

# **SVOČ 2013**

## **Opava**

### **Analýza tvaru 3D objektu pomocou spektra Laplace-Beltramiho operátora**

Meno a priezvisko študenta:

Patrik Daniel

Škola:

Slovenská technická univerzita

Fakulta:

Stavebná fakulta

Ročník a program/odbor štúdia:

3.roč., 1.stupeň, matematicko-počítačové  
modelovanie

Vedúci práce:

Mgr. Mariana Remešíková, PhD.

Katedra:

KMaDG

21.-23. Máj 2013

# **Obsah**

<b>Abstrakt</b>	<b>3</b>
<b>Abstract</b>	<b>3</b>
<b>1 Úvod</b>	<b>4</b>
<b>2 Teoretický základ</b>	<b>4</b>
<b>3 Diskretizácia Laplace-Beltramiho operátora</b>	<b>6</b>
3.1 Numerické experimenty . . . . .	8
<b>4 Riešenie Helmholtzovej diferenciálnej rovnice</b>	<b>9</b>
4.1 Ukážky výsledkov . . . . .	10
4.2 Závislosť spektra od tvaru objektu . . . . .	11
<b>5 Možnosti využitia spektra Laplace-Beltramiho operátora</b>	<b>12</b>
5.1 Aplikácia na bunkové dátá . . . . .	15
<b>6 Záver</b>	<b>16</b>

## Abstrakt

V tejto práci skúmame problematiku spektra Laplace-Beltramiho operátora. Súčasťou práce je návrh numerickej metódy na riešenie Helmholtzovej diferenciálnej rovnice za účelom nájdenia aproximácie spektra tohto operátora. Klúčovú úlohu zohráva diskretizácia Laplace-Beltramiho operátora, ktorú sme otestovali pri riešení rovnice pre vývoj povrchu podľa strednej krivosti. Skúmame rôzne možnosti využitia spektra tohto operátora pri analýze tvaru 3D objektov, najmä pri vyhľadávaní tvarových podobností medzi objektami. Práca obsahuje aj ukážku aplikácie na reálne biologické dátá, ktorými sú výsledky segmentácie buniek z mikroskopových snímok embrya rybky *danio rerio*.

**Klúčové slová:** spektrum Laplace-Beltramiho operátora, Helmholtzova diferenciálna rovnica, analýza tvaru, hľadanie podobností

## Abstract

In this work we study the Laplace-Beltrami operator. Within this work we propose a numerical method for solving Helmholtz differential equation in order to extract the spectrum of this operator. The key part is the discretization of the Laplace-Beltrami operator which we checked by solving the mean curvature flow equation on surfaces. We study various possibilities of application of the spectra for shape analysis of 3D objects, especially finding the shape similarities. This work also contains an application to real data which are the results of cell segmentation from microscope images of the embryo of the zebrafish (*danio rerio*).

**Keywords:** Laplace-Beltrami spectra, Helmholtz differential equation, shape analysis, finding similarities

# 1 Úvod

Počítačová grafika prešla za posledných 20 rokov takmer neuveriteľným vývojom. Avšak niektoré základné problémy týkajúce sa analýzy tvaru 3D objektu stále nie sú úplne vyriešené. Nájst' optimálny spôsob pre rýchlu identifikáciu, porovnávanie a rozpoznávanie tvarovo podobných objektov v realistických 3D scénach či vyhľadávanie podobností v obrovských databázach je stále otvoreným problémom. V posledných rokoch boli vyvinuté rôzne metódy pre porovnávanie tvarov, no väčšina z nich je založená na lokalizácii a registrácii objektov, čo môže byť náročné z hľadiska realizácie.

V tejto práci skúmame možnosti využitia spektra (množiny vlastných čísel) Laplace-Beltramiho operátora na riemannovských povrchoch pri porovnávaní a vyhľadávaní podobných tvarov. Toto spektrum teoreticky splňa všetky predpoklady k tomu, aby sa používalo ako akási charakteristická vlastnosť tvarov. Vlastné čísla sú invariantné voči izometrii, nezávisia na umiestnení v priestore a, ak je to požadované, ani od veľkosti objektu (je možné normovanie spektra). Aproximácia spektra je tiež robustná vzhľadom na aproximačiu (reprezentáciu) objektu. Dalo by sa povedať, že spektrum je v istom zmysle akýmsi *DNA* tvaru objektu [1]. Rovnako ako v reálnom živote aj toto *DNA* sa môže použiť na identifikáciu objektu a môže byť použité aj na vyhľadávanie podobností medzi objektami.

## 2 Teoretický základ

V tejto kapitole uvádzame základné pojmy diferenciálnej geometrie, ktoré sú potrebné k pochopeniu problematiky Laplace-Beltramiho operátora.

V našej práci sa zaoberáme riemannovskými povrchmi vloženými do priestoru  $\mathbb{R}^3$ . Pod vložením povrchu  $S$  rozumieme také zobrazenie  $F: S \rightarrow \mathbb{R}^3$ , ktoré každému bodu povrchu  $S$  priradí práve jednu trojicu súradníč  $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ .

Dôležitou vlastnosťou riemannovských povrchov je existencia metrického tenzora, ktorý umožňuje meranie dĺžok, uhlov a plôch na danom povrhcu  $S$ . Metrický tenzor  $g$  je vlastne skalárny súčin v dotykovom priestore povrhcu a dá sa reprezentovať pomocou matice

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}.$$

Komponenty metrického tenzora v konkrétnom bode povrhcu predstavujú skalárne súčiny dvojíc bázových vektorov  $v_1, v_2$  dotykového priestoru povrhcu v danom bode (predpísané hodnoty metrického tenzora pre dvojice bázových

vektorov)

$$\begin{aligned} g_{11} &= g(v_1, v_1) = \|v_1\|_g^2, \\ g_{12} &= g_{21} = g(v_1, v_2), \\ g_{22} &= g(v_2, v_2) = \|v_2\|_g^2, \end{aligned}$$

pričom  $\|\cdot\|_g$  je norma indukovaná metrickým tenzorom. Za pomocí metrického tenzora následne už jednoducho vieme vyrátať dĺžky kriviek, uhly a obsahy plôch na povrchoch [2].

Okrem týchto geometrických pojmov nám metrický tenzor umožňuje definovať na riemannovských povrchoch aj diferenciálne operátory. Je teda možné zadefinovať *gradient* funkcie  $u$  a *divergenciu* vektorového poľa  $\mathbf{v}$  na povrchu  $S$ . Pre danú funkciu  $u$  a metrický tenzor  $g$  je gradient  $\nabla_g u$  v ľubovoľnom bode  $x \in S$  daný vztahom

$$g(\nabla_g u, \mathbf{v}) = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{v}}, \quad \forall \mathbf{v} \in T_x S, \quad (1)$$

pričom  $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{v}}$  predstavuje deriváciu funkcie  $u$  v smere vektora  $\mathbf{v}$  a  $T_x S$  je dotykový priestor povrchu  $S$  v bode  $x$ .

Divergencia vektorového poľa  $\mathbf{v}$  na povrchu  $S$  s metrickým tenzorom  $g$  je daná vztahom

$$\operatorname{div}_g \mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \sum_{i=1}^2 \frac{\partial (\sqrt{\det g} v_i)}{\partial x_i}, \quad (2)$$

kde  $x_i$  sú bázové vektory dotykového priestoru.

Pomocou gradientu a divergencie môžeme konštruovať aj ďalšie, zložitejšie diferenciálne operátory, medzi ktoré patrí aj Laplace-Beltramiho operátor  $\Delta$ , ktorý je definovaný pomocou (1) a (2) ako

$$\begin{aligned} \Delta u &= \operatorname{div}_g(\nabla_g u), \\ \Delta u &= \frac{1}{\sqrt{\det g}} \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left( g^{-1} \det g \frac{\partial}{\partial x_j} u \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Definícia Laplace-Beltramiho operátora (3) je teda úzko spätá s metrickým tenzorom  $g$ , ktorý súvisí s metrikou na riemannovských povrchoch. Ak uvažujeme, že metrický tenzor je indukovaný vložením povrchu do  $\mathbb{R}^3$ , Laplace-Beltramiho operátor má priamu súvislosť s tvarom povrchu  $S$ .

Známy Laplaceov operátor môžeme chápat' ako špeciálny prípad Laplace-Beltramiho operátora s euklidovskou metrikou.

V tejto práci sa zaoberáme problematikou spektra Laplace-Beltramiho operátora. Pod spektrom chápeme množinu vlastných čísel  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots\}$ , ku ktorým existujú príslušné vlastné funkcie  $\{u_1, \dots, u_n, \dots\}$ , pričom je splnená rovnica

$$\Delta u = -\lambda u. \quad (4)$$

Rovnica (4) je známa ako Helmholtzova diferenciálna rovnica.

### 3 Diskretizácia Laplace-Beltramiho operátora

Klúčovou úlohou pri numerickom riešení problému vlastných čísel pre Laplace-Beltramiho operátor je jeho diskretizácia. Na overenie správnosti nami použitej diskretizačnej schémy sme pred samotným hľadaním spektra Laplace-Beltramiho operátora riešili diferenciálnu rovnicu pre vývoj povrchu podľa strednej krivosti, v ktorej vystupuje Laplace-Beltramiho operátor

$$\partial_t S = \Delta S. \quad (5)$$

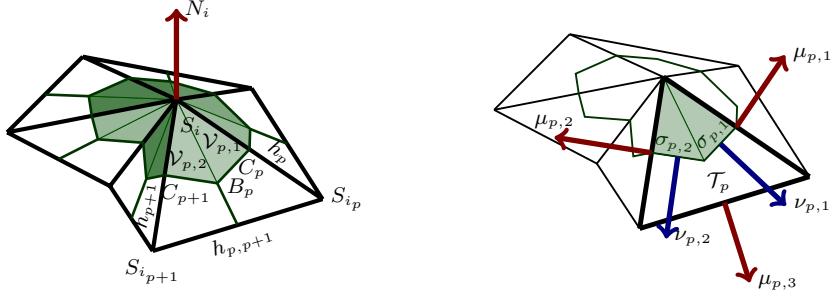
Na riešenie diferenciálnej rovnice (5) sme použili schému *flowing control volume method* [3], ktorú sme prispôsobili na našu situáciu. Táto metóda patrí do skupiny metód konečných objemov. Tieto metódy sú založené na reprezentácii povrchu pomocou konečného počtu trojuholníkov, pomocou ktorých sa zostrojí systém konečných objemov. Predpokladajme, že vrcholy trojuholníkov  $S_i^n$  sú bodmi povrchu  $S(\cdot, \cdot, t^n)$ . Tieto vrcholy sa pohybujú spolu s vyvíjajúcim sa povrhom, čo znamená, že celá diskretizačná siet' sa vyvíja, alebo pláva (ang. *flow*) – z toho je odvodený samotný názov metódy.

Za účelom sprehľadnenia textu v niektorých častiach textu vynecháme časový index  $n$  a zahrnieme ho len vtedy, keď' je to nevyhnutné. Takéto zjednodušenie si môžeme dovoliť, pretože topologická konfigurácia vrcholov nie je závislá od času. Od času závisí len pozícia vrcholov siete. Pri vysvetľovaní konštrukcie siete konečných objemov používame len lokálne indexovanie, pretože je postačujúce na pochopenie hlavnej myšlienky.

Teraz popíšeme proces, ako vytvárame siet' konečných objemov. Máme danú siet' vrcholov  $S_i$ ,  $i = 1, \dots, N$  a príslušné trojuholníky  $\mathcal{T}_{i,m}$ ,  $m = 1, \dots, m_i$ . Celý postup podrobne popíšeme pre jeden konkrétny vrchol siete  $S_i$ . Predpokladajme, že tento vrchol je spoločným vrcholom  $m$  trojuholníkov  $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_m$ . Potom je tento vrchol spoločným vrcholom aj pre  $m$  hrán  $h_1, \dots, h_m$ , pričom  $h_p$  spája  $S_i$  s vrcholom  $S_{i,p}$ . Ďalej nech  $B_p$  je t'ažiskom trojuholníka  $\mathcal{T}_p$  a  $C_p$  je stredom hrany  $h_p$ ,  $p = 1 \dots m$ . Konečný objem  $V_i$  prislúchajúci vrcholu  $S_i$  zadefinujeme ako mnogouholník, ktorý vznikne zjednotením trojuholníkov  $\mathcal{V}_{p,1} = S_i C_p B_p$  a  $\mathcal{V}_{p,2} = S_i B_p C_{p+1}$  pre  $p = 1 \dots m$ , kde nastavíme  $C_{m+1} = C_1$ . Samotný vrchol  $S_i$  je teda považovaný za stred novovzniknutého konečného objemu a jeho hranice tvoria spojnice stredov hrán a t'ažísk všetkých trojuholníkov  $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_m$ .

Systém konečných objemov, ktorý vytvoríme takýmto spôsobom, pokryje celý (triangulovaný) povrch a jedinými prienikmi medzi takto skonštruovanými konečnými objemami  $V_i$  sú ich hranice. Naša approximácia bude d'alej potrebovať vonkajšie jednotkové normály  $\mu_{p,1}, \mu_{p,2}, \mu_{p,3}$  k stranám trojuholníka  $\mathcal{T}_p$  v rovine tohto trojuholníka a vonkajšie jednotkové normály  $\nu_{p,1}, \nu_{p,2}$  ku hranám konečného objemu  $\sigma_{p,1} = C_p B_p$ ,  $\sigma_{p,2} = B_p C_{p+1}$ , rovnako v rovine trojuholníka  $\mathcal{T}_p$ .

Pre časovú diskretizáciu rovnice (5) použijeme semi-implicitnú schému. Základnou myšlienkovou takejto diskretizácie parciálnych dieferenciálnych rov-



Obr. 1: Konečný objem  $V_i$  prislúchajúci vrcholu  $S_i$

níč je, že lineárne členy rovnice bierieme z nového časového kroku a nelineárne z predošlého. Tento typ časovej diskretizácie je kombináciou podmienenej stabilnej explicitnej a bezpodmienečne stabilnej, ale výpočtovo náročnejšej, implicitnej metódy. Na aproximáciu derivácie podľa času na ľavej strane rovnice (5) použijeme spätnú diferenciu.

$$\frac{S^n - S^{n-1}}{\tau} = \Delta_{n-1} S^n, \quad (6)$$

kde  $\tau$  je krok časovej diskretizácie a  $n > 0$  označuje prislúchajúcemu časovú vrstvu. V našom prípade je použitie semi-implicitnej schémy pekne vidieť na diskretizácii pravej strany rovnice, kde nelineárny člen  $\Delta_{n-1}$  je Laplace-Beltramiovi operátor odpovedajúci povrchu  $S^{n-1}$  z predošlého časového kroku. Integrovaním rovnice (6) cez konečný objem  $V_i$  dostávame

$$\int_{V_i^{n-1}} \frac{S^n - S^{n-1}}{\tau} dx = \int_{V_i^{n-1}} \Delta_{n-1} S^n dx \quad (7)$$

Použitím Greenovej vety sa člen na pravej strane dá prepísat' nasledujúcim spôsobom

$$\int_{V_i} \Delta S dx = \int_{\partial V_i} \nabla S \cdot \nu_i dy = \sum_{p=1}^m \left( \int_{\sigma_{p,1}} \nabla S \cdot \nu_{p,1} dy + \int_{\sigma_{p,2}} \nabla S \cdot \nu_{p,2} dy \right), \quad (8)$$

kde  $\nabla$  predstavuje povrchový gradient (gradient vzhl'adom k metrickému tenzoru povrchu  $S^{n-1}$ ). Za predpokladu, že  $S(\cdot, \cdot, t)$  je lineárne na  $\mathcal{T}_p^n$ , môžeme písat' [4]

$$D_p := (\nabla S)|_{\mathcal{T}_p} = \frac{1}{|\mathcal{T}_p|} \int_{\mathcal{T}_p} \nabla S dx = \frac{1}{|\mathcal{T}_p|} \int_{\partial \mathcal{T}_p} S \otimes \mu_p dy, \quad (9)$$

Ďalej, keď vezmeme do úvahy časovú diskretizáciu, dostávame

$$D_p^n = \frac{1}{|\mathcal{T}_p^{n-1}|} \left( |h_p^{n-1}| M_{i,1}^n + |h_{p+1}^{n-1}| M_{i,2}^n + |h_{p,p+1}^{n-1}| M_{i,3}^n \right), \quad (10)$$

kde

$$\begin{aligned} M_{i,1}^n &= \frac{S_i^n + S_{i_p}^n}{2} \otimes \mu_{p,1}^{n-1}, \\ M_{i,2}^n &= \frac{S_i^n + S_{i_{p+1}}^n}{2} \otimes \mu_{p,2}^{n-1}, \\ M_{i,3}^n &= \frac{S_{i_p}^n + S_{i_{p+1}}^n}{2} \otimes \mu_{p,3}^{n-1}, \end{aligned}$$

Nakoniec môžeme písat' plne diskretizovaný model pre vrchol  $S_i$

$$S_i^n - \frac{\tau}{V_i^{n-1}} \sum_{p=1}^{m_i} \left( |\sigma_{i,p,1}^{n-1}| D_{i,p}^n \cdot \nu_{i,p,1}^{n-1} + |\sigma_{i,p,2}^{n-1}| D_{i,p}^n \cdot \nu_{i,p,2}^{n-1} \right) = S_i^{n-1}. \quad (11)$$

Rovnica (11) reprezentuje lineárny systém pre súradnice  $x, y, z$  bodu  $S_i$ . Vzhľadom na tvar  $D_{i,p}^n$  v rovnici vystupujú neznáme hodnoty  $S_i^n, S_{i_p}^n$  a  $S_{i_{p+1}}^n$ ,  $p = 1 \dots m_i$  pre všetkých susedov  $S_i$ . V rovnici pre každý vrchol triangulácie  $S_i$ ,  $i = 1 \dots n$ , máme  $m_i + 1$  neznámych. Z rovnice (11) si vyjmeme členy, ktoré stoja pri jednotlivých neznámych a uložíme ich do matice  $\mathbf{A}$  rozmeru  $n \times n$ , do príslušných stĺpcov, ktoré odpovedajú globálnemu číslovaniu vrcholov  $S_i$ . Vektor pravej strany  $\mathbf{b}$  je vždy daný vektorom riešenia  $S_i^{n-1}$ , z predošlého časového kroku. V každom časovom kroku  $n, n = 1, \dots, T$  riešime tri lineárne systémy

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax}^n &= x^{n-1} \\ \mathbf{Ay}^n &= y^{n-1} \\ \mathbf{Az}^n &= z^{n-1} \end{aligned}$$

Pričom súradnice bodov  $S_i^0 = (x_i^0, y_i^0, z_i^0)$  predstavujú počiatočnú podmienku. Jednotlivé systémy riešime v každej časovej iterácii pomocou SOR algoritmu.

### 3.1 Numerické experimenty

V tejto časti overíme správnosť numerického riešenia diferenciálnej rovnice pre vývoj povrchu podľa strednej krivosti. Numerické výsledky budeme porovnávať so známym analytickým riešením, podľa ktorého pre polomer vyvýjajúcej sa sféry, ktorá má v čase 0 polomer  $r(0) = 1$ , platí

$$r(t) = \sqrt{1 - 4t}. \quad (12)$$

Zo vztahu (12) vyplýva, že v čase  $t = 0.25$  bude polomer jednotkovej sféry rovný 0. Pre odhad chyby  $err$  používame  $L_2$  normu danú vztahom

$$err_N^T = \sqrt{\sum_{n=1}^T \sum_{i=1}^N \|r(n\tau) - \|S_i^t\|\|^2 |V_i| \tau}, \quad (13)$$

kde  $T$  je počet časových krokov a  $N$  počet bodov triangulácie povrchu. Chyby  $err_h^T$  sme merali v časovom intervale  $[0, T]$ ,  $T = 0.2$  pri voľbe časového kroku  $\tau \sim h^2$ , pričom  $h$  charakterizuje dĺžku hrany trojuholníka. Experimentálny rád konvergencie metódy ( $EOC$ ) určíme podľa vztahu

$$EOC = \log_2 \frac{err_h^T}{err_{h/2}^{4T}}, \quad (14)$$

kde  $err_{h/2}^{4T}$  je chyba pri dvakrát jemnejšej priestorovej a štyrikrát jemnejšej časovej diskretizácii, čo odpovedá vztahu  $\tau \sim h^2$ .

Tabuľka 1: Tabuľka nameraných chýb  $err_h^T$

Počet vrcholov siete	Časový krok $\tau$	Chyba $err$	$EOC$
18	0.04	0.061792070	
66	0.01	0.017444615	1.82464
258	0.0025	0.004520356	1.94827
1026	0.000625	0.001142950	1.98367
4096	0.00015625	0.000287463	1.99132

Z tabuľky 1. vyplýva, že metóda je druhého rádu. Zvolená diskretizačná schéma pre Laplace-Belramiho operátor funguje správne.

## 4 Riešenie Helmholtzovej diferenciálnej rovnice

Pri numerickom riešení Helmholtzovej rovnice budeme vychádzat z diskretizácie Laplace-Belramiho operátora, ktorú sme využili pri riešení rovnice (5). Za účelom nájdenia spektra Laplace-Belramiho operátora nemusíme riešiť úplný problém vlastných čísel Laplace-Belramiho operátora (nájdenie vlastných čísel aj vlastných vektorov). Stačí nám vypočítať len vlastné čísla. Pre výpočet vlastných čísel  $\lambda$  diskretizujeme Helmholtzovu diferenciálnu rovnicu

$$\Delta u = -\lambda u. \quad (15)$$

Na diskretizáciu Laplace-Belramiho operátora na ľavej strane rovnice (15) použijeme rovnaký postup ako v časti 3 tejto práce. Takto vzniknutá aproximácia má tvar

$$\frac{1}{|V_i|} \sum_{p=1}^{m_i} (|\sigma_{i,p,1}| D_{i,p} \cdot \nu_{i,p,1} + |\sigma_{i,p,2}| D_{i,p} \cdot \nu_{i,p,2}). \quad (16)$$

Za aproximáciu spektra Laplace-Belramiho operátora považujeme množinu vlastných čísel matice  $\mathbf{A}$ , ktorá reprezentuje lineárny systém rovníc popísaný diskretizačnou schémou (16). Maticu  $\mathbf{A}$  získame opäť tak, že si vyjmeme

členy, ktoré stoja pri jednotlivých neznámych a uložíme ich do príslušných stĺpcov matice, ktoré odpovedajú globálnemu číslovaniu vrcholov  $S_i$ .

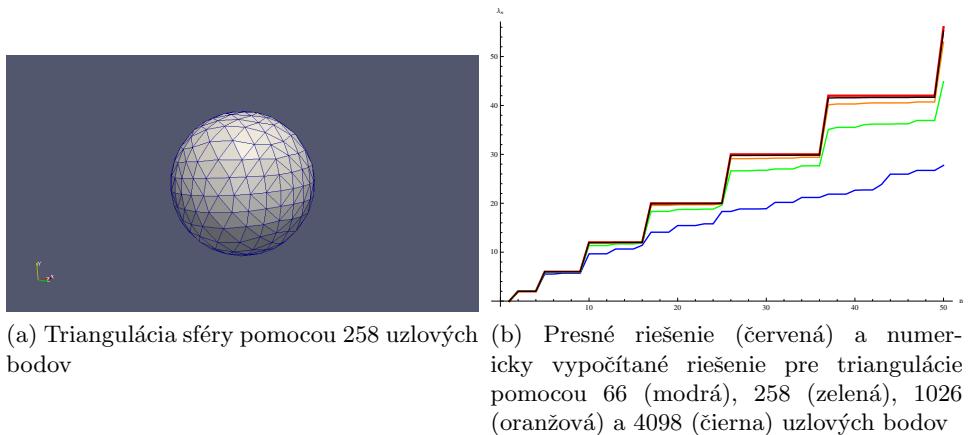
Na výpočet vlastných čísel matice sme implementovali v jazyku C metódu QR transformácie, ktorá je založená na QR rozklade matice [5]. Táto iteráčná metóda sa však neskôr ukázala ako nie veľmi vhodná a pre matice s väčšími rozmermi (viac ako  $258 \times 258$ ) bola príliš pomalá. Preto sme na výpočet vlastných čísel využili voľne dostupnú numerickú knižnicu pre jazyk C – *The GNU Scientific Library (GSL)* [6]. Táto knižnica poskytuje širokú škálu rôznych matematických rutín, medzi ktoré patrí aj výpočet vlastných čísel matice. Funkcie, ktoré používame, využívajú na hľadanie vlastných čísel metódu *the double-shift Francis method*.

#### 4.1 Ukážky výsledkov

Analytické riešenie pre spektrum Laplace-Beltramiho operátora je známe len pre malý počet tvarov. Spektrum jednotkovej sféry má tvar

$$\lambda_i = i(i+1), i \in \mathbb{N}_0, \text{ s násobnosťou } 2i+1. \quad (17)$$

Správnosť schémy (16) teda overíme porovnaním numerických výsledkov so známym analytickým riešením pre jednotkovú sféru. Spektrum sme počítali pre approximácie sféry s rôznym počtom uzlových bodov. Výsledky sme vizualizovali pomocou softvéru Mathematica<sup>TM</sup>. Pred výpočtom chyby  $err_N$



Obr. 2: Porovnanie presného a numericky vypočítaného spektra pre rôzne triangulácie sféry

najskôr vyberieme z vypočítaných spektier prvých  $n$  (postačujúcich je 10 až 100) vlastných čísel, z ktorých následne počítame vzájomné Euklidovské vzdialenosťi  $n$ -rozmerných vektorov vlastných čísel.

Nech  $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  a  $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)$  sú dva  $n$ -rozmerné vektory vlastných čísel, potom  $p$ -norma vzdialenosťí týchto dvoch vektorov

je definovaná

$$dist_p^n(\Lambda, \Psi) = \|\Lambda - \Psi\|_p^n = \left( \sum_{i=1}^n (\lambda_i - \psi_i)^p \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (18)$$

Euklidovská vzdialenosť je potom jednoducho  $dist_2^n$ . Chybu  $err_h$ , ktorú používame na overenie presnosti metódy, definujeme

$$err_h = dist_2^{50}(\Lambda, \Psi), \quad (19)$$

kde  $\Psi$  je známy vektor presného riešenia pre jednotkovú sféru a  $\Lambda$  je numericky vypočítané spektrum zodpovedajúce triangulácii sféry pomocou  $N$  vrcholov. Treba si však uvedomiť, že všetky triangulácie sféry sú len aproximáciami skutočného povrchu sféry, a preto sa musí numerické riešenie od presného vždy mierne lísiť.

Experimentálny rád konvergencie metódy ( $EOC$ ) určíme podľa vzťahu

$$EOC = \log_2 \frac{err_h}{err_{h/2}}, \quad (20)$$

kde  $err_{h/2}$  je chyba pri dvojnásobnom zjemnení siete. Z výsledkov v tabuľke 2 vyplýva, že nami použitá numerická metóda na výpočet spektra Laplace-Beltramiho operátora je druhého rádu.

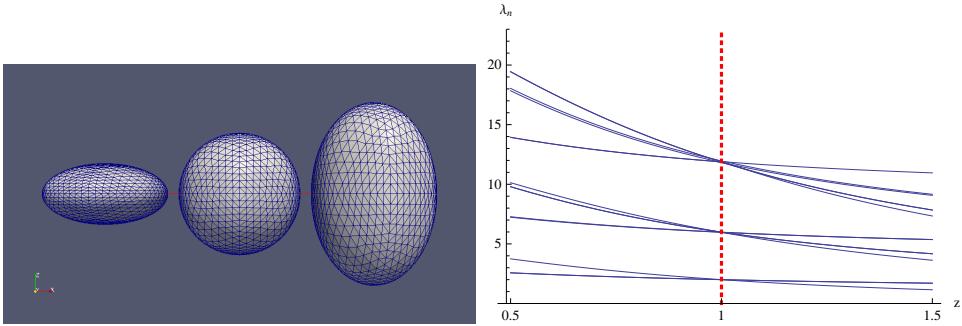
Tabuľka 2: Tabuľka nameraných chýb  $err_h$

Počet vrcholov siete	Chyba $err$	$EOC$
66	79.4839	
258	26.3491	1.59291
1026	6.88075	1.93711
4098	1.73895	1.98435

## 4.2 Závislosť spektra od tvaru objektu

Je známe, že škálovaním riemannovského povrchu koeficientom  $a$  dospejeme ku vlastným číslam, ktoré sú preškálované koeficientom  $\frac{1}{a^2}$ .

Experimentálne sa nám podarilo potvrdiť spojitú závislosť spektra Laplace-Beltramiho operátora od tvaru 3D objektu. V nasledujúcim experimente sme do grafu vykreslili prvé vlastné čísla pre rôzne deformácie elipsoidu. Deformácie začínajú elipsoidom s polomerom 1 v  $x$ -ovom a  $y$ -ovom smere a 0,5 v  $z$ -ovom smere. Potom polomer v  $z$ -ovom smere postupne v 100 krokoch zväčšujeme až na 1,5. Obrázok 3 pekne ukazuje, že vlastné čísla sa spojito menia v závislosti od tvaru objektu. V prípade, keď je  $z$ -ový polomer rovný 1, deformácia elipsoidu zodpovedá jednotkovej sfére a viaceré vlastné čísla sa zhodujú, čo presne zodpovedá známemu presnému riešeniu (12).



Obr. 3: Spektrum deformácií elipsoidu závisí spojito od tvaru

## 5 Možnosti využitia spektra Laplace-Beltramiho operátora

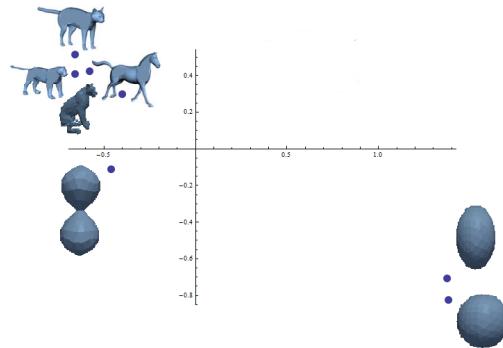
Z vypočítaného spektra Laplace-Beltramiho operátora pre konkrétny objekt vždy najskôr vyberieme prvých  $n$  vlastných čísel. Tie môžu byť následne spracované rôznymi spôsobmi v závislosti od toho, ako chceme využiť informácie, ktoré spektrum v sebe obsahuje. Vektory vlastných čísel môžu byť porovnávané za účelom rozpoznávania alebo vyhľadávania podobných tvarov. Podobné objekty s podobným spektrom môžeme rýchlo identifikovať iba pomocou porovnávania spektier, čo umožňuje rýchle vyhľadávanie v databázach. Spektrum by mohlo byť použité aj pri rozpoznávaní objektov za účelom ochrany autorských práv. Analýza tvarov našla svoje využitie napr. aj v modernej medicíne pri vyhľadávaní rôznych biologických anomalií [7].

Vplyv rôznych veľkostí a škálovania objektov môžeme odstrániť pomocou normovania spektra. To môžeme dosiahnuť preškálovaním vektora vlastných čísel vhodným škálovacím koeficientom. Jednou z účinných normovacích metód je predelenie spektra prvým nenulovým vlastným číslom. Na určenie vzdialenosťi spektier dvoch rôznych objektov následne môže byť použitá euklidovská vzdialenosť  $dist_2^n$  tak, ako sme ju definovali v časti 4.1 tejto práce.

Na demonštrovanie použitia spektra pre porovnávanie a rozpoznávanie podobných tvarov sme vypočítali spektrum pre viac ako 80 rôznych tvarov. V tejto práci prezentujeme niektoré vybrané výsledky. Spektrá všetkých objektov boli normované pomocou prvého nenulového vlastného čísla a na samotné porovnávanie tvarov bolo využitých prvých 50 vlastných čísel.

Na vizualizáciu vzdialenosťí medzi jednotlivými spektrami, rovnako ako v práci [1], vektory vlastných čísel reprezentujeme bodmi v rovine za pomoci viacozmerného škálovania (MDS). Viacozmerné škálovanie je termín používaný na pomenovanie skupiny štatistických metód využívaných na vyhľadávanie a vizualizovanie podobností v dátach. V princípe ide o vnorenie

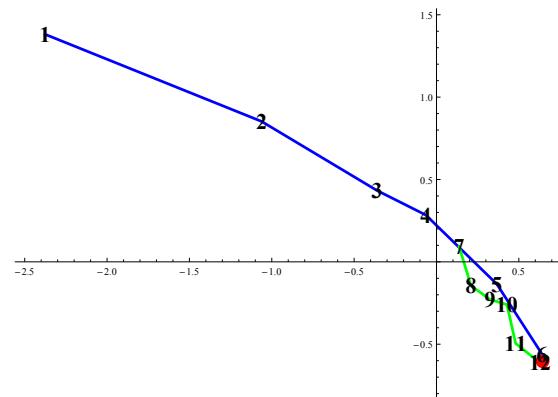
z  $n$ -rozmerného priestoru do  $\mathbb{R}^2$  ( $n$  je počet vlastných čísel, ktoré berieme do úvahy), ktoré sa snaží čo najlepšie zachovať vzdialenosť objektov, o ktoré sa zaujímame. Výsledkom týchto metód je bodový MDS-graf. V takomto grafe veľmi dobre vidno ako sú totožné objekty zobrazené do jedného bodu a podobné objekty vytvárajú zhluhy.



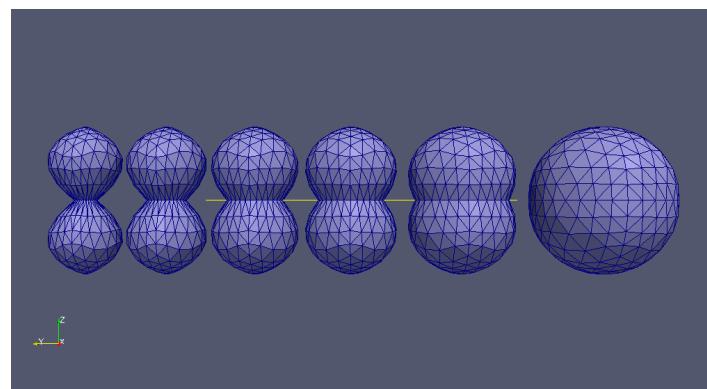
Obr. 4: Ukážka použitia MDS grafov pri porovnávaní tvarov

Na obrázku 4 je MDS-graf, v ktorom porovnávame 7 rôznych objektov. Porovnávame sféru, elipsoid, deformáciu sféry, ktorá vznikla stiahnutím sféry v jej strede a zvyšné testovacie objekty tvoria zvieratá (mačka, dva levy a kôň). V grafe je zjavné zhlukovanie objektov reprezentujúcich zvieratá, najbližšie pri sebe podľa spektra sú tvary zodpovedajúce levom a mačke. Všetko sú to objekty, ktoré sa zhodujú v počte nôh, hláv a majú aj chvost. Od tejto trojice sa trochu odčlenil tvar zodpovedajúci koňovi, ktorý má súčasne rovnaký počet nôh aj chvost, ale vyznačuje sa špecifickým tvarom hlavy. Pomerne blízko sa v tomto grafe nachádzajú sféra s elipsoidom, čo je taktiež logické, keďže elipsoid je len relatívne malou deformáciou sféry. Posledný objekt, ktorý reprezentuje stiahnutú sféru, sme do grafu zaradili kvôli tomu, že takáto deformácia sféry, ako sa pri našich experimentoch ukázalo, má veľký vplyv na tvar spektra Laplace-Beltramiho operátora. To sa prejavilo aj na veľkej vzdialosti medzi bodmi, ktoré v grafe reprezentujú sféru a tento objekt.

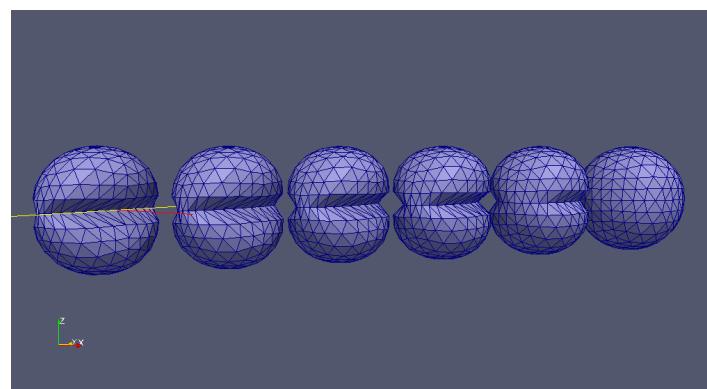
V ďalšom grafe (obr. 5) sme znázornili, ako majú rôzne deformácie rôzny vplyv na spektrum Laplace-Beltramiho operátora. V grafe sú spracované dve rôzne deformácie sféry, pričom obe postupne konvergujú k sférickému tvaru. Na obr. 5 spektrum sféry reprezentuje červený bod. Jednotlivé deformácie sféry sú znázornené na obrázkoch 6 a 7. Každá z deformácií mála na spektrum iný vplyv. Dospeli sme k záveru, že spektrum, resp. MDS graf, nemusí odlišiť od seba tvary, ktoré vznikli rôznymi deformáciami. Väčší zmysel má použitie spektra na porovnávanie tvarov, ktoré vznikli nejakým konkrétnym typom deformácie, neizotropným škálovaním a podobne.



Obr. 5: Rôzne deformácie jednotkovej sféry majú rôzny vplyv na spektrum Laplace-Beltramiho operátora



Obr. 6: Objekty, ktoré sú v MDS grafe na obrázku 5 reprezentované bodmi 1 až 6.



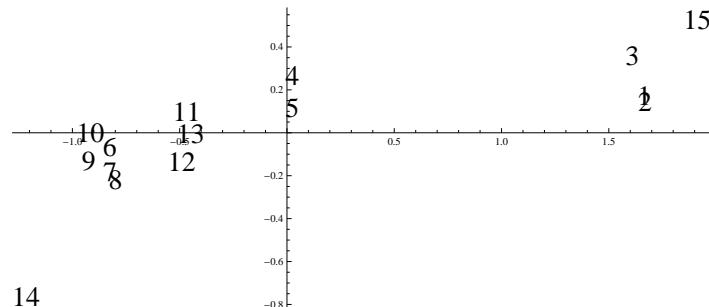
Obr. 7: Objekty, ktoré sú v MDS grafe na obrázku 5 reprezentované bodmi 7 až 12.

## 5.1 Aplikácia na bunkové dátá

Po experimentoch na testovacích objektoch sme sa rozhodli otestovať možnosti využitia spektra Laplace-Beltramiho operátora aj na reálnych biologických dátach.

Našimi dátami boli výsledky segmentácie buniek z mikroskopových snímok embrya rybky *danio rerio* (danio pruhované). Po niekoľkých hodinách embryogenézy sa bunky postupne začínajú diferencovať, nemajú už všetky rovnaký tvar ako v skorých štádiach vývoja a v rôznych častiach embrya môžeme nájsť rôzne tvarované bunky, pričom tvary sú charakteristické pre jednotlivé časti.

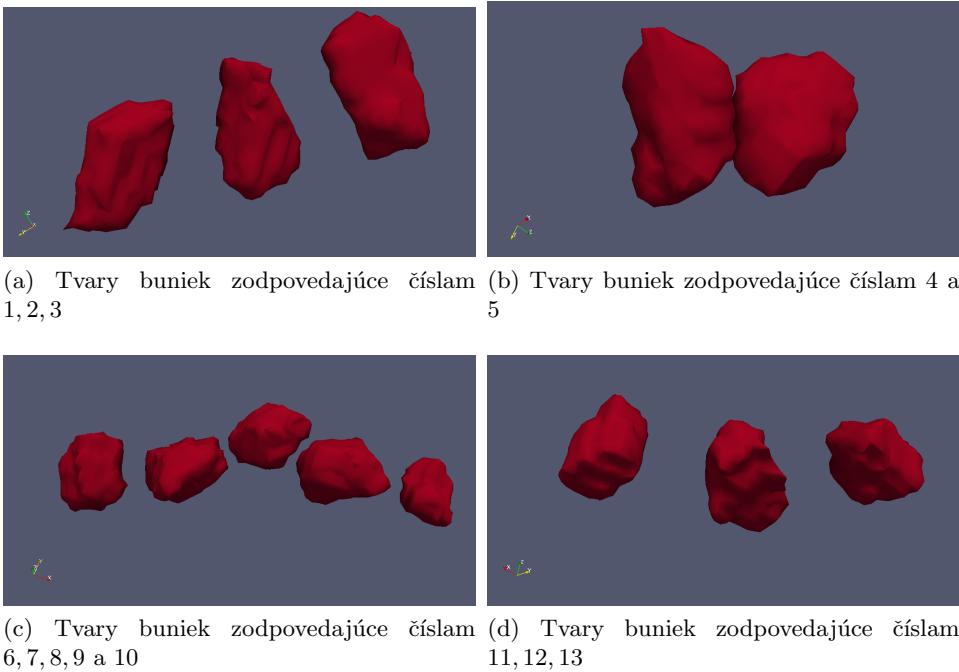
Numericky, za pomocí nami implementovaných programov, sme vypočítali 50-zložkové aproximácie spektra pre viac ako 30 rôznych buniek. Následne sme pre lepšiu ilustráciu výsledkov vybrali reprezentatívnu vzorku 14 buniek, ktorých spektrá sme pomocou viacrozmerného škálovania zobrazili ako body v MDS-grafe. Do tohto grafu sme navyše zobrazili aj bod zodpovedajúci presnému riešeniu pre spektrum jednotkovej sféry.



Obr. 8: MDS graf vytvorený pre reprezentatívnu vzorku 14 bunkových dát a presného riešenia pre jednotkovú sféru (14)

Tento graf ilustruje, ako sa podobné tvary zhlučujú do skupín a objekty s odlišnými tvarami sú znázornené d'aleko od seba. Na obrázku 8 vidno, že v takto skonštruovanom grafe sa vytvorili štyri zhluky, ktoré zodpovedajú skupinám buniek s podobným tvarom.

Pre lepšiu predstavu o tvaroch, ktoré boli na základe spektra Laplace-Beltramiho operátora vyhodnotené ako podobné, pripájame vyobrazenie jednotlivých zhlukov buniek na obrázku 9.



Obr. 9: Skupiny buniek, ktoré boli na základe spektra Laplace-Beltramiho operátora vyhodnotené ako podobné

## 6 Záver

Podarilo sa nám preskúmať možnosti využitia spektra Laplace-Beltramiho operátora pri analýze tvaru 3D objektov a navrhli sme numerickú metódu na riešenie Helmholtzovej diferenciálnej rovnice. V rámci práce sme implementovali tri programy v jazyku C:

- program na výrobu triangulovaných aproximácií sféry a jej rôznych deformácií vo formáte *vtk*, ktoré slúžia ako vstupy do ďalších programov
- program na výpočet vývoja triangulovaných povrchov podľa strednej krivosti, ktorého vstupom je *vtk* súbor s trianguláciou povrchu a výstupom sú *vtk* súbory zobrazujúce vyvíjajúci sa povrch v jednotlivých časových krokoch
- program na výpočet spektra Laplace-Beltramiho operátora, ktorého vstupom je *vtk* súbor s trianguláciou objektu a výstupom je textový súbor, v ktorom je uložená aproximácia spektra pre tento objekt

Výsledky prezentované v tejto práci ukazujú, že spektrum naozaj môže byť použité na vyhľadávanie podobností medzi 3D objektami. Pre uspokojivejšie výsledky, najmä pri medicínskych dátach a vyhľadávaní tvarových anomalií,

by bolo vhodné použiť pokročilejšie štatistické metódy než tie, ktoré sme použili v tejto práci. Pre ešte lepšie výsledky má význam ďalej analyzovať nielen samotné spektrum, ale aj príslušné vlastné funkcie Laplace-Beltramiho operátora.

## Literatúra

- [1] M. Reuter, F.-E. Wolter, N. Peinecke: *Laplace–Beltrami spectra as “shape-dna” of surfaces and solids.* Computer-Aided Design 2006; 38(4):342–366.
- [2] A. Pressley, *Elementary Differential Geometry*, Springer Undergraduate Mathematics Series: Springer, 2010. 474 s. ISBN 978-1-84882-891-9.
- [3] M. Húska, M. Medľa, K. Mikula, P. Novýsedlák, M. Remešíková: *A new form-finding method based on mean curvature flow of surfaces.* Proceedings of ALGORITMY 2012, pp.120-131.
- [4] G. Dziuk, *An algorithm for evolutionary surfaces*, Numerische Mathematik 58(1) (1991), pp. 603-611.
- [5] G. Okša, *Úvod do numerických metód lineárnej algebry*, STU v Bratislave, 2009.
- [6] The GNU Scientific Library (GSL)  
<http://www.gnu.org/software/gsl/>
- [7] M. Niethammer, M. Reuter, F.-E. Wolter, S. Bouix, M.-S. Koo, M. Shenton: *Global medical shape analysis using the Laplace-Beltrami spectrum.* Proc. MICCAI. 2007; 1:850–857.
- [8] Wikipedia, Multidimensional scaling (MDS).  
[http://en.wikipedia.org/wiki/Multidimensional\\_scaling/](http://en.wikipedia.org/wiki/Multidimensional_scaling)