

Závěrečné kolo ŠVOČ 2014

**Numerické riešenie problému
oceňovania konvertibilných dlhopisov**

Meno a priezvisko študenta:

Veronika Šulovská

Vedúci práce:

Mgr. Pavol Kútik, PhD.

Univerzita, fakulta:

Slovenská technická
univerzita, Stavebná fakulta

Študijný program:

Matematicko-počítačové
modelovanie

Ústí nad Labem, 27. - 29. máj 2014

Abstrakt

Táto práca sa zaoberá konvertibilnými dlhopismi a problematikou ich oceňovania. V prvej časti odvodíme parciálnu diferenciálnu rovnicu oceňovania konvertibilných dlhopisov vhodným zostavením portfólia. V druhej časti zostavíme numerický model, v ktorom diskretizujeme odvodenú parciálnu diferenciálnu rovnicu metódou konečných objemov. Na diskretizáciu tenzora difúzie použijeme diamond-cell aproximáciu. V tretej časti rozoberieme problém voľnej hranice, ktorý priamo súvisí s oceňovaním konvertibilných dlhopisov ako derivátov s možnosťou predčasného uplatnenia. V závere práce využijeme odvodenú numerickú schému na uskutočnenie niekoľkých numerických experimentov, v ktorých zisťujeme, aký vplyv majú parametre modelu na polohu hranice predčasného uplatnenia.

Cieľom tejto práce je nájsť dostatočne presné numerické riešenie rovnice oceňovania konvertibilných dlhopisov a následne ho použiť na identifikáciu polohy hranice predčasného uplatnenia. Zo získaných výsledkov je odvodených niekoľko pozorovaní, ktoré vysvetľujú ako sa mení poloha hranice predčasného uplatnenia v závislosti od vstupných parametrov.

Kľúčové slová: konvertibilné dlhopisy, metóda konečných objemov, diamond-cell aproximácia, úloha s voľnou hranicou, hranica predčasného uplatnenia, analýza parametrov

Abstract

This work deals with convertible bonds and the problem of their pricing. In the first part of the work partial differential equation is derived by creating a convenient portfolio. In the second part, the numerical model is derived using the finite volume method. For the discretization of the diffusion tensor the diamond-cell approximation is used. The third part focuses on the free boundary problem that is directly related to pricing of convertible bonds as the derivatives with the possibility of early exercise. The derived numerical scheme is used for some numerical experiments to determine the influence of input parameters on the position of the early exercise boundary.

The aim of this work is to find a sufficiently precise numerical solution that is further used to identify the position of the early exercise boundary. Acquired results are summarized in several observations, where the change in position of the early exercise boundary is explained.

Key words: convertible bonds, finite volume method, diamond-cell approximation, free boundary problem, early exercise boundary, parameter analysis

Obsah

1	Úvod	4
2	Vymedzenie základných pojmov	5
2.1	Použité skratky	5
3	Konvertibilné dlhopisy	6
3.1	Odvođenje parciálnej diferenciálnej rovnice	6
3.2	Okrajové podmienky a terminálová podmienka	9
3.3	Transformácia rovnice na divergentný tvar	11
4	Numerická schéma	12
4.1	Diskretizácia oblasti	12
4.2	Transformácia a implementácia okrajových podmienok	13
4.3	Diskretizácia rovnice	15
5	Problém voľnej hranice pri oceňovaní konvertibilných dlhopisov	19
5.1	Formulácia úlohy s voľnou hranicou	19
5.2	Hľadanie riešenia pomocou lineárnej komplementarity	20
5.3	PSOR algoritmus	21
6	Numerické experimenty	21
6.1	Rád konverencie numerickej schémy	21
6.2	Analýza parametrov	22
7	Záver	27

1 Úvod

Dlhopis predstavuje kontrakt medzi investorom a emitentom, ktorý vynáša vopred dohodnutú sumu v stanovenom čase tzv. čase splatnosti (maturity). Zvyčajne sú vypisované firmami alebo štátom ako metóda zvýšenia kapitálu, pričom sumu, ktorú investor vyplatí emitentovi pri uzavretí kontraktu, možno chápať ako pôžičku (viď. [1]).

Konvertibilné dlhopisy sa od bežných dlhopisov odlišujú tým, že majú navyše vlastnosť konvertibility – majiteľ má právo uplatniť opciu na výmenu dlhopisu za akcie spoločnosti v určitom, vopred danom, pomere. Z toho dôvodu konvertibilný dlhopis v čase splatnosti vracia stanovnú čiastku, iba ak ho majiteľ už nepremenal na akcie spoločnosti. Tento typ finančného derivátu je pre investorov veľmi príťažlivý, pretože poskytuje viac flexibility. Ak firma prosperuje, investor si konvertibilný dlhopis uplatní a získa tak akcie, ktorých hodnota je podstatne vyššia ako hodnota dlhopisu.

Na druhej strane, konvertibilné dlhopisy poskytujú určitú istotu v podobe istiny dlhopisu, ktorá chráni investora pred fluktuáciami na trhu. Vlastnosť konvertibility spôsobuje, že sú tieto cenné papiere pre investorov atraktívne, a preto ich spoločnosť môže emitovať aj s nižším výnosom. Spoločnosť tak získa pomerne lacný kapitál, pričom nemusí vydávať nové akcie, čím by negatívne ovplyvnila ich trhovú hodnotu.

V nasledujúcich kapitolách bude odvodená parciálna diferenciálna rovnica, ktorá modeluje cenu konvertibilného dlhopisu. Predstavíme si vlastnosti, ktoré cenu dlhopisu ovplyvňujú a ako sú zakomponované do okrajových podmienok. Na riešenie tejto parciálnej diferenciálnej rovnice použijeme plne implicitnú numerickú schému, ktorá využíva metódu konečných objemov. Následne sa pozrieme na súvislosť oceňovania konvertibilných dlhopisov s problémom voľnej hranice. V závere uskutočníme analýzu parametrov, ktoré polohu voľnej hranice konvertibilného dlhopisu ovplyvňujú. Zo získaných numerických výsledkov je vyvodенých niekoľko záverov, v ktorých vysvetľujeme polohu tejto hranice.

2 Vymedzenie základných pojmov

- **Akcia** – cenný papier, ktorý dokladá kapitálovú účasť v akciovej spoločnosti a právo na podiel na zisku (na dividendu)
- **Opcia** – kontrakt, pri ktorom má vlastník právo, nie však povinnosť kúpiť (call opcia), resp. predať (put opcia) dané aktívum za vopred dohodnutých podmienok
- **Portfólio** – súbor cenných papierov, investícií a kapitálu vo vlastníctve fyzickej alebo právnickej osoby s cieľom minimalizovať riziko finančnej straty
- **Arbitráž** – operácia spočívajúca v súčasnom nákupe a predaji toho istého tovaru na rozličných burzách s cieľom využiť kurzové rozdiely na dosiahnutie zisku, a to za absencie akýchkoľvek rizík
- **Dlhopis** – cenný papier, s ktorým je spojené právo majiteľa požadovať splácanie dlžnej sumy v menovitej hodnote a vyplácanie výnosov z nej k určitému dátumu a povinnosť emitenta tieto záväzky plniť
- **Emitent** – vypisovateľ dlhopisu
- **Menovitá hodnota** – peňažná suma, na ktorú dlhopis znie, t.j. suma, ktorú emitent vyplatí investorovi v čase splatnosti

2.1 Použité skratky

- **r** – spojitá úroková miera
- **D** – spojitý dividendový výnos
- **S** – cena akcie
- **P** – cena dlhopisu
- **V** – cena konvertibilného dlhopisu
- **Z** – menovitá hodnota

- n – konverzný pomer konvertibilného dlhopisu
- T – doba splatnosti (maturity) dlhopisu

3 Konvertibilné dlhopisy

3.1 Odvodenie parciálnej diferenciálnej rovnice

Ak uvažujeme stochastický charakter akcií aj úrokovej miery, cena konvertibilného dlhopisu

$$V = V(S, r, t)$$

je funkciou nezávislých premenných S , r a t (závislosť na čase splatnosti T zatiaľ ne-
uvažujeme). Na jej popísanie použijeme dvojfaktorový model, v ktorom predpokladáme,
že úroková miera vyhovuje stochastickej rovnici

$$dr = u(r, t)dt + w(r, t)dW_r, \quad (3.1)$$

kde u a w sú nejakými vhodnými funkciami r a t . Vývoj ceny akcie možno reprezentovať
geometrickým Brownovým pohybom

$$dS = (\mu - D)Sdt + \sigma_S S dW_S, \quad (3.2)$$

kde μ a σ sú kladné parametre a D je dividendová miera.

Vo vzťahoch (3.1) a (3.2) sú dW_r a dW_S normálne rozdelené náhodné premenné s
nulovou strednou hodnotou a rozptylom dt , ale nie sú nevyhnutne nezávislé. Ich vzájomná
korelácia je vyjadrená parametrom ρ , kde $-1 \leq \rho \leq 1$.

Pre účely ďalšieho odvodzovania potrebujeme poznať, ako pomocou Itóovej lemy získať
prvý diferenciál funkcie dvoch náhodných premenných (viď. [1]). Pre normálne rozdelenú
náhodnú premennú $X \sim N(0, \sigma^2)$ platí

$$E[X^n] = \begin{cases} 0 & \text{ak } n \text{ je nepárne} \\ (n-1)\sigma^n & \text{ak } n \text{ je párne} \end{cases}.$$

Prírastky Brownovho pohybu teda môžeme zapísať

- $dW_S^2 = dt$;

- $dW_r^2 = dt$;
- $dW_S dW_r = \rho dt$.

Pre malé prírastky funkcie $V(S + ds, r + dr, t + dt)$ možno sformulovať Taylorov rozvoj v tvare

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{\partial V}{\partial r} dr + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dS^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial r} dS dr + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} dr^2 + \dots,$$

v ktorom

- $dS^2 \approx \sigma_S^2 S^2 dW_S^2 = \sigma_S^2 S^2 dt$
- $dr^2 \approx \sigma_r^2 r^{2c} dW_r^2 = w^2 dt$
- $dS dr \approx \sigma_S S \sigma_r r^c dW_S dW_r = \rho \sigma_S S w dt$.

Itóova lema pre dve náhodné premenné, ktoré sledujú stochastické procesy (3.1) a (3.2) tak nadobudne nasledovný tvar

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{\partial V}{\partial r} dr + \frac{1}{2} \sigma_S^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dt + \rho \sigma_S S w \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial r} dt + \frac{1}{2} w^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} dt. \quad (3.3)$$

Teraz môžeme pristúpiť k samotnému oceňovaniu konvertibilného dlhopisu. Najprv si zostavíme portfólio, ktoré bude pozostávať z jedného konvertibilného dlhopisu s dobou splatnosti T_1 , $-\Delta_2$ konvertibilných dlhopisov s dobou splatnosti T_2 a $-\Delta$ podkladových aktív

$$\Pi = V_1 - \Delta_2 V_2 - \Delta S \quad (3.4)$$

$$d\Pi = dV_1 - \Delta_2 dV_2 - \Delta dS. \quad (3.5)$$

Zmena v hodnote portfólia je

$$d\Pi = \left(\frac{\partial V_1}{\partial t} - \Delta_2 \frac{\partial V_2}{\partial t} \right) dt + \left(\frac{\partial V_1}{\partial S} - \Delta_2 \frac{\partial V_2}{\partial S} - \Delta \right) dS + \left(\frac{\partial V_1}{\partial r} - \Delta_2 \frac{\partial V_2}{\partial r} \right) dr + \frac{1}{2} \sigma_S^2 S^2 \left(\frac{\partial^2 V_1}{\partial S^2} - \Delta_2 \frac{\partial^2 V_2}{\partial S^2} \right) dt + \rho \sigma_S S w \left(\frac{\partial^2 V_1}{\partial S \partial r} - \Delta_2 \frac{\partial^2 V_2}{\partial S \partial r} \right) dt + \frac{1}{2} w^2 \left(\frac{\partial^2 V_1}{\partial r^2} - \Delta_2 \frac{\partial^2 V_2}{\partial r^2} \right) dt. \quad (3.6)$$

Keďže dS aj dr obsahujú náhodné členy, Δ a Δ_2 zvolíme tak, aby boli koeficienty pri dS a dr nulové

$$\frac{\partial V_1}{\partial S} - \Delta_2 \frac{\partial V_2}{\partial S} - \Delta = 0 \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial r} - \Delta_2 \frac{\partial V_2}{\partial r} = 0. \quad (3.8)$$

Voľbou

$$\Delta_2 = \frac{\partial V_1 / \partial r}{\partial V_2 / \partial r} \quad (3.9)$$

a

$$\Delta = \frac{\partial V_1}{\partial S} - \frac{\partial V_1/\partial r}{\partial V_2/\partial r} \frac{\partial V_2}{\partial S} \quad (3.10)$$

tak eliminujeme riziko z portfólia.

Aby sme vylúčili možnosť arbitráže, výnos z nášho portfólia sa musí rovnať okamžitej bezrizikovej úrokovej miere a dividendovým výnosom akcií (vid'. [2])

$$d\Pi = r\Pi dt + D\Delta S dt \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} d\Pi &= r(V_1 - \Delta_2 V_2 - \Delta S) dt + D\Delta S dt \\ &= (rV_1 - (r - D)\frac{\partial V_1}{\partial S}) dt - \Delta_2(rV_2 - (r - D)\frac{\partial V_2}{\partial S}) dt \\ &= (\frac{\partial V_1}{\partial t} - \Delta_2 \frac{\partial V_2}{\partial t}) dt + \frac{1}{2}\sigma_S^2 S^2 (\frac{\partial^2 V_1}{\partial S^2} - \Delta_2 \frac{\partial^2 V_2}{\partial S^2}) dt \\ &\quad + \rho\sigma_S S w (\frac{\partial^2 V_1}{\partial S \partial r} - \Delta_2 \frac{\partial^2 V_2}{\partial S \partial r}) dt + \frac{1}{2}w^2 (\frac{\partial^2 V_1}{\partial r^2} - \Delta_2 \frac{\partial^2 V_2}{\partial r^2}) dt. \end{aligned}$$

Ak všetky členy obsahujúce V_1 presunieme na ľavú stranu a všetky členy obsahujúce V_2 presunieme na pravú stranu rovnice získame

$$\begin{aligned} (\frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_S^2 S^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial S^2} + \rho\sigma_S S w \frac{\partial^2 V_1}{\partial S \partial r} + \frac{1}{2}w^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial r^2} - rV_1 + (r - D)S \frac{\partial V_1}{\partial S}) = \\ \Delta_2 (\frac{\partial V_2}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_S^2 S^2 \frac{\partial^2 V_2}{\partial S^2} + \rho\sigma_S S w \frac{\partial^2 V_2}{\partial S \partial r} + \frac{1}{2}w^2 \frac{\partial^2 V_2}{\partial r^2} - rV_2 + (r - D)S \frac{\partial V_2}{\partial S}). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Teraz si zavedieme nasledovné označenie

$$I_1 = \frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_S^2 S^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial S^2} + \rho\sigma_S S w \frac{\partial^2 V_1}{\partial S \partial r} + \frac{1}{2}w^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial r^2} - rV_1 + (r - D)S \frac{\partial V_1}{\partial S} \quad (3.13)$$

$$I_2 = \frac{\partial V_2}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_S^2 S^2 \frac{\partial^2 V_2}{\partial S^2} + \rho\sigma_S S w \frac{\partial^2 V_2}{\partial S \partial r} + \frac{1}{2}w^2 \frac{\partial^2 V_2}{\partial r^2} - rV_2 + (r - D)S \frac{\partial V_2}{\partial S}. \quad (3.14)$$

Platí, že

$$I_1 = \frac{\partial V_1/\partial r}{\partial V_2/\partial r} I_2 \quad (3.15)$$

$$\frac{I_1}{\partial V_1/\partial r} = \frac{I_2}{\partial V_2/\partial r}. \quad (3.16)$$

Touto úpravou se získli jednu rovnicu o dvoch neznámych. Avšak vzhľadom na to, že ľavá strana je funkciou T_1 a pravá strana rovnice je funkciou T_2 , prípad rovnosti môže nastať, iba ak sú obidve strany rovnice nezávislé od doby splatnosti T . Odstránením indexov tak získame

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_S^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \rho\sigma_S S w \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial r} + \frac{1}{2}w^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} - rV + (r - D)S \frac{\partial V}{\partial S} = \frac{\partial V}{\partial r} a(S, r, t), \quad (3.17)$$

kde funkciu $a(S, r, t)$ môžeme zapísať nasledovne

$$a(S, r, t) = w(r, t)\lambda(S, r, t) - u(r, t). \quad (3.18)$$

Funkciu λ nazývame trhovou cenou rizika (viď. [1]) a v prípade nášho modelu ju budeme považovať za konštantnú.

Stochastický proces charakterizujúci priebeh úrokovej miery sme mali dosiaľ zadefinovaný funkciami u a w , ktoré sme si bližšie nešpecifikovali. V našom finančnom modeli budeme uvažovať

$$u(r, t) = \kappa(\theta - r) \quad (3.19)$$

$$w(r, t) = \sigma_r r^c, \quad (3.20)$$

kde κ , θ , σ_r a c sú kladnými parametrami. Význam trendu v tvare $u(r, t) = \kappa(\theta - r)$ spočíva v tom, že stredná hodnota úrokovej miery je priťahovaná k rovnovážnej hodnote θ , pričom mierou tohto priťahovania je reverzná rýchlosť κ (viď. [2]).

Dosadením vzťahov (3.19) a (3.20) do vzťahu (3.17) získame rovnicu

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_S^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \rho\sigma_S S\sigma_r r^c \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial r} + \frac{1}{2}\sigma_r^2 r^{2c} \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \\ + (r - D)S \frac{\partial V}{\partial S} + [\kappa(\theta - r) - \lambda\sigma_r r^c] \frac{\partial V}{\partial r} - rV = 0, \end{aligned} \quad (3.21)$$

ktorá popisuje cenu konvertibilného dlhopisu. Zaujímavým pozorovaním je, že (3.21) je kombináciou problému oceňovania opcií a dlhopisov. Ak všetky parametre, ktoré vstupujú do procesu modelujúceho vývoj úrokovej miery položíme rovné nule, získame Black-Scholesovu rovnicu oceňovania opcií a pre $\partial V/\partial S = 0$ rovnica predstavuje riešenie klasického problému oceňovania dlhopisov.

3.2 Okrajové podmienky a terminálová podmienka

Z hľadiska analýzy parciálnych diferenciálnych rovníc je potrebné pre rovnicu (3.21) zdefinovať terminálovú podmienku a okrajové podmienky pre hranice oblasti.

Najprv odvodíme vzťah pre terminálovú podmienku. Cena dlhopisu v čase splatnosti T je Z , preto terminálová podmienka nadobudne tvar

$$V(S, r, T) = Z. \quad (3.22)$$

Avšak vzhľadom na to, že majiteľ konvertibilného dlhopisu má v ľubovľnom čase, teda aj tesne pred splatnosťou dlhopisu, nárok uplatniť si ho, je praktickejšie uvažovať o terminálovej podmienke

$$V(S, r, T) = \max(Z, nS). \quad (3.23)$$

Podmienka (3.23) v podstate hovorí, že majiteľ konvertibilného dlhopisu si v čase T zvolí buď menovitú hodnotu dlhopisu alebo ho vymení za n akcií podľa toho, čo bude mať väčšiu hodnotu (viď. [3]).

Niektoré konvertibilné dlhopisy však majú aj tzv. call feature, ktorá dáva emitentovi možnosť spätného odkúpenia dlhopisu v ľubovoľnom čase (alebo iba v určitých obdobiach) za vopred stanovenú čiastku C_p . Keďže toto právo zvyhodňuje emitenta, cena konvertibilného dlhopisu s touto vlastnosťou je podstatne nižšia ako bez nej. Call feature a možnosť okamžitého uplatnenia nám na riešenie rovnice pridávajú ďalšie obmedzenia.

Po prvé, majiteľ dlhopisu ho môže kedykoľvek zameniť za n akcií a preto by cena konvertibilného dlhopisu nikdy nemala byť nižšia ako nS , inak by došlo k výskytu arbitrážnej príležitosti. Stačilo by tento dlhopis kúpiť a okamžite uplatniť, čím by sme získali akcie, ktorých predajom by sme benefitovali z ich vyššej trhovej ceny. Preto musí platiť podmienka

$$V(S, r, t) \geq nS. \quad (3.24)$$

Po druhé, call feature zabráňuje neobmedzenému rastu hodnoty konvertibilného dlhopisu, pretože pre emitenta je optimálne, aby dlhopis odkúpil, akonáhle jeho hodnota presiahne C_p (viď. [3]). Vznikne nám tak horné ohraničenie pre cenu konvertibilného dlhopisu

$$V(S, r, t) \leq C_p. \quad (3.25)$$

Teraz určíme okrajové podmienky. Vzhľadom na to, že cena aktíva S a ani úroková miera r nemôžu nadobúdať záporné hodnoty, výpočty sa uskutočňujú na oblasti $\bar{\Omega} = [0, \infty[\times [0, \infty[$. Pre podmienky na hraniciach platí

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_r^2 r^{2c} \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + [\kappa(\theta - r) - \lambda\sigma_r r^c] \frac{\partial V}{\partial r} - rV = 0 \text{ pre } S \rightarrow 0 \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_S^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - DS \frac{\partial V}{\partial S} + \kappa\theta \frac{\partial V}{\partial r} = 0 \text{ pre } r \rightarrow 0 \quad (3.27)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_S^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - D)S \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \text{ pre } r \rightarrow \infty \quad (3.28)$$

$$V(S, r, t) = C_p \text{ pre } S \rightarrow \infty. \quad (3.29)$$

Rovnice (3.26) a (3.27) sú len limitnými formami (3.21) pre $S \rightarrow 0$ a $r \rightarrow 0$. Podmienka (3.28) vyplýva z faktu, že pre vysoké hodnoty úrokovej miery cena konvertibilného dlhopisu už nezávisí od r , a teda $\frac{\partial V}{\partial r} = 0$. Jeho cena je rovná opčnej prémii závisiacej len od hodnoty S . Ak sú ceny akcií vysoké, teda $S \rightarrow \infty$, tak sa nám oplatí dlhopis uplatniť a získať tak hodnotu nS , ktorá je v prípade existencie call feature obmedzená hodnotou C_p (viď. [3]).

3.3 Transformácia rovnice na divergentný tvar

V predchádzajúcej časti sme získali rovnicu na oceňovanie konvertibilných dlhopisov a stanovili sme niekoľko obmedzení, ktoré musí riešenie danej rovnice spĺňať. S využitím operátora $\nabla = (\frac{\partial}{\partial S}, \frac{\partial}{\partial r})^T$ možno rovnicu prepísať na nasledovný tvar

$$-\frac{\partial V}{\partial t} + \vec{\alpha} \cdot \nabla V = (\mathbf{D}\nabla) \cdot \nabla V - rV \quad (3.30)$$

kde

$$\vec{\alpha} = - \begin{pmatrix} (r - D)S \\ \kappa(\theta - r) - \lambda\sigma_r r^c \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

a

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_S^2 S^2 & \rho\sigma_S\sigma_r S r^c \\ \rho\sigma_S\sigma_r S r^c & \sigma_r^2 r^{2c} \end{pmatrix}. \quad (3.32)$$

Pre účely aplikácie metódy konečných objemov a Greenovej vety je však vhodné difúzny člen rovnice transformovať do divergentného tvaru. Zo vzťahu pre deriváciu súčinu platí

$$\nabla \cdot (\mathbf{D}\nabla V) = (\mathbf{D}\nabla) \cdot \nabla V + (\nabla^T \mathbf{D})^T \cdot \nabla V \quad (3.33)$$

a rovnica nadobudne tvar

$$-\frac{\partial V}{\partial t} + (\vec{\alpha} + (\nabla^T \mathbf{D})^T) \cdot \nabla V = \nabla \cdot (\mathbf{D}\nabla V) - rV. \quad (3.34)$$

Aby sme obmedzili výskyt premenných v koeficientoch, transformujeme si rovnicu logaritmovaním premennej $x = \ln(S)$. Ďalšími transformáciami je $y = r$ a reverzia času $\tau = T - t$, pričom riešenie takto transformovanej rovnice si označíme $u = u(x, y, \tau)$. V súlade s vyššie uvedenými transformáciami získa naša rovnica konečný tvar

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + \vec{A} \cdot \nabla u = \nabla \cdot (\mathbf{B}\nabla u) - yu, \quad (3.35)$$

kde

$$\vec{A} = - \begin{pmatrix} y - D - \frac{1}{2}\sigma_S^2 - \frac{1}{2}\rho\sigma_S\sigma_r c y^{c-1} \\ \kappa(\theta - y) - \lambda\sigma_r y^c - c\sigma_r^2 y^{2c-1} \end{pmatrix} \quad (3.36)$$

a

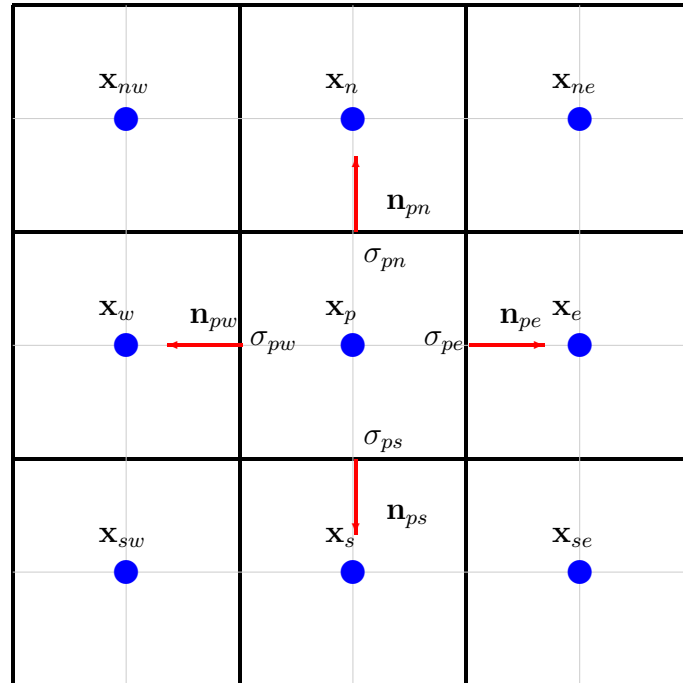
$$\mathbf{B} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_S^2 & \rho\sigma_S\sigma_r y^c \\ \rho\sigma_S\sigma_r y^c & \sigma_r^2 y^{2c} \end{pmatrix}. \quad (3.37)$$

4 Numerická schéma

4.1 Diskretizácia oblasti

Transformáciou rovnice sa nám zmenila aj oblasť výpočtu – pôvodná oblasť $\ddot{\Omega} = [0, \infty[\times [0, \infty[$ sa zmenila na oblasť $\dot{\Omega} =] - \infty, \infty[\times [0, \infty[$. Pred tým ako vybudujeme numerickú schému pre (3.35), musíme našu oblasť $\dot{\Omega}$ obmedziť na nejakú konečnú podoblasť $\Omega = [X_l, X_r] \times [0, Y]$, kde X_r, X_l a Y sú konečné čísla.

Nech p je konečný objem a σ_{pq} je hranica medzi p a q , pričom $q \in N(p)$, kde $N(p)$ je množina všetkých susediacich konečných objemov, ktoré majú s p spoločnú jednorozmernú hranicu. Teraz definujeme také delenie \mathcal{T}_h oblasti Ω , aby v každom konečnom objeme p existoval reprezentatívny bod x_p taký, že čiara spájajúca body x_p a x_q , $q \in N(p)$ bude kolmá na hranicu σ_{pq} . Pre diskretizáciu Ω podľa \mathcal{T}_h platí $\bar{\Omega} = \bigcup_{p \in \mathcal{T}_h} p$.



Obr. 4.1: diskretizácia oblasti na konečné objemy

Kedže naša oblasť Ω je obdĺžniková, tak aj delenie \mathcal{T}_h bude pozostávať s obdĺžnikovými

konečných objemov. Ak definujeme $N_x, N_y \in \mathbb{N}$ a $h_x, h_y \in \mathbb{R}$ také, že $h_x = (X_r - X_l)/N_x$ a $h_y = Y/N_y$, potom h_x a h_y predstavujú dĺžky strán konečných objemov v smere x a v smere y . V tom prípade sa veľkosť každého objemu p rovná $m(p) = h_x h_y$.

Teraz definujeme

$$x_{\frac{1}{2}} = X_l, \quad x_{i+\frac{1}{2}} = x_{i-\frac{1}{2}} + h_x \text{ pre } i = 1, \dots, N_x, \quad (4.1)$$

$$y_{\frac{1}{2}} = 0, \quad y_{j+\frac{1}{2}} = y_{j-\frac{1}{2}} + h_y \text{ pre } j = 1, \dots, N_y. \quad (4.2)$$

Z týchto definícií je zrejmé, že horné hranice intervalov pre x a y sú určené $x_{N_x+\frac{1}{2}} = X_r$ a $y_{N_y+\frac{1}{2}} = Y$ a celá oblasť Ω je zjednotením $N_x \times N_y$ disjunktných konečných objemov

$$p_{ij} = (x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}) \times (y_{j-\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{2}}) \text{ pre } i = 1, \dots, N_x \text{ a } j = 1, \dots, N_y. \quad (4.3)$$

Každý objem p_{ij} môžeme charakterizovať pomocou jeho stredy $\mathbf{x}_p = (x_i, y_j)$, kde

$$x_i = x_{i-\frac{1}{2}} + \frac{h_x}{2}, \text{ pre } i = 1, \dots, N_x,$$

$$y_j = y_{j-\frac{1}{2}} + \frac{h_y}{2}, \text{ pre } j = 1, \dots, N_y.$$

Ak rozšírime množinu $N(p)$ o všetky konečné objemy, ktoré majú s objemom p spoločný vrchol, získame množinu $N'(p)$, ktorá má v dvojrozmernom prípade tvar $N'(p) = \{e, ne, n, nw, w, sw, s, se\}$ a obsahuje všetky konečné objemy, ktoré sa nachádzajú na východe, severovýchode, severe, severozápade, západe, juhozápade, juhu a juhovýchode od objemu p .

Nech \mathbf{x}_{pq} je priesečníkom hrany σ_{pq} a čiary spájajúcej stredy \mathbf{x}_p a \mathbf{x}_q . V tomto bode možno definovať vektor \vec{n}_{pq} , ktorý je vonkajším normálovým vektorom hrany σ_{pq} vzhľadom na konečný objem p .

Pri časovej diskretizácii zvolíme ekvidištančné delenie s konštantným časovým krokom k , ktorý nám časový interval $[0, T]$ rozdelí na N_{ts} časových vrstiev $\tau^n = nk$, $n = 0, \dots, N_{ts}$, kde $k = T/N_{ts}$. Vzhľadom na to, že v konečnom objeme p uvažujeme konštantné numerické riešenie v časovej vrstve n , toto riešenie budeme ďalej označovať ako $u_p^n \approx u(\mathbf{x}_p, \tau^n)$ (viď [4]).

4.2 Transformácia a implementácia okrajových podmienok

Pre účely numerického riešenia je nevyhnutné transformovať okrajové podmienky a terminálovú podmienku tak, aby boli konzistentné s hranicami výpočtovej oblasti $\partial\Omega$.

Použijúc rovnaké transformácie $x = \ln(S)$, $y = r$, $\tau = T - t$ a $u(x, y, \tau) = V(S, r, t)$, terminálová podmienka (3.23) prejde do tvaru

$$u(x, y, 0) = \max(ne^x, Z). \quad (4.4)$$

Pri okrajových podmienkach je vhodné uvažovať tzv. Ficherovu podmienku aby sme posúdili, či je nevyhnutné, aby na danej hranici bola zadefinovaná okrajová podmienka.

Ficherovu podmienku možno aplikovať na tých hraniciach oblasti, ktoré majú nulový difúzny tok v smere vonkajšej normály, t.j. $B^T \vec{n} = 0$. V prípade oblasti $[X_l, X_r] \times [0, Y]$ môže taká situácia nastať len na hranici $y = 0$. Ficherove podmienky majú pre rovnicu (3.35) tvar

$$\lim_{y \rightarrow 0} \vec{A} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{cases} \geq 0 & \text{v } y = 0 \text{ nie je potrebná okrajová podmienka} \\ < 0 & \text{v } y = 0 \text{ je potrebná okrajová podmienka.} \end{cases} \quad (4.5)$$

Ak predpokladáme $\kappa\theta > 0$ – čo v našich numerických experimetoach vždy dodržíme – na hranici $y = 0$ sa naša rovnica zredukuje na parciálnu diferenciálnu rovnicu bez difúznej časti. Dôsledkom toho sa akákoľvek informácia prenáša cez túto hranicu len prostredníctvom advekcie. Vzhľadom na to, že projekcia vektora rýchlosti advekcie na \vec{n} je kladná, do oblasti sa cez hranicu $y = 0$ nemôže dostať žiadna informácia (vid'. [4]).

Pre numerickú implementáciu tejto podmienky rozšírime výpočtovú oblasť o niekoľko dodatočných objemov tzv. “ghost cells” $p_{i0} = (x_i, y_0)$, $i = 1, \dots, N_x$, kde $y_0 = -h_y/2$. Ich hodnoty najjednoduchšie určíme extrapoláciou nultého rádu, teda extrapoláciou konštantnou funkciou

$$u_{p_{i,0}}^n = u_{p_{i,1}}^n, i = 1, \dots, N_x. \quad (4.6)$$

Na hranici $y \rightarrow \infty$ je okrajová podmienka zadaná vo forme Black-Scholesovej rovnice, čo znamená, že pre vysoké hodnoty úrokovej miery sa konvertibilný dlhopis správa ako call opcia. Pre hodnoty konvertibilného dlhopisu v čase T môžeme formulovať nasledovný vzťah

$$\begin{aligned} V(S, r, T) &= \max(nS, Z) \\ &= \max(nS - Z, 0) + Z \\ &= n \underbrace{\max\left(S - \frac{Z}{n}, 0\right)}_{\text{terminálová podmienka pre európsku call opciu}} + Z. \end{aligned} \quad (4.7)$$

V ľubovoľnom čase t možno vzťah (4.7) prepísať ako

$$V(S, r \rightarrow \infty, t) = nV_{EC}(S, t) + Ze^{-r(T-t)}, \quad (4.8)$$

kde V_{EC} predstavuje hodnotu európskej call opcie, ktorej limita

$$\lim_{r \rightarrow \infty} V_{EC}(S, t) = Se^{-D(T-t)}. \quad (4.9)$$

Po transformácii (4.8) a aplikovaním limity dostaneme

$$u(x, y \rightarrow \infty, \tau) = ne^{-D\tau}. \quad (4.10)$$

Vzhľadom na to, že (4.10) nezávisí od premennej y , nezáleží na tom, či túto podmienku aplikujeme na hranici v nekonečne alebo pre nejaké dostatočne veľké Y . Keďže $\partial u / \partial y = 0$, okrajovú podmienku na hranici $y = Y$ môžeme do numerického modelu implementovať opäť pomocou extrapolácie

$$u_{p_i, N_y+1}^n = u_{p_i, N_y}^n, i = 1, \dots, N_x. \quad (4.11)$$

Keďže po transformácii rovnice a zúžení oblasti Ω nemožno Ficherovu podmienku aplikovať pre $x = X_l$, musíme tam zdefinovať nejakú “umelú” okrajovú podmienku. Pre nízke hodnoty akcií sa konvertibilné dlhopisy svojimi vlastnosťami čoraz viac približujú bežným dlhopisom, a preto vhodnou voľbou pre okrajovú podmienku v $x = X_l$ je nejaké explicitné riešenie rovnice pre oceňovanie dlhopisov napr. pomocou CIR modelu s hodnotou parametra $c = \frac{1}{2}$ (viď. [?]).

V prípade okrajovej podmienky pre $S \rightarrow \infty$ resp. $x \rightarrow \infty$, zúženie oblasti nebude mať vplyv na túto podmienku za predpokladu, že zvolíme X_r dostatočne veľké. Okrajová podmienka teda ostáva v tvare

$$u(X_r, y, t) = C_p. \quad (4.12)$$

4.3 Diskretizácia rovnice

V tejto časti budeme pokračovať diskretizáciou rovnice (3.35) pomocou diamond-cell aproximácie. Keďže difúzny člen už máme v divergentnom tvare, podobným spôsobom si prepíšeme aj advektívny člen

$$\vec{A} \cdot \nabla u = \nabla \cdot (\vec{A}u) - (\nabla \cdot \vec{A})u. \quad (4.13)$$

Vložením tejto identity do (3.35), preintegrovaním cez celý konečný objem p a použitím Greenovej vety na členy $\nabla \cdot (\vec{A}u)$ a $\nabla \cdot (\mathbf{B}\nabla u)$ získame následovný integrálny vzťah:

$$\int_p \frac{\partial u}{\partial \tau} dx + \sum_{q \in N(p)} \int_{\sigma_{pq}} \vec{A}u \cdot \vec{n}_{pq} d\gamma - \int_p (\nabla \cdot \vec{A})u dx = \sum_{q \in N(p)} \int_{\sigma_{pq}} \mathbf{B}\nabla u \cdot \vec{n}_{pq} d\gamma - \int_p r u dx. \quad (4.14)$$

Skôr než sformulujeme zdiskretizovanú verziu (4.14), pustíme sa do aproximácie vektora $\mathbf{B}\nabla u$. Vektor difúzie vieme explicitne zapísať ako

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b^{11} & b^{12} \\ b^{21} & b^{22} \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

a tenzor difúzie aplikovaný na gradient u sa rovná

$$\mathbf{B}\nabla u = \begin{pmatrix} b^{11} \frac{\partial u}{\partial x} + b^{12} \frac{\partial u}{\partial y} \\ b^{21} \frac{\partial u}{\partial x} + b^{22} \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix}. \quad (4.16)$$

Označme si konštantnú hodnotu, ktorá reprezentuje riešenie v objeme p ako \bar{u}_p . Hodnoty v severo-západnom, severo-východnom, juho-východnom a juho-západnom vrchole objemu p si označíme ako \bar{u}_{pnw} , \bar{u}_{pne} , \bar{u}_{pse} a \bar{u}_{psw} a analogicky \bar{u}_{pn} , \bar{u}_{pw} , \bar{u}_{ps} a \bar{u}_{pe} budú reprezentovať hodnoty na severnej, západnej, južnej a východnej hrane konečného objemu p . Na každej hrane σ_{pq} budeme diskretizovať gradient ∇u pomocou diamond-cell aproximácie. Meno tejto aproximácie pochádza z diamantového tvaru oblasti, na ktorej budeme považovať gradient za konštantný. Tieto objemy budeme označovať χ_σ . Každý objem χ_σ vieme skonštruovať pospájaním koncových bodov hrany σ_{pq} a stredových bodov \mathbf{x}_p a \mathbf{x}_q objemov, ktoré majú túto hranu spoločnú. Ďalej si označíme koncové body hrany $\bar{\sigma} \subset \partial\chi_\sigma$ ako $N_1(\bar{\sigma})$ a $N_2(\bar{\sigma})$ a vonkajší normálový vektor k χ_σ ako $\vec{n}_{\chi_\sigma, \bar{\sigma}}$. Pomocou týchto označení vieme aproximovať gradient v χ_σ ako

$$\frac{1}{m(\chi_\sigma)} \int_{\chi_\sigma} \nabla u dx \approx \frac{1}{m(\chi_\sigma)} \sum_{\bar{\sigma} \subset \partial\chi_\sigma} \frac{\bar{u}_{N_1(\bar{\sigma})} + \bar{u}_{N_2(\bar{\sigma})}}{2} m(\bar{\sigma}) \vec{n}_{\chi_\sigma, \bar{\sigma}}. \quad (4.17)$$

Kedže naša mriežka je obdĺžniková, môžeme využiť nasledovné vzťahy: $m(\chi_\sigma) = \frac{h_x h_y}{2}$ a $m(\bar{\sigma}) = \frac{\sqrt{h_x^2 + h_y^2}}{2}$. Kvôli kratšiemu zápisu budeme používať symbol $\nabla_{pq}^{DC} = (\nabla_{pq,x}^{DC}, \nabla_{pq,y}^{DC})$ ako označenie gradientu na hrane σ_{pq} . Napríklad pre výpočet gradientu na hrane σ_{pe} dostaneme

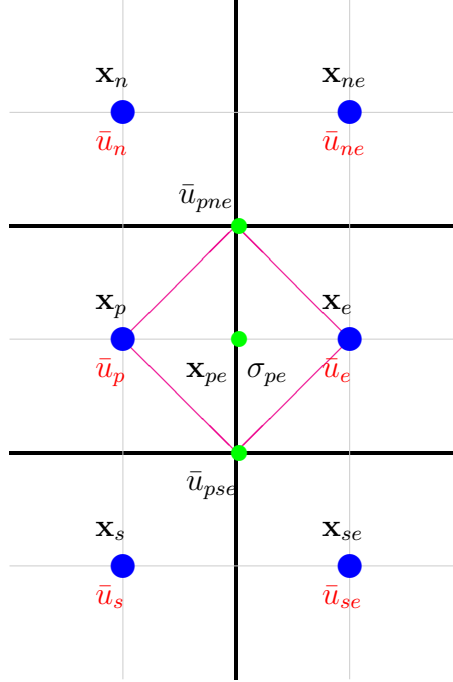
$$\nabla_{pe}^{DC} u = \frac{1}{m(\chi_{\sigma_{pe}})} \sum_{\bar{\sigma} \subset \partial\chi_{\sigma_{pe}}} \frac{\bar{u}_{N_1(\bar{\sigma})} + \bar{u}_{N_2(\bar{\sigma})}}{2} m(\bar{\sigma}) \vec{n}_{\chi_{\sigma_{pe}}, \bar{\sigma}} = \begin{pmatrix} \frac{\bar{u}_e - \bar{u}_p}{h_x} \\ \frac{u_{pne} - u_{pse}}{h_y} \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

a pre zvyšné hrany σ_{pw} , σ_{pn} a σ_{ps} analogicky

$$\nabla_{pw}^{DC} u = \begin{pmatrix} \frac{\bar{u}_p - \bar{u}_w}{h_x} \\ \frac{u_{pnw} - u_{psw}}{h_y} \end{pmatrix} \quad \nabla_{pn}^{DC} u = \begin{pmatrix} \frac{u_{pne} - u_{pnw}}{h_x} \\ \frac{\bar{u}_n - \bar{u}_p}{h_y} \end{pmatrix} \quad \nabla_{ps}^{DC} u = \begin{pmatrix} \frac{u_{pse} - u_{psw}}{h_x} \\ \frac{\bar{u}_p - \bar{u}_s}{h_y} \end{pmatrix}. \quad (4.19)$$

Ak nahradíme presný gradient jeho diamond-cell aproximáciou, potom vieme aj difúzny tok na hrane σ_{pq} aproximovať pomocou

$$\frac{1}{m(\sigma_{pq})} \int_{\sigma_{pq}} \mathbf{B}\nabla u \cdot \vec{n}_{pq} d\gamma \approx \mathbf{B}_{pq} \nabla_{pq}^{DC} u \cdot \vec{n}_{pq}, \quad (4.20)$$



Obr. 4.2: diamond-cell aproximácia

kde \mathbf{B}_{pq} je difúzny tenzor spriemerovaný na hrane σ_{pq} .

Uvažujúc konštantné riešenie v každom z konečných objemov, advektívne členy možno aproximovať nasledovne

$$\int_{\sigma_{pq}} \vec{A}u \cdot \vec{n}_{pq} d\gamma \approx \bar{u}_{pq} v_{pq} m(\sigma_{pq}), \quad \int_p (\nabla \cdot \vec{A}) u dx \approx \bar{u}_p v_{pq} m(\sigma_{pq}), \quad (4.21)$$

kde v_{pq} označuje spriemerovanú projekciu rýchlosti advekcie na hrane σ_{pq} v smere vnútornej normály

$$v_{pq} = -\frac{1}{m(\sigma_{pq})} \int_{\sigma_{pq}} \vec{A} \cdot \vec{n}_{pq} d\gamma. \quad (4.22)$$

Keď si zavedieme označenie \vec{A}_{pq} pre spriemerovaný vektor advekcie \vec{A} na hrane σ_{pq} , v_{pq} môžeme sformulovať ako $v_{pq} = -\vec{A}_{pq} \cdot \vec{n}_{pq}$. Konkrétne pre hranu σ_{pq} má rýchlosť v_{pq} tvar

$$v_{pn} = -a_{pn}^2, \quad v_{pw} = a_{pw}^1, \quad v_{pe} = -a_{pe}^1, \quad v_{ps} = a_{ps}^2, \quad (4.23)$$

pričom a_{pq}^1 , a_{pq}^2 označujú stredné hodnoty zložiek vektora rýchlosti advekcie $\vec{A} = (a^1, a^2)^T$ vyčíslené na hrane σ_{pq} .

Dosadením aproximácií (4.21) spolu s numerickým difúznym tokom a rýchlosťou ad-

veľkcie do rovnice (4.14) získame

$$\begin{aligned} \int_p \frac{\partial u}{\partial \tau} dx + \sum_{q \in N(p)} (-\vec{A}_{pq} \cdot \vec{n}_{pq})(\bar{u}_p - \bar{u}_{pq})m(\sigma_{pq}) &= \\ &= \sum_{q \in N(p)} \mathbf{B}_{pq} \nabla_{pq}^{DC} u \cdot \vec{n}_{pq} m(\sigma_{pq}) - r \bar{u}_p m(p). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Po rozpísaní advektívnych a difúzných členov získame

$$\begin{aligned} \int_p \frac{\partial u}{\partial \tau} dx + r \bar{u}_p m(p) - m(\sigma_{pe}) a_{pe}^1 (\bar{u}_p - \bar{u}_{pe}) - m(\sigma_{pe}) [b_{pe}^{11} \frac{\bar{u}_e - \bar{u}_p}{h_x} + b_{pe}^{12} \frac{\bar{u}_{pne} - \bar{u}_{pse}}{h_y}] \\ - m(\sigma_{pn}) a_{pn}^2 (\bar{u}_p - \bar{u}_{pn}) - m(\sigma_{pn}) [b_{pn}^{21} \frac{\bar{u}_{pne} - \bar{u}_{pnw}}{h_x} + b_{pn}^{22} \frac{\bar{u}_n - \bar{u}_p}{h_y}] \\ + m(\sigma_{pw}) a_{pw}^1 (\bar{u}_p - \bar{u}_{pw}) + m(\sigma_{pw}) [-b_{pw}^{11} \frac{\bar{u}_w - \bar{u}_p}{h_x} - b_{pw}^{12} \frac{\bar{u}_{psw} - \bar{u}_{pw}}{h_y}] \\ + m(\sigma_{ps}) a_{ps}^2 (\bar{u}_p - \bar{u}_{ps}) + m(\sigma_{ps}) [-b_{ps}^{11} \frac{\bar{u}_{psw} - \bar{u}_{pse}}{h_x} - b_{ps}^{22} \frac{\bar{u}_s - \bar{u}_p}{h_y}] = 0 \end{aligned} \quad (4.25)$$

Aby sme sformulovali našu numerickú schému, potrebujeme nahradiť reprezentatívne hodnoty riešenia \bar{u}_p^m a \bar{u}_{pq}^m , $m = n-1$, n kombináciou numerického riešenia v stredoch okolitých objemov

$$\begin{aligned} \bar{u}_p^m &= u_p^m, & \bar{u}_{pq}^m &= \frac{u_p^m + u_q^m}{2}, \text{ ak } q \in N(p), \\ \bar{u}_{pne}^m &= \frac{u_p^m + u_e^m + u_n^m + u_n^m}{4}, & \bar{u}_{pnw}^m &= \frac{u_p^m + u_n^m + u_n^m + u_w^m}{4}, \\ \bar{u}_{psw}^m &= \frac{u_p^m + u_w^m + u_s^m + u_s^m}{4}, & \bar{u}_{pse}^m &= \frac{u_p^m + u_s^m + u_s^m + u_e^m}{4}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Keď vložíme (4.26) do (4.25) s $m = n$ a nahradíme časovú deriváciu $\frac{\partial u}{\partial \tau}$ spätnou diferenciou $\frac{u^n - u^{n-1}}{k}$, získame plne implicitnú schému (vid'. [4])v tvare

$$(1 + kr)u_p^n + \frac{k}{m(p)} \sum_{q \in N'(p)} \mathbf{c}_{pq} (u_p^n - u_q^n) = u_p^{n-1}, \quad (4.27)$$

kde v snahe zjednodušiť označenie boli zavedené nové koeficienty

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_{pq} &= \mathbf{a}_{pq} + \mathbf{b}_{pq}, \quad q \in N(p), \\ \mathbf{c}_{pq} &= \mathbf{b}_{pq}, \quad q \in N'(p) \setminus N(p). \end{aligned} \quad (4.28)$$

s \mathbf{a}_{pq} , $q \in N(p)$ a \mathbf{b}_{pq} , $q \in N'(p)$ definovanými nasledovne

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{pe} &= -\frac{1}{2} h_y a_{pe}^1, \quad \mathbf{a}_{pw} = \frac{1}{2} h_y a_{pw}^1, \quad \mathbf{a}_{pn} = -\frac{1}{2} h_x a_{pn}^2, \quad \mathbf{a}_{ps} = \frac{1}{2} h_x a_{ps}^2, \\ \mathbf{b}_{pe} &= \frac{h_y}{h_x} b_{pe}^{11} + \frac{b_{pn}^{21}}{4} - \frac{b_{ps}^{21}}{4}, \quad \mathbf{b}_{pw} = \frac{h_y}{h_x} b_{pw}^{11} - \frac{b_{pn}^{21}}{4} + \frac{b_{ps}^{21}}{4}, \\ \mathbf{b}_{pn} &= \frac{h_x}{h_y} b_{pn}^{22} + \frac{b_{pe}^{12}}{4} - \frac{b_{pw}^{12}}{4}, \quad \mathbf{b}_{ps} = \frac{h_x}{h_y} b_{ps}^{22} - \frac{b_{pe}^{12}}{4} + \frac{b_{pw}^{12}}{4}, \\ \mathbf{b}_{pne} &= \frac{b_{pe}^{12}}{4} + \frac{b_{pn}^{21}}{4}, \quad \mathbf{b}_{psw} = \frac{b_{pw}^{12}}{4} + \frac{b_{ps}^{21}}{4}, \quad \mathbf{b}_{pnw} = -\frac{b_{pw}^{12}}{4} - \frac{b_{pn}^{21}}{4}, \quad \mathbf{b}_{pse} = -\frac{b_{pe}^{12}}{4} - \frac{b_{ps}^{21}}{4}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

5 Problém voľnej hranice pri oceňovaní konvertibilných dlhopisov

5.1 Formulácia úlohy s voľnou hranicou

Ako už bolo v predchádzajúcich kapitolách spomenuté, konvertibilné dlhopisy sú finančnými derivátmi s možnosťou predčasného uplatnenia, čo môže viesť k voľným hraniciam. Voľné hranice sú tie časti hraníc, na ktorých síce vieme sformulovať okrajovú podmienku, ich polohu však nevieme identifikovať. V prípade konvertibilných dlhopisov toto voľné ohraničenie vznikne podmienkou

$$V(S, r, t) \geq nS, \quad (5.1)$$

kde nevieme určiť, v ktorej hodnote S riešenie parciálnej diferenciálnej rovnice klesne natoľko, aby sme túto podmienku uplatnili.

Pri oceňovaní konvertibilných dlhopisov nám teda nestačí vyriešiť parciálnu diferenciálnu rovnicu, treba nájsť funkciu $S_f(r, t)$ tak, aby boli splnené nasledovné podmienky

$$\begin{aligned} & \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_S^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \rho\sigma_S S\sigma_r r^c \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial r} + \frac{1}{2}\sigma_r^2 r^{2c} \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \\ & + (r - D)S \frac{\partial V}{\partial S} + [\kappa(\theta - r) - \lambda\sigma_r r^c] \frac{\partial V}{\partial r} - rV = 0 \text{ pre } 0 < S < S_f(r, t) \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$V(S, r, T) = \max(nS, Z) \quad (5.3)$$

$$V(S_f(r, t), r, t) = nS \quad (5.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial S} V(S_f(r, t), r, t) = n \quad (5.5)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_r^2 r^{2c} \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + [\kappa(\theta - r) - \lambda\sigma_r r^c] \frac{\partial V}{\partial r} - rV = 0 \text{ pre } S \rightarrow 0 \quad (5.6)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_S^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - DS \frac{\partial V}{\partial S} + \kappa\theta \frac{\partial V}{\partial r} = 0 \text{ pre } r \rightarrow 0 \quad (5.7)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_S^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - D)S \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \text{ pre } r \rightarrow \infty, \quad (5.8)$$

kde (5.4) a (5.5) nám zaručujú hladkosť funkcie V v bode $S_f(r, t)$.

5.2 Hľadanie riešenia pomocou lineárnej komplementarity

Jednou z metód, ako riešiť problém voľnej hranice je pomocou lineárnej komplementarity. Hlavnou výhodou tohto prístupu je, že nepotrebuje poznať polohu voľnej hranice, aby sme získali riešenie.

Na základe predchádzajúcich úvah už vieme, že na intervale $0 < S < S_f(r, t)$ platí rovnica (5.2). Zároveň pre hodnoty konvertibilného dlhopisu platí $V(S, r, t) > nS$. Na druhej strane, ak pre S platí $S_f(r, t) \leq S$, konvertibilný dlhopis nadobúda hodnoty $V(S, r, t) = nS$. Dosadením tohto vzťahu do rovnice (5.2) získame

$$(r - D)Sn - rnS = -DSn \leq 0. \quad (5.9)$$

V našej úlohe teda platia dve nerovnice

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_S^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \rho\sigma_S S\sigma_r r^c \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial r} + \frac{1}{2}\sigma_r^2 r^{2c} \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \\ + (r - D)S \frac{\partial V}{\partial S} + [\kappa(\theta - r) - \lambda\sigma_r r^c] \frac{\partial V}{\partial r} - rV \leq 0 \end{aligned} \quad (5.10)$$

a súčasne

$$V(S, r, t) - nS \leq 0, \quad (5.11)$$

pričom rovnosť môže nastať pre obidva prípady súčasne jedine v $S = S_f(r, t)$. Dôsledkom toho riešenie musí mať nasledovnú vlastnosť

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_S^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \rho\sigma_S S\sigma_r r^c \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial r} + \frac{1}{2}\sigma_r^2 r^{2c} \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \right. \\ \left. + (r - D)S \frac{\partial V}{\partial S} + [\kappa(\theta - r) - \lambda\sigma_r r^c] \frac{\partial V}{\partial r} - rV \right] (V(S, r, t) - nS) = 0. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Úloha lineárnej komplementarity teda spočíva v nájdení funkcie $V(S, r, t)$, ktorá by bola spojitě diferencovateľná, vyhovovala by rovnici (5.12) a zároveň spĺňala terminálovú podmienku (5.3) a okrajové podmienky (5.6), (5.7), (5.8) a $V(S \rightarrow \infty, r, t) = nS$ (viď. [2]).

Vzhľadom na to, že v našom modeli uvažujeme aj tzv. call feature, výsledné riešenie musíme upraviť tak, aby vyhovovalo podmienke $V(S, r, t) \leq C_p$. Uskutočníme to tak, že naše riešenie “urežeme”, čiže vo výslednom riešení nahradíme všetky hodnoty presahujúce C_p práve touto hodnotou.

5.3 PSOR algoritmus

Na numerické zvládnutie úlohy o lineárnej komplementarite sa využíva modifikácia SOR algoritmu. Zmena oproti pôvodnému algoritmu spočíva v tom, že v každom iteračnom kroku overujeme, či nové aproximatívne riešenie u_i^{k+1} vyhovuje nerovnici $u_i^{k+1} \geq nS$. Pre diskretizovanú rovnicu oceňovania konvertibilných dlhopisov môžeme lineárnu komplementaritu formulovať nasledovne

$$\left(\frac{u_p^n - u_p^{n-1}}{k} + yu_p^n + \frac{1}{h_x h_y} \sum_{q \in N'(p)} c_{pq}(u_p^n - u_q^n)\right)(u_p^n - ne^{x_p}) = 0. \quad (5.13)$$

Ak \mathbf{A} označuje maticu našej sústavy lineárnych rovníc a b je vektorom pravej strany, potom riešenie (5.2) možno vyriešiť iteračne pomocou

$$u_j^{k+1} = \frac{\omega}{A_{ii}}(b_i - \sum_{j < i} A_{ij}u_j^{k+1} - \sum_{j > i} A_{ij}u_j^k) - (1 - \omega)u_j^k, \quad (5.14)$$

pre každé $i = 1, \dots, N_x N_y$. Vzhľadom na to, že musí platiť $u_j^k \geq ne^{x_i}$, riešenie v každom novom iteračnom kroku získame

$$u_j^{k+1} = \max\left(\frac{\omega}{A_{ii}}(b_i - \sum_{j < i} A_{ij}u_j^{k+1} - \sum_{j > i} A_{ij}u_j^k) - (1 - \omega)u_j^k, ne^{x_i}\right) \quad (5.15)$$

Limitným prechodom $\lim_{k \rightarrow \infty}$ možno dokázať, že iteračná metóda je skutočne riešením lineárnej komplementarity (vid'. [2]).

6 Numerické experimenty

6.1 Rád konvergenzie numerickej schémy

Uvažujme, že máme numerickú aproximáciu presného riešenia u . Aproximačná hodnota závisí od parametra h , ktorý predstavuje veľkosť diskretizačného kroku, a preto si ju označíme \hat{u}_h . Ak je naša skúmaná numerická metóda rádu p , znamená to, že existuje číslo C , ktoré nezávisí od h a platí

$$|\hat{u}_h - u| \leq Ch^p \quad (6.1)$$

pre dostatočne malé h . Číslo p nazývame rád konvergenzie. Chybu aproximácie možno zapísať

$$\hat{u}_h - u = Ch^p + O(h^{p+1}). \quad (6.2)$$

V našom prípade však nepoznáme presné riešenie, a preto máme pri meraní konvergenencie metódy dve možnosti. Prvou je vypočítať numerické riešenie pre veľmi malé delenie a použiť ho ako presné riešenie. Tento prístup však môže byť náročný na výpočtový čas, obzvlášť pri zložitejších algoritmoch. Druhým prístupom je pozrieť sa na pomer chýb \hat{u}_h vypočítaných pre rôzne h . Tak dostaneme

$$\frac{\hat{u}_h - \hat{u}_{h/2}}{\hat{u}_{h/2} - \hat{u}_{h/4}} = \frac{Ch^p - C(h/2)^p + O(h^{p+1})}{C(h/2)^p - C(h/4)^p + O(h^{p+1})} = \frac{1 - 2^{-p} + O(h)}{2^{-p} - 2^{-2p} + O(h)} = 2^p + O(h). \quad (6.3)$$

Experimentálny rád konvergenencie teda možno vypočítať ako

$$p = \lim_{h \rightarrow 0} \log_2 \frac{\hat{u}_h - \hat{u}_{h/2}}{\hat{u}_{h/2} - \hat{u}_{h/4}} \quad (6.4)$$

Uvedený prístup sme použili aj pre naše numerické riešenie a pre coupling $k = h_x h_y$ získali nasledovné hodnoty.

N_x	N_y	N_{ts}	$\hat{u}_h - \hat{u}_{h/2}$	$\log_2 \frac{\hat{u}_h - \hat{u}_{h/2}}{\hat{u}_{h/2} - \hat{u}_{h/4}}$
20	10	1	1.98864×10^{-2}	1.97149
40	20	4	5.07081×10^{-3}	1.99279
80	40	16	1.21405×10^{-3}	
160	80	64		

Tabuľka 6.1: Údaje získané programom v jazyku C, pri voľbe relaxačného parametra $\omega = 1$ v projektovanom SOR algoritme

Z uvedených výsledkov vyplýva, že numerická metóda je druhého rádu presnosti pre väzbu $k = h_x h_y$.

6.2 Analýza parametrov

Konvertibilný dlhopis má hybridný charakter, pretože jeho cena pozostáva nielen z hodnoty samotného dlhopisu, ale aj ceny opcie na akcie danej spoločnosti. Parametre, ktoré vstupujú do procesu oceňovania konvertibilného dlhopisu majú rôzny vplyv na tieto zložky, teda aj na celkovú hodnotu konvertibilného dlhopisu. V nasledujúcej časti zistíme, ako hodnoty vybraných parametrov ovplyvňujú hodnotu konvertibilného dlhopisu a polohu jeho voľnej hranice. Sledovanými parametrami budú: výška dividendy, doba splatnosti konvertibilného dlhopisu, volatilita akcií a konverzný pomer.

x	$[-5, 5]$	N_x	400	h_x	0.025
y	$[0, 1]$	N_y	50	h_y	0.02
t	$[0, 5]$	N_{ts}	10000	k	0.0005

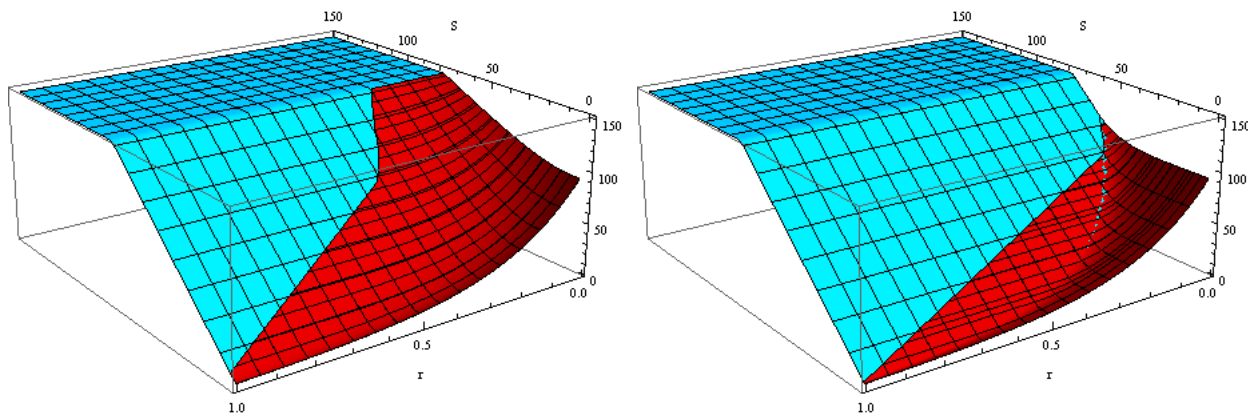
Tabuľka 6.2: Tabuľka diskretizačných parametrov, ktoré boli použité pri výpočtoch

ρ	0.5	κ	0.05	Z	100
σ_S	0.5	θ	0.025	n	2.0
σ_r	0.05	λ	0.0	D	0.02

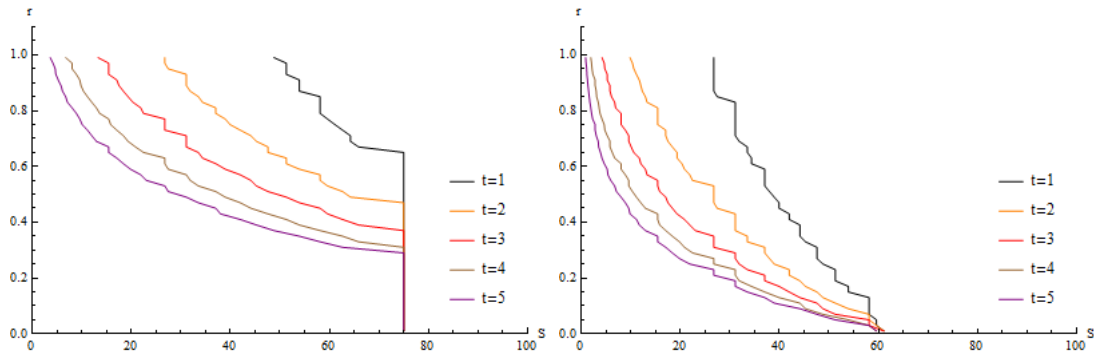
Tabuľka 6.3: Tabuľka parametrov finančného modelu, ktoré boli použité pri výpočtoch (pokiaľ nie je uvedené inak)

Dividendy

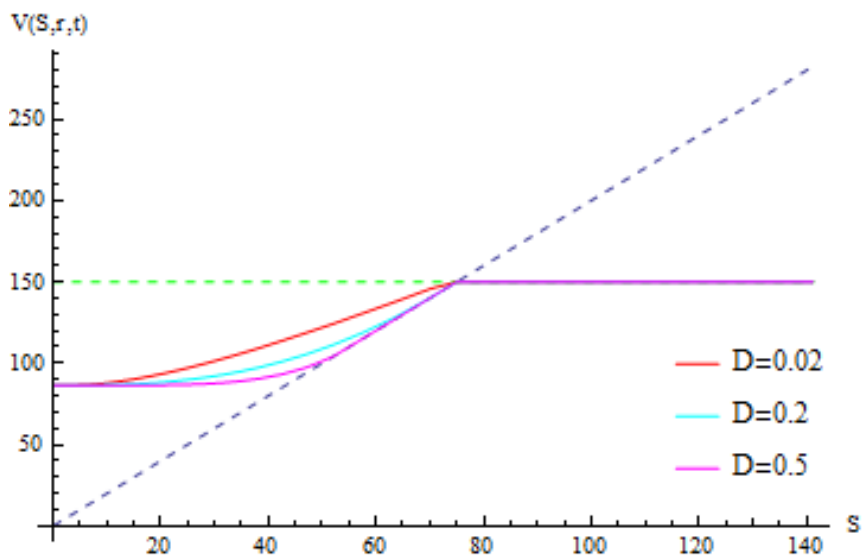
Ak akcie vyplácajú dividendy, ich hodnota klesá a spolu s nimi klesá aj hodnota call opcie. Následne je aj cena konvertibilného dlhopisu nižšia a predčasné uplatnenie môže nastať už pri nižších hodnotách akcií. Z investičného hľadiska je výhodnejšie konvertibilný dlhopis uplatniť a získať tak akcie, ktoré mu prinesú výnos v podobe dividend.



Obr. 6.1: Cena konvertibilného dlhopisu pre $D = 0.02$ (vľavo) a $D = 0.5$ (vpravo)



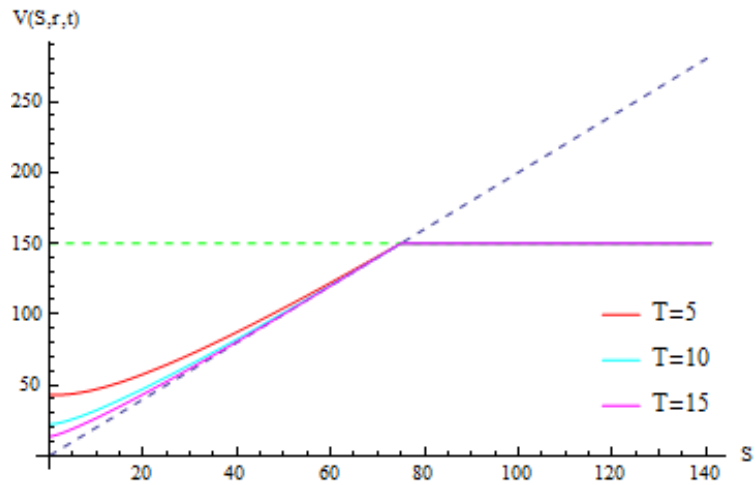
Obr. 6.2: Časový priebeh hranice predčasného uplatnenia pre $D = 0.02$ (vľavo) a $D = 0.5$ (vpravo). Čas t predstavuje čas do splatnosti konvertibilného dlhopisu.



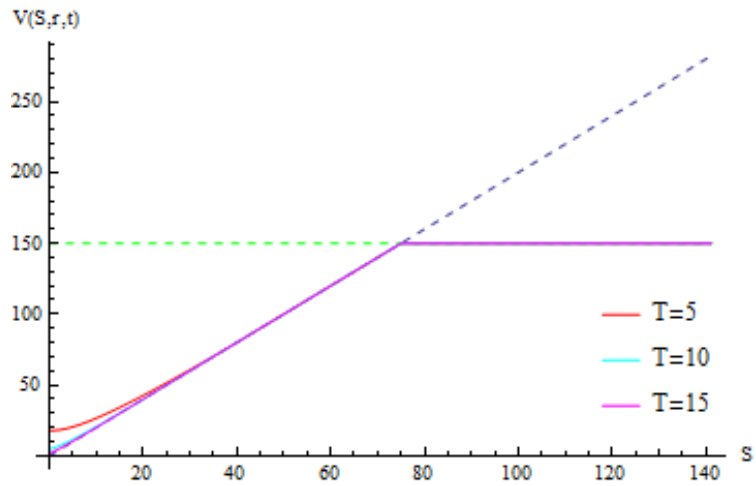
Obr. 6.3: Cena konvertibilného dlhopisu s rôznymi hodnotami dividendy v $r = 0.03$

Doba splatnosti

Čas splatnosti hraje dôležitú úlohu v cene konvertibilného dlhopisu. Čím je dlhší čas splatnosti, tým nižšia je hodnota konvertibilného dlhopisu a predčasné uplatnenie nastáva už v nižších hodnotách akcií. Pri vysokých hodnotách úrokovej miery nemá čas splatnosti veľký vplyv na hodnotu konvertibilného dlhopisu, pretože cena dlhopisu je vo všeobecnosti nízka a konvertibilný dlhopis sa správa viac ako call opcia.



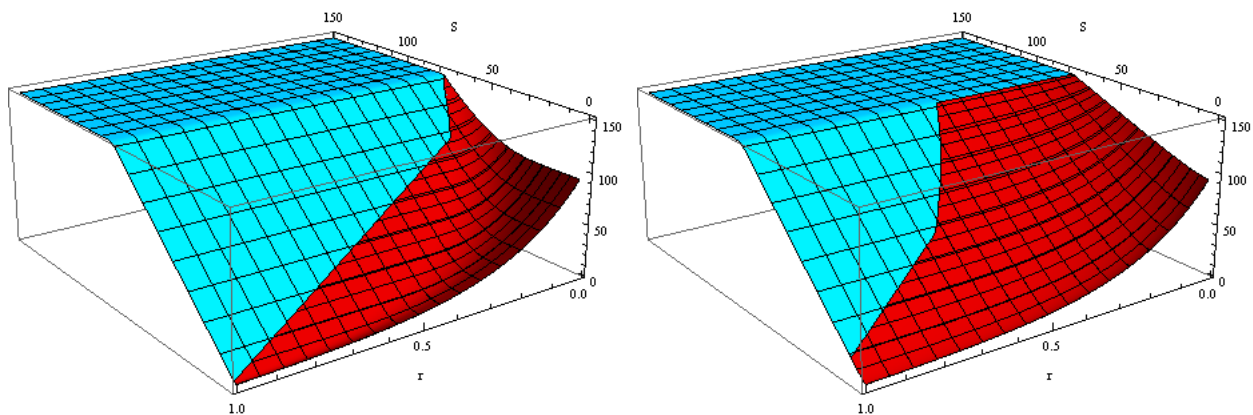
Obr. 6.4: Cena konvertibilného dlhopisu s rôznou dobou splatnosti T v $r = 0.19$



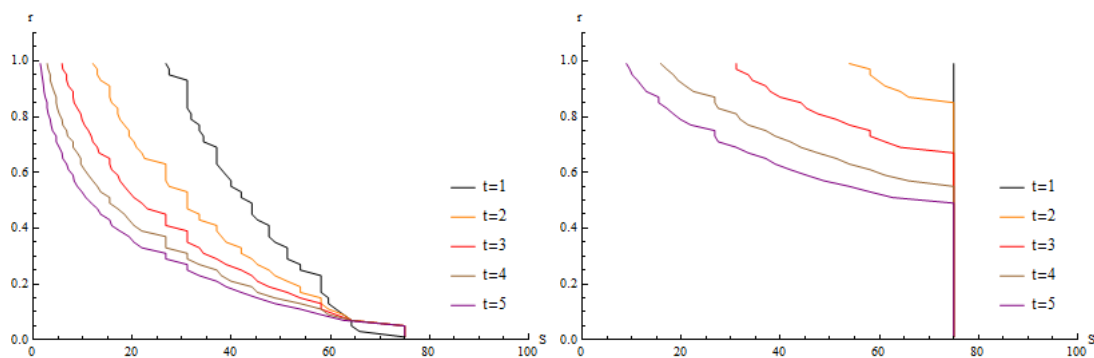
Obr. 6.5: Cena konvertibilného dlhopisu s rôznou dobou splatnosti T v $r = 0.39$

Volatilita akcií

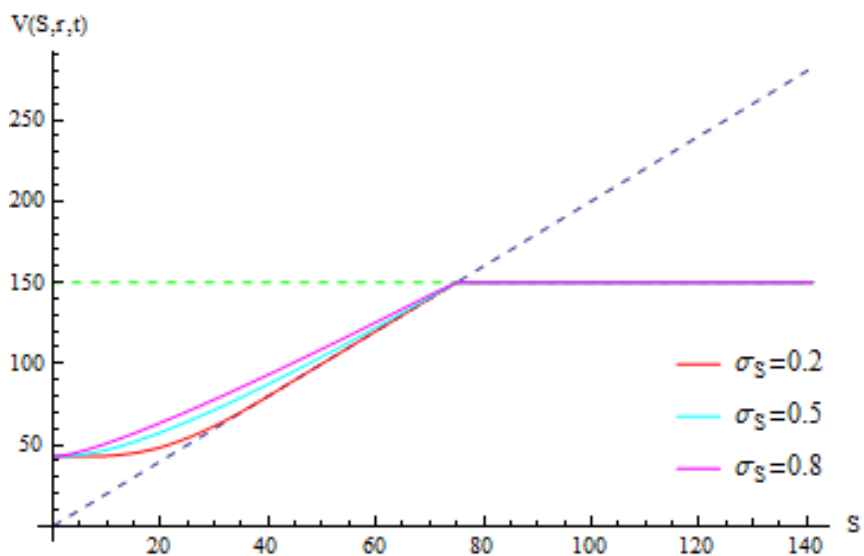
Volatilita akcií nám charakterizuje veľkosť náhodných fluktuácií cien v okolí trendu. Keďže akcie s vysokou volatilitou môžu aj na poslednú chvíľu prudko stúpnuť, zvyšuje to pravdepodobnosť väčšieho výnosu pri ich neskoršom uplatnení. Vysoká volatilita akcií teda zvyšuje hodnotu konvertibilného dlhopisu a k predčasnému uplatneniu dochádza neskôr.



Obr. 6.6: Cena konvertibilného dlhopisu pre $\sigma_S = 0.2$ (vľavo) a $\sigma_S = 0.8$ (vpravo)



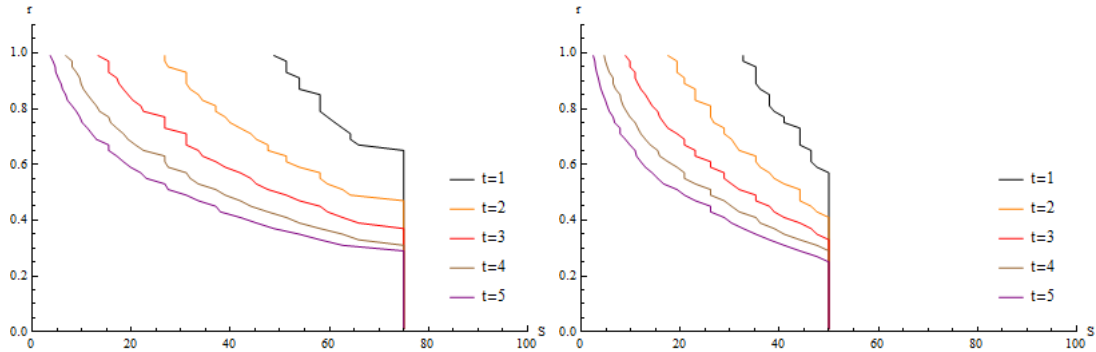
Obr. 6.7: Časový priebeh hranice predčasného uplatnenia pre $\sigma_S = 0.2$ (vľavo) a $\sigma_S = 0.8$ (vpravo). Čas t predstavuje čas do splatnosti konvertibilného dlhopisu.



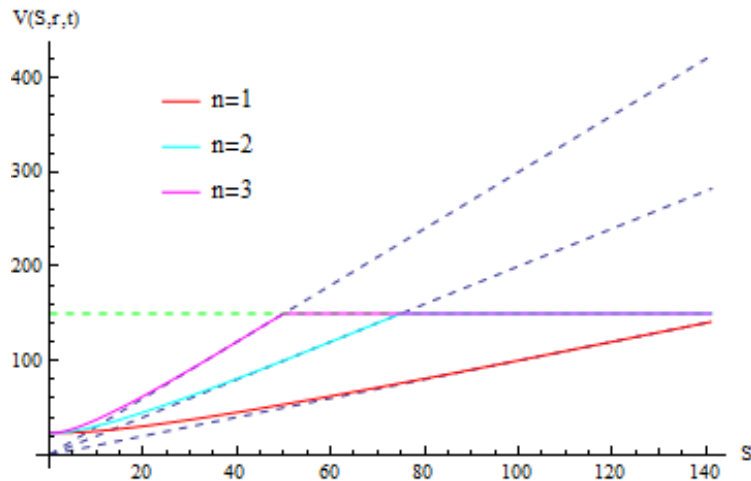
Obr. 6.8: Cena konvertibilného dlhopisu pre rôzne volatily akcií v $r = 0.19$

Konverzný pomer

Nízky konverzný pomer spôsobuje, že sa konvertibilný dlhopis správa viac ako klasický dlhopis, teda vôbec nemusí dôjsť k jeho predčasnému uplatneniu. Právo na predčasné uplatnenie v tomto prípade nemá vysokú hodnotu, čo spôsobuje, že konvertibilný dlhopis je pre investora menej atraktívna investícia.



Obr. 6.9: Časový priebeh hranice predčasného uplatnenia pre $n = 2$ (vľavo) a $n = 3$ (vpravo). Čas t predstavuje čas do splatnosti konvertibilného dlhopisu.



Obr. 6.10: Cena konvertibilného dlhopisu pri rôznych konverzných pomeroch v $r = 0.33$

7 Záver

V prvej časti práce sme sa zamerali na odvodenie parciálnej diferenciálnej rovnice oceňovania konvertibilných dlhopisov. Aby sme obmedzili výskyt premenných v koeficien-

toch, zaviedli sme niekoľko transformácií. Pre účely diskretizácie sme následne rovnicu previedli do divergentného tvaru, čo nám v numerickej schéme umožnilo využiť Greenovu vetu. Vzhľadom na to, že transformácie nám zmenili oblasť výpočtu a diskretizácia nám ju zúžila na konečnú podoblasť, museli sme prispôbiť okrajové podmienky, aby boli konzistentné s hranicami oblasti. Keďže konvertibilné dlhopisy poskytujú možnosti predčasného uplatnenia, bolo potrebné vyriešiť problém voľnej hranice, ktorý s touto vlastnosťou súvisí. Z tohto dôvodu sme preformulovali úlohu do tvaru lineárnej komplementarity, ktorú sme vyriešili projektovaným SOR algoritmom. V experimentálnej časti sme sa zamerali na meranie presnosti našej numerickej schémy a analýzu parametrov modelu. Vzhľadom na to, že sme nemali k dispozícii presné riešenie, experimentálny rád konvergenzie sme merali spôsobom, ktorý je uvedený v publikácií [6]. Postupným zjemňovaním delenia sme dospeli k záveru, že uvedená numerická schéma je pre zvolenú väzbu druhého rádu presnosti. Následne sme implementovanú numerickú schému použili na identifikáciu polohy hranice predčasného uplatnenia. Vypočítali sme numerické riešenie pre rôzne hodnoty vybraných parametrov a výsledky sme zhrnuli do pozorovaní, v ktorých odôvodňujeme vplyv parametrov na polohu hranice predčasného uplatnenia.

Literatúra

- [1] WILMOTT, P. – DEWYNNE, J. – HOWISON, S.: Option Pricing: Mathematical Models and Computation. Oxford Financial Press, 1994. 468 s. ISBN 978-0-95220-820-4.
- [2] ŠEVČOVIČ, D. – STEHLÍKOVÁ, B. – MIKULA, K.: Analytické a numerické metódy oceňovania finančných derivátov. Bratislava: Nakladateľstvo STU, 2009. 200 s. ISBN 978-80-227-3014-3.
- [3] ZVAN, R. – FORSYTH, P.A. – VETZAL, K.R.: A finite volume approach for contingent claims valuation. In: IMA Journal of Numerical Analysis, vol. 21, 2001, no. 3, pp. 703-731.
- [4] KÚTIK, P.: Numerical solution of partial differential equations in financial mathematics. Bratislava: SvF STU. Dizertačná práca
- [5] ŠEVČOVIČ, D. – STEHLÍKOVÁ, B. – MIKULA, K.: Analytical and numerical methods for pricing financial derivatives. Hauppauge: Nova Science Publishers, Inc., 2011. 309 s. ISBN 978-1-61728-780-0.
- [6] Verifying Numerical Convergence Rates
<http://www.csc.kth.se/utbildning/kth/kurser/DN2255/ndiff13/ConvRate.pdf>
- [7] BARRET, R. et al.: Templates for the Solution of Linear Systems: Building Blocks for Iterative Methods. URL: <http://www.netlib.org/templates/templates.pdf>
- [8] LEVEQUE, R.J.: Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems. Cambridge University Press, 2002. 580 s. ISBN 978-0-52100-924-9.
- [9] EYMARD, R. – GALLOUET, T. – Herbin, R.: Finite Volume Methods. In: Handbook of Numerical Analysis, vol. 7, 2000, s.713-1020.