

SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE

Stavebná fakulta

Evidenčné číslo: SvF-104292-54067

Numerické riešenie rovníc plytkej vody

Bakalárska práca

2017

Nikolas Csepregi

SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE

Stavebná fakulta

Evidenčné číslo: SvF-104292-54067

Numerické riešenie rovníc plytkej vody

Bakalárska práca

Študijný program: matematické a počítačové modelovanie

Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika

Školiace pracovisko: Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie

Vedúci záverečnej práce: doc. RNDr. Peter Frolkovič, PhD.

Bratislava 2017

Nikolas Csepregi

Čestné prehlásenie

Čestne prehlasujem, že bakalársku prácu Numerické riešenie rovníc plytkej vody som vypracoval samostatne na základe použitej literatúry pod dohľadom vedúceho práce.

Bratislava, 09.5.2017

.....

Vlastnoručný podpis

Podakovanie

Týmto sa chcem poďakovať doc. RNDr. Petrovi Frolkovičovi, PhD. za cenné pripomienky a odborné konzultácie pri vypracovaní tejto práce.

Obsah

1	Úvod do problematiky	7
2	Rovnice plytkej vody	8
3	Numerické metódy	10
3.1	Stabilita numerickej metódy	11
3.2	Lax-Friedrichsova metóda pre skalárny prípad	12
3.3	Lax-Friedrichsova metóda pre rovnice plytkej vody	13
3.4	Lokálna Lax-Friedrichsova metóda	14
4	Numerický Experiment	16
4.1	Riemannov problém	16
4.2	Šírenie vlny na vodnej hladine	17
4.3	Problém prelomenia priehriady	20
5	Záver	23

Abstrakt

V tejto bakalárskej práci sa venujeme numerickému riešeniu rovníc plytkej vody. Riešime tu dva problémy týkajúce sa plytkej vody. Ako prostriedky nám poslúžia metódy na ich riešenie - klasická a lokálna Lax-Friedrichsova metóda. Jedným z problémov je šírenie vlny po vodnej hladine, tým druhým je problém prelomenia priehrady. V práci sa preukážu nedostatky Lax-Friedrichsovej metódy. Tie budú napravené použitím lokálnej Lax-Friedrichsovej metódy. Numerické výsledky budú na záver analyzované a navzájom porovnané.

Kľúčové slová: numerické riešenie, plytká voda, Lax-Friedrichs, prelomenie priehrady.

Abstract

In this bachelor thesis, we study numerical solutions of shallow water equations. We solve two shallow water related problems. We will use methods for solving these equations - the classic and local Lax-Friedrichs methods. One problem is the propagation of a wave on the water surface, the second is the dam-break problem. In this work, we will see the shortcomings of the Lax-Friedrichs method. Those will be remedied by using the local Lax-Friedrichs method. We will then describe and analyze the numerical results. We conclude this work with a short comparison of the results.

Keywords: numerical solution, shallow water, Lax-Friedrichs, dam-break.

1 Úvod do problematiky

Skúmanie správania vodnej hladiny je dlhodobo v záujme vedeckých pracovníkov po celom svete. Javy ako vlny tsunami, pretrhnutie priehrad či vyliatie riek z korýt každoročne ohrozujú životy, infraštruktúru ako aj životné prostredie. Existuje veľké množstvo matematických modelov, ktoré popisujú vyššie uvedené javy. Preto je dôležité spomedzi numerických metód, ktoré môžu riešiť tieto problémy, vybrať tie, ktoré nám umožnia získať riešenia približujúce sa k realite s čo najmenšou numerickou chybou.

Predmetom výskumu tejto práce je numerické riešenie rovníc plytkej vody. Zoznámime sa s týmito rovnicami a predstavíme si dve numerické metódy umožňujúce riešenie týchto rovníc. Zameriame sa na implementáciu uvedených numerických metód v softvéri *Wolfram Mathematica* a na vzájomné porovnávanie ich výsledkov.

V prvej kapitole odvodíme rovnice plytkej vody za uvedených predpokladov. Druhá kapitola reprezentuje teoretickú numerickú časť tejto práce, pričom popíšeme podmienku pre stabilitu metód založených na princípoch konečných objemov, odvodíme *Lax-Friedrichsovu metódu* a *lokálnu Lax-Friedrichsovu metódu*. Experimentálna časť je obsiahnutá v štvrtej kapitole. Vyriešime v nej problém šírenia vlny po vodnej hladine a problém prelomenia priehrad s použitím dvoch predstavených metód a zanalyzujeme ich výsledky. V piatej kapitole stručne zhrnieme výsledky práce.

2 Rovnice plytkej vody

Pod pojmom rovnice plytkej vody rozumieme špeciálny systém hyperbolických parciálnych diferenciálnych rovníc [1]. V prípade zahrnutia viskózneho trenia do modelu sa uvedené rovnice zmenia na parabolické. V našom prípade ale tento faktor zanedbávame a pracujeme s hyperbolickou verziou rovníc.

Pred odvodením rovníc uvedieme predpoklady, ktoré nám ich umožnia odvodiť. Uvažujeme tekutinu v kanáli jednotkovej šírky a predpokladáme zanedbateľnosť vertikálnej zložky rýchlosti tekutiny. Pri horizontálnej zložke rýchlosti tekutiny $u(x, t)$, budeme predpoklad konštantnosť v ľubovoľnom priečnom priereze kanála. Tieto predpoklady sú splnené ak uvažujeme kanál ktorého hĺbka je zanedbateľná voči jeho dĺžke.

Ďalším predpokladom je nestačiteľnosť kvapaliny, ktorý má ako dôsledok konštantnú hustotu $\bar{\rho}$. Naším cieľom je práve určenie výšky hladiny tekutiny h , pričom táto výška je určená funkciou $h(x, t)$. Celková hmotnosť tekutiny medzi dvoma bodmi $[x_l, x_p]$ v čase t je určená ako hodnota integrálu

$$\int_{x_l}^{x_p} \bar{\rho} h(x, t) dx. \quad (1)$$

Vertikálnou integráciou hustoty hybnosti tekutiny $\bar{\rho} u(x, t)$ dostávame hodnotu hmotnostného toku $\bar{\rho} h(x, t) u(x, t)$. Odstránením konštanty $\bar{\rho}$ z rovnice zachovania hmotnosti dostávame

$$h_t + (uh)_x = 0. \quad (2)$$

Rovnica zachovania hybnosti [1] má tvar

$$(\bar{\rho} hu)_t + (\bar{\rho} hu^2 + p)_x = 0. \quad (3)$$

Tlak p v rovnici (3) určíme z hydrostatického zákona. Ten tvrdí, že tlak vo vzdialenosti $h - y$ pod hladinou je rovný $\bar{\rho} g(h - y)$, kde g je gravitačná konštanta. Tento tlak vzniká z hmotnosti tekutiny nad bodom v hĺbke y . Po vertikálnej integrácii v hraniciach od $y = 0$ po $y = h(x, t)$ nám dáva hodnoty celkového tlaku p v hĺbke $h(x, t)$. Správna formulácia tlaku v hybnostnom toku je:

$$p = \frac{1}{2} \bar{\rho} g h^2. \quad (4)$$

Použijúc vzťah (4) v rovnici (3) a odstránením $\bar{\rho}$ dostávame

$$(hu)_t + \left(hu^2 + \frac{1}{2} g h^2 \right)_x = 0 \quad (5)$$

Pri dostatočne hladkých funkciách výšky hladiny $h(x, t)$ a horizontálnej rýchlosti $u(x, t)$ a zapísaní v inom tvare môžeme rovnicu (5) zjednodušiť. Prepíšeme rovnicu (5) do tvaru

$$(hu)_t + \left((hu)u + \left(\frac{1}{2}h \right)h \right)_x = 0. \quad (6)$$

Po aplikácii formuly pre derivovanie súčinov zložených funkcií a za využitia (2) pre nahradenie výrazu h_t dostávame tvar

$$u_t + \left(\frac{1}{2}u^2 + gh \right)_x = 0. \quad (7)$$

Spojením rovníc (2) a (7) dostávame systém rovníc plytkej vody

$$\begin{bmatrix} h \\ u \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} f(h, u) \\ g(h, u) \end{bmatrix}_x = 0, \quad (8)$$

kde $f(h, u) = uh$ a $g(h, u) = \frac{1}{2}u^2 + gh$. Pre zjednodušenie si zavedieme nasledujúce značenia:

$$Q(x, t) = (h(x, t), u(x, t)) \quad (9)$$

$$F(h, u) = (f(h, u), g(h, u)). \quad (10)$$

Vyššie uvedené kroky nám umožnia prepísať nami uvažovaný systém do tvaru

$$Q_t + F(Q)_x = 0, \quad (11)$$

ktorý je ekvivalentný s tvarom (8).

Ďalším dôležitým pojmom pri riešení rovníc plytkej vody je *Jakobián funkcie* na pravej strane systému rovníc plytkej vody, ktorý má tvar

$$F'(Q) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(h, u)}{\partial h} & \frac{\partial f(h, u)}{\partial u} \\ \frac{\partial g(h, u)}{\partial h} & \frac{\partial g(h, u)}{\partial u} \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Pri numerických výpočtoch sú potrebné aj *vlastné hodnoty Jakobiánu*,

$$\lambda^1 = u - \sqrt{gh}, \quad \lambda^2 = u + \sqrt{gh}. \quad (13)$$

Pre riešenie systému rovníc plytkej vody bude dôležitá práve maximálna vlastná hodnota z vyššie uvedenej dvojice.

3 Numerické metódy

Rovnice plytkej vody možno riešiť pomocou viacerých metód. V tejto kapitole si priblížime metódy použité v tejto práci a to primárne *Lax-Friedrichsovu metódu*. Ako sa však ukáže z dôvodov uvedených v tejto kapitole, budeme potrebovať aj jej modifikovanú verziu - takzvanú *Lokálnu Lax-Friedrichsovu metódu*. Pre zjednodušenie predstavíme metódy najprv v ich skálarnej verzii, až potom uvedieme nami požadované tvary pre systém rovníc (2) a (7).

Budeme uvažovať nelineárnu hyperbolickú parciálnu diferenciálnu rovnicu. Najjednoduchšia skalárna rovnica tohto tvaru je

$$q_t + f(q)_x = 0, \quad (14)$$

kde $f(q)$ je zatiaľ bližšie neurčená *funkcia toku*.

Metódy ktorým sa budeme v tejto kapitole venovať sú založené na princípoch *metódy konečných objemov* [1]. Tieto metódy budú v tvare

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+\frac{1}{2}}^n - F_{i-\frac{1}{2}}^n), \quad (15)$$

kde $F_{i-\frac{1}{2}}^n$ je aproximácia priemerného toku v bode $x = x_{i-\frac{1}{2}}$:

$$F_{i-\frac{1}{2}}^n \approx \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(q(x_{i-\frac{1}{2}}, t)) dt. \quad (16)$$

Ak dokážeme aproximovať priemer toku len na základe hodnôt Q_i^n , získame plne diskrétnu explicitnú metódu. Pri hyperbolických problémoch sa zmeny veličín šíria konečnou rýchlosťou. Tento predpoklad nám umožní získanie hodnoty $F_{i-\frac{1}{2}}^n$ pomocou hodnôt Q_{i-1}^n a Q_i^n . Toto nám umožní použiť vzorec v tvare

$$F_{i-\frac{1}{2}}^n = \mathcal{F}(Q_{i-1}^n, Q_i^n), \quad (17)$$

pričom \mathcal{F} je zatiaľ nešpecifikovaná *funkcia numerického toku*. Metóda (15) potom nadobudne tvar

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [\mathcal{F}(Q_i^n, Q_{i+1}^n) - \mathcal{F}(Q_{i-1}^n, Q_i^n)]. \quad (18)$$

Je dôležité poznamenať, že výsledná metóda závisí od výberu funkcie numerického toku \mathcal{F} . Principiálne ale platí, že každá metóda tohto typu je *explicitná metóda s trojbodovou šablónou*. To znamená, že hodnota Q_i^{n+1} bude závislá od hodnôt Q_{i-1}^n, Q_i^n a Q_{i+1}^n v predošlom časovom kroku n .

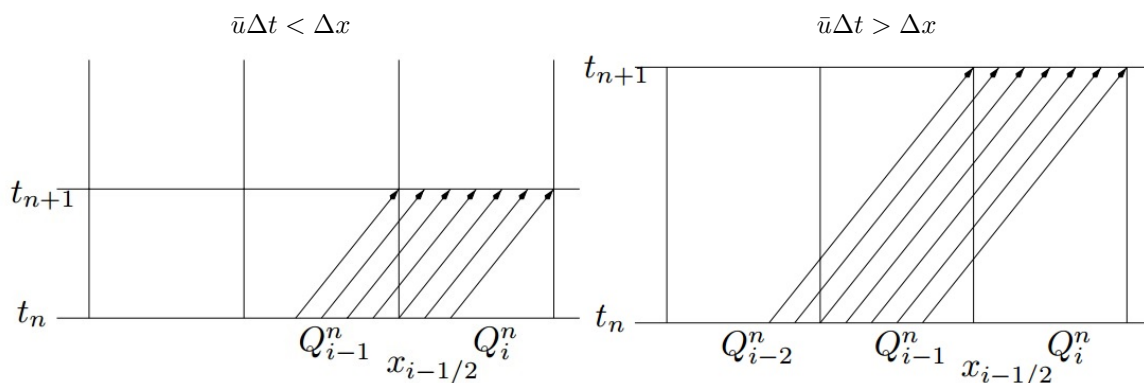
3.1 Stabilita numerickej metódy

Stabilita numerických metód je závislá na splnení rôznych požiadaviek [1]. V našej práci je nutné splnenie takzvanej *Courant-Friedrichs-Lewyho podmienky*, skrátene *CFL podmienky*. S touto podmienkou súvisí takzvané *Courantovo číslo*. Splnenie tejto podmienky je *nutné* pre všetky metódy založené na princípoch metódy konečných objemov alebo diferencií. Ich splnenie zabezpečuje stabilitu a je nutné pre konvergenciu riešenia pri postupnom zjemňovaní výpočtovej siete. Jednoduchá interpretácia tejto podmienky tvrdí nasledujúce: metóda musí byť použitá spôsobom, ktorý umožňuje zmenám sledovaných veličín šíriť sa korektnými fyzikálnymi rýchlosťami.

Ako sme už spomenuli pri použití explicitnej metódy (18) hodnota Q_i^{n+1} závisí len od hodnôt Q_{i-1}^n , Q_i^n a Q_{i+1}^n . Pri aplikácii metódy (18) na *rovniciu advekcie*

$$q_t + \bar{u}q_x = 0 \quad , \quad \bar{u} > 0 \quad (19)$$

nám podmienka $\bar{u} > 0$ zabezpečí, že presné riešenie sa šíri rýchlosťou \bar{u} a za jeden časový krok sa posunie o $\bar{u}\Delta t$. V prípade ak $\bar{u}\Delta t < \Delta x$, zmena veličiny sa za jeden časový krok rozšíri o menej ako jeden element. V takomto prípade je možné určiť tok v bode $x_{i-\frac{1}{2}}$ z hodnôt Q_{i-1}^n a Q_i^n . Naopak, ak použijeme väčší časový krok, dostávame nerovnosť $\bar{u}\Delta t > \Delta x$. Ak zároveň $\bar{u}\Delta t \leq 2\Delta x$ tak je hodnota toku v bode $x_{i-\frac{1}{2}}$ závislá od hodnoty Q_{i-2}^n , a teda je od nej závislá aj hodnota Q_i^{n+1} . Obidve situácie sú zobrazené na Obr. 1. Z týchto dôvodov by metóda (18) bola pri použití tak veľkého časového kroku nestabilná.



Obr. 1: Charakteristika rýchlosti šírenia zmeny veličiny pre rovnicu advekcie [1].

Toto je dôsledok CFL podmienky, ktorá bola odvodená za pomoci metód založených na konečných diferenciách. Tie boli použité ako analytický prostriedok na dokázanie existencie riešenia niektorých parciálnych diferenciálnych rovníc. Je mimoriadne dôležité poznamenať, že táto podmienka je *nutnou* podmienkou pre stabilitu a konvergenciu.

Pre skalárne hyperbolické rovnice sa zvyčajne volia metódy a siete, ktoré zaistia

splnenie CFL podmienky. Pre rovnicu advekcie (19) definujeme *Courantovo číslo* vzťahom

$$\nu \equiv \left| \frac{\bar{u}\Delta t}{\Delta x} \right| \leq 1. \quad (20)$$

Hodnota *Courantovho čísla* $\nu \leq 1$ zabezpečí splnenie CFL podmienky a motivuje nás fixovať hodnotu $\frac{\Delta t}{\Delta x}$ pri postupnom zjemňovaní siete.

Na základe podobných úvah sa dá definovať [1] výpočet *Courantovho čísla* pre náš systém hyperbolických rovníc (2) a (7). Určíme ho vzťahom

$$\nu = \frac{\Delta t}{\Delta x} \Lambda \quad (21)$$

kde Λ je maximum z vlastných hodnôt (13)

$$\Lambda = \max [\lambda^1, \lambda^2] \quad (22)$$

Tu sa opäť preukazuje dôležitosť vlastných hodnôt (13) Jakobiánu (12) funkcie toku. Konkrétne sa to preukáže v takzvanej *lokálnej Lax-Friedrichsovej metóde*, ktorú predstavíme neskôr v tejto kapitole. Pre metódy tohto typu, ktoré hodnotu Q_i^{n+1} určujú z troch hodnôt Q_{i-1}^n , Q_i^n a Q_{i+1}^n to vedie k podmienke pre *Courantovo číslo*

$$\nu \leq 1. \quad (23)$$

Výpočet Courantovho čísla závisí primárne od šírky šablóny pre zvolenú metódu. Pri zvolení šablóny, kde sa hodnota Q_i^n určuje aj z hodnôt Q_{i-2}^{n-1} a Q_{i+2}^{n-1} sa Courantovo číslo počíta identicky. Pri takejto šablóne pozostávajúcej z piatich hodnôt je podmienka na časový krok menej reštriktívna. Pre takú metódu môže nadobúdať CFL podmienka tvar

$$\nu \leq 2. \quad (24)$$

Treba opäť zdôrazniť fakt, že toto je len *nutná* podmienka. Pre presné určenie podmienky zaručujúcej konvergenciu metódy je nutné vykonať detailnejšiu analýzu stability a konzistencie [1].

3.2 Lax-Friedrichsova metóda pre skalárny prípad

Pri voľbe numerického toku \mathcal{F} budeme stále pracovať s metódami tvaru (15). Naším cieľom je určiť priemerný tok v bode $x_{i-\frac{1}{2}}$ na základe hodnôt Q_{i-1}^n a Q_i^n . Ak sa pokúsime použiť aritmetický priemer hodnôt, dostaneme

$$F_{i-\frac{1}{2}}^n = \mathcal{F}(Q_{i-1}^n, Q_i^n) = \frac{1}{2}[f(Q_{i-1}^n) + f(Q_i^n)]. \quad (25)$$

Dosadením (25) do (18) dostávame

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} [f(Q_{i+1}^n) - f(Q_{i-1}^n)]. \quad (26)$$

Táto metóda je ale nestabilná pre hyperbolické problémy, a to ani pri splnení požiadavky na dostatočne malý časový krok [1].

Klasická *Lax-Friedrichsova metóda* má tvar

$$Q_i^{n+1} = \frac{1}{2}(Q_{i-1}^n + Q_{i+1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} [f(Q_{i+1}^n) - f(Q_{i-1}^n)]. \quad (27)$$

Je tu značná podobnosť s nestabilnou metódou (26), avšak hodnota Q_i^n je nahradená priemerom $\frac{1}{2}(Q_{i-1}^n + Q_{i+1}^n)$. V Lax-Friedrichsovej metóde na prvý pohľad nevidno metódu v tvare (15). Táto podobnosť sa preukáže až po zedefinovaní numerického toku

$$\mathcal{F}(Q_{i-1}^n, Q_i^n) = \frac{1}{2}[f(Q_{i-1}^n) + f(Q_i^n)] - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(Q_i^n - Q_{i-1}^n). \quad (28)$$

Tento numerický tok pripomína nestabilný centrový tok (25) s pridaním ďalšieho člena podobnému toku *difúznej rovnice* [1]. Použitie tohto toku vzbudzuje dojem modelovania *advekčno-difúznej rovnice*

$$q_t + f(q)_x = \beta q_{xx} \quad , \quad \beta = \frac{\frac{1}{2}(\Delta x)^2}{\Delta t}. \quad (29)$$

Pri fixovaní podielu $\frac{\Delta t}{\Delta x}$ sa postupným zjemňovaním výpočtovej siete koeficient β vynuluje. Vďaka tomu je metóda v limite konzistentná s pôvodnou hyperbolickou rovnicou. Tento pridaný výraz možno interpretovať ako *numerickú difúziu*. Táto difúzia rieši problémy vystupujúce v nestabilnej metóde (26) a poskytuje stabilnú metódu pre naše výpočty. Stabilitu je možné dokázať [1] pre hodnoty Courantovho čísla

$$\nu \leq 1. \quad (30)$$

3.3 Lax-Friedrichsova metóda pre rovnice plytkej vody

V našom prípade pozostáva systém rovníc plytkej vody z rovníc (8). Veličiny, ktorých hodnoty chceme určiť sú *výška hladiny* h a *rýchlosť kvapaliny* u . Hľadanú numerickú hodnotu výšky hladiny si označíme ako R_i^n a súčasne pre rýchlosť kvapaliny zavedieme jej numerickú hodnotu U_i^n . Metóda konečných objemov pre náš konkrétny prípad teda nadobudne tvar

$$R_i^n = R_i^{n-1} - \frac{\Delta t}{\Delta x} [\mathcal{R}(R_i^{n-1}, U_i^{n-1}, R_{i+1}^{n-1}, U_{i+1}^{n-1}) - \mathcal{R}(R_{i-1}^{n-1}, U_{i-1}^{n-1}, R_i^{n-1}, U_i^{n-1})], \quad (31)$$

$$U_i^n = U_i^{n-1} - \frac{\Delta t}{\Delta x} [\mathcal{U}(R_i^{n-1}, U_i^{n-1}, R_{i+1}^{n-1}, U_{i+1}^{n-1}) - \mathcal{U}(R_{i-1}^{n-1}, U_{i-1}^{n-1}, R_i^{n-1}, U_i^{n-1})], \quad (32)$$

kde \mathcal{R} je numerická funkcia toku pre výšku hladiny a \mathcal{U} je numerická funkcia toku pre rýchlosť tekutiny.

Keďže hodnoty R_i^n a U_i^n v časovom kroku n počítame v (31) a (32) z hodnôt z časového kroku $n - 1$, môžeme si zaviesť zjednodušené značenie

$$R_l \equiv R_{i-1}^{n-1} \quad , \quad R_p \equiv R_i^{n-1}, \quad (33)$$

$$U_l \equiv U_{i-1}^{n-1} \quad , \quad U_p \equiv U_i^{n-1}. \quad (34)$$

V našom prípade budú mať toky predpis

$$\mathcal{R}_i^n(R_l, U_l, R_p, U_p) = \frac{1}{2}(f(R_l, U_l) + f(R_p, U_p) - \frac{2\Delta x}{\Delta t}(R_p - R_l)), \quad (35)$$

$$\mathcal{U}_i^n(R_l, U_l, R_p, U_p) = \frac{1}{2}(g(R_l, U_l) + g(R_p, U_p) - \frac{2\Delta x}{\Delta t}(U_p - U_l)). \quad (36)$$

Pomocou Lax-Friedrichsovej metódy bude realizovaná prvá časť numerického experimentu. Počas neho sa ukáže nedostatok tejto metódy. Konkrétne Lax-Friedrichsova metóda v sebe zahŕňa viac difúzie ako je pre reálne aplikácie potrebné. Numerické výsledky tejto metódy preto značne trpia na kvalite riešenia pri použití hrubých sietí.

3.4 Lokálna Lax-Friedrichsova metóda

Pri použití hrubých sietí pri Lax-Friedrichsovej schéme sa prejaví jej nedostatky. Pri vizualizácii riešení sa preukazuje schodovitá charakteristika riešenia pre ktorú platí $Q_{2j} = Q_{2j+1}$ pre každú hodnotu j . Toto vyplýva zo skutočnosti, že v schéme (25) pre výpočet Q_i^{n+1} sú zahrnuté hodnoty Q_{i-1}^n a Q_{i+1}^n . Tým dochádza k rozdeleniu párnych a nepárnych hodnôt v uzlových bodoch výpočtovej oblasti. Pri po častiach konštantných počiatočných hodnotách to vyústi do identického vývoja riešenia pre párne a nepárne uzlové body. Nežiadúcim následkom je dvojitý výskyt všetkých výsledných hodnôt.

Numerickú funkciu toku pre Lax-Friedrichsovu metódu pre skalárnu rovnicu môžeme napísať v tvare

$$\mathcal{F}(Q_{i-1}^n, Q_i^n) = \frac{1}{2}[f(Q_{i-1}^n) + f(Q_i^n)] - a(Q_i^n - Q_{i-1}^n), \quad a = \frac{\Delta t}{2\Delta x}. \quad (37)$$

Nedostatky Lax-Friedrichsovej metódy boli odstránené vykonaním zmien, ktoré vyústili do takzvanej *lokálnej Lax-Friedrichsovej metódy*. Jej numerický tok je tvaru (37), avšak v určení koeficientu *numerickej viskozity* a dochádza k významnej zmene. Oproti Lax-Friedrichsovej metóde sa hodnota a vypočíta lokálne. Numerický tok má takto tvar

$$F_{i-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}[f(Q_{i-1}) + f(Q_i) - a_{i-\frac{1}{2}}(Q_i - Q_{i-1})], \quad (38)$$

kde

$$a_{i-\frac{1}{2}} = \max(|f'(Q)|) \quad \forall q \in (Q_{i-1}, Q_i). \quad (39)$$

Podobne budeme postupovať pre rovnice plytkej vody. Toky (35) a (36) pre náš prípad zmeníme nasledovne:

$$\mathcal{R}_i^n(a, r_l, u_l, r_p, u_p) = \frac{1}{2}(f(r_l, u_l) + f(r_p, u_p) - \frac{a}{2}(r_p - r_l)), \quad (40)$$

$$\mathcal{U}_i^n(a, r_l, u_l, r_p, u_p) = \frac{1}{2}(g(r_l, u_l) + g(r_p, u_p) - \frac{a}{2}(u_p - u_l)). \quad (41)$$

Da sa ukázať [1], že hľadaná hodnota a je rovná maximu z vlastných hodnôt Jakobiánu (12). Využijeme fakt, že vlastné hodnoty Jakobiánu máme k dispozícii v definícii (13). Hodnota a je v tejto metóde vypočítaná ako

$$r = \max\{r_l, r_p\} \quad , \quad u = \max\{|u_l|, |u_p|\} \quad , \quad a = \sqrt{r} + u. \quad (42)$$

Hodnota a vystupujúca v schémach (40) a (41) je identická s výrazom (42). Nutno poznamenať, že a sa pre každý priestorový krok počíta dva krát - raz pre element naľavo od aktuálneho elementu a raz pre element napravo.

Lokálna Lax-Friedrichsova metóda pre účely tejto práce bude v tvare

$$R_i^n = R_i^{n-1} - \frac{\Delta t}{\Delta x} [\mathcal{R}(a_{i+\frac{1}{2}}, R_i^{n-1}, U_i^{n-1}, R_{i+1}^{n-1}, U_{i+1}^{n-1}) - \mathcal{R}(a_{i-\frac{1}{2}}, R_{i-1}^{n-1}, U_{i-1}^{n-1}, R_i^{n-1}, U_i^{n-1})], \quad (43)$$

$$U_i^n = U_i^{n-1} - \frac{\Delta t}{\Delta x} [\mathcal{U}(a_{i+\frac{1}{2}}, R_i^{n-1}, U_i^{n-1}, R_{i+1}^{n-1}, U_{i+1}^{n-1}) - \mathcal{U}(a_{i-\frac{1}{2}}, R_{i-1}^{n-1}, U_{i-1}^{n-1}, R_i^{n-1}, U_i^{n-1})]. \quad (44)$$

Je dôležité poznamenať, že splnenie nutnej *CFL podmienky* má významný dopad pre lokálnu Lax-Friedrichsovu metódu. Platí tu

$$\max_i \{a_{i-\frac{1}{2}}, a_{i+\frac{1}{2}}\} \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1. \quad (45)$$

Pre skutočne viditeľný kvalitatívny rozdiel medzi dvoma metódami je nutné uskutočniť numerické experimenty, ktoré sú predmetom ďalšej kapitoly. V nej sa prejavujú vyššie spomenuté nedostatky Lax-Friedrichsovej metódy a markantne vyššia kvalita riešení pri použití lokálnej Lax-Friedrichsovej metódy.

4 Numerický Experiment

V tejto kapitole sa budeme venovať dvom príkladom. Oba budeme riešiť pomocou metód popísaných v predošlej kapitole. Prvým problémom bude *šírenie vlny na vodnej hladine*. Začiatočný tvar vlny v tomto príklade bude predpísaný pomocou funkcie $h_0(x)$. Pre tento model budeme sledovať vývoj tvaru vodnej hladiny súčasne s vývojom jej rýchlosti.

Druhým uvažovaným príkladom bude prelomenie priehrady, takzvaný *dam-break problém*. Tu budeme modelovať prelomenia priehrady, ktorá má na oboch stranách nenulovú hodnotu výšky vodnej hladiny.

Výpočtové oblasti budú intervaly tvaru $]x_a, x_b[\subset \mathbb{R}$, pričom $x_a < x_b$. Časové kroky budú určené so zreteľom na Courant-Friedrichs-Lewyho podmienku s cieľom zaručenia stability metód. Pre oba príklady ale platí, že uvažujeme len kladný čas, teda $t \geq 0$, pričom $t = 0$ bude považovaný za počiatkový čas. V oboch modeloch budú použité *Dirichletove okrajové podmienky*. Analyzované a spracovávané budú výsledné hodnoty výšky hladiny vody a jej rýchlosti na celej výpočtovej oblasti. Všetky výpočty rovnako ako aj spracovávanie a analýza výsledkov boli vykonané za pomoci softvéru *Wolfram Mathematica*.

4.1 Riemannov problém

Fundamentálnou súčasťou metód založených na princípe metód konečných objemov sú takzvané *Riemannove problémy*. Jedná sa o hyperbolické rovnice ktoré pracujú so špeciálnymi počiatkovými dátami. Tie sú po častiach konštantné a obsahujú jednu nespojitost' v ľubovoľnom, ale pevne stanovenom bode. V našom prípade to bude bod $x = 0$. Nami riešený problém prelomenia priehrady predstavuje špeciálny prípad Riemannovho problému. Keďže pre potreby tejto práce budú vyššie spomínanými dátami hodnoty výšky hladiny nad nejakým bodom, predpíšeme Riemannov problém pre funkciu $h(x, t)$. Pre náš konkrétny prípad bude Riemannov problém daný predpisom

$$h(x, 0) = \begin{cases} h_l & x < 0, \\ h_r & x > 0. \end{cases} \quad (46)$$

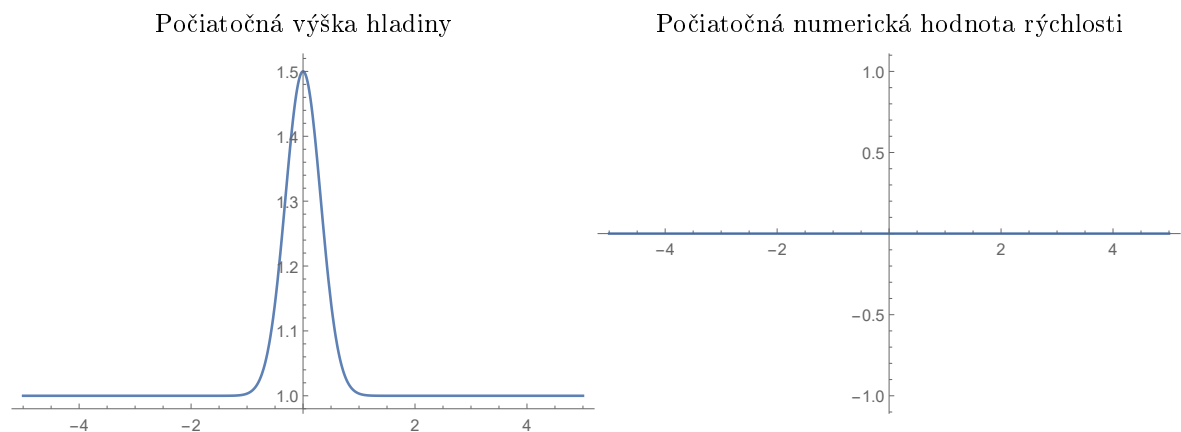
kde h_l a h_r sú hodnoty výšky hladiny pred priehradou, respektíve za ňou. Uvažujme dve hodnoty Q_{i-1} a Q_i , ktoré patria k navzájom susedným elementom na sieti vytvorenej metódou konečných objemov. Uvažované hodnoty reprezentujú priemerné hodnoty sledovaných veličín na svojich elementoch. Riešenie Riemannovho problému pre $h_l = Q_{i-1}$ a $h_r = Q_i$ nám umožní získať informácie, ktoré môžu byť použité pre výpočet numerického toku. Takisto budeme môcť vypočítať zmenu veličín spolu s meniacim sa časovým krokom. Riešenie Riemannovho problému pre hyperbolické rov-

nice je zvyčajne podobnostná funkcia[1], t. j. funkcia závislá od argumentu x alebo t . Pozostáva z konečného počtu vln, ktoré sa šíria od svojho počiatku konštantnými rýchlosťami. Pre lineárne hyperbolické systémy má Riemannov problém pomerne jednoduché riešenie. To silne súvisí s vlastnými hodnotami (13) a k nim prislúchajúcimi vlastnými vektormi [1]. Tento jednoduchý prístup je takisto aplikovaný pre náš prípad nelineárneho hyperbolického systému. Presné riešenie alebo jeho ľubovoľne dobré aproximácie sú skonštruovateľné. Nevýhodou je ale výpočtová náročnosť Riemannovho problému. Tá zvykáva byť príliš vysoká a preto sa používajú *približné Riemannove solvery* [1].

4.2 Šírenie vlny na vodnej hladine

Počiatočné údaje pre výšku hladiny a jej numerickú rýchlosť tohto príkladu sú dané funkčnými predpismi. Výšku hladiny v čase $t = 0$ si označíme ako h_0 , pre rýchlosť zavedieme značenie u_0 . Počiatočné hodnoty príkladu sú určené funkciami

$$r_0(x) = 1 + \frac{1}{2}e^{-5x^2} \quad , \quad u_0(x) = 0. \quad (47)$$



Obr. 2: Počiatočné dáta pre problém šírenia vlny na volnej hladine

Na Obr. 2 je zobrazená vizualizácia pôvodných údajov. Pre tento model budeme uvažovať ľavú hranicu výpočtovej oblasti ako $x_a = -5$ a pravú ako $x_b = 5$. Počet uzlových bodov si stanovíme ako $n = 40$. Výpočtová oblasť teda bude diskretizovaná s priestorovým krokom

$$\Delta x = \frac{x_b - x_a}{n} \quad , \quad \Delta x = 0.25. \quad (48)$$

Ďalším krokom v inicializácii modelu je výber vhodného časového kroku. Ten musíme zvoliť so zreteľom na Courant-Friedrich-Lewyho podmienku (21). Časový krok teda zvolíme ako

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{2} \quad , \quad \Delta t = 0.125. \quad (49)$$

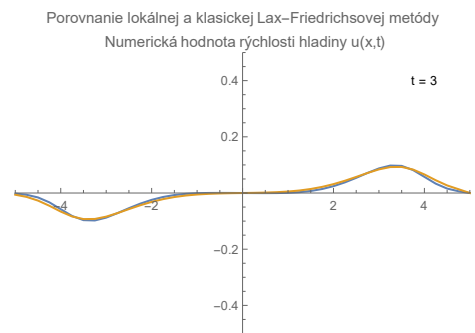
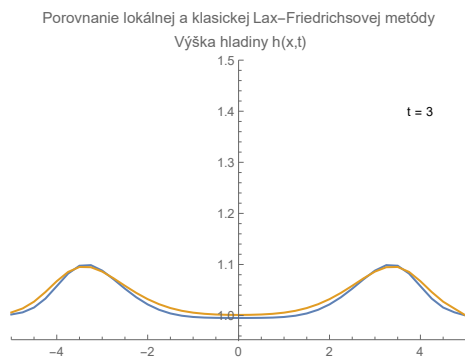
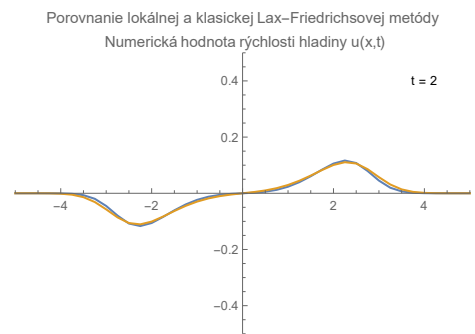
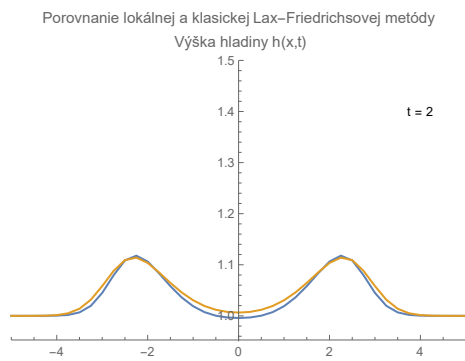
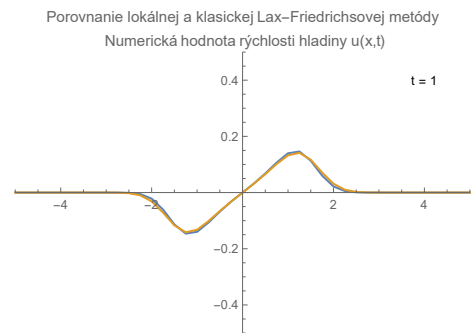
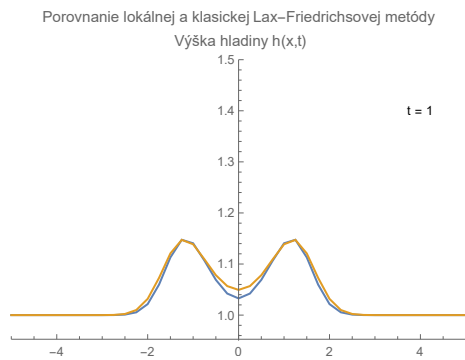
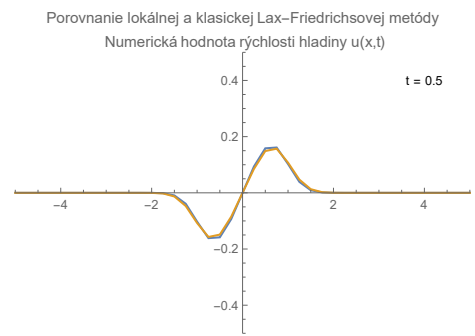
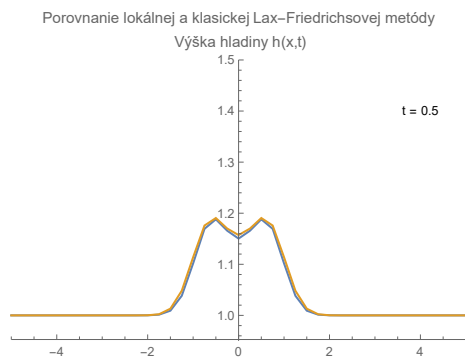
Náš model spĺňa Courant-Friedrichs-Lewyho podmienku, ktorá zaručuje stabilitu použitej metódy. Na experiment boli použité metódy popísané v predošlej kapitole - klasická Lax-Friedrichsova a jej lokálny variant. Pre klasickú verziu boli odvodené numerické toky (35) a (36), pre lokálny variant to boli toky (40) a (41). Hodnota koeficientu a bola určená pomocou vzťahov v predpise (42). Numerické výsledky získané pomocou klasickej Lax-Friedrichsovej metódy budú vizualizované žltou farbou, zatiaľ čo výsledky lokálnej Lax-Friedrichsovej metódy budú zobrazené modrou farbou.

Na obrázku Obr. 3 vidno ako sa vyvíja riešenie získané pomocou obidvoch metód s plynúcim časom. Počiatočný stĺp vody pozvoľna padá späť na horizontálnu vodnú hladinu. Postupným približovaním k povrchu sa rozdelí na dve vlny, ktoré vidno už v čase $t = 0.5$. Tieto vlny sa ďalej šíria na obe strany od svojho počiatku.

Smerom k hraniciam výpočtovej oblasti sa šíria tzv. *šokové vlny*. Ich prítomnosť ľahko vyčítať z vizualizácie vývoja riešenia. Šokové vlny sú sprevádzané prudkým nárastom výšky hladiny $h(x, t)$. Ďalším ich príznakom je takisto veľmi prudký nárast hodnoty rýchlosti $u(x, t)$.

Šoková vlna je nasledovaná tzv. *zriedenou vlnou*, ktorá sa taktiež prejavuje svojimi charakteristickými črtami. Je sprevádzaná pozvoľným rozširovaním šírky vlny pre hodnoty $h(x, t)$, ako aj pre hodnoty rýchlosti $u(x, t)$. Toto správanie odpovedá predstavám o reálnom šírení vlny po hladine vody. U oboch metód sa medzi dvoma zriedenými vlnami vytvorila *pokojná hladina*, t. j. hladina, ktorej výška sa nemení a jej numerická rýchlosť je nulová.

Ako vidno, obe metódy sa prejavili ako stabilné a ponúkli akceptovateľné riešenia. Avšak z hľadiska numerickej kvality riešenia nám poskytla lokálna Lax-Friedrichsova metóda kvalitnejšie výsledky. K tomuto záveru sme dospeli po porovnaní výsledkov na pomerne hrubej sieti s počtom uzlových bodov $n = 40$ s výsledkami na veľmi jemnej sieti. Tá mala počet deliacich bodov stanovenú na počte $n = 400$. Pri tak jemnej sieti už obe metódy poskytovali numerické riešenia s rovnakou kvalitou.



Obr. 3:
Vývoj šírenia vlny na vodnej hladine v časoch $t = 0.5, 1, 2, 3$

4.3 Problém prelomenia priehriady

Uvažujme systém rovníc plytkej vody (8) s po častiach spojenými počiatocnými dátami pre výšku hladiny $h(x, t)$, ktoré sú dané predpisom

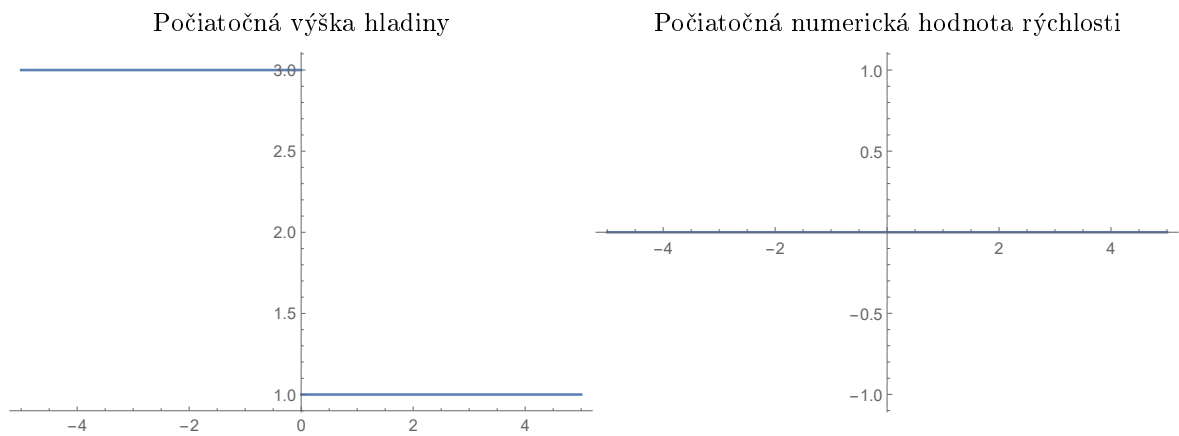
$$h(x, 0) = \begin{cases} h_l & x < 0 \\ h_r & x > 0 \end{cases}, h_l > h_r, \quad u_0(x) = 0. \quad (50)$$

Dáta sú vizualizované na Obr.4.

Ak systém rovníc plytkej vody (8) vyriešime s počiatocnými údajmi (50), modelujeme prelomenie priehrady. V príklade dôjde k samotnému prelomeniu v čase $t = 0$. Priehrada od seba oddeľuje dve rôzne vysoké hladiny vody, z ktorých horná sa dá do pohybu po začatí výpočtu. Pre tento príklad bude použitý identický priestorový krok diskretizácie (48) ako v prípade šírenia vlny po hladine. Pre časový krok zvolíme diskretizáciu nasledovne:

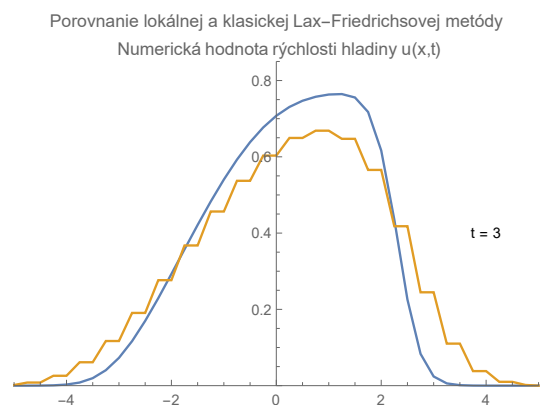
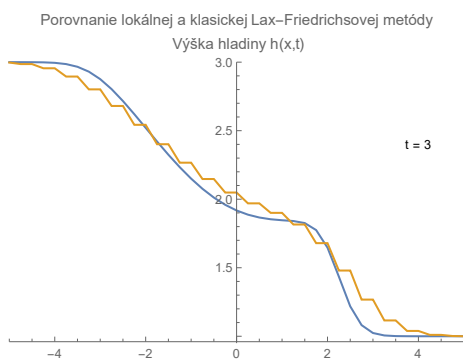
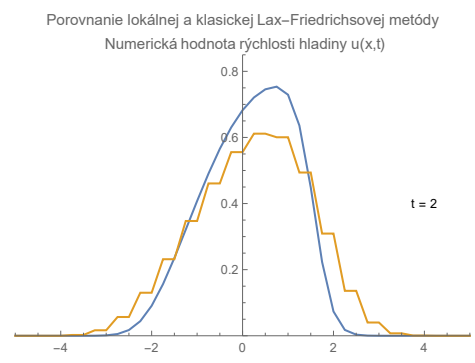
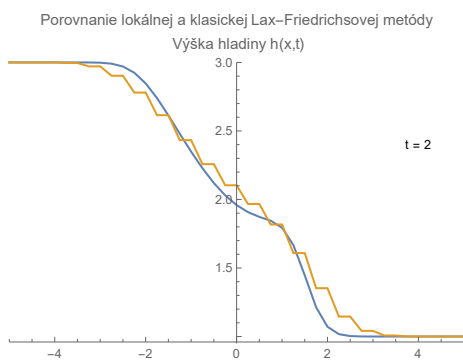
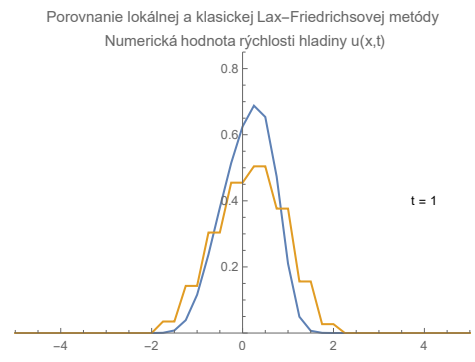
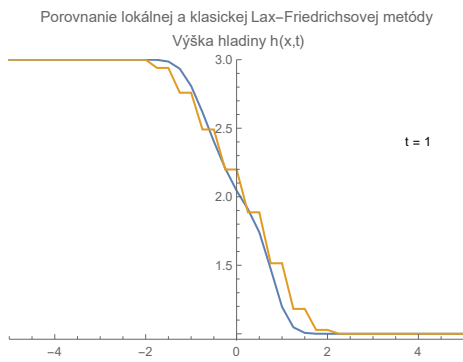
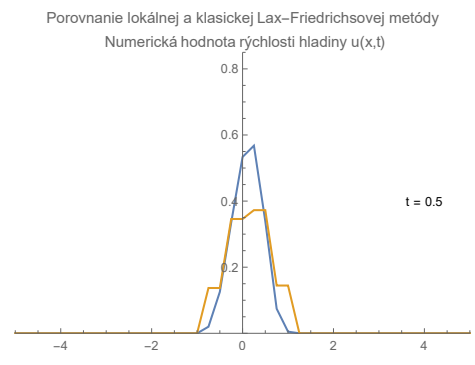
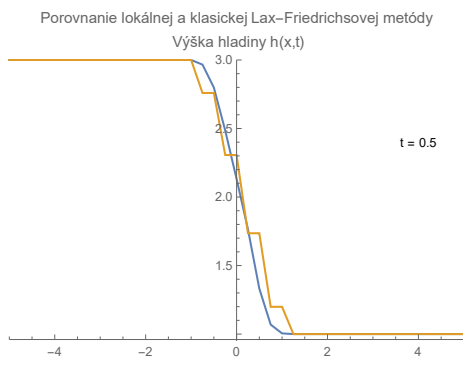
$$\Delta t = \frac{\Delta x}{4}, \quad \Delta t = 0.0625. \quad (51)$$

Na obrázku Obr. 4 je zobrazená vizualizácia počiatocných údajov pre tento príklad. U počiatocných dátach pre hodnotu výšky h je za priehradu považovaná *os y*. Tak ako



Obr. 4: Počiatočné dáta pre problém prelomenia priehrady

predošlý príklad, aj tento budeme riešiť pomocou oboch popísaných metód a budeme porovnávať ich výsledky. U Lax-Friedrichsovej metódy použijeme toky (35) a (36), pričom samotná metóda je tvaru (31) pre výšku hladiny h a (32) pre numerickú rýchlosť hladiny u . Lokálna Lax-Friedrichsova metóda je tvaru (43) pre výšku h a (44) pre numerickú hodnotu rýchlosti u . Jej toky sú tvaru (40) a (41) pre výšku, resp. rýchlosť. V následnej analýze výsledkov bude riešenie získané pomocou klasickej Lax-Friedrichsovej metódy vizualizované žltou farbou a modrou pre Lokálnu Lax-Friedrichsovu metóda.



Obr. 5:
Pribeh problému prelomenia priehrady v časoch $t = 0.5, 1, 2, 3$

Ako vidno na Obr. 5, pre tento príklad a pre túto sieť už metódy nedávajú ekvivalentné riešenia. U Lax-Friedrichsovej metódy sa preukazujú nedostatky spomínané v predošlej kapitole. Dochádza tu k zlúčeniu hodnôt v párných a nepárnych uzlových bodoch so schodkovitým charakterom. To má za následok nízku kvalitu numerického riešenia v porovnaní s lokálnou verziou metódy.

Podobne ako v príklade o šírení vlny po hladine, aj tu je viditeľná šoková vlna. Šíri sa v smere zľava doprava, teda zobrazuje prevalenie vody z oblasti s vyššou hladinou h do oblasti s nižšou hladinou. Prítomnosť šokovej vlny je napovedaná aj zvýšenou numerickou hodnotou rýchlosti u , podobne ako v príklade so šírením vlny po vodnej hladine. Numerická hodnota rýchlosti u sa pri nej takisto rapídne zvyšuje.

Zriedená vlna je v tomto príklade taktiež výrazne viditeľná. Plynutím času sa zväčšuje vzdialenosť medzi zriedenou a šokovou vlnou, pričom súčasne sa zvyšuje numerická hodnota rýchlosti hladiny u medzi týmito dvoma vlnami. Rýchlosť hladiny narastá postupne, až dosiahne svoje maximum vo vrchole šokovej vlny. Zmena rýchlosti pri spomalení je pritom väčšia ako pri zrýchlení.

5 Záver

V tejto práci sme porovnávali dve numerické metódy pre riešenie rovníc plytkej vody v dvoch problémoch, a to šírenia vody po vodnej hladine a prelomenia priehrady. Pre oba problémy sme implementovali príslušné rovnice numerických metód - Lax-Friedrichsovu a lokálnu Lax-Friedrichsovu metódu v softvéri Wolfram Mathematica a analyzovali sme výsledky. V oboch problémoch sme dospeli k záveru, že lokálna Lax-Friedrichsova metóda poskytuje v porovnaní s klasickou Lax-Friedrichsovou metódou vyššiu kvalitu numerických riešení. Pre po častiach konštantné počiatkové dáta má klasická Lax-Friedrichsova metóda schodkovitý charakter riešenia a preto nie je vhodná pre riešenie daných problémov. Z toho vyplýva, že lokálna Lax-Friedrichsova je vyhovujúca metóda pre oba skúmané problémy plytkej vody.

Literatúra

- [1] R. J. LeVeque. *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*. Cambridge UP, 2002.