred tým, ako je vpustený do pracovnaj časti tunela.

6.1.2 Pracovná časť

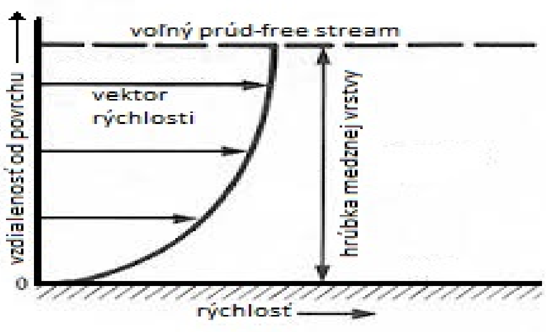
V pracovnom úseku tunela sa homogenizovaný vzduch upravuje pomocou pasívnych simulačných systémov s umelou drsnosťou. Prechodom vzduchu cez tieto nerovnosti umiestnené na podlahe sa v prúdení utvára medzná vrstva. Úsek vývoja medznej vrstvy tvorí polovicu celkovej dĺžky tunela, t.j. 13 m. Hrúbka medznej vrstvy závisí od toho, v akom bode pracovnej časti tunela sa náchádzame. Vo všeobecnosti platí, že ak pre experiment požadujeme prúdenie, ktorého medzná vrstva má mať hrúbku X milimetrov, tak model musí byť uložený vo vzdialenosti $7X$ až $10X$ od začiatku pracovej časti. V tuneli STU sú, na rozdiel od starších modelov tunelov, dve testovacie sekcie. V prvej sekcii umiestnenej na začiatku pracovnej časti sa realizujú experimenty s laminárnym prúdením, predovšetkým meranie vplyvu vetra na štíhle konštrukcie. Vďaka zvislej pohyblivosti stropnej časti (výška tunela sa môže redukovať z 1,6m až na 1,15m) môžeme pri rovnomernom laminárnom prúdení dosiahnuť rýchlosť až 32 $m.s^{-1}$ bez toho, aby sme zvyšovali výkon ventilátoru. V zadnom modelovacom priestore prebiehajú merania v turbulentnom prúdení s medznou vrstvou. Môžeme tu merať plošné a celkové zaťaženia vetra pri jeho rôznych smeroch so stanovením stredných alebo fluktuačných zložiek. Sme schopní analyzovať aj vplyv vetra na úrovni chodcov, či merať tlakové súčinitele v turbulentnej medznej vrstve.

Výstupná časť

V tejto časti tunela dochádza k zmene smeru vypúšťaného vzduchu. Vzduch je vypúšťaný smerom nahor, a to je zvyčajne zabezpečené odvodnou rúrou v tvare kolena, v ktorej sú umiestnené lopatky. Pre tunel slovenskej technickej univerzity boli špeciálne navrhnuté dva axiálne ventilátory o priemere 1600mm, ktoré sú poháňané asynchrónnymi motormi 2 × 75 kW s napájaním frekvenčných meničov pri otáčkach max. 1000 ot./min. Ventilátory dodávajú prietokový objem vzduchu viac ako 100 $\frac{m^3}{s}$ s rýchlosťou prúdenia 0,2-32 $m.s^{-1}$[14].

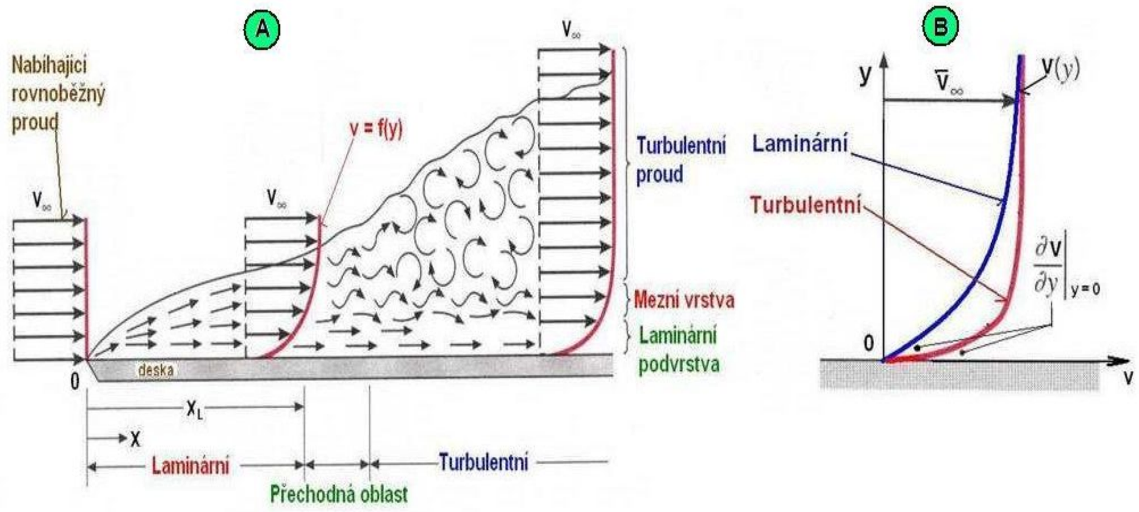
6.2 Medzná vrstva

Vezmime si prúdenie tekutiny okolo pevného nehybného povrchu (v podstate toto všetko platí aj pre pevný povrch v pohybe, ale keďže naša práca skúma vplyv na budovy, tak si istotne vystačíme aj len so stacionárnym povrchom), tá oblasť prúdiacej tekutiny, ktorá je v bezprostrednom kontaktne s povrchom je vplyvom šmykových nápätí resp.viskozity zabrzdená a ostáva v pokoji. Tento jav nazývame *ulpievanie*. Rýchlosť prúdenia $\boldsymbol{v}$ rastie s odľahlosťou od povrchu, až na hodnotu voľného prúdu $\boldsymbol{v}_\infty$.



Obr. 6.2: Rýchlostný profil prúdenia pozdĺž povrchu [16]

Ak budeme uvažovať najjednoduchší prípad - tenkú dosku umiestnenú paralelne so smerom prúdenia tekutiny, tak na doske sa vplyvom ulpievania vytvorí medzná vrstva. Avšak rýchlostný profil prúdenia zobrazený na obrázku 6.2 sa nezjaví okamžite, ale bude postupne vybudovaný. Postup tvorenia takéhoto profilu môžeme vidieť na obrázku 6.3. Prúdenie, kde už sa vytvoril takýto rýchlostný profil, nazývame *plne vyvinuté*.



Obr. 6.3: Vývoj prúdenia pozdĺž povrchu [12]

Vidíme, že medzná vrstva rastie od nulovej šírky, ktorá je v oblasti, kde tekutina začala obtekať dosku. Ak budeme pokračovať ďalej pozdĺž dosky, bude stále väčšia a väčšia oblasť tekutiny spomalená vplyvom trenia medzi vrstvami. Takýmto procesom sa bude hrúbka spomalenej oblasti tekutiny zväčšovať. Tekutina, ktorá je bližšie hornej hranice medznej vrstvy, je strhávaná tekutinou, ktorá prúdi bližšie k pevnému povrchu. Proces takéhoto strhávania môže byť dvojaký:

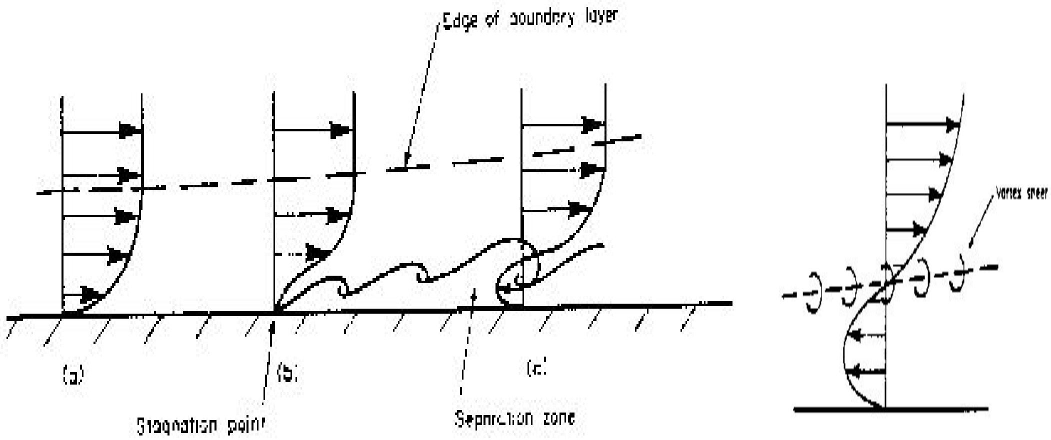
A) Ak je medzná vrstva tenká, tak rýchlosť prúdenia rýchlo narastá od povrchu ku voľnému prúdu a teda gradient rýchlosti je veľký. Z Newtonovho zákona viskozity vyplýva, že hodnota šmykového napätia $\tau = \mu(\frac{dv}{dy})$ bude tiež nadobúdať vysoké hodnoty. A teda medzimolekulárne sily (viskózne sily vnútorného šmykového trenia) sú dosť veľké, aby vyvážili strhávací efekt pomalšie sa pohybujúcej tekutiny blízko pevného povrchu.

B) Ak sa hrúbka medznej vrstvy zväčší, rýchlosť od povrchu bude rásť pomalšie. Teda gradient rýchlosti sa zmenší a hodnota šmykového trenia bude klesať až do bodu, keď už nie je schopná strhávať pomaly tečúcu tekutinu pozdĺž povrchu. Ak by tieto viskózne sily boli len pohybové, tak potom by tekutina mala prejsť do nehybného stavu. Až do tohoto bodu bol tok *laminárny*, preto túto časť nazývame *laminárna medzná vrstva*.

Viskózne šmykové napätie (medzimolekulárne sily) drží častice tekutiny v konštantnom pohybe v rámci vrstvy. Vplyv medzimolekulárnych síl sa s narastajúcou medznou vrstvou a zmenšujúcim sa gradientom rýchlosti zmenší natoľko, že tieto sily už ďalej nie sú schopné udržať tok vo vrstvách a tekutina začína rotovať. Rotácia spôsobí, že prúdenie sa rýchlo stáva turbulentným. Tekutina sa vďaka rotácií presúva z pomaly sa pohybujúcich oblastí do tých, kde tekutina prúdi rýchlo a naopak. Tým sa rýchlosť prúdenia v oblastiach vyrovnáva. Oblasť medznej vrstvy, kde už môžeme pozorovať takého transfery rýchlosti resp. hybnosti nazývame *turbulentá medzná vrstva*. V oblasti veľmi blízko pevného povrchu gradient rýchlosti rastie extrémne rýchlo, to znamená, že viskózne šmykové sily narastú na takú hodnotu, že sú opäť schopné udržať laminárnu formu prúdenia. Táto veľmi tenká oblasť pri povrchu, ktorá sa objaví vo vnutri regiónu s turbulentným prúdením sa nazýva *laminárna podvrstva*. Jej hrúbka býva len niekoľko stotín milimetra.

Laminárna podvrstva môže aj napriek svojej extrémne malej hrúbke hrať významnú úlohu pri trecích charakteristikách povrchu. Pri turbulentnom prúdení po pevnom povrchu, kde je rozmer výstupkov (drsností) vyšší ako je výška laminárnej podvrstvy môžeme pozorovať zvýšenú turbulentnosť a narastájúce straty energie v toku. V prípade, ak je výška nerovností povrchu menšia ako hrúbka laminárnej podvrstvy, možeme povedať, že povrch je *hladký*. V prípade laminárneho prúdenia má výška nerovností len veľmi malú schopnosť ovplyvňovať tok.

Ak budeme uvažovať tlak, ktorý nie je konštantný a jeho hodnota sa zvyšuje v smere prúdenia, tak môžeme pozorovať, že tekutina vo voľnom prúde bude aj napriek vyššiemu tlaku pokračovať ďalej v pohybe v rovnakom smere. Ale tekutina nachádzajúca sa v rámci medznej vrstvy má len malú hybnosť, v dôsledku čoho je vplyvom výššieho tlaku zastavená a pri dostatočne veľkej hodnote tlaku je dokonca tlačená späť. Z toho vyplýva, že môže dôjsť až ku takému stavu, že tekutina v medznej vrstve začne prúdiť späť. Tento jav je nazývaný *odtrhnutie medznej vrstvy.* Na kraji odtrhnutej medznej vrstvy, kde dochádza k zmene smeru prúdenia tekutiny, sa objavuje pás vírov, ktorý je známy ako *vortex sheet.*

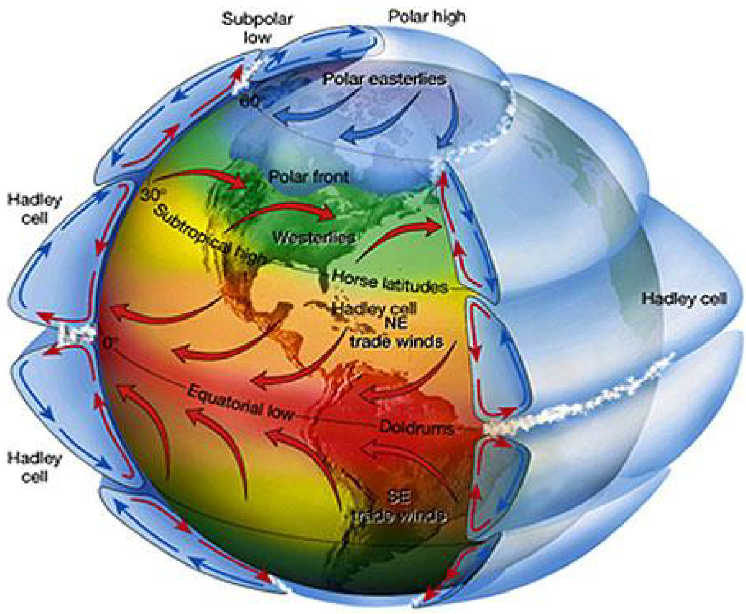


Obr. 6.4: Odthrávanie medznej vrstvy [4]

6.3 Atmosferická medzná vrstva

Už zo základnej školy vieme, že atmosféra Zeme sa skladá z niekoľkých vrstiev - sfér. Najspodnejšou vrstvou je troposféra. V tejto vrstve prebiehajú aj všetky deje spojené s počasím a teda v nej vzniká aj vietor, ktorého učinky sa budeme snažiť v tejto práci modelovať. Troposféru je možné deliť podľa rôznych kriterií. Pre nás bude dôležité delenie troposféry na

- **atmosferickú medznú vrstvu**,
- voľnú atmosféru (geoskopický vietor).



Obr. 6.5: Globálna cirkulácia vzduchu
[1]

My svoju pozornosť upriamime predovšetkým na nižšie položenú atmosferickú medznú vrstvu (AMV). Táto vrstva sa nachádza najbližšie k zemskému povrchu, priamo s ním susedí, takže je významne ovplyvňovaná nerovnosťami na jeho povrchu. Hrúbka AMV nie je univerzálna, ale mení sa, pretože jej horná hranica je určená výškou, v ktorej už povrchové trenie nemá vplyv na prúdenie vetra [11]. Vrstvu troposféry, v ktorej už trecie sily majú len zanedbateľný vplyv na celkový obraz prudenia, nazývame *voľná atmosféra*. Pohyby vzduchu v atmosfére (rsp.troposfére) môžeme rozdeliť na

- hlavné prúdenie, kde trenie má iba zanedbateľný vplyv (od hranice voľnej atmosféry),
- prúdenie medznej vrstvy, pre ktoré je povrchové trenie určujúce.

Existuje niekoľko faktorov AMV, ktoré charakterizujú vertikálny prenos vlastnosti (napr.prenos hybnosti, tepla, bodných pár, rozloženie tlakov, atď.) v rámci AMV. Najdôležitejším je **termálna stabilita AMV**.

- Pre vznik **nestability** si uvedieme nasledujúci príklad. Ak je povrch zeme horúci a ohrieva okolitý vzduch, ten stúpa a rozpína sa, v dôsledku čoho v tejto oblasti klesá tlak. Stúpajúca horúca oblasť vzduchu je adiabaticky chladená. Ak je toto chladenie nedostatočné, vzniká termálna nestabilita AMV. Masa vzduchu pokračuje v stúpaní bez toho, aby sa jej teplota stíhala vyrovnávať s okolitým vzduchom. Výsledkom tohto procesu je tenká medzná vrstva s turbulntnými vírmi veľkých rozmerov, v ktorej možeme pozorovať významný transfer hybnosti a častíc vo vertikálnom smere.

- Niekedy môžeme v atmosfére pozorovať jav, kedy teplota s narastajúcou nadmorskou výškou klesá pomalšie ako odpovedá adiabatickému gradientu, prípadne sa vôbec nemení (izotermia) alebo dokonca klesá (teplotná inverzia). K takémuto javu dochádza vtedy ak zem chladne vplyvom nedostatku slnečného svetla rýchlejšie ako vzduch a následne ho chladí. Potom tento chladný vzduch vôbec nestúpa. V taktom to prípade môžeme hovoriť o **stabilite** AMV, kde je vertikálny prenos vlastností takmer nulový a stredná rýchlosť vetra sa s nadmorskou výškou značne mení.

- V prípade, že vertikálne klesanie teplôt odpovedá adiabatickému gradientu, vietor má stály smer a jeho rýchlosť je horizontálna, môžeme hovoriť o **neutrálnej** AMV. V tomto prípade sú turbulencie takmer výlučne spôsobené drnosťou zemského povrchu.

Povrch zeme, samozrejme nie je všade rovnaký, niekde sú moria, niekde veľké mestá, inde lesy. Bolo by nesprávne, keby sme uvažovali v každom type krajiny rovnakú konštantu, ktorá by nám chrakterizovala mieru drstnosti povrchu. A to predovšetkým preto, že ak budeme uvažovať neutrálnu AMV, tak hlavný vplyv na tvorbu a veľkosť turbulencií má práve drsnosť povrchu.

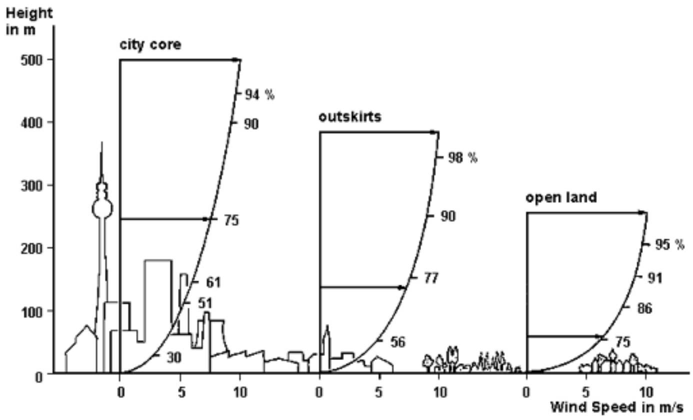
6.3.1 Profil vetra

Existujú dve hlavné metódy pre popis profilu vetra v neutrálnej AMV, *logaritmický* a *mocninový*.

Logaritmický popis môžeme odvodiť z teórie vírivej viskozity. Tento semi-empirický popis charakterizuje okrajové podmienky zadávané na spodnom okraji AMV (rýchlosť je rovná nule, ak je výška rovná nule), ale nehovorí vôbec nič o tom, aké by mali byť okrajové podmienky vyššie nad povrchom. Tento popis dobre vystihuje realitu len do výšky maximálne 100-150m. Logaritmický model zmeny rýchlosti vetra $\boldsymbol{v}$ $[m.s^{-1}]$ s výškou z $[m]$ má tvar

$$\boldsymbol{v}(z) = \frac{\dot{v}}{\kappa} ln \frac{z}{z_0} \qquad z \geq z_0 \ , \tag{6.3.1}$$

kde $\dot{v}$ je šmyková resp. trecia rýchlosť, κ je bezrozmerná *Von Kármánová* konštanta, ktorej hodnota je približne $\kappa \approx 0.41$ a z_0 je parameter drsnosti povrchu.



Obr. 6.6: Drsnosť povrchu [2]

Mocninový vertikálny profil je empiricky odvodený vzťah závislosti rýchlosti vetra *boldsymbolv* a výšky z používajúci sa na modelovanie vetra v rámci AMV. Tento typ popisu neobsahuje informácie o žiadných okrajových podmienkach, či už sa jedná o okrajové podmienky na povrchu ale vyššie. Z tohoto dôvodu, mocninový profil vetra dobre modeluje skutočný vietor len vo výške 150-300m. Profil je obvykle defivovaný v tvare

$$\frac{\boldsymbol{v}(z)}{\boldsymbol{v}(z_r)} = (\frac{z}{z_r})^{\alpha}, \tag{6.3.2}$$

kde *boldsymbolv*$_r$ je stredná rýchlosť vetra v referenčnej výške z_r. Exponent α je konštanta, ktorá bola experimentálne nameraná pre rôzne druhy terénu v reálnej atmosferickej medznej vrstve (t.j. vonku). Jej hodnota zavisí predovšetkým na miere drsnosti povrchu (terénu).

Hodnoty konštany z_0 je možné nájsť v tabuľkách.

Kategórie terénu	Parameter drsnosti $z_0[m]$
Kategória 1-Vodná hladina	0.01
Kategória 2-Polia a lúky	0.05
Kategória 3-Predmestie	0.3
Kategória 4-Mesto	1

Obr. 6.7: Tabuľka drsností povrchu

Fluent

7.1 Modely pre simuláciu prúdenia

V súčasnoti máme k dispozicií pre riešenie Navier-Stokesových rovníc 3 metódy.

- *Priama numerická simulácia- DNS*
- *Simulácia veľkých vírov - LES*
- *Metóda simulovania Reynoldsových rovníc - RANS*

DNS

DNS predstavuje priame riešenie Navier-Stokesových rovníc pomocou numerickej matematiky s vysokou presnosťou bez potreby špeciálne modelovať turbulencie. Sieť vytvorená pre tento typ modelovania musí byť schopná zachytiť všetky typy vírivých štruktúr, ktoré sa vyskytujú pri prúdení reálnej kvapaliny. To znamená že veľkosť buniek siete musí ísť až k tzv.*Kolmogorovovej mikromierke*. Hustota siete je zviazaná s veľkosťou Reynoldsového čísla. Pri zvyšovaní Reynoldsového čísla prúdko rastie počet bodov siete a súčasne klesá potrebný časový krok. Výpočetná náročnosť DNS modelu rastie so šiestou mocnicou Reynoldsového čísla, z dôvodu tejto extrémnej výpočtovej náročnosti sa pomocou DNS riešia len úlohy s jednoduchou geometriou a veľmi nízkym Reynoldsovým číslom. Metóda DNS nám ale poskytuje dokonalú predstavu o fyzike prúdenia. Kvalitatívne sú poznatky získané pomocou DNS ekvivalentné výsledkom experimentov, ale čo sa týka hĺbky a rozsahu informácií, tak DNS daleko predčí experimentálne dáta.

LES

Ide o métodú tzv. filtrácie Navier-Stokesových rovníc. Modelovanie riešenia sa vpodstate rozdení na dve časti. Veľké vírivé štruktury, ktoré je možné zachytiť sieťou a prenášajú takmer všetkú hybosť, hmotu a energiu, sú modelované pomocou DNS. Malé víry, ktoré zabezpečujú disipáciu energie sú modelované upravenou RANS metódou do ktorej je zaprcovaný predpoklad že malé vírivé štruktúry majú izotropný charakter. Takýto model nazýva *subgrid model* .

RANS

Model predstavuje simuláciu prúdenia pomocou Reynoldsových rovníc (podkapitola 2.4.2), aj pri výrazne nižšej výpočetnej náročnost sii zachováva dostatočnú kvalitu riešenia. Preto ide o v praxi najpoužívanejšiu metódu pre simuláciu prúdenia. RANS modeluje všetky veľkosti turbulentných vírov a rieši časovo spremernené hodnoty prúdenia t.j odstraňuje fluktuácie. Existuje hneď niekoľko typov RANS modelov, ktoré sa odlišujú počtom a druhom rovníc rovníc pridaných ku sústave Reynoldsových rovníc. Nás budú zaujímať 2-rovnicové modely $\boldsymbol{k-\epsilon}$. Vo FLUENTE sú implementované všetky 3 typy tohoto modelu.

- **Standard $\boldsymbol{k-\epsilon}$ model** sme si už spomináli v predchádzajúcej kapitole (kapitola 5.4.3). Tam sme si odvodili jeho matematickú podobu. Hlavným predpokladom pre tento model je, že prúdenie je plne turbulentné a efekt molekulárnej viskozity je zanedbateľný. Tento model vykazuje nadmernú difúziu pre niekoľko rôznych situacií, napr. pri veľkom zakrivení prúdu, odthnutí medznej vrstvy alebo aj pri nížších Reynoldsových číslach. Taktiež nie je vhodný pre simuláciu obtekania krivočiarých telies, kde jeho výsledky pre bod odtrhutia a veľkosť zvírenia značne neodpovedajú exprimentálnym hodnotám. Z tohoto dôvodu je Standard model vhodný predovšetkým pre modelovanie prúdenia s vysokým Reynoldsovým číslom.

- **RNG $\boldsymbol{k-\epsilon}$ model** bol z modelu Standard odvodený pomocou tzv *metódy renormalizačných grúp (RNG).* Renormalizačná procedúra aplikovaná na turbulencie spočíva v postupnej eliminácií malých vírov, pritom sa pretransformujú aj

Reynoldsové rovnice tak, že sa modifikuje turbulentná viskozita μ_t, sily a nelineárne členy. Všeobecne predpokladáme, že malé víry súvisia s disipáciou ϵ (víry vo veľkosti Kolmogorového merítka su disipované na teplo) a teda turbulentná viskozita je závislá na veľkosti turbulentných vírov. RNG metóda konštruuje túto viskozitu pomocou iteračného procesu. Tiež obsahuje vzťah pre turbulentné Pradlové čísla a efektívnu viskozitu

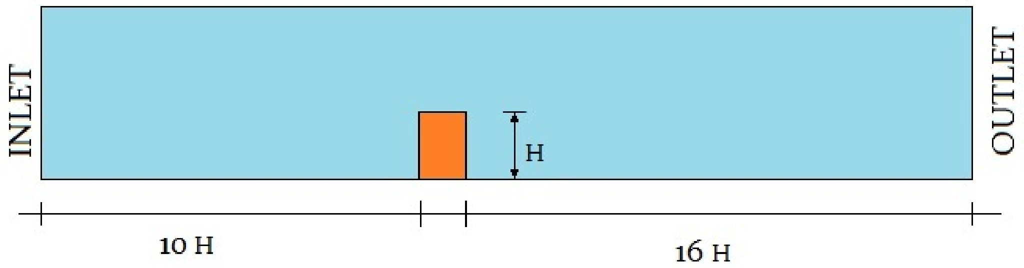
$$\mu_{eff} = \mu_t + \mu_m, \tag{7.1.1}$$

kde μ_t je turbulentná viskozita a μ_m je viskozita molekulárna [13]. Vďaka tejto modifikácií je RNG model o niečo pomalší ako Standard, ale zato je presnejší v oblastiach vírivého prúdenia .

- **Realizable $\boldsymbol{k-\epsilon}$ model** je najnovší a podľa testov v posledných rokoch aj nejlepší z rodiny $k-\epsilon$ modelov. V porovnaní s modelom Standrard si môžeme všimnúť 2 významné odlišnosti. Ide o inú formuláciu turbulentnej viskozity μ_t, do ktorej sme zahrnuli aj účinky strednej rotácie a o modifikáciu transportnej rovnice pre disipáciu ϵ. Táto modifikácia spočíva v tom, že sme rovnicu odvodili z transportnej rovnice strednej kvadratickej fluktuácie vírivosti. Realizable ponúka tak ako RNG vylepšnie v oblastiach vyššej vírivosti. Má však aj nedostatok, ktorý je spôsobený práve inou formuláciou turbulentej viskozity. Model vytvára nereálnu turbulentnú viskozitu v prípadoch, keď sa výpočtová oblasť skladá z rotačnej a stacionárnej zóny.

7.1.1 Zostavenie modelu

Ak chceme, aby naša simulácia vo Fluente poskytovala použiteľné výsledky, je dôležité, aby sme vytvorili správnu geometriu objektu a výpočtovej oblasti. Modelovaný objekt, v našom prípade budova by mal byť dostatočne kvalitatívne podobný skutočnej budove (podkapitola 2.4.1 Podobnosť). Uvažujeme, že nami modelovaná budova má *výšku H*, tak jej umiestnenie vo výpočtovej oblasti, by malo byť také, aby výpočtová oblasť *pred budovou mala dĺžku najmenej 10H* a dĺžka vypočtovej oblasti *za budovou bola najmenej 16H*. Z tohoto vyplýva, že celková dĺžka výpočtovej oblasti by mala byť väčšia ako *26H*.



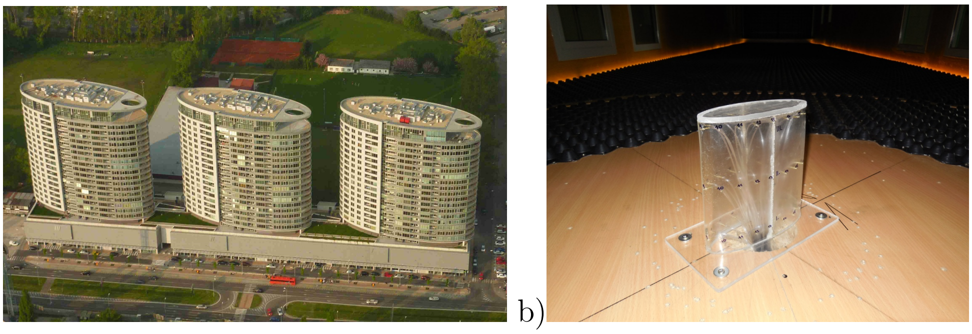
Obr. 7.1: Bočný rez výpočtovou oblasťou

Pri modelovaní účinkov vetra je vhodné zadávať také okrajové podmienky, ktoré sú schopné vytvoriť prúdenie, čo najviac podobné prúdeniu vo veternom tuneli (ideálne totožné). Ak niečo takéto chceme zabezpečiť, tak je dôležité, aby hranice (okraje) výpočtovej oblasti boli v dostatočnej vzdialenosti od skúmaného objektu. A to z dôvodu, aby sme vplyv hraníc resp. okrajových podmienok na skúmaný objekt mohli zanedbať. Ak chceme dosiahnuť prúdenie podobné s prúdením vo veternom tuneli, tak na INLET stenu zadávame profil rýchlosti vetra, v našom prípade logaritmický profil vetra (podkapitola 3.3.1) a odvodený k-ϵ model, ktoré odpovedajú aj prúdeniu vo veternom tuneli. Na zadanie takýchto okrajových podmienok sme v našej simulácií využili UDF súbor.

7.1.2 Simulácia

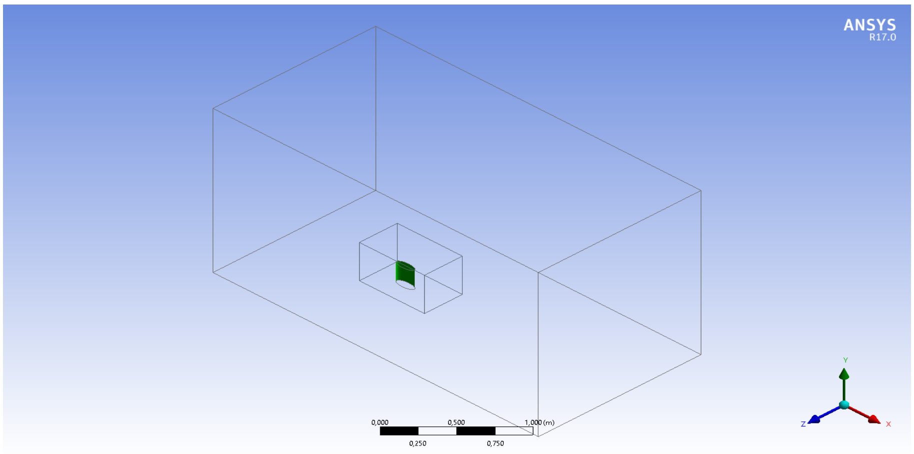
Našou snahou bolo vytvorenie kvalitnej simulácie, ktorá by popisovala účinky vetra na budovu jednej z troch veží v Bratislave. Náš model sme skúšali vytvoriť tak, aby sa čo najviac zhodoval s nameranými hodnotami z veterného tunela STU v Trnávke. Namerané dáta nám boli poskytnuté pánom Ing. Michal Franek z Katedry pozemných stavieb SvF.

Na obrázku 7.2je možné vidieť model veže použitý pri meraniach vo veternom tuneli. Celkovo sme vytvorili 3 simulácie, ktoré sme sa snažili odladiť tak, aby poskytovali výsledky, ktoré by sa čo najviac priblížli hodnotám získaným z veterného tunela. Ladenie simulácií sme realizovali predovšetkým zmenami vo výpočtovej sieti. Geometria našej oblasti bola vytvorená v Desing Modeler.

a)  b)

Obr. 7.2: a) Tri veže, Bratislava [3], b) Model veže použitý vo veternom tunely [9]

Rozmery výpočtovej oblasti boli $3m \times 1.5m \times 1.5m$, objekt skúmania t.j. veža bola situovaná 1 m za INLET hranicou. Pre neskoršie využitie pri zjemňovaní siete sme vytvorili pooblasť okolo modelovanej budovy.



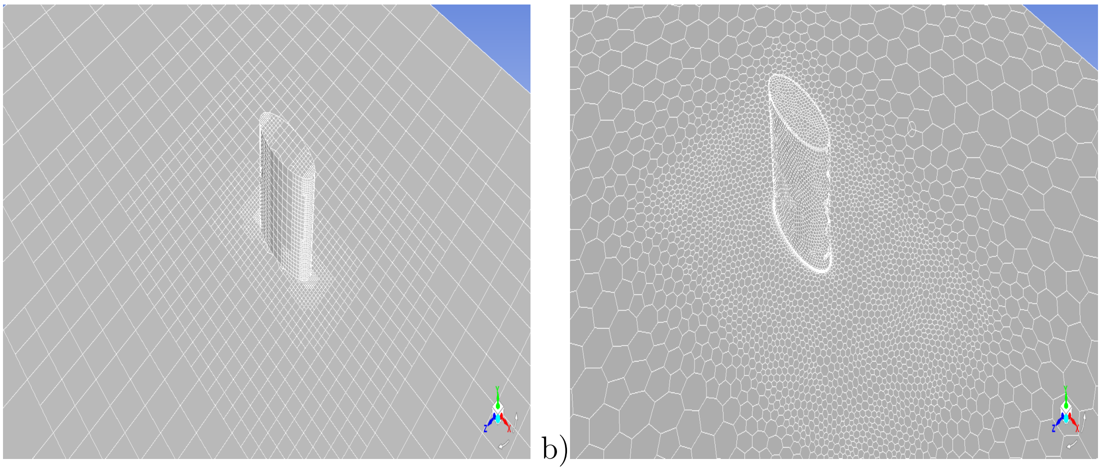
Obr. 7.3: Geometria výpočtovej oblasti vo Fluente

Pre prvú simuláciu, ktorú si nazveme *simulácia A*, sme vytvorili výpočtovú sieť s využitím cutcell elementov. Sieť, ktorú sme použili na povrchu elipsy (budovy) bola tvorená elementami, ktorých najmešia veľkosť bola 0,03m. Pri meshovaní tejto siete bolo vytvorených 3600 elementov a 43922 uzlov.

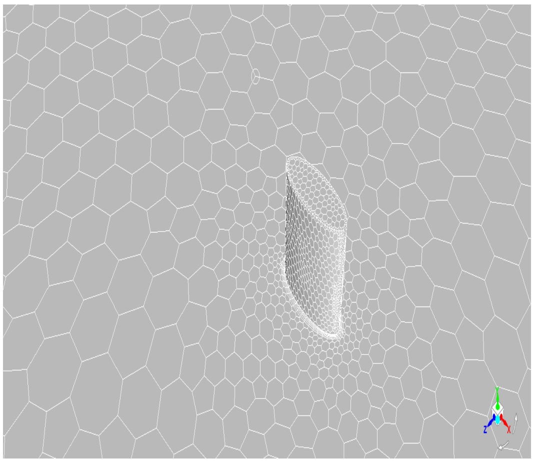
Pri vytváraní simulácie B sme najprv v Mesh vytvorili elementy v tvare tetrahedrov, ktorých najmenší rozmer mohol byť 0,005m a tie sme následne vo Fluente upravili na hexaédre. Túto zmenu sme spravili preto, lebo Fluent vie počítať najlepšie práve s elementami v tvare hexaedrov. Vytvorená sieť pozostávala z 569190 elementov a 112722 uzlov. Pri vytváraní siete pre túto simuláciu sme využili aj vstavanú funkciu Inflation.

Pri tvorení simulácie C sme zmenili rozmery výpočtovej oblasti na $5m \times 2.6m \times 1.5m$

a) b)



Obr. 7.4: a)Sieť vytvorená pre simuláciu A, b) sieť vytvorená pre simuláciu B

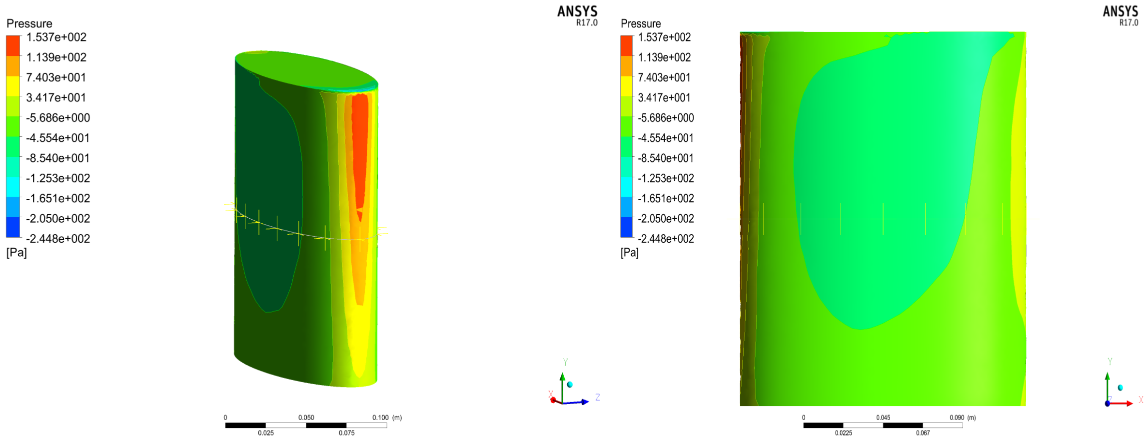


Obr. 7.5: Sieť vytvorená pre simuláciu C

a vežu umiestnili do vzdialenosti 2,5m od INLET steny. Taktiež sme odstránili podoblasť okolo objektu. Tak ako pri sieťovaní pre simuláciu B sme aj tu najprv vytvorili elementy v tvare tetrahedrov a tie sme následne vo Fluente upravili na hexaédre. Sieť, ktorú sme vytvorili pozostávala z 189327 elementov a 38506 uzlov. A opäť sme využili funkciu Inflation.

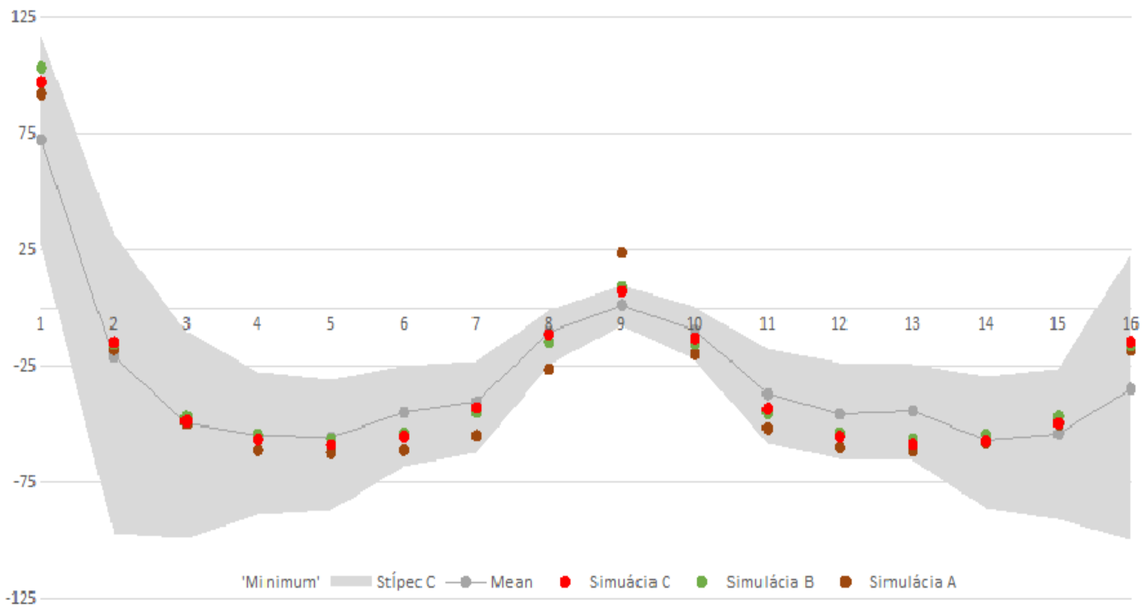
Pri všetkých výpočtoch sme používali model **Standard $\boldsymbol{k-\epsilon}$**, ktorého matematickú podobu sme si odvodili v podkapitole 2.4.3. Pre riešenie sme používali nestacionárny typ výpočtu. Výpočet sme riešili v 200 iteráciách s časovým krokom 0,01 s.

Výsledné pôsobenie tlakov je možné vidieť na obrázku 7.6. Rozloženie tlakov pre simulácie A,B,C sa opticky javí rovnaké, ale číselné hodnoty pre jednotlivé simulácie sa líšia. Výsledky našich simulácií sme v 16 bodoch porovnávali s hodnotami získanými z veterného tunela. Porovnania simulácií a namernaých hodnôt sú znazornené na grafe



Obr. 7.6: Rozloženie tlakov na budove

7.7 a v tabuľke 7.8. V rámci tabuľky je možné vidieť, akej sme sa dopustili mediánovej, priemernej chyby pre simuláciu A, simuláciu B a simuláciu C.



Obr. 7.7: Graf porovnania simulácií

	Minimum		Maximum	Priemer	Simulácia A	Chyba	Simulácia B	Chyba	Simulácia C	Chyba
1	27,073	90,280	117,353	72,475	97,245	34,18%	103,369	42,63%	92,162	27,16%
2	-97,100	129,163	32,063	-20,891	-14,794	29,18%	-15,367	26,44%	-17,752	15,02%
3	-99,002	88,460	-10,542	-49,407	-48,686	1,46%	-46,807	5,26%	-49,695	0,58%
4	-89,121	61,619	-27,501	-55,084	-56,571	2,70%	-54,441	1,17%	-61,259	11,21%
5	-86,653	55,640	-31,013	-55,722	-58,877	5,66%	-56,211	0,88%	-62,509	12,18%
6	-68,329	43,069	-25,259	-44,912	-55,215	22,94%	-53,735	19,64%	-61,194	36,25%
7	-62,277	39,220	-23,057	-40,598	-42,919	5,72%	-44,794	10,34%	-54,834	35,07%
8	-24,516	23,706	-0,809	-10,339	-11,25	8,81%	-14,793	43,08%	-26,332	154,69%
9	-7,353	17,424	10,071	1,275	7,149	460,89%	9,182	620,39%	23,697	1759,18%
10	-21,939	22,303	0,364	-9,737	-13,16	35,15%	-15,664	60,87%	-19,906	104,44%
11	-58,149	40,827	-17,317	-37,073	-43,39	17,04%	-45,343	22,31%	-51,807	39,74%
12	-65,202	41,875	-23,327	-45,678	-55,355	21,18%	-53,678	17,51%	-60,063	31,49%
13	-65,502	41,192	-24,310	-44,187	-58,76	32,98%	-56,174	27,13%	-61,692	39,62%
14	-86,049	56,698	-29,351	-56,856	-57,34	0,85%	-54,462	4,21%	-58,062	2,12%
15	-91,295	64,736	-26,558	-54,038	-49,523	8,36%	-46,724	13,54%	-49,963	7,54%
16	-99,408	122,402	22,994	-34,779	-14,679	57,79%	-16,354	52,98%	-18,177	47,74%
Priemerná chyba						46,56%		60,52%		145,25%
Mediánová chyba						19,11%		20,98%		33,28%

Obr. 7.8: Tabuľka porovnanie simulácií

Záver

Pri spracovávaní tejto práce sme zistli, že vo svetovej odbornej literatúre je možné nájsť vyčerpávajúce množstvo zdrojov na témy mechananika tekutín, prúdenie a turbulencie. Čo sa týka vo všeobecnosti témy mechanika tekutín existuje dostatok slovenských publikácií. Počas písania sme narazili na nedostatok slovenských zdrojov zaoberajúcich sa modelovaním prúdenia pomocou numerických metód, a taktiež sa nám nepodarilo nájsť vhodné slovenské zdroje, ktoré by sa zaoberali konkrétne softwearom ANSYS-Fluent. Systém FLUENT je uživateľsky príjemný, ale bez dostatočnej znalosti numerického pozadia na ktorom systém pracuje je veľmi náročné vytvoriť simuláciu, ktorej výsledky by sme mohli považovať za hodnoverné. Pri vytvaraní simulácie bolo dôležité, aby sme zvolili správnu výpočtovú sieť, ktorej hustota mala byť dostatočná, aby zachytila dôležité aspekty prúdenia a súčasne bola jej výpočtová náročnosť únosná. Pri každej našej simulácií sa objavil bod (č.9) na záveternej strane budovy, kde nám percentuálna chyba vyšla extrémne vysoká, čo je spôsobené aj tým, že tlak v tomto bode nadobúdal hodnotu okolo nuly a teda každa simulácia, ktorá sa rádovo vychýlila len o jednotky vytvorila obrovskú precentuálnu chybu. Graf simulácie C je najbližšie k grafu hodnôt nameraných vo veternom tuneli. Simuláciu C sme vyhodnotili ako najlepšiu aj na základe ďalších atribútov, a to priemernej aj mediánovej chyby.

Literatúra

[1] http://apollo.lsc.vsc.edu/classes/met130/notes/chapter10/graphics/threecel3d.jpg.

[2] https://septiankmasdi.files.wordpress.com/2012/05/profil-kecepatan.gif.

[3] http://static.panoramio.com/photos/original/34860667.jpgl.

[4] http://www.efm.leeds.ac.uk/cive/fluidslevel1/unit00/index.html.

[5] Tomáš Blejchar. *Turbulence-Modelování proudění –CFX (vyd. 1)*. Ostrava: Vysoká škola báňská - Technická univerzita Ostrava, 2010. ISBN: 978-80-248-2606-6.

[6] Sylva Drábková. *Mechanika tekutin*. Edičné stredisko Vysoká škola báňská - Technická univerzita Ostrava, 2007. ISBN: 978-80-248-1508-4.

[7] Colleen D.Scott-Pomerantz. *The k-epsilon model in the theory of turbulence*. University od Pittsburgh, 2007.

[8] Miloslav Feistauer. *Theory and Numerics for Problems od Fluid Dynamics*. Charles University Prague, 2006.

[9] Ing. Michal Franek. Aplikácia poznatkov z prúdenia tekutín formou experimentu (blwt) a simulácie (cfd – fluent). Prednášky (Prezentácia).

[10] Peter Frolkovič. *Prúdenie kvapalín a plynov*. Nakladateľstvo Slovenskej technickej univerzity, 2013. ISBN: 978-80-227-3861-3.

[11] O. Zikmund J. Bednář,. *Fyzika mezní vrstvy atmosféry*. Praha Academia, 1985. ISBN: 21-070-85.

[12] Pavel Šťáva, Jaroslav Janalík. *Mechanika tekutin*. Edičné stredisko Vysoká škola báňská - Technická univerzita Ostrava, 2002.

[13] Milada Kazoubková. *Modelovaní prudení tekutin FLUENT a CFX*. Ostrava: Vysoká škola báňská - Technická univerzita Ostrava, 2008.

[14] Peter Lobotka. *Modelovanie prirodzeného vetra a jeho kvantifikácia vo veternom tuneli*. Slovenská technická univerzita, 2014. Dizertačná práca.

[15] Vladimír Míka, Lubomír Neužil. *Chemické inženýrství 1*. Vydavatelství VŠCHT, 1998. ISBN: 80-7080-312-6.

[16] Mathias Ohlina, Martin Wiklund, Roy Green. *Lab on a Chipi*. 2012.

[17] Karol Mikula. *Prúdenia kvapalín a plynov*. 2015. Prednášky.

[18] Vlček Petr. *Modelovaní turbulentního převodení*. České vysoké učení technické v Prahe, 2013. Diplomová práca.

[19] David R. Dowling, Pijush K.Kundu, Ira M.Cohen,. *Fluid Mechanics (Fifth Edition)*. Elsevier Inc., 2012.

[20] P.J.Richards. Appropriate boundary conditions for computational wind engineering models using the $k - \epsilon$ turbulence model. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 1993.

[21] Sigrid Reiter. Validation process for cfd simulation of wind around buildings. *European built enviroment CAE conference*, 2008.

[22] Václavl Uruba. *Turbulence (vyd. 2.)*. České vysoké učení technické v Prahe, 2014. ISBN: 978-80-01-05600-4.

[23] A.Košinárová, V.Obetkova, A.Mamrillová,. *Teoretická Mechanika*. Vydavateľstvo technickej a ekonomickej literatúry Bratislava, 1990. ISBN: 80-05-00597-0.

[24] Gaizka Zarraonadia. *Influence on wind shear and turbulence in flow over obstacles*. Norwegian University of Science and Technology, 2010. Master thesis.