

**Riešenie okrajových úloh teórie  
potenciálu so šikmou deriváciou  
metódou okrajových prvkov**

Meno Priezvisko študenta:	Bc. Róbert Špir
Škola:	Slovenská technická univerzita
Fakulta:	Stavebná fakulta
Ročník a program/odbor štúdia:	2. roč., 2. stupeň, matematicko-počítačové modelovanie
Vedúci práce:	Ing. Róbert Čunderlík, PhD.
Katedra:	KMaDG

**Čestné prehlásenie**

Vyhlasujem, že som túto prácu vypracoval samostatne s použitím citovanej literatúry a s odbornou pomocou vedúceho práce.

Bratislava, 29.4.2011

.....

*Vlastnoručný podpis*

**PodĎakovanie**

Chcem sa poďakovať vedúcemu práce Ing. Róbertovi Čunderlíkovi, PhD., za cenné rady, odbornú pomoc a konzultácie, ktoré mi poskytol pri vypracovaní tejto práce. Osobitné poďakovanie patrí mojej rodine a priateľom za podporu a pochopenie.

## **Anotácia:**

V tejto práci sme sa zamerali na numerické riešenie geodetickej okrajovej úlohy pre poruchový potenciál s okrajovou podmienkou v tvare šikmej derivácie metódou okrajových prvkov. Najprv sme odvodili numerické riešenie priamou integrálnou formuláciou metódy okrajových prvkov, na základe ktorého sme vytvorili výpočtový program v jazyku C. Následne sme otestovali presnosť vytvoreného programu s využitím kvadratických a lineárnych aproximačných funkcií a tiež s riešením singulárnych elementov analyticky alebo transformáciou na polárne súradnice a následnou numerickou kvadratúrou. Výpočtový program sme aplikovali na riešenie geodetickej úlohy s reálnymi vstupnými dátami. Pre veľký rozsah úlohy bol program paralelizovaný pomocou rozhrania MPI a na zníženie pamäťových nárokov bola aplikovaná metóda eliminácie vplyvu vzdialených zón. Problém šikmej derivácie sme riešili iteratívnym spôsobom riešením Neumannovej okrajovej úlohy. Veľkosť normálovej derivácie sme iteratívne určovali pomocou príspevku tangenciálnych zložiek gradientu poruchového potenciálu vypočítaných z riešenia v predchádzajúcom kroku. Výsledný poruchový potenciál získaný naším výpočtom sme nakoniec porovnali s globálnym geopotenciálnym modelom EGM2008.

## **Anotation:**

In this work we have focused on a numerical solution of the geodetic boundary value problem (GBVP) for the disturbing potential with an oblique derivative boundary condition using the boundary element method (BEM). We have derived the numerical solution by a direct integral formulation of BEM. We have developed a computational program in C language based on this solution. Then we have tested accuracy of the developed program using quadratic and linear basis functions as well as by using an analytical solution for singular elements or a transformation to polar coordinates and corresponding numerical quadrature. Then we have applied the computational program to solve GBVP with real input data. Due to a large size of this problem, the program was parallelized using the MPI framework. In order to reduce large memory requirements we have eliminated an impact of far zones. We have used an iterative approach to treat the oblique derivative problem solving the Neumann BVP. Here, the normal derivative has been derived iteratively computing tangential components of a gradient of the disturbing potential obtained from the previous iterative step. Finally, we have compared the disturbing potential obtained by our computations with the EGM2008 global geopotential model.

# 1 Úvod

S rozvojom výpočtovej techniky nastal aj prudký rozvoj rôznych numerických metód na výpočet problémov daných diferenciálnymi rovnicami. Najpopulárnejšími metódami sa stali metóda konečných prvkov a metóda konečných objemov. Výhoda týchto metód je hlavne ich všeobecná použiteľnosť. Menej používanou je metóda okrajových prvkov, ktorej hlavná nevýhoda je použiteľnosť iba pre problémy kde je známe fundamentálne riešenie. Napriek tomu môže v určitých prípadoch mať táto metóda oproti predošlým viaceré výhody a to najmä vtedy, keď máme napríklad nekonečnú výpočtovú oblasť, prípadne nás zaujíma riešenie problému iba na hranici oblasti, keďže v metóde okrajových prvkov robíme diskretizáciu a hľadáme riešenie iba na hranici oblasti, čím sa nám dimenzia úlohy zníži o jeden stupeň.

V geodézii sa často vyskytujú úlohy spojené s gravitačným potenciálom. Keďže potenciál je z definície harmonická funkcia mimo oblasti telesa, ktoré ho generuje, a teda musí spĺňať Poissonovu alebo Laplaceovu rovnicu, a vzhľadom na to, že oblasť riešenia býva zemské teleso v prípade vnútornej úlohy a celá oblasť mimo Zeme v prípade vonkajšej úlohy, tak tu príde vhod práve metóda okrajových prvkov, ktorá nám môže priniesť výrazné zlepšenie ekonomie výpočtu.

V tejto práci sa budeme zaoberať vytvorením vlastného výpočtového programu v jazyku C na riešenie potenciálových úloh metódou okrajových prvkov. Pri vytváraní programu sa bude uvažovať s rôznymi druhmi báзовých funkcií a okrajových elementov, konkrétne s lineárnymi trojuholníkovými elementmi a kvadratickými trojuholníkovými elementmi. Následne bude tento program aplikovaný na riešenie geodetických okrajových úloh. Vzhľadom na veľký výpočtový rozsah týchto úloh bude výsledný program paralelizovaný pomocou rozhrania MPI (Message Passing Interface) a bude aplikovaná metóda eliminácie vzdialených zón, pričom výsledná riedka matica bude v pamäti interpretovaná pomocou tzv. "compressed row storage".

## 2 Geodetické okrajové úlohy

V geodézii sú známe mnohé okrajové úlohy. Zaoberajú sa mnohými problémami, ako napríklad určením hmotnosti Zeme z hodnôt tiažového zrýchlenia, problémom určenia fyzického povrchu zeme alebo hľadaním tvaru geoidu, čo úzko súvisí s určovaním poruchového potenciálu.

### 2.1 Neumannova geodetická okrajová úloha

Táto úloha, známa aj ako gravimetrická okrajová úloha s pevnou hranicou (fixed gravimetric boundary-value problem, FGBVP), predpokladá, že fyzický povrch zeme je známy a preto sa dostala do popredia až v súčasnej dobe, keďže je možné vďaka satelitným meraniam určovať polohu zemského povrchu pomerne presne. Formulácia tejto úlohy je v tvare Laplaceovej rovnice pre poruchový potenciál, kde ako okrajová podmienka vystupujú tiažové poruchy, ktoré predstavujú projekciu gradientu poruchového potenciálu do smeru vonkajšej normály k referenčnému elipsoidu. Pretože okrajová podmienka je v smere normály k referenčnému elipsoidu a nie v smere normály k skutočnému zemskému povrchu, predstavuje táto úloha problém s okrajovou podmienkou v smere šikmej derivácie. V ďalších častiach tejto práce sa

budeme venovať numerickému riešeniu linearizovanej FGBVP pomocou metódy okrajových prvkov, a následným porovnaním získaného riešenia s globálnym geopotenciálnym modelom EGM2008 [10].

### 3 Metóda okrajových prvkov

Vzhľadom na to, že v geodézií sa často vyskytujú vonkajšie úlohy, a teda oblasť na ktorej hľadáme riešenie je neohraničená, je vhodné na ich riešenie použiť metódu okrajových prvkov.

Výhoda tejto metódy je redukcia dimenzie úlohy o jeden stupeň a následné riešenie len na hranici oblasti. V prípade, že je požadované riešenie aj mimo hranice, tak je možné vyjadriť toto riešenie v ľubovoľnom bode oblasti pomocou známeho riešenia na hranici.

Nevýhoda tejto metódy je možnosť aplikovania len v prípade známeho fundamentálneho riešenia danej rovnice a plná nesymetrická matica, čím vzniká pri úlohe s rozmerom  $N$  výpočtová náročnosť  $N \times N$ .

Celý proces metódy okrajových prvkov sa dá rozdeliť na nasledovné kroky [7].

- 1) Diskretizácia hraníc skúmanej oblasti na sieť okrajových prvkov. Pri 2D probléme sa používajú 1D prvky (čiarové prvky), pri 3D probléme sa použijú 2D prvky (plošné prvky).
- 2) Fundamentálne riešenie danej parciálnej diferenciálnej rovnice bez uvažovania okrajových podmienok skutočného problému musí byť známe. Toto fundamentálne riešenie sa použije ako váhová funkcia pri formulácii metódy okrajových prvkov pre danú úlohu.
- 3) Zostavenie základných rovníc metódy okrajových prvkov pre uzly na hranici  $\partial\Omega$  pre oblasť  $\Omega$ .
- 4) Výpočet neznámych hodnôt na hranici, neznáma hodnota vo vnútri oblasti  $\Omega$  sa vyjadruje pomocou známych hodnôt na hranici  $\partial\Omega$ .

#### 3.1 Priama integrálna formulácia riešenia

Priamu integrálnu formuláciu pre potenciálové úlohy v homogénnom kontinuu s Poissonovou radiacou rovnicou

$$k_{ij}u_{,ij}(x) + w(x) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (3.1)$$

s nešpecifikovanými okrajovými podmienkami na hranici oblasti  $\partial\Omega$  môžeme získať nasledovným spôsobom. Zintegrujeme (3.1) cez celú oblasť  $\Omega$  a získame integrálne jadro

$$\int_{\Omega} G(x-y)k_{ij}u_{,ij}(x) d\Omega(x) = \int_{\Omega} G(x-y)w(x) d\Omega(x). \quad (3.2)$$

Dvojnásobnou aplikáciou Gaussovej vety a následnou úpravou výrazu dostaneme integrálnu reprezentáciu potenciálu v oblasti  $\Omega$  pre  $y \in \Omega$  v tvare,

$$\begin{aligned}\chi_{\Omega}(\mathbf{y})u(\mathbf{y}) &= \int_{\partial\Omega} [u(\boldsymbol{\eta})F(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{y}) - q(\boldsymbol{\eta})G(\boldsymbol{\eta} - \mathbf{y})]d\Gamma(\boldsymbol{\eta}) \\ &+ \int_{\Omega} G(\mathbf{x} - \mathbf{y})w(\mathbf{x}) d\Omega(\mathbf{x})\end{aligned}\quad (3.3)$$

kde  $G(\mathbf{x} - \mathbf{y})$  predstavuje fundamentálne riešenie Laplaceovho operátora,  $F(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{y})$  predstavuje fundamentálny tok a  $q(\boldsymbol{\eta})$  je hustota toku na hranici  $\boldsymbol{\eta} \in \partial\Omega$ .

$$\chi_{\Omega}(\mathbf{y}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{y} \in \Omega \\ 0, & \mathbf{y} \notin (\Omega \cup \partial\Omega) \end{cases} \quad (3.4)$$

je charakteristická funkcia pre  $\Omega$ .

Neznáme z hraničných hodnôt  $u(\boldsymbol{\eta})$  a  $q(\boldsymbol{\eta})$  získame riešením hraničných integračných rovníc, ktoré získame zo vzťahu (3.3) v limite  $\mathbf{y} \rightarrow \boldsymbol{\zeta} \in \partial\Omega$  pre  $\mathbf{y} \notin \partial\Omega$ . Pretože pre vonkajšiu úlohu platí [11]

$$\int_{\partial\Omega} F(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{y}) d\Gamma(\boldsymbol{\eta}) = \delta_{ik}[1 - \chi_{\Omega}(\mathbf{y})], \quad (3.5)$$

dosadením (3.5) do (3.3) a vykonaním limity  $\mathbf{y} \rightarrow \boldsymbol{\zeta} \in \partial\Omega$  dostaneme hraničné integračné rovnice (boundary integral equation, BIE) v tvare

$$u_k(\boldsymbol{\zeta}) + \int_{\partial\Omega} [u_i(\boldsymbol{\eta}) - u_i(\boldsymbol{\zeta})]F_{ik}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta})d\Gamma(\boldsymbol{\eta}) - \int_{\partial\Omega} q_i(\boldsymbol{\eta})G_{ik}(\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\zeta})d\Gamma(\boldsymbol{\eta}) = W_k(\boldsymbol{\zeta}), \quad (3.6)$$

kde  $W_k(\boldsymbol{\zeta})$  predstavuje príspevok známych objemových síl. Ďalej budeme uvažovať iba s prípadom Laplaceovej rovnice a preto je tento príspevok nulový a fundamentálne riešenie a fundamentálny tok budú mať pre 3D prípad nasledovný tvar

$$G(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}, \quad (3.7)$$

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{\partial G(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})} = \frac{n_i(\mathbf{x})r_{,i}}{4\pi r^2}, \quad (3.8)$$

kde  $r$  predstavuje vektor vzdialenosti bodov  $\mathbf{x}$  a  $\mathbf{y}$ . Všetky integrály v BIE (3.6) existujú v obyčajnom zmysle a nie je treba ich uvažovať v zmysle Cauchyho hlavnej hodnoty.

## 3.2 Numerické riešenie

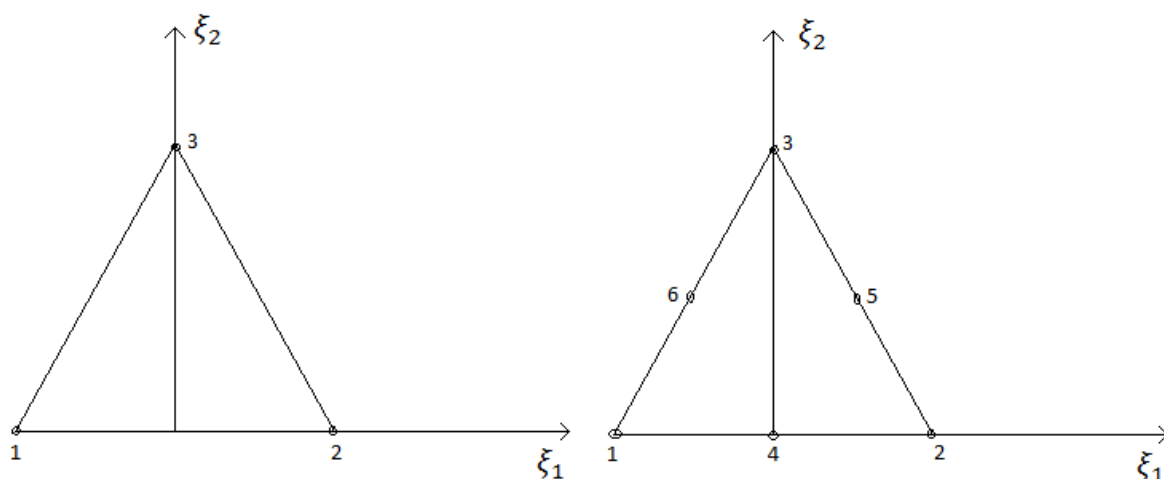
Na odvodenie systému algebraických rovníc použijeme postup, ktorý navrhli autori v [12] pre úlohy v elastostatike. My si tento postup upravíme pre Laplaceovu rovnicu pre poruchový potenciál a okrem kvadratických trojuholníkových elementov použijeme aj lineárne trojuholníkové elementy.

Hranicu oblasti, v našom prípade Zemský povrch si diskretizujeme metódou kolokácie na konečný počet elementov  $S_q$  ( $q= 1, 2, \dots, M$ ), kde každý je určený diskrétnymi kolokačnými bodmi v lokálnom značení  $\eta^{aq}$  ( $a=1, 2, \dots, n$ ) a všetky body budú mať globálne značenie  $\zeta^b$  ( $b= 1, 2, \dots, m$ ). Súradnice vnútorných bodov elementov a hodnoty tiažových porúch a poruchového potenciálu na elemente sa aproximatívne vyjadria cez hodnoty v kolokačných bodoch pomocou interpolačných funkcií v tvare

$$\eta_k|_{S_q} = \sum_{a=1}^n \eta_k^{aq} N^a(\xi_1, \xi_2), \quad (3.9)$$

$$f(\eta)|_{S_q} = \sum_{a=1}^n f(\eta^{aq}) N^a(\xi_1, \xi_2), \quad (3.10)$$

kde  $N^a(\xi_1, \xi_2)$  predstavuje interpolačnú funkciu a funkcia  $f(\eta)$  predstavuje hodnotu tiažovej poruchy alebo poruchového potenciálu. Pri diskretizácii budeme používať kvadratickú aproximáciu, čo predstavuje 6-uzlové trojuholníkové elementy a lineárnu aproximáciu, čo predstavuje 3-uzlové trojuholníkové elementy (Obr. 3.1).



Obr. 3.1: Lineárne a kvadratické trojuholníkové izoparametrické elementy

Izoparametrické súradnice sa na elemente menia v rozsahu

$$\xi_2 \in \begin{cases} \langle 0; \sqrt{3}(1 - \xi_1) \rangle & \text{pre } \xi_1 \in \langle 0; 1 \rangle \\ \langle 0; \sqrt{3}(1 + \xi_1) \rangle & \text{pre } \xi_1 \in \langle -1; 0 \rangle \end{cases} \quad (3.11)$$

Na výpočet vonkajšej normály na elemente si zadefinujeme dva tangenciálne vektory na  $S_q$ :

$$h_i^q = \frac{\partial \eta_i}{\partial \xi_1} \Big|_{S_q} = \sum_{a=1}^n \eta_k^{aq} N_{,1}^a(\xi_1, \xi_2), \quad (3.12)$$

$$k_i^q = \frac{\partial \eta_i}{\partial \xi_2} \Big|_{S_q} = \sum_{a=1}^n \eta_k^{aq} N_{,2}^a(\xi_1, \xi_2), \quad (3.13)$$

kde  $N_{,1}^a(\xi_1, \xi_2)$  a  $N_{,2}^a(\xi_1, \xi_2)$  predstavujú deriváciu interpolačnej funkcie podľa  $\xi_1$ , respektíve  $\xi_2$ .

$$g_i^q = \varepsilon_{ijk} h_j^q k_k^q \quad (3.14)$$

je nenormalizovaný normálový vektor, získaný ako vektorový súčin vektorov  $h$  a  $k$ , ďalej

$$n_i^q = \frac{g_i^q}{g^q}, \quad g^q = \sqrt{g_i^q g_i^q} \quad (3.15)$$

a  $g^q$  je zároveň jakobiánom transformácie (3.9) pretože platí

$$\int_{S_q} (.) dS_n = \iint (.) g^q d\xi_1 d\xi_2 \quad (3.16)$$

Ak uzlový bod  $\zeta^b$ , v ktorom definujeme hraničnú integrálnu rovnicu, leží na elemente  $S_q$ , tak je tento element  $S_q$  singulárny. Na singulárnych elementoch je výhodné transformovať izoparametrické súradnice  $\xi_1, \xi_2$  na polárne súradnice  $\varrho, \varphi$  so začiatkom v bode  $\zeta^b$ . Potom  $d\xi_1 d\xi_2 \rightarrow \varrho d\varrho d\varphi$ .

Teraz definujeme nasledujúce veličiny:

$$R_k^{bq} = \begin{cases} \sum_{a=1}^n \eta_k^{aq} P^a - \zeta_k^b, & \zeta^b \notin S_q \\ \sum_{a=1}^n \eta_k^{aq} P^a, & \zeta^b \in S_q \end{cases} \quad (3.17)$$

$$R^{bq} = \sqrt{R_k^{bq} R_k^{bq}}, \quad R_{,k}^{bq} = R_k^{bq} / R^{bq} \quad (3.18)$$

$$g_i^q = \varepsilon_{ijk} h_j^q k_k^q, \quad g^q = \sqrt{g_i^q g_i^q}$$

$$h_i^q = \sum_{a=1}^n \eta_i^{aq} P_1^a, \quad k_i^q = \sum_{a=1}^n \eta_i^{aq} P_2^a \quad (3.19)$$

$$G^{bq} = \frac{1}{4\pi R^{bq}} \quad (3.20)$$

$$F^{bq} = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{R^{bq}} \right)^2 R_{,i}^{bq} g_i^q \quad (3.21)$$

kde polynómy  $P^a, P_1^a, P_2^a$  sú definované v tabuľkách 2 a 3 pre kvadratické aproximačné funkcie a v tabuľkách 4 a 5 pre lineárne aproximačné funkcie. Polynómy  $N^a(\xi_1, \xi_2)$ ,  $N_{,1}^a(\xi_1, \xi_2)$ ,  $N_{,2}^a(\xi_1, \xi_2)$ ,  $M^a(\varrho, \varphi)$ ,  $K^a(\varrho, \varphi)$ ,  $M_1^a(\varrho, \varphi)$ ,  $M_2^a(\varrho, \varphi)$ ,  $K_1^a(\varrho, \varphi)$ ,  $K_2^a(\varrho, \varphi)$  sú definované v prílohe v časti I pre kvadratické aproximačné funkcie a II pre lineárne aproximačné funkcie.

Pre takto definované veličiny platí

$$r_k|_{S_q} \equiv \eta_k|_{S_q} - \zeta_k^b = \begin{cases} R_k^{bq}, & \zeta^b \notin S_q \\ \varrho R_k^{bq}, & \zeta^b \in S_q \end{cases} \quad (3.22)$$

$$[u_i(\eta) - u_i(\zeta^b)]|_{S_q} = \begin{cases} \sum_{a=1}^n u_i(\eta^{aq}) P^a - u_i(\zeta_k^b), & \zeta^b \notin S_q \\ \varrho \sum_{a=1}^n u_i(\eta^{aq}) P^a, & \zeta^b \in S_q \end{cases} \quad (3.23)$$



$$q_i(\eta)|_{S_q} = \sum_{a=1}^n q_i(\eta^{aq}) Q^a. \quad (3.24)$$

Následne môžeme definovať integrály na jednotlivých elementoch s prihliadnutím na konfiguráciu bodu  $\zeta^b$  v ktorom uvažujeme hraničnú integrálnu rovnicu a element  $S_q$  na ktorom integrujeme:

1) ak  $\zeta^b \notin S_q$ :

$$F_{ik}^{baq} = \left( \int_{-1}^0 \int_0^{\sqrt{3}(1+\xi_1)} + \int_0^1 \int_0^{\sqrt{3}(1-\xi_1)} \right) P^a F_{ik}^{bq} d\xi_1 d\xi_2, \quad C_{ik}^{bq} = 1 - \sum_{a=1}^n F_{ik}^{baq} \quad (3.25)$$

$$G_{ik}^{baq} = \left( \int_{-1}^0 \int_0^{\sqrt{3}(1+\xi_1)} + \int_0^1 \int_0^{\sqrt{3}(1-\xi_1)} \right) Q^a G_{ik}^{bq} g^q d\xi_1 d\xi_2 \quad (3.26)$$

2) ak  $\zeta^b \in S_q$  a  $c \leq 3$ :

$$F_{ik}^{baq} = \int_0^{\pi/3} \int_0^D P^a F_{ik}^{bq} d\varrho d\varphi, \quad C_{ik}^{bq} = 0 \quad (3.27)$$

$$G_{ik}^{baq} = \int_0^{\pi/3} \int_0^D Q^a G_{ik}^{bq} g^q d\varrho d\varphi, \quad D \equiv \frac{2\sqrt{3}}{\sin(\varphi) + \sqrt{3}\cos(\varphi)} \quad (3.28)$$

3) ak  $\zeta^b \in S_q$  a  $c \geq 4$ :

$$F_{ik}^{baq} = \left( \int_0^{\pi/2} \int_0^{D/2} + \int_{\pi/2}^{\pi} \int_0^E \right) P^a F_{ik}^{bq} d\varrho d\varphi, \quad C_{ik}^{bq} = 0 \quad (3.29)$$

$$G_{ik}^{baq} = \left( \int_0^{\pi/2} \int_0^{D/2} + \int_{\pi/2}^{\pi} \int_0^E \right) Q^a G_{ik}^{bq} g^q d\varrho d\varphi, \quad E \equiv \frac{\sqrt{3}}{\sin(\varphi) - \sqrt{3}\cos(\varphi)} \quad (3.30)$$

kde v (3.25) ide sumácia pre  $n=3$  v prípade lineárnych aproximačných funkcií a pre  $n=6$  pre kvadratické aproximačné funkcie. Parameter  $c$  nadobúda hodnoty podľa toho na ktorej pozícii sa nachádza bod  $\zeta^b$  na elemente podľa obrázka 3.1.

Aplikovaním týchto hraničných integrálnych rovníc na diskretnú sieť uzlových bodov získame diskretizované hraničné rovnice ktoré predstavujú systém algebraických, rovníc pomocou ktorých môžeme vypočítať hodnoty neznámych veličín v uzlových bodoch v tvare

$$u_i(\zeta^b) \left[ \delta_{ik} + \sum_{q=1}^M C_{ik}^{bq} \right] + \sum_{q=1}^M \sum_{a=1}^n [u_i(\eta^{aq}) F_{ik}^{baq} - q_i(\eta^{aq}) G_{ik}^{baq}] = 0 \quad (3.31)$$

Všetky integrandy v rovniciach (3.25) - (3.30) sú ohraničené a môžeme ich numericky integrovať regulárnou Gaussovou kvadratúrou s dostatočnou presnosťou.

Na numerickú integráciu budú použité súradnice Gaussových bodov pre trojuholník získané pravidlom symetrickej kvadratúry na trojuholníku [14] a ich súradnice, ako aj súradnice po transformácii na polárne súradnice aj s príslušnými váhami sú uvedené v tabuľke 1. Pre lineárne aj kvadratické aproximačné funkcie bude použitá 7 bodová kvadratúra.

Tab. 1: Súradnice Gaussových bodov pre numerickú kvadratúru

$c = 0$		
$\xi_1$	$\xi_2$	$w$
0	0.5773502691896258	0.225
0	0.10343092395815051	0.1323941527885062
0	1.3811840539580302	0.1259391805448271
0.41042619231534516	0.8143099418053635	0.1323941527885062
-0.6961404780296309	0.1754333768054237	0.1259391805448271
-0.41042619231534516	0.8143099418053635	0.1323941527885062
0.6961404780296309	0.1754333768054237	0.1259391805448271
$1 \leq c \leq 3$		
$\varrho$	$\varphi$	$w$
1.1547005383792517	0.5235987755982989	0.225
1.0053347482459942	0.1030644403143339	0.1323941527885062
1.7051889604697597	0.944133110882264	0.1259391805448271
1.6286198836107268	0.5235987755982989	0.1323941527885062
0.3508667536108473	0.5235987755982991	0.1259391805448271
1.0053347482459944	0.9441331108822639	0.1323941527885062
1.7051889604697592	0.10306444031433384	0.1259391805448271
$4 \leq c \leq 6$		
$\varrho$	$\varphi$	$w$
0.5773502691896258	1.5707963267948966	0.225
0.10343092395815051	1.57079632679489661	0.1323941527885062
1.3811840539580302	1.570796326794896	0.1259391805448271
0.9118938209361478	1.1039401486247842	0.1323941527885062
0.7179055890914047	2.8947244528151397	0.1259391805448271
0.9118938209361478	2.037652504965009	0.1323941527885062
0.7179055890914047	0.24686820077465335	0.1259391805448271

Tab. 2: Definícia polynómov  $P^a$ ,  $Q^a$  pre kvadratické aproximačné funkcie

	$P^1$	$P^2$	$P^3$	$P^4$	$P^5$	$P^6$	$Q^a$
$\zeta^b \notin S_q$	$N^1$	$N^2$	$N^3$	$N^4$	$N^5$	$N^6$	$P^a$
$\zeta^b = \eta^{1q}$	$K^1$	$K^2$	$K^6$	$K^3$	$K^4$	$K^5$	$\varrho P^a + \delta_{a1}$
$\zeta^b = \eta^{2q}$	$K^6$	$K^1$	$K^2$	$K^6$	$K^3$	$K^4$	$\varrho P^a + \delta_{a2}$
$\zeta^b = \eta^{3q}$	$K^2$	$K^6$	$K^1$	$K^4$	$K^6$	$K^3$	$\varrho P^a + \delta_{a3}$
$\zeta^b = \eta^{4q}$	$M^1$	$M^2$	$M^3$	$M^4$	$M^5$	$M^6$	$\varrho P^a + \delta_{a4}$
$\zeta^b = \eta^{5q}$	$M^3$	$M^1$	$M^2$	$M^6$	$M^4$	$M^5$	$\varrho P^a + \delta_{a5}$
$\zeta^b = \eta^{6q}$	$M^2$	$M^3$	$M^1$	$M^5$	$M^6$	$M^4$	$\varrho P^a + \delta_{a6}$

Tab. 3: Definícia polynómov  $P_1^a, P_2^a$  pre kvadratické aproximačné funkcie

	$P_1^1$	$P_1^2$	$P_1^4$	$P_1^5$	$P_2^3$	$P_2^4$	$P_2^5$	$P_2^6$
$\zeta^b \notin S_q$	$N_{,1}^1$	$N_{,1}^2$	$N_{,1}^4$	$N_{,1}^5$	$N_{,2}^3$	$N_{,2}^4$	$N_{,2}^5$	$N_{,2}^6$
$\zeta^b = \eta^{1q}$	$M_1^1 - \frac{3}{2}$	$M_1^2 - \frac{1}{2}$	$M_1^3 + 2$	$M_1^4$	$4M_2^1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$	$2M_2^2 - \frac{2}{\sqrt{3}}$	$M_2^3$	$-M_2^4 + \frac{4}{\sqrt{3}}$
$\zeta^b = \eta^{2q}$	$-M_1^4 + \frac{1}{2}$	$-M_1^1 + \frac{3}{2}$	$M_1^5 - 2$	$M_1^2$	$2M_2^5 - \frac{1}{\sqrt{3}}$	$M_2^5 - \frac{2}{\sqrt{3}}$	$-M_2^6 - \frac{4}{\sqrt{3}}$	$M_2^2$
$\zeta^b = \eta^{3q}$	$-M_1^2 + \frac{1}{2}$	$M_1^4 - \frac{1}{2}$	$M_1^6$	$-M_1^1 + 2$	$-2K_2^1 + \sqrt{3}$	$-K_2^1$	$K_2^2 - \frac{2}{\sqrt{3}}$	$K_2^3 - \frac{2}{\sqrt{3}}$
$\zeta^b = \eta^{4q}$	$M_1^1 - \frac{1}{2}$	$M_1^2 + \frac{1}{2}$	$M_1^3$	$M_1^4$	$4M_2^1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$	$2M_2^2 - \frac{2}{\sqrt{3}}$	$M_2^3 + \frac{2}{\sqrt{3}}$	$-M_2^4 + \frac{2}{\sqrt{3}}$
$\zeta^b = \eta^{5q}$	$-M_1^4 + \frac{1}{2}$	$-M_1^1 + \frac{1}{2}$	$M_1^5 - 1$	$M_1^2 + 1$	$2M_2^5 + \frac{1}{\sqrt{3}}$	$M_2^5 - \frac{1}{\sqrt{3}}$	$-M_2^6 + \frac{1}{\sqrt{3}}$	$M_2^2 - \frac{1}{\sqrt{3}}$
$\zeta^b = \eta^{6q}$	$-M_1^2 - \frac{1}{2}$	$M_1^4 - \frac{1}{2}$	$M_1^6 + 1$	$-M_1^1 + 1$	$-2K_2^1 + \frac{1}{\sqrt{3}}$	$-K_2^1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$	$K_2^2 - \frac{1}{\sqrt{3}}$	$K_2^3 + \frac{1}{\sqrt{3}}$
$P_1^3 = 0, P_1^6 = -P_1^5$					$P_2^1 = \frac{1}{\sqrt{3}}P_1^1, P_2^2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}P_1^2$			

 Tab. 4: Definícia polynómov  $P^a, Q^a$  pre lineárne aproximačné funkcie

	$P^1$	$P^2$	$P^3$	$Q^a$
$\zeta^b \notin S_q$	$N^1$	$N^2$	$N^3$	$P^a$
$\zeta^b = \eta^{1q}$	$M^1$	$M^2$	$M^3$	$\varrho P^a + \delta_{a1}$
$\zeta^b = \eta^{2q}$	$M^3$	$M^1$	$M^2$	$\varrho P^a + \delta_{a2}$
$\zeta^b = \eta^{3q}$	$M^2$	$M^3$	$M^1$	$\varrho P^a + \delta_{a3}$

 Tab. 5: Definícia polynómov  $P_1^a, P_2^a$  pre lineárne aproximačné funkcie

	$P_1^1$	$P_1^2$	$P_1^3$	$P_2^1$	$P_2^2$	$P_2^3$
$\zeta^b \notin S_q$	$N_{,1}^1$	$N_{,1}^2$	$N_{,1}^3$	$N_{,2}^1$	$N_{,2}^2$	$N_{,2}^3$
$\zeta^b = \eta^{1q}$	$N_{,1}^1$	$N_{,1}^2$	$N_{,1}^3$	$N_{,2}^1$	$N_{,2}^2$	$N_{,2}^3$
$\zeta^b = \eta^{2q}$	$N_{,1}^3$	$N_{,1}^1$	$N_{,1}^2$	$N_{,2}^3$	$N_{,2}^1$	$N_{,2}^2$
$\zeta^b = \eta^{3q}$	$N_{,1}^2$	$N_{,1}^3$	$N_{,1}^1$	$N_{,2}^2$	$N_{,2}^3$	$N_{,2}^1$

### 3.3 Implementácia

Na základe tohto postupu bola vytvorená implementácia výpočtového programu v programovacom jazyku C. Výhoda tohto postupu spočíva v tom, že vytvorený program sa dá jednoducho upraviť pre použitie lineárnych aj kvadratických, ale aj trojuholníkových a štvoruholníkových elementov, pretože stačí zmeniť iba definície tvarových funkcií a rozsahy vnútorných cyklov, prípadne súradnice Gaussových bodov pre numerickú kvadratúru. Tak isto sa dá pomerne jednoducho zmeniť typ úlohy z vonkajšej na vnútornú, aplikovať Dirichletovu okrajovú podmienku namiesto Neumannovej, prípadne zmeniť tvar fundamentálneho riešenia a fundamentálneho toku, čím sa program stane použiteľným nielen na potenciálové úlohy v geodézií, ale aj pre rôzne iné spektrum okrajových úloh.

Pre potrebu riešenia rozsiahlych úloh na výpočtovom klastri bol program paralelizovaný pomocou rozhrania MPI (Message Passing Interface) [2], kde sa počas výpočtu matica systému rovníc rovnomerne rozdelí na pásové diely po riadkoch, pričom každý proces si v pamäti uchováva iba svoju časť matice systému, čím dochádza k úspore pamäťových požiadaviek. Medziprocesorová komunikácia prebieha iba na začiatku výpočtu pre rozposlanie načítaných vstupných údajov z prvého proceso-

ra na ostatné, po skončení naplňania matice na kompletizáciu vektora pravej strany na všetkých procesoroch a počas riešiča systému rovníc na rozposielanie vektorov používaných v riešiči.

Na riešenie výsledného systému algebraických rovníc bola použitá nestacionárna iteratívna stabilizovaná metóda bikonjugovaných gradientov (BiCGSTAB) [3], ktorá sa ukázala ako vhodná na riešenie tohto systému, pretože matica systému je síce plná a nesymetrická, ale je pozitívne definitná.

Pre zníženie pamäťových nárokov pri extrémne rozsiahlych úlohách bola použitá metóda eliminácie vzdialených zón, kde sa nastavením limity vzdialenosti uzlov v programe, vplyv uzlov, ktorých vzdialenosť od práve počítaného uzla presahuje túto limitu prenášajú už získaným riešením (napríklad riešením problému na hrubšej sieti) a prejde do pravej strany, čím nám vznikne namiesto plnej matice redšia matica s nenulovými prvkami okolo diagonály. Na uloženie takejto riedkej matice je použitá metóda "compressed row storage" [5], kde sa pre každý prvok matice ukladá okrem jeho hodnoty aj jeho stĺpcová súradnica v matici a do samostatného vektora sa ukladajú čísla, ktoré určujú na ktorej pozícii v matici začína nový riadok. Tým sa síce pri použití premennej typu double zvýšia pamäťové nároky pre uloženie jedného prvku z 8 bajtov na 12 bajtov, ale zároveň nám to umožňuje v kombinácii s elimináciou vzdialených zón riešiť výrazne rozsiahlejšie úlohy, ako keby sme uchovávali plnú maticu.

Zároveň je program optimalizovaný tak, že veličiny, ktoré nie sú závislé na vzájomnej konfigurácii bodov sa vypočítajú pred samotným cyklom vyčíslovania matice systému, čím sa síce trochu zvýši pamäťová náročnosť ale ušetrí sa procesorový čas, pretože ich nie je potrebné počítať počas hlavného cyklu výpočtu.

Okrem MPI sú v programe použité len štandardné C knižnice a je teda plne multiplatformový. Jeho beh bol testovaný v prostredí operačných systémov Microsoft® Windows® aj Linux, ako prostredie MPI bola v oboch operačných systémoch použitá implementácia MPICH2 [9].

### 3.4 Testovanie presnosti metódy a odhadnutie rádu konvergenencie

Pre prvotné otestovanie presnosti tejto metódy bol zvolený jednoduchý príklad kde je gravitačný potenciál generovaný homogénnou guľou s geocentrickou gravitačnou konštantou  $GM = 398600.5 \text{ km}^3 \text{ s}^{-2}$  a polomerom  $R = 6371 \text{ km}$ . Presné riešenie na povrchu gule má v tomto prípade tvar

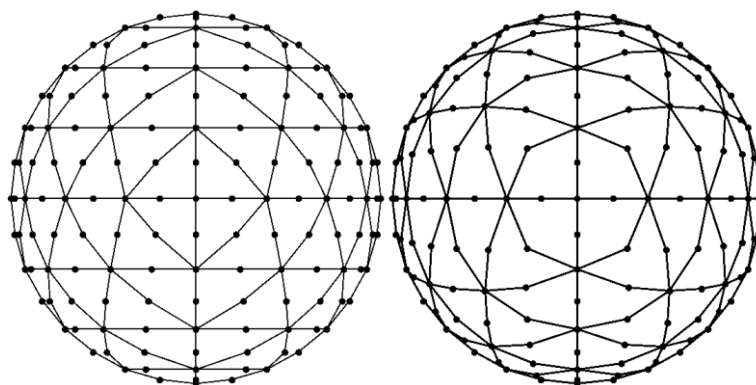
$$V = \frac{GM}{R} \quad (3.32)$$

a jeho derivácia predstavuje Neumannovu okrajovú podmienku v tvare

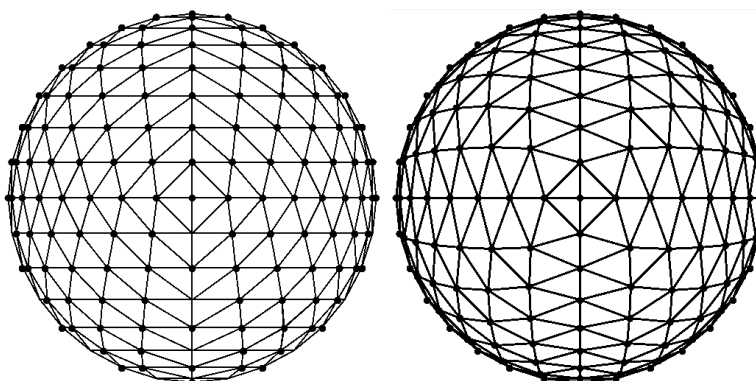
$$\frac{\partial V}{\partial n} = -\frac{GM}{R^2} \quad (3.33)$$

Na tejto úlohe bol výpočtový program postupne otestovaný s lineárnymi a kvadratickými aproximačnými funkciami na troch sieťach, vždy s postupným zdvojnásobením jemnosti výpočtovej siete. Porovnaním numericky vypočítaných hodnôt s presným riešením bola vypočítaná štatistika rezíduí odchýlok a následne zistený experimentálny rád konvergenencie (EOC).

Výpočtová sieť bola vytvorená diskretizáciou gule postupným delením 8-stena až na požadovanú jemnosť siete. Vstupné dáta sú uložené v dvoch súboroch, kde v jednom je zoznam elipsoidických (geodetických) súradníc zemepisnej dĺžky a šírky všetkých výpočtových bodov a v druhom je číselný zoznam z ktorých bodov sú tvorené jednotlivé elementy. Pre kvadratické aj lineárne elementy sú použité rovnaké vstupné údaje, pričom v prípade lineárnych elementov sú dané elementy vytvorené rozdelením každého kvadratického elementu na 4 lineárne. Na vizualizáciu tejto diskretizácie bol vytvorený jednoduchý program v jazyku C# a jeho výstupy sú zobrazené na obrázkoch 3.2 a 3.3.



Obr. 3.2: Vizualizácia diskretizácie gule na kvadratické elementy, pohľad zboku a zhora



Obr. 3.3: Vizualizácia diskretizácie gule na lineárne elementy, pohľad zboku a zhora

Program sme postupne testovali na 3 rôznych hrúbkach siete s delením  $n$ , vždy s postupným dvojnásobným zjemnením (vzhľadom na to, že hranica predstavuje 2D plochu tak počet uzlov bol po každom zjemnení štvornásobný), s počtami uzlov 6402, 25602 a 102402. Najprv sme otestovali výpočtový program s kvadratickými aproximačnými funkciami a štatistiky rezíduí odchýlky od presného riešenia sú uvedené v nasledujúcej tabuľke.

Tab. 6: Štatistika rezíduí pre model s kvadratickými aproximačnými funkciami

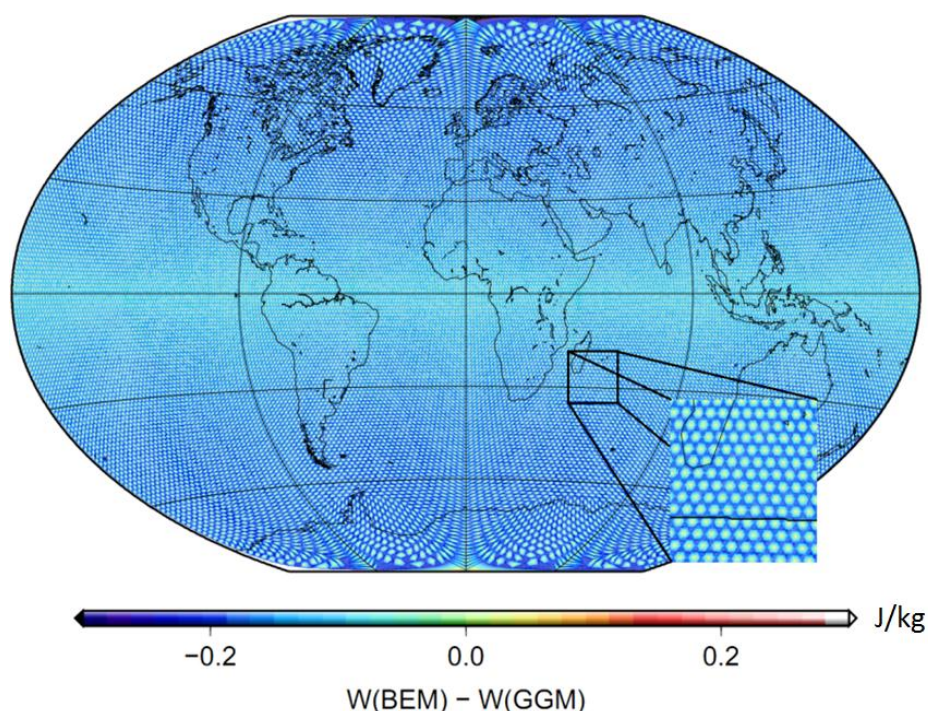
n	Počet uzlov	Minimálny rozdiel	Maximálny rozdiel	Priemerný rozdiel	Smerodajná odchýlka	$L^2$ norma	EOC
40	6402	-2.4922609	0.5769070	-0.4904529	0.4163144	0.6433208	-
80	25602	-1.2122681	0.2938462	-0.2391955	0.2057549	0.3155148	1.02783
160	102402	-0.6402610	0.1481841	-0.1183153	0.1025588	0.1565785	1.01082

EOC (experimental order of convergence) predstavuje experimentálny rád konvergenzie získaný na predpoklade, že norma odchýlky je proporčne závislá od mocniny počtu delení a vypočítame ho vzťahom

$$EOC_i = \frac{\ln(Err(n_{i-1})) - \ln(Err(n_i))}{\ln(n_{i-1}) - \ln(n_i)}, \quad (3.34)$$

kde sme ako funkciu  $Err(n_i)$  vzali  $L^2$ -normu odchýlky.

Z experimentu vyplynulo, že táto metóda je metódou prvého rádu, ale ako väčší problém sa ukázalo, že použitie kvadratických elementov pre takúto sieť a túto úlohu je nevhodné vzhľadom na to, že medzi výsledkami vo vrcholových uzloch elementov a v uzloch v stredoch hrán elementov vychádzajú relatívne veľké rozdiely, čo spôsobuje oscilácie vo výsledku (Obr. 3.4). Na vizualizáciu bol použitý softvér GMT – Generic Mapping Tools [15].



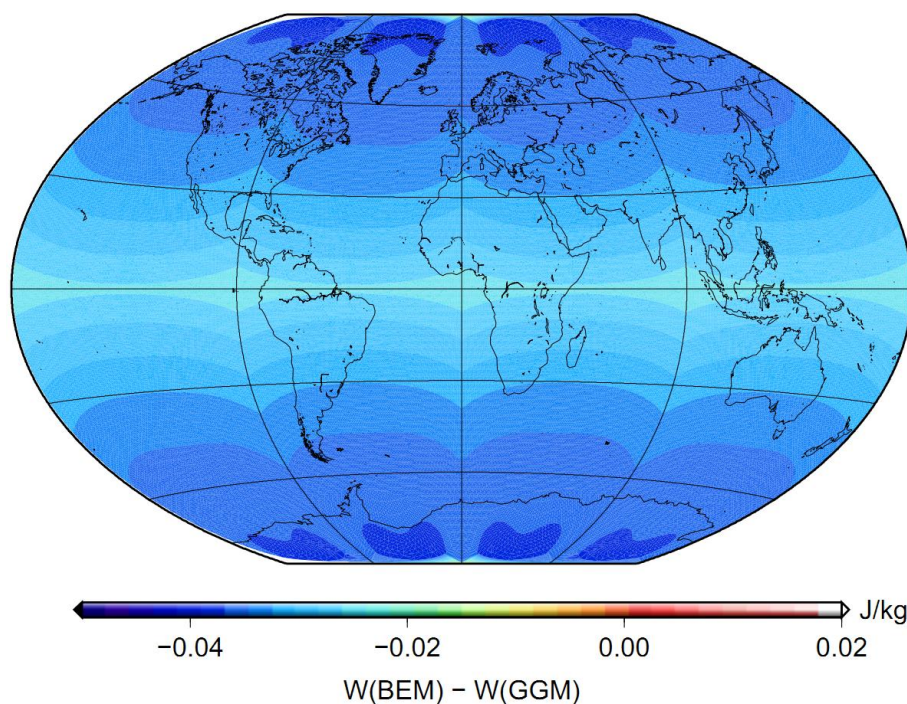
Obr. 3.4: oscilácie vo výsledku pri použití kvadratických elementov

Potom sme otestovali program s lineárnymi aproximačnými funkciami a štatistika odchýlok je uvedená v tabuľke 7.

Tab. 7: Štatistika rezíduí pre model s lineárnymi aproximačnými funkciami

n	Počet uzlov	Minimálny rozdiel	Maximálny rozdiel	Priemerný rozdiel	Smerodajná odchýlka	$L^2$ norma	EOC
40	6402	-0.1652797	-0.0659092	-0.1409954	0.0144853	0.1417375	-
80	25602	-0.0768625	-0.0264843	-0.0651084	0.0069492	0.0654782	1.11413
160	102402	-0.0370096	-0.0116128	-0.0312083	0.0034071	0.0313937	1.06054

Z tabuľky vyplýva, že použitie lineárnych elementov je vhodnejšie, pretože síce aj teraz je to metóda prvého rádu, ale riešenie vyšlo z pohľadu smerodajnej odchýlky rádovo lepšie ako s použitím kvadratických elementov a tiež sa tam nevyskytujú žiadne lokálne oscilácie. Pri vizualizácii rezíduí (Obr. 3.5) je vidieť istý vzor na póloch a v okolí rovníka, ktorý je spôsobený spôsobom diskretizácie delením 8-stena a majú na to vplyv body v ktorých sa spájajú štyri trojuholníky namiesto šiestich, čo je viditeľné na obrázku 3.3 v strede diskretizovanej gule.

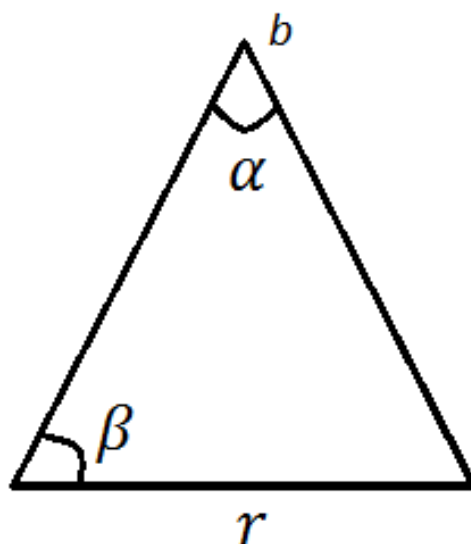


Obr. 3.5: Rezídua odchýlky od presného riešenia pri použití lineárnych elementov

Vzhľadom na to, že pri použití lineárnych aproximačných funkcií je možné pre výpočet integrálov na singulárnych elementoch získať analytické riešenie v tvare [6]

$$G_{ik}^{baq} = \frac{1}{2\pi} \frac{A_q}{r} \ln \frac{\text{tg}[(\beta + \alpha)/2]}{\text{tg}(\beta/2)}, \quad (3.35)$$

kde  $A_q$  predstavuje plochu trojuholníka a  $\alpha, \beta, r$  predstavujú uhly a dĺžku strany (Obr. 3.6), skúsili sme vykonať výpočet aj s využitím analytického riešenia.



Obr. 3.6: Schéma uhlov a strany trojuholníka pre analytické riešenie

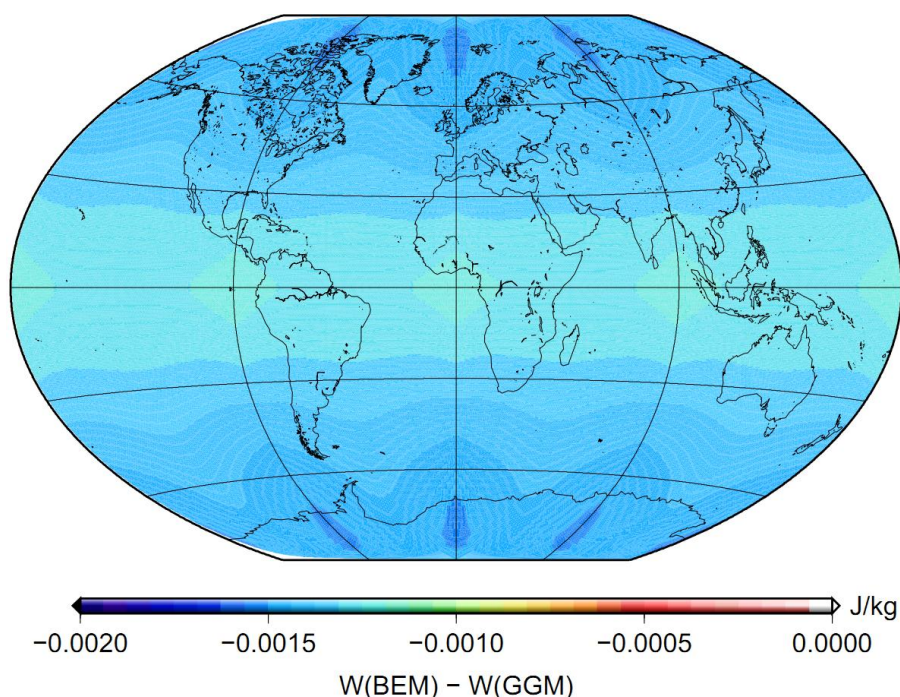
Štatistika pri použití analytického riešenia pre singulárne elementy namiesto transformácie súradníc na polárne a použitia regulárnej Gaussovej kvadratúry je uvedená v tabuľke 8.



Tab. 8: Štatistika rezíduí pre model s lineárnymi aproximačnými funkciami s využitím analytického riešenia

n	Počet uzlov	Minimálny rozdiel	Maximálny rozdiel	Priemerný rozdiel	Smerodajná odchýlka	$L^2$ norma	EOC
40	6402	-0.0238228	-0.0199806	-0.0215976	0.0010682	0.0216240	-
80	25602	-0.0059829	-0.0048962	-0.0053797	0.0002707	0.0053865	2.00521
160	102402	-0.0015160	-0.0011784	-0.0013402	0.0000712	0.0013421	2.00486

Z výsledkov sme zistili, že použitie analytického riešenia má nielen vplyv na výrazné zvýšenie presnosti výpočtu, ale aj na vylepšenie celej metódy na metódu druhého rádu. Z obrázka 3.7 ďalej vidno, že vzor spôsobený diskretizáciou sa prejaví výrazne slabšie, a aj to až pri o rád menšej mierke.



Obr. 3.7: Rezídua odchýlky od presného riešenia pri použití lineárnych elementov s analytickým riešením pri výpočte singulárnych elementov

Na základe výsledkov dosiahnutých pri tomto testovaní sme sa rozhodli ďalej používať výpočtový program s lineárnymi aproximačnými funkciami pri použití analytického riešenia pri integrácii cez singulárne elementy.

Zo zistení ďalej vyplýva aj to, že pokiaľ nie sú kladené vysoké požiadavky na presnosť výpočtu, prípadne nie je možné získať analytické riešenie, tak sa dá na jednoduché vysporiadanie sa s integráciou na singulárnych elementoch použiť transformácia lokálnych súradníc na polárne súradnice a použiť regulárnu Gaussovu kvadratúru.

#### 4 Riešenie geodetickej okrajovej úlohy so šikmou deriváciou

Program popísaný v predchádzajúcej časti sme aplikovali na numerické riešenie geodetickej okrajovej úlohy pre poruchový potenciál s okrajovou podmienkou v tvare derivácie v šikmom smere definovanej ako



$$\Delta T(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in R^3 - \Omega, \quad (4.1)$$

$$\langle \nabla T(\mathbf{x}), \vec{n}_e(\mathbf{x}) \rangle = -\delta g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad (4.2)$$

$$T = O(|\mathbf{x}|^{-1}) \text{ pre } \mathbf{x} \rightarrow \infty, \quad (4.3)$$

kde  $T$  je poruchový potenciál definovaný ako

$$T(\mathbf{x}) = W(\mathbf{x}) - U(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in R^3, \quad (4.4)$$

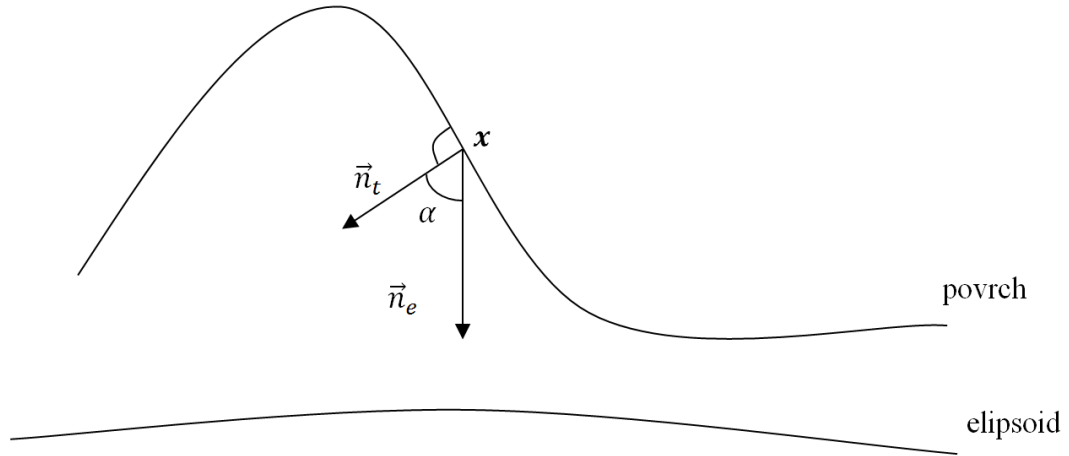
kde  $W$  je tiažový potenciál a  $U$  je normálny tiažový potenciál,  $\vec{n}_e$  je vektor vonkajšej normály k ekvipotenciálnemu elipsoidu,  $\langle, \rangle$  je skalárny súčin,  $\Omega$  predstavuje teleso Zeme a  $\partial\Omega$  je fyzický povrch Zeme ako hranica oblasti. Polohový vektor  $\mathbf{x}$  označuje polohu v pravouhlých karteziánskych súradniciach, čiže trojicu  $(x_1, x_2, x_3)$ . Člen  $\delta g$  predstavuje hodnoty povrchových tiažových porúch získané zo vzťahu

$$\delta g(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) - \gamma(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in R^3, \quad (4.5)$$

kde  $g = |\nabla W|$  je veľkosť gravitačného zrýchlenia a  $\gamma = |\nabla U|$  je veľkosť normálového gravitačného zrýchlenia.

#### 4.1 Problém šikmej derivácie

Problém šikmej derivácie spočíva v skutočnosti, že normála k zemskému povrchu  $\vec{n}_t$  nie je totožná s normálou k ekvipotenciálnemu elipsoidu  $\vec{n}_e$  (Obr. 4.1).



Obr. 4.1: Normála k zemskému povrchu a ekvipotenciálnemu elipsoidu

Problém šikmej derivácie sme riešili iteratívnym spôsobom, kde v 0-tej iterácii riešime klasickú Neumannovu vonkajšiu okrajovú úlohu, a teda vplyv šikmej derivácie kompletne zanedbáme, pričom z takto získaného riešenia v nasledujúcej iterácii vypočítame novú okrajovú podmienku pomocou vzťahu

$$\delta g^{nor} = \frac{\delta g^{šikm} - \langle \nabla T, \vec{q} \rangle \langle \vec{q}, \vec{v} \rangle - \langle \nabla T, \vec{\tau} \rangle \langle \vec{\tau}, \vec{v} \rangle}{\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle}, \quad (4.6)$$

kde  $\delta g^{šikm}$  predstavuje pôvodnú okrajovú podmienku v smere šikmej derivácie,  $\delta g^{nor}$  predstavuje novo-získanú okrajovú podmienku v smere normály k hranici, vektor  $\vec{v}$  predstavuje smer šikmej derivácie,  $\vec{n}$  jeho normálovú a  $\vec{q}$ ,  $\vec{\tau}$  tangenciálne zložky.

V numerickej implementácii sme túto modifikovanú okrajovú podmienku získali pomocou nasledujúcich vzťahov. Vzhľadom na to, že priebeh potenciálu na elemente je definovaný pomocou hodnôt vo vrchoch elementu a hodnotách aproximačných funkcií na elemente v tvare

$$T(\eta)|_{S_q} = \sum_{a=1}^n T(\eta^{aq}) N^a(\xi_1, \xi_2), \quad (4.7)$$

môžeme si jeho gradient vyjadriť pomocou gradientov aproximačných funkcií

$$\nabla T(\eta)|_{S_q} = \sum_{a=1}^n T(\eta^{aq}) \nabla N^a(\xi_1, \xi_2). \quad (4.8)$$

Keďže uvažujeme lineárne aproximačné funkcie, bude  $\nabla N^a$  na celom trojuholníku konštantný. Preto platí

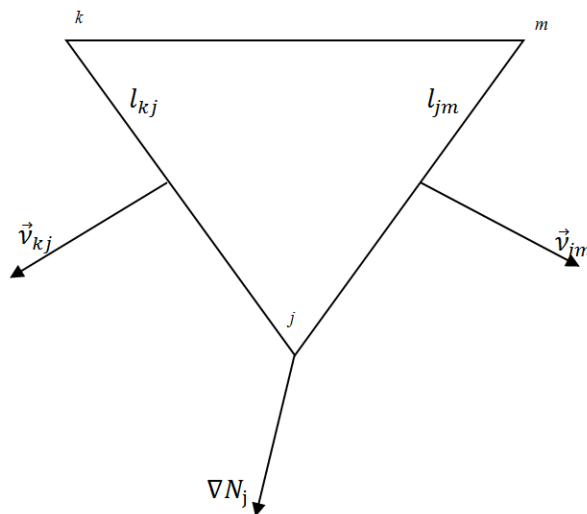
$$\nabla N^a = \frac{1}{A_q} \int_{\Delta_q} \nabla N d\Delta, \quad (4.9)$$

a aplikáciou Greenovej vety na (4.9) dostaneme

$$\frac{1}{A_q} \int_{\Delta_q} \nabla N d\Delta = \frac{1}{A_q} \int_{\partial\Delta_q} N \vec{v} d\partial\Delta, \quad (4.10)$$

kde  $\partial\Delta$  je hranica trojuholníka a  $\vec{v}$  je normála trojuholníka. Jednotlivé zložky gradientu pre  $q$ -ty trojuholník v bode  $j$  potom vypočítame

$$\nabla N^j = \frac{1}{A_q} \left[ \frac{N^j(j) + N^j(m)}{2} l_{jm} \vec{v}_{jm} + \frac{N^j(m) + N^j(k)}{2} l_{mk} \vec{v}_{mk} + \frac{N^j(k) + N^j(j)}{2} l_{kj} \vec{v}_{kj} \right]. \quad (4.11)$$



Obr. 4.2: Gradient aproximačnej funkcie na elemente pre  $j$ -ty vrchol

S uvažením priebehu lineárnej funkcie na elemente dostaneme

$$\nabla N^j = \frac{1}{A_q} \left[ \frac{l_{jm}}{2} \vec{v}_{jm} + \frac{l_{kj}}{2} \vec{v}_{kj} \right], \quad (4.12)$$

a teda výsledný vzťah pre získanie novej okrajovej podmienky má tvar

$$\delta g^{nor} = \frac{\delta g^{šikm} - \sum_{a=1}^n T_a \langle \nabla N^a, \vec{\varrho} \rangle \langle \vec{\varrho}, \vec{v} \rangle - \sum_{a=1}^n T_a \langle \nabla N^a, \vec{\tau} \rangle \langle \vec{\tau}, \vec{v} \rangle}{\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle}. \quad (4.13)$$

Tento postup bol následne otestovaný na dvoch príkladoch. V prvom prípade bol potenciál generovaný guľou s geocentrickou gravitačnou konštantou  $GM = 398600.5 \text{ km}^3 \text{ s}^{-2}$  a polomerom  $R = 6371 \text{ km}$ , pričom celá hmotnosť bola situovaná v ťažisku, ktoré bolo oproti stredu gule vychýlené na osi  $x$  o  $R/2$ , čo predstavuje extrémny prípad šikmej derivácie. Presné riešenie na povrchu gule má v tomto prípade tvar

$$V = \frac{GM}{l} \quad (4.15)$$

a okrajovú podmienku ako deriváciu v šikmom smere predstavuje

$$\frac{\partial V}{\partial n} = -\frac{GM}{l^2}, \quad (4.16)$$

kde  $l$  je vzdialenosť bodu na povrchu od ťažiska gule. Na tomto prípade bol program opäť otestovaný pre 3 rôzne hrúbky siete s postupným zjemňovaním. Štatistiky odchýlky rezíduí sú uvedené v nasledujúcich tabuľkách.

Tab. 9: Štatistika rezíduí pre delenie  $n=40$

n=40	Minimum	Maximum	Priemer	Smerodajná odchýlka	L <sup>2</sup> norma
iterácia 0:	2.8142452	9.5417709	6.1419336	2.2193161	6.5305981
iterácia 1:	-1.7046813	-0.4760447	-1.2488469	0.3580556	1.2991622
iterácia 2:	-0.3736978	0.1133727	-0.0474725	0.1727140	0.1791195
iterácia 3:	0.0463698	0.2005782	0.1120537	0.0520272	0.1235430
iterácia 4:	-0.0298556	0.0588858	-0.0010453	0.0276489	0.0276686
iterácia 5:	-0.0206276	0.0180688	-0.0048521	0.0082589	0.0095788
iterácia 6:	-0.0055936	0.0235531	0.0094415	0.0039881	0.0102492
iterácia 7:	-0.0028740	0.0272790	0.0086531	0.0070518	0.0111627
iterácia 8:	-0.0041560	0.0262660	0.0065369	0.0065644	0.0092640
iterácia 9:	-0.0045081	0.0257641	0.0068344	0.0059537	0.0090640
iterácia 10:	-0.0042664	0.0259655	0.0071796	0.0060564	0.0093929
iterácia 11:	-0.0042180	0.0260388	0.0071013	0.0061634	0.0094030
iterácia 12:	-0.0042661	0.0259970	0.0070412	0.0061357	0.0093395
iterácia 13:	-0.0042727	0.0259858	0.0070603	0.0061154	0.0093406
iterácia 14:	-0.0042628	0.0259947	0.0070712	0.0061222	0.0093533
iterácia 15:	-0.0042619	0.0259964	0.0070667	0.0061261	0.0093524

Tab. 10: Štatistika rezíduí pre delenie n=80

n=80	Minimum	Maximum	Priemer	Smerodajná odchýlka	L <sup>2</sup> norma
iterácia 0:	2.8199928	9.5816484	6.1609445	2.2328911	6.5530939
iterácia 1:	-1.7256524	-0.5076555	-1.2677152	0.3587681	1.3175038
iterácia 2:	-0.3846523	0.1146614	-0.0484670	0.1775061	0.1840040
iterácia 3:	0.0436173	0.1925982	0.1072389	0.0515037	0.1189656
iterácia 4:	-0.0317962	0.0426208	-0.0069853	0.0236724	0.0246815
iterácia 5:	-0.0263855	-0.0010745	-0.0101917	0.0082131	0.0130891
iterácia 6:	-0.0022392	0.0094881	0.0042820	0.0025306	0.0049739
iterácia 7:	0.0004785	0.0089868	0.0033667	0.0027783	0.0043650
iterácia 8:	-0.0012126	0.0071236	0.0012135	0.0020424	0.0023757
iterácia 9:	-0.0012020	0.0066546	0.0015419	0.0013879	0.0020746
iterácia 10:	-0.0009485	0.0068750	0.0018953	0.0014849	0.0024077
iterácia 11:	-0.0009008	0.0069407	0.0018089	0.0015937	0.0024108
iterácia 12:	-0.0009518	0.0068946	0.0017470	0.0015620	0.0023435
iterácia 13:	-0.0009582	0.0068848	0.0017683	0.0015405	0.0023452
iterácia 14:	-0.0009475	0.0068948	0.0017796	0.0015482	0.0023588
iterácia 15:	-0.0009468	0.0068962	0.0017745	0.0015524	0.0023577

Tab. 11: Štatistika rezíduí pre delenie n=160

n=160	Minimum	Maximum	Priemer	Smerodajná odchýlka	L <sup>2</sup> norma
iterácia 0:	2.8214123	9.5917033	6.1656791	2.2362765	6.5586990
iterácia 1:	-1.7309033	-0.5158963	-1.2724340	0.3589903	1.3221052
iterácia 2:	-0.3874821	0.1149025	-0.0487152	0.1787248	0.1852451
iterácia 3:	0.0429212	0.1905335	0.1060276	0.0514127	0.1178351
iterácia 4:	-0.0321788	0.0385064	-0.0084773	0.0226894	0.0242214
iterácia 5:	-0.0280884	-0.0030232	-0.0115312	0.0086316	0.0144039
iterácia 6:	-0.0039921	0.0077776	0.0029872	0.0032772	0.0044344
iterácia 7:	0.0002164	0.0059736	0.0020394	0.0018902	0.0027807
iterácia 8:	-0.0013928	0.0021234	-0.0001228	0.0009675	0.0009752
iterácia 9:	-0.0006303	0.0015917	0.0002135	0.0003400	0.0004015
iterácia 10:	-0.0001736	0.0018194	0.0005689	0.0003412	0.0006634
iterácia 11:	-0.0001260	0.0018822	0.0004804	0.0004377	0.0006499
iterácia 12:	-0.0001778	0.0018346	0.0004181	0.0004030	0.0005807
iterácia 13:	-0.0001841	0.0018253	0.0004399	0.0003806	0.0005817
iterácia 14:	-0.0001732	0.0018356	0.0004513	0.0003885	0.0005955
iterácia 15:	-0.0001725	0.0018369	0.0004460	0.0003927	0.0005943

Tab. 12: Súhrnná štatistika po 15. iterácii

n	Počet uzlov	Minimálny rozdiel	Maximálny rozdiel	Priemerný rozdiel	Smerodajná odchýlka	L <sup>2</sup> norma	EOC
40	6402	-0.0042619	0.0259964	0.0070667	0.0061261	0.0093524	-
80	25602	-0.0009468	0.0068962	0.0017745	0.0015524	0.0023577	1.98796
160	102402	-0.0001725	0.0018369	0.0004460	0.0003927	0.0005943	1.98812

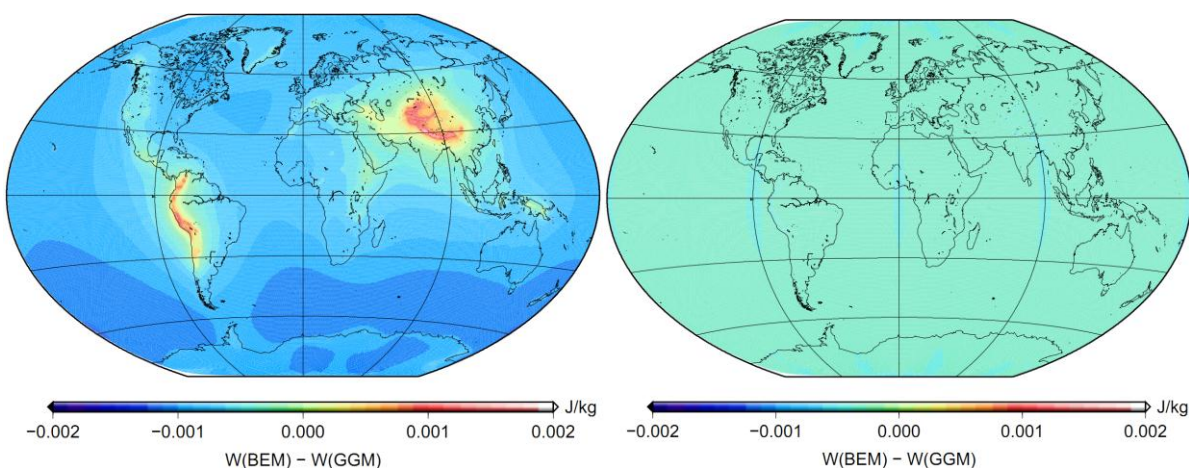
V tomto prípade sa jednalo o extrémny prípad šikmej derivácie, ktorá mala vplyv na celom povrchu gule a teda pre získanie uspokojivého výsledku bolo potrebných zhruba 9-10 iterácií. Pozitívne zistenie je, že experimentálny rád konvergenzie zostal rovný 2.

Druhý príklad bol založený na šikmej derivácii spôsobenej topografiou. Potenciál bol generovaný guľou s povrchom zhodným s topografiou na Zemi, pričom tentoraz bola hmotnosť sústredená v ťažisku, ktoré ostalo nezmenené. Presné riešenie, ako aj okrajová podmienka sú dané rovnakými vzťahmi ako v predošlom prípade (4.15-16). Tento príklad bol testovaný len na delení  $n=160$ , na 102402 uzloch.

Tab. 13: Štatistika rezíduí pre druhý príklad

n=160	Minimum	Maximum	Priemer	Smerodajná odchýlka	$L^2$ norma
iterácia 0:	-0.0011343	0.0017951	-0.0007621	0.0003040	0.0008205
iterácia 1:	0.0002792	0.0005837	0.0003398	0.0000260	0.0003408
iterácia 2:	0.0002703	0.0005817	0.0003371	0.0000259	0.0003381
iterácia 3:	0.0002702	0.0005817	0.0003371	0.0000259	0.0003381

V tomto prípade na dosiahnutie dostatočne presného výsledku stačila jediná iterácia, pričom zobrazenie rezíduí po nulej a prvej iterácii je na obrázku 4.2.



Obr. 4.2: Rezíduá po nulej a prvej iterácii

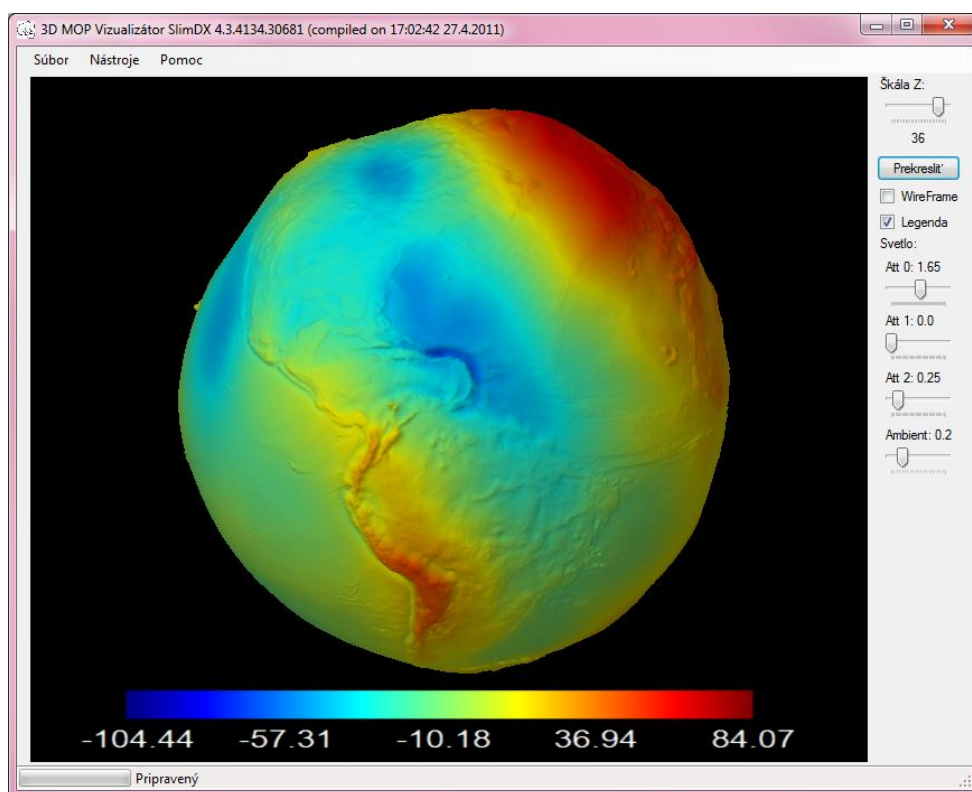
## 5 Numerický experiment pre reálne geodetické dáta

Pre potreby numerického experimentu na výpočet geodetickej okrajovej úlohy bola vytvorená diskretizácia zemského povrchu na 1440002 uzlov, čo predstavuje presnosť delenia  $0.15^\circ$ . Ako vstupné údaje boli vygenerované geodetické súradnice kolokačných bodov, výška zemského povrchu v týchto bodoch z digitálneho modelu terénu SRTM30\_PLUS V5.0 [4], ako okrajová podmienka boli použité hodnoty tiažových porúch z modelu DNSC08 [1] a pre elimináciu vplyvu vzdialených zón boli použité hodnoty poruchového potenciálu zo satelitného geopotenciálneho modelu ITG-GRACE03S [8]. Limita pre elimináciu vzdialených zón bola nastavená na 912 km.

Výpočty boli zrealizované na výpočtovom klastri na Katedre matematiky a deskriptívnej geometrie SvF STU v Bratislave, pričom počas výpočtu boli použité dva výpočtové uzly, každý s 16 procesormi a 128GB distribuovanej operačnej pamäte (Spolu 32 procesorov a 256GB pamäte).

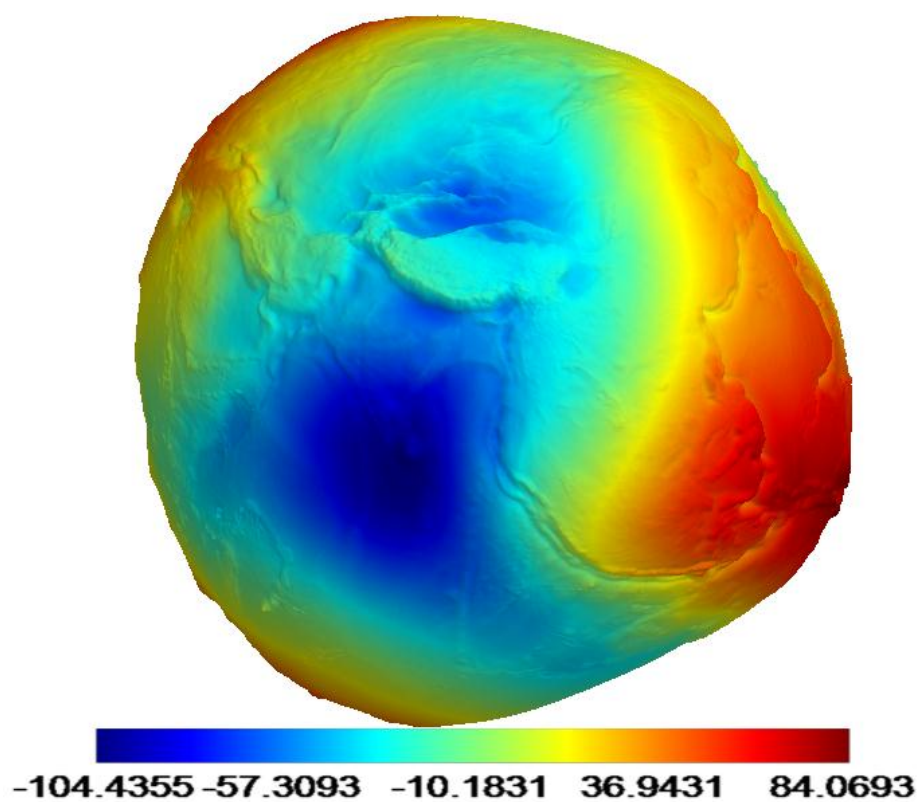
## 5.1 Výsledok a vizualizácia

Na trojrozmernú vizualizáciu výsledkov sme vytvorili vizualizačný softvér 3D MOP Vizualizátor v jazyku C#, pričom na urýchlenie zobrazovania pomocou grafickej karty bolo využité rozhranie Direct3D 9 knižnice Microsoft® DirectX® [16]. Ako vstupné dáta berie softvér priamo výsledky nášho výpočtového programu vo formáte zoznamu geodetických súradníc a hodnôt poruchového potenciálu v uzlových bodoch, na základe ktorých si následne vygeneruje trianguláciu a zostaví výsledný trojrozmerný model. Okrem samotného modelu softvér umožňuje zobrazovať aj trojuhlovú sieť. Zobrazený model je možné ľubovoľne otáčať, približovať pomocou myši a nastavovať rôzne parametre zobrazenia, napríklad polohu, intenzitu svetla a farebnú škálu. Softvér umožňuje aj ukladanie vizualizácie do obrázku vo formáte Portable Network Graphics (PNG) a zachytávanie videa. Rozhranie programu je zobrazené na obrázku 5.1 a vizualizácia globálneho priebehu riešenia zobrazená týmto programom je na obrázkoch 5.2, 5.3 a 5.4. Okrem tohto programu sme na vizualizáciu globálneho riešenia sme použili softvér GMT. Na obrázku 5.5 je zobrazený globálny priebeh riešenia, na obrázkoch 5.6 a 5.7 rezíduá v porovnaní s modelom EGM2008 po nulte a druhej iterácii a na obrázkoch 5.8 a 5.9 je príspevok šikmej derivácie medzi jednotlivými iteráciami. Hodnoty sú zobrazované v jednotkách GPU, pričom  $1 \text{ GPU} = 10 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$ .

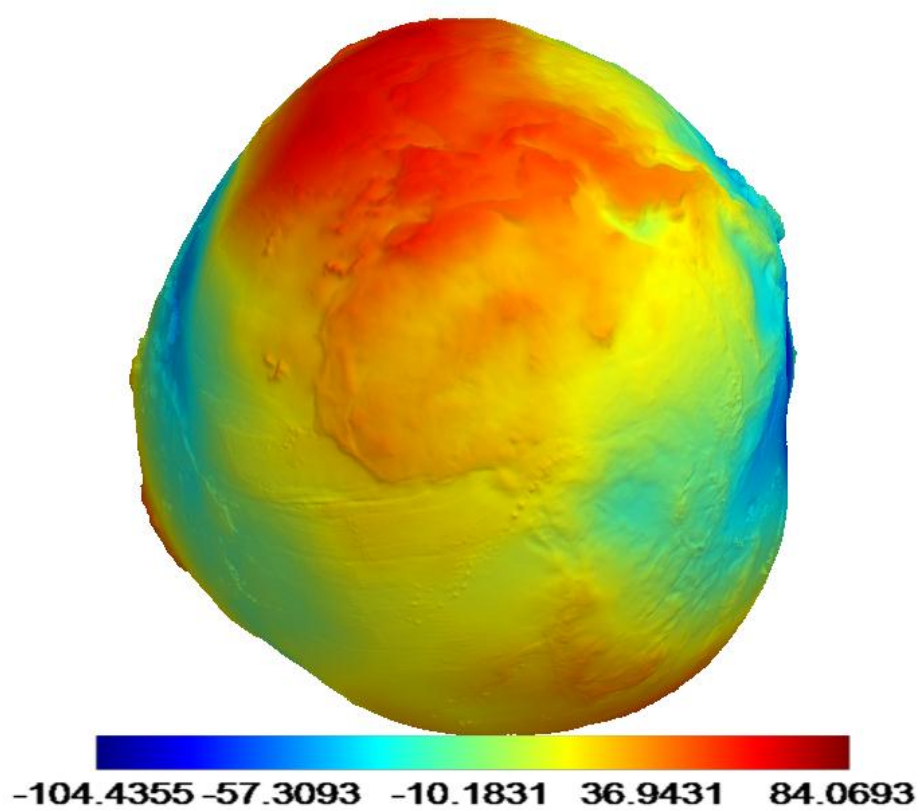


Obr. 5.1: Rozhranie vizualizačného programu

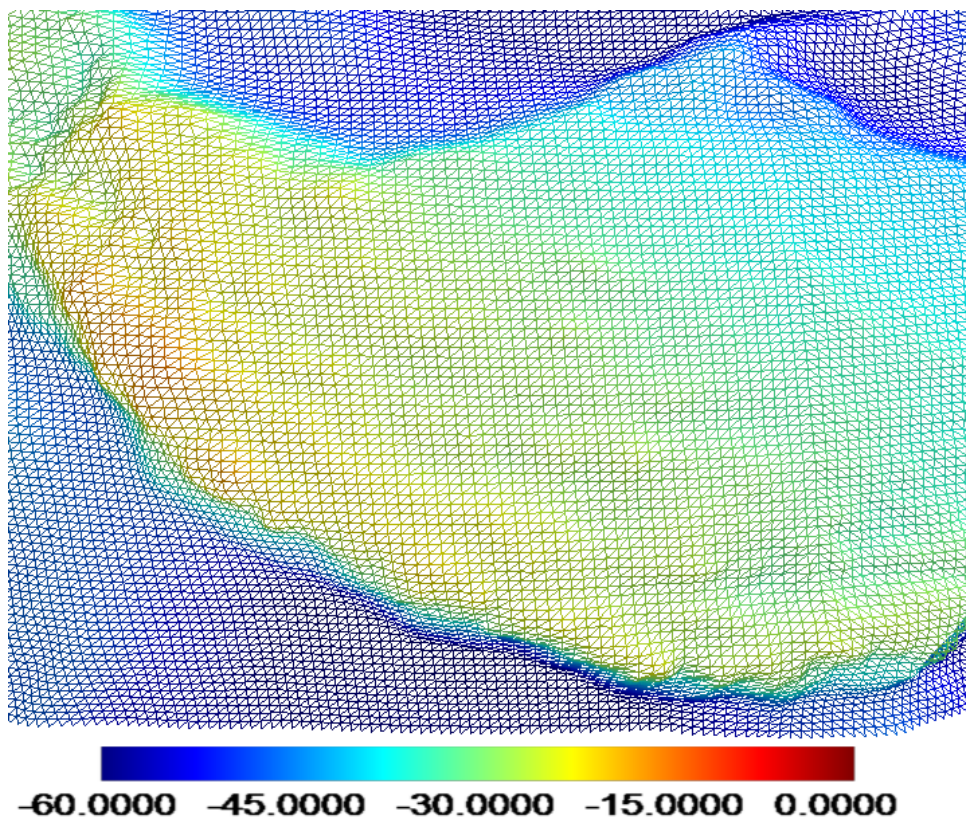




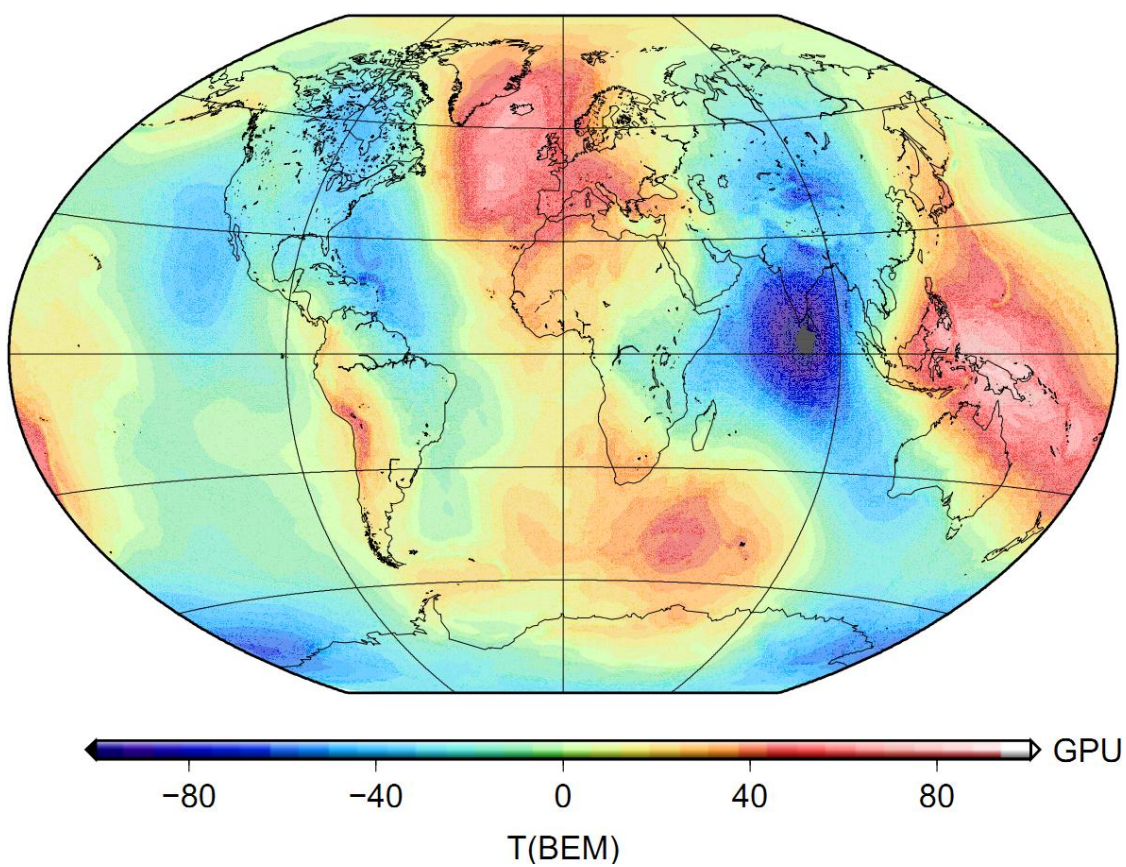
Obr. 5.2: Globálny priebeh riešenia v oblasti Ázie



Obr. 5.3: Globálny priebeh riešenia v oblasti Európy a Afriky

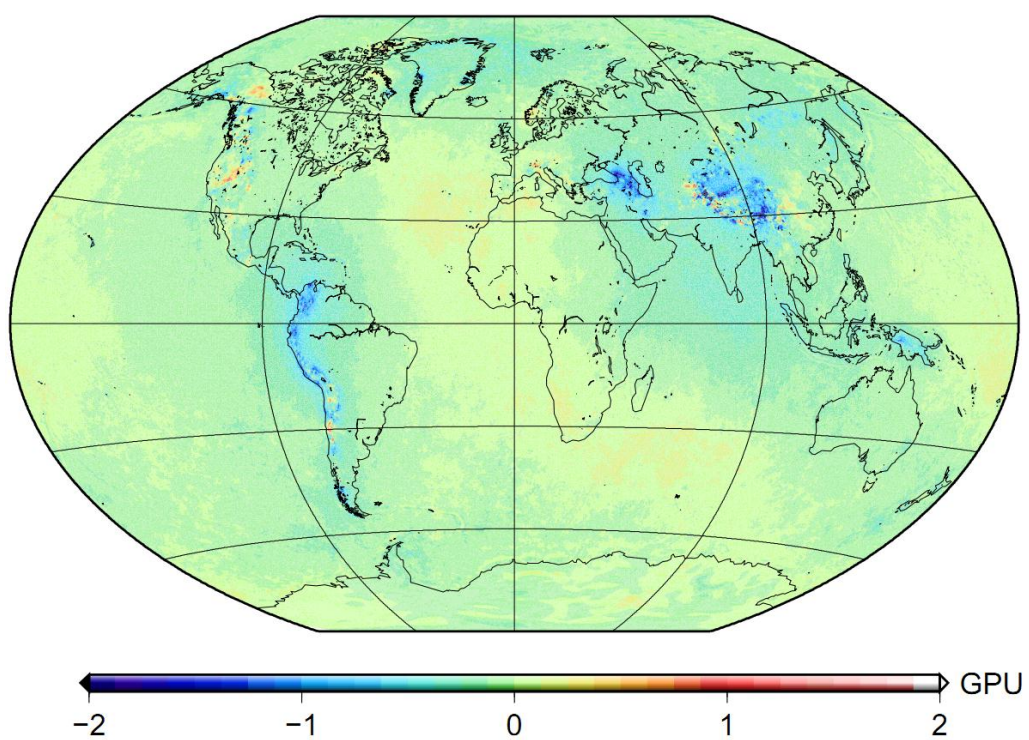
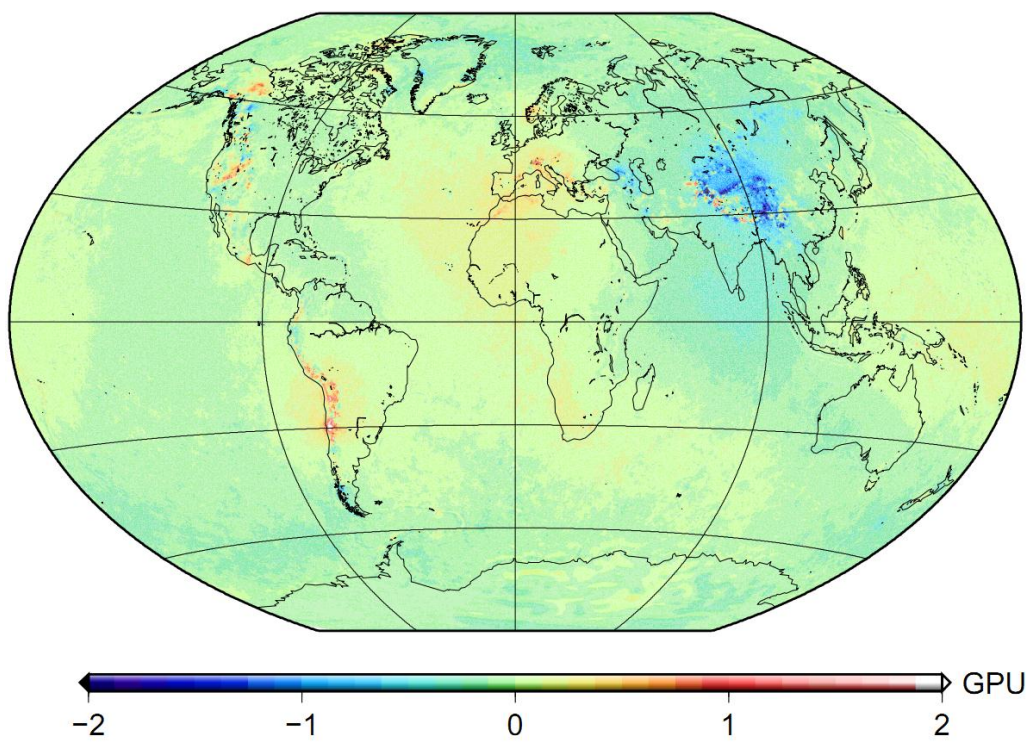


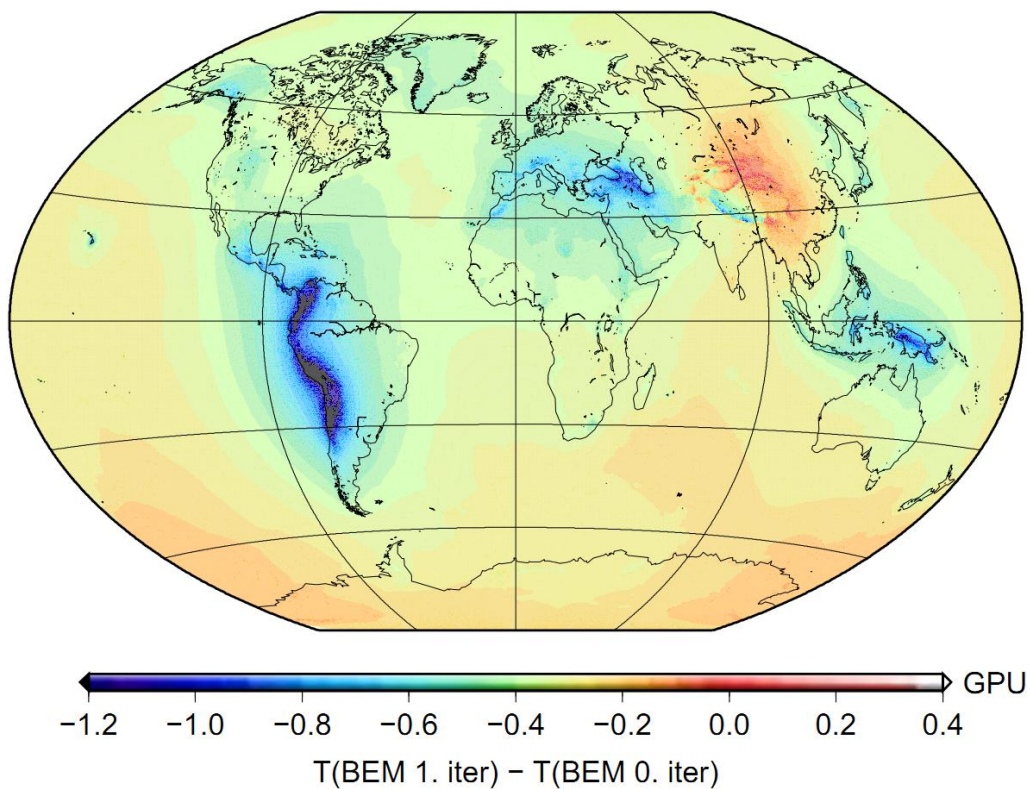
Obr. 5.4: Lokálny priebeh v Himalájach so zobrazením triangulácie



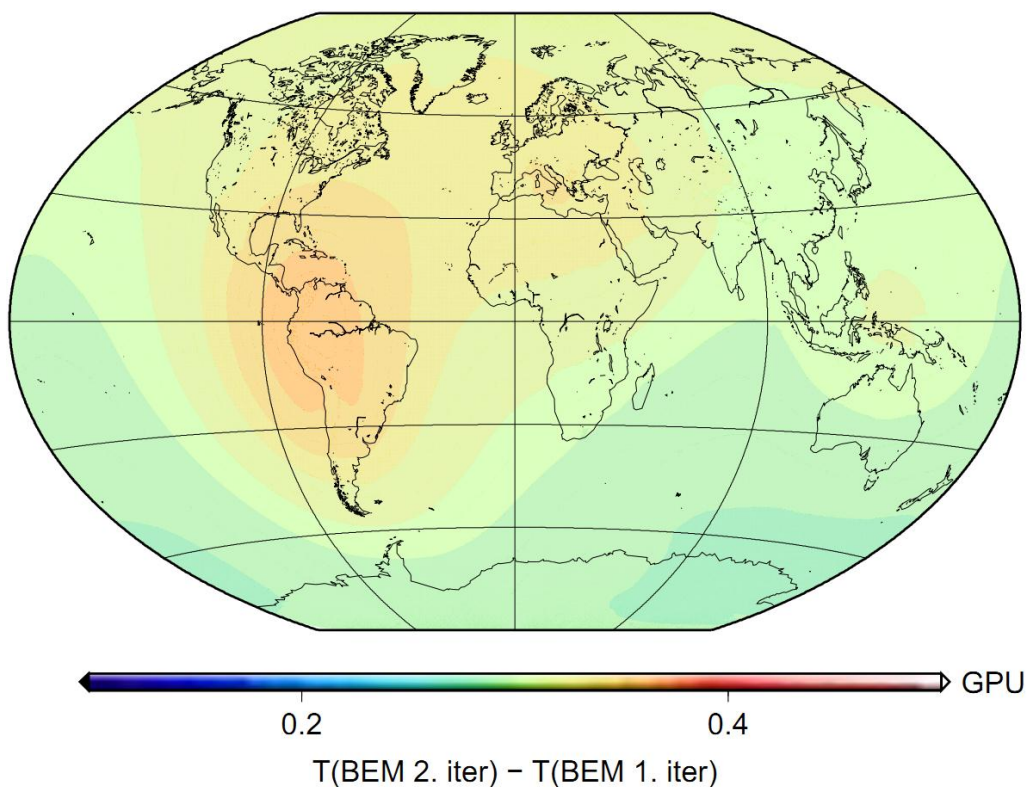
Obr. 5.5: Globálny priebeh riešenia







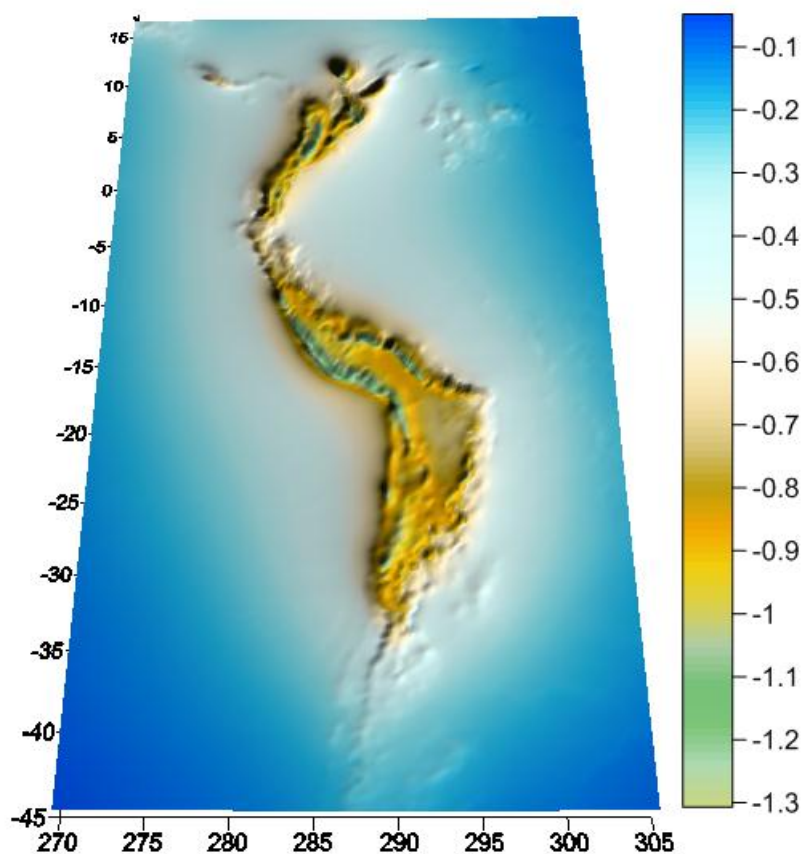
Obr. 5.8: Príspevok šikmej derivácie medzi nulťou a prvou iteráciou



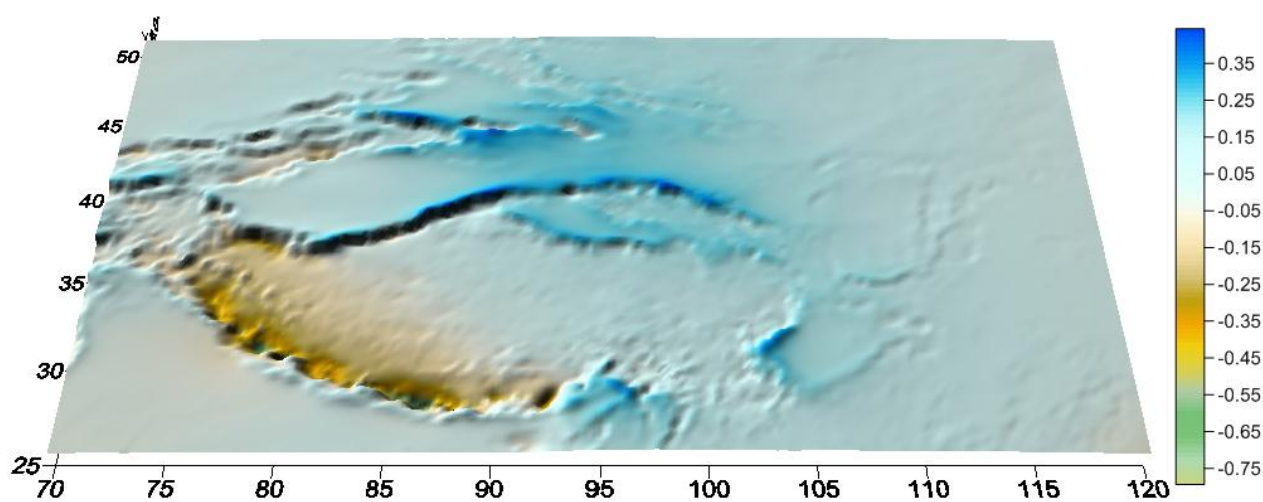
Obr. 5.9: Príspevok šikmej derivácie medzi druhou a prvou iteráciou

Na vizualizáciu lokálnych príspevkov šikmej derivácie sme použili softvér surfer [13]. Na obrázku 5.10 je príspevok šikmej derivácie v Andách a na obrázku 5.11 je príspevok v Himalájach.





Obr. 5.10: Lokálny príspevok šikmej derivácie v Andách



Obr. 5.11: Lokálny príspevok šikmej derivácie v Himalájach

## 6 Záver

V tejto práci sme použili alternatívny spôsob riešenia problému šikmej derivácie, a to iteratívnym riešením Neumannovej okrajovej úlohy metódou okrajových prvkov. Zároveň sme zistili, že pri tomto type úlohy sa ukazuje vhodnejšie použitie lineárnych aproximačných funkcií namiesto kvadratických, a že použitie analytického

riešenia pre singulárne elementy namiesto štandardnej Gaussovej kvadratúry môže priniesť výrazné zvýšenie presnosti.

Pri aplikácii výpočtov na reálnych geodetických dátach sme zistili, že šikmá derivácia má najvýraznejší vplyv práve v hornatých oblastiach, kde v Himalájach spôsobila zníženie priebehu potenciálu v oblasti hlavného hrebeňa a zvýšenie v okrajových oblastiach a na náhornej plošine a v Andách spôsobila zníženie, ktoré sa najviac prejavuje hlavne na hrebeňoch. Pri porovnaní s modelom EGM2008 sa zároveň ukázalo, že vplyvom príspevku šikmej derivácie sa nám tiež vyhladili rezíduá v oblasti Európy.

## Použitá literatúra

- [1] Andersen O.B., Knudsen P., Berry P.: The DNSC08 ocean wide altimetry derived gravity field. Prezentované na EGU-2008, Vienna, Austria, Apríl 2008
- [2] Aoyama Y., Nakano J.: RS/6000 SP: Practical MPI Programming. IBM, Poughkeepsie, New York, 1999
- [3] Barrett R., Berry M., Chan T.F., Demmel J., Donato J., Dongarra J., Eijkhout V., Pozo R., Romine C., Van der Vorst H.: Templates for the Solution of Linear Systems: Building Blocks for Iterative Methods, SIAM Philadelphia, 1994
- [4] Becker J.J., Sandwell D.T., Smith W.H.F., Braud J., Binder B., Depner J., Fabre D., Factor J., Ingalls S., Kim S.-H., Ladner R., Marks K., Nelson S., Pharaoh A., Sharman G., Trimmer R., vonRosenburg J., Wallace G., Weatherall P.: Global Bathymetry and Elevation Data at 30 Arc Seconds Resolution: SRTM30\_PLUS, revised for Marine Geodesy, 2009
- [5] Dongarra J.: Sparse matrix storage formats, Templates for the Solution of Algebraic Eigenvalue Problems: A Practical Guide, SIAM Philadelphia, 2000
- [6] Čunderlík R., Mikula K., Mojzeš M.: Numerical solution of the linearized fixed gravimetric boundary-value problem. J Geod 82: 15-29, Springer Berlin Heidelberg, 2008
- [7] Kutiš V.: Základy modelovania a simulácii, Katedra mechaniky, FEI STU Bratislava, 2006
- [8] Mayer-Gürr, T.: ITG-Grace03s: The latest GRACE gravity field solution computed in Bonn, prezentované na GSTM+SPP, Potsdam 15-17 Okt. 2007
- [9] MPICH2, high-performance and widely portable implementation of the Message Passing Interface, Argonne national laboratory, <http://www.mcs.anl.gov/research/projects/mpich2>
- [10] Pavlis N.K., Holmes S.A., Kenyon S.C., Factor J.K.: An Earth Gravitational Model to Degree 2160: EGM2008, prezentované na 2008 General Assembly of EGU, Vienna, Austria, 13-18 Apríl, 2008
- [11] Sládek V., Sládek J.: A new approach to transient dynamic analysis of thermoelasticity by the boundary element method. Engineering Analysis 2: 221-229, Elsevier Amsterdam, 1985
- [12] Sládek V., Sládek J.: Numerické riešenie hraničných integrálnych rovníc v elastostatike. Strojnícky časopis 39: 207-230, SAV Bratislava, 1988
- [13] Surfer, Surface Mapping System, Golden Software, [www.goldensoftware.com](http://www.goldensoftware.com)
- [14] Wandzura S., Xiao H.: Symmetric quadrature rules on a triangle, Computers and Mathematics with Applications, Volume 45, Number 12: 1829-1840, Elsevier Amsterdam, 2003
- [15] Wessel, P., Smith, W.H.F.: The Generic Mapping Tools, Version 4.5.6, 2011, <http://gmt.soest.hawaii.edu/>
- [16] <http://www.microsoft.com/directx>

## Prílohy

### I. Definícia polynómov pre kvadratické aproximačné funkcie

$$N^1 = \frac{1}{6}(\sqrt{3}\xi_1 + \xi_2)(\sqrt{3}\xi_1 + \xi_2 - \sqrt{3})$$

$$N^2 = \frac{1}{6}(\sqrt{3}\xi_1 - \xi_2)(\sqrt{3}\xi_1 - \xi_2 + \sqrt{3})$$

$$N^3 = \frac{2}{3}\xi_2(\xi_2 - \frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$K^1 = \frac{1}{6}(\sqrt{3}\cos(\varphi) + \sin(\varphi))[\varrho(\sqrt{3}\cos(\varphi) + \sin(\varphi)) - 3\sqrt{3}]$$

$$K^2 = \frac{1}{6}(\sqrt{3}\cos(\varphi) - \sin(\varphi))[\varrho(\sqrt{3}\cos(\varphi) - \sin(\varphi)) - \sqrt{3}]$$

$$K^3 = -\frac{1}{3}(\sqrt{3}\cos(\varphi) - \sin(\varphi))[\varrho(\sqrt{3}\cos(\varphi) + \sin(\varphi)) - 2\sqrt{3}]$$

$$M^1 = \frac{1}{6}(\sqrt{3}\cos(\varphi) + \sin(\varphi))[\varrho(\sqrt{3}\cos(\varphi) + \sin(\varphi)) - \sqrt{3}]$$

$$M^2 = \frac{1}{6}(\sqrt{3}\cos(\varphi) - \sin(\varphi))[\varrho(\sqrt{3}\cos(\varphi) - \sin(\varphi)) + \sqrt{3}]$$

$$M^3 = K^6$$

$$N_{,1}^1 = \xi_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\xi_2 - \frac{1}{2}$$

$$N_{,1}^2 = \xi_1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\xi_2 + \frac{1}{2}$$

$$N_{,1}^3 = 0$$

$$N_{,1}^4 = -2\xi_1$$

$$N_{,2}^2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}N_{,1}^2$$

$$N_{,2}^3 = \frac{1}{3}(4\xi_2 - \sqrt{3})$$

$$N_{,2}^4 = \frac{1}{3}(4\xi_2 - \sqrt{3})$$

$$M_1^1 = \varrho(\cos(\varphi) + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin(\varphi))$$

$$M_1^2 = \varrho(\cos(\varphi) - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin(\varphi))$$

$$M_1^3 = -2\varrho\cos(\varphi)$$

$$M_2^1 = \frac{\varrho}{3}\sin(\varphi)$$

$$M_2^2 = \frac{\varrho}{3}(5\sin(\varphi) - \sqrt{3}\cos(\varphi))$$

$$M_2^3 = \frac{2}{3}\varrho(\sqrt{3}\cos(\varphi) - 2\sin(\varphi))$$

$$K_2^1 = \frac{\varrho}{3}(\sqrt{3}\cos(\varphi) + \sin(\varphi))$$

$$K_2^2 = \frac{\varrho}{3}(\sqrt{3}\cos(\varphi) + 5\sin(\varphi))$$

$$N^4 = -\frac{1}{3}(\sqrt{3}\xi_1 - \xi_2 + \sqrt{3})(\sqrt{3}\xi_1 + \xi_2 - \sqrt{3})$$

$$N^5 = \frac{2}{3}\xi_2(\sqrt{3}\xi_1 - \xi_2 + \sqrt{3})$$

$$N^6 = \frac{2}{3}\xi_2(-\sqrt{3}\xi_1 - \xi_2 + \sqrt{3})$$

$$K^4 = \frac{2}{3}\varrho\sin(\varphi)(\sqrt{3}\cos(\varphi) - \sin(\varphi))$$

$$K^5 = \frac{2}{3}\sin(\varphi)[- \varrho(\sqrt{3}\cos(\varphi) + \sin(\varphi)) + 2\sqrt{3}]$$

$$K^6 = \frac{2}{3}\sin(\varphi)(\varrho\sin(\varphi) - \frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$M^4 = -\frac{2}{\sqrt{3}}\sin(\varphi) + \varrho(\frac{1}{3}\sin^2(\varphi) - \cos^2(\varrho))$$

$$M^5 = \frac{2}{3}\sin(\varphi)[\varrho(\sqrt{3}\cos(\varphi) - \sin(\varphi)) + \sqrt{3}]$$

$$M^6 = \frac{2}{3}\sin(\varphi)[- \varrho(\sqrt{3}\cos(\varphi) + \sin(\varphi)) + \sqrt{3}]$$

$$N_{,1}^5 = \frac{2}{\sqrt{3}}\xi_2$$

$$N_{,1}^6 = -N_{,1}^5$$

$$N_{,2}^1 = \frac{1}{\sqrt{3}}N_{,1}^1$$

$$N_{,2}^5 = \frac{2}{3}(\sqrt{3}\xi_1 - 2\xi_2 + \sqrt{3})$$

$$N_{,2}^6 = \frac{2}{3}(-\sqrt{3}\xi_1 - 2\xi_2 + \sqrt{3})$$

$$M_1^4 = \frac{2}{\sqrt{3}}\varrho\sin(\varphi)$$

$$M_1^5 = \varrho(\cos(\varphi) - \sqrt{3}\sin(\varphi))$$

$$M_1^6 = \varrho(\cos(\varphi) - \sqrt{3}\sin(\varphi))$$

$$M_2^4 = \frac{2}{3}\varrho(\sqrt{3}\cos(\varphi) + 2\sin(\varphi))$$

$$M_2^5 = \frac{\varrho}{3}(\sqrt{3}\cos(\varphi) - \sin(\varphi))$$

$$M_2^6 = \varrho(\sqrt{3}\cos(\varphi) + \frac{1}{3}\sin(\varphi))$$

$$K_2^3 = \varrho(\sqrt{3}\cos(\varphi) - \frac{1}{3}\sin(\varphi))$$

## II. Definícia polynómov pre lineárne aproximačné funkcie

$$N^1 = \frac{1}{2\sqrt{3}}(\sqrt{3} - \sqrt{3}\xi_1 - \xi_2)$$

$$N^2 = \frac{1}{2\sqrt{3}}(\sqrt{3} + \sqrt{3}\xi_1 - \xi_2)$$

$$N^3 = \frac{\xi_2}{\sqrt{3}}$$

$$N_{,1}^1 = -\frac{1}{2}$$

$$N_{,1}^2 = \frac{1}{2}$$

$$N_{,1}^3 = 0$$

$$N_{,2}^1 = -\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$N_{,2}^2 = -\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$N_{,2}^3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$M^1 = -\frac{\cos(\varphi) + \frac{\sin(\varphi)}{\sqrt{3}}}{2}$$

$$M^2 = \frac{\cos(\varphi) - \frac{\sin(\varphi)}{\sqrt{3}}}{2}$$

$$M^3 = \frac{\sin(\varphi)}{\sqrt{3}}$$