SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE
Stavebná fakulta

Evidenčné číslo: SvF-5343-56656

Numerické metódy na segmentáciu 4D obrazu

Diplomová práca

Študijný program:	matematicko–počítačové modelovanie
Číslo študijného odboru:	1114
Študijný odbor:	9.1.9 Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko:	Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie
Vedúci bakalárskej práce:	prof. RNDr. Karol Mikula, DrSc.

Bratislava 2017 **Bc. Timotej Hornáček**

Slovenská technická univerzita v Bratislave **Stavebná fakulta**
Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie

ZADANIE DIPLOMOVEJ PRÁCE

Autor práce:	Bc. Timotej Hornáček
Študijný program:	matematicko–počítačové modelovanie
Študijný odbor:	9.1.9 Aplikovaná matematika
Evidenčné číslo:	SvF-5343-56656
ID študenta:	56656
Vedúci práce:	prof. RNDr. Karol Mikula, DrSc.
Názov práce:	**Numerické metódy na segmentáciu 4D obrazu**
Jazyk, v ktorom sa práca vypracuje:	slovenský jazyk
Špecifikácia zadania:	V rámci diplomovej práce sa študent oboznámi s najnovšími matematickými modelmi a numerickými metódami na segmentáciu 4D obrazu a využije ich pri spracovaní 3D videí. Metódy implementuje v jazyku C a otestuje ich na umelých a reálnych dátach z hľadiska efektívnosti výpočtu a presnosti segmentácie a trekingu buniek v biologických dátach.
Dátum zadania:	01.10.2016
Dátum odovzdania:	18.05.2017

Bc. Timotej Hornáček
študent

prof. RNDr. Radko Mesiar, DrSc.
vedúci pracoviska

prof. RNDr. Karol Mikula, DrSc.
garant študijného programu

Čestné prehlásenie

Vyhlasujem, že som diplomovú prácu vypracoval samostatne s použitím uvedenej odbornej literatúry a s odbornou pomocou vedúceho práce.

Bratislava, 18.05.2017 ....

Vlastnoručný podpis

Poďakovanie

Týmto by som chcel poďakovať prof. RNDr. Karolovi Mikulovi, DrSc., za odborné vedenie práce, konzultáciu a cenné rady, poskytnuté pri vypracovaní diplomovej práce.

Numerické metódy na segmentáciu 4D obrazu

Abstrakt:
V tejto práci predstavujeme dve semi-implicitné numerické schémy, ktoré riešia level-set rovnicu segmentácie štvordimenzionálneho (4D) obrazu. Pod pojmom 4D obraz rozumieme trojdimenzionálne video. Numerické schémy sú založené na semi-implicitnej časovej diskretizácií a metóde konečných objemov v priestorovej diskretizácii. Obidve schémy testujeme na 3D a 4D príkladoch, v ktorých segmentujeme pohybujúce sa objekty. Pri testovaní na reálnych príkladoch sú týmito objektami bunky. Následne výsledné segmentácie používame v hľadaní trajektórií týchto objektov.

Kľúčové slová: segmentácia obrazu, numerická metóda, metóda konečných objemov

Numerical methods for 4D image segmentation

Abstract:
In this thesis we introduce two semi-implicit numerical methods for solving level-set segmentation equation of four-dimensional (4D) image. As 4D image we understand three-dimensional video. Numerical methods are based on semi-implicit time discretization and finite volume space discretization. We test both methods for solving 3D and 4D examples, in which we are segmenting moving objects. In real examples these objects are cells. Then we use segmentation in application of finding trajectories of these objects.

Key words: image segmentation, numerical method, finite volume method

Obsah

Abstrakt 1

Abstract 1

1 Úvod 1

2 Matematický model 2

2.1 Matematický model segmentácie 4D obrazu . . . 2

2.2 Matematický model trekingu . . . 5

3 Numerické schémy pre segmentáciu 6

3.1 Časová diskretizácia . . . 7

3.2 EHM schéma . . . 7

3.2.1 Diskretizácia . . . 7

3.2.2 Odvodenie schémy . . . 8

3.2.3 Algoritmus . . . 11

3.3 Reduced diamond cell schéma . . . 14

3.3.1 Diskretizácia . . . 15

3.3.2 Odvodenie schémy . . . 15

3.3.3 Algoritmus . . . 17

4 Numerická schéma pre treking 19

4.1 Vytvorenie potenciálového poľa . . . 19

4.2 Extrakcia trajektórií . . . 21

5 Numerické výsledky 22

5.1 3D príklady . . . 22

5.2 4D príklady . . . 23

6 Záver 28

Literatúra 29

Zoznam obrázkov

2.1 Vývin segmentačnej funkciu u v čase. Objemová reprezentácia počiatočnej podmienky (vľavo) a výsledné riešenie v čase $t = 433$ (vpravo) pre 3D príklad. 4

2.2 Vektorové pole rýchlostí. 4

2.3 Ilustračný graf ľubovoľnej spojitej funkcie u pred začiatkom segmentácie (čierna), ilustračný graf ľubovoľnej spojitej funkcie u, po výslednej segmentácií (modrá) a pôsobenie vektorového poľa (červená). 5

2.4 Štvorec s porušenou hranicou (vľavo), izočiary segmentačnej funkcie v segmentačnom čase $t = 7$ (vpravo, červená), červené šípky znázorňujú pôsobenie člena toku podľa strednej krivosti a výsledná izočiara segmentačnej funkcie v segmentačnom čase $t = 119$ (vpravo, modrá). 5

3.1 Diskretizácia 2D priestoru, konečný objem p, hranice σ a susedia q 11

4.1 Rez grafu funkcie d (vľavo hore), grafu funkcie d_B (vpravo hore), rez grafu funkcie v (vľavo dole) a spolu s trajektóriami (vpravo dole). Rozmer θ je orientovaný vo vertikálnom smere. 21

5.1 Kruh náhodne pohybujúci sa v rovine (hore vľavo) a počiatočná podmienka (hore vpravo). Segmentačná funkcia EHM schéma (vľavo v strede) a RDC schéma (vpravo v strede) a vybraná izoplocha numerického riešenia 3D príkladu EHM schéma (vľavo dole) a RDC schéma (vpravo dole). Žltou farbou je zobrazená nájdená trajektória pred vycentrovaním a čiernou farbou po vycentrovaní. 24

5.2 2D rezy 3D príkladov. Segmentácia príkladu náhodne pohybujúceho sa kruhu v rovine pomocou RDC schémy (hore) $\theta = 4$ (vľavo), $\theta = 25$ (vpravo). Segmentácia príkladu viacerých kruhov v rovine pomocou EHM schémy (dole) $\theta = 12$ (vľavo), $\theta = 36$ (vpravo). 24

5.3 Kruhy pohybujúce sa v sme osi x (hore vľavo) a počiatočná podmienka (hore vpravo). Segmentačná funkcia EHM schéma (vľavo v strede) a RDC schéma (vpravo v strede) a vybraná izoplocha numerického riešenia 3D príkladu EHM schéma (vľavo dole) a RDC schéma (vpravo dole). Žltou farbou je zobrazená nájdená trajektória pred centrovaním a čiernou farbou po centrovaní. 25

5.4 4D príklad - gule v priestore. Časové rezy $\theta = 0$ (vľavo hore), $\theta = 8$ (vpravo hore), $\theta = 11$ (vľavo dole) a $\theta = 14$ (vpravo dole). Modrou farbou sú zobrazené originálne dáta, červenou farbou segmentácia a čiernou centrovaná trajektória. 26

5.5 4D príklad - gule s chýbajúcimi identifikátormi v priestore. Časový rez $\theta = 11$ (vľavo) a nájdené trajektórie (vpravo). 26

5.6 4D príklad - bunka v priestore. Časové rezy: $\theta = 1$ (vľavo hore), $\theta = 8$ (vpravo hore), $\theta = 22$ (vľavo dole) a $\theta = 39$ (vpravo dole). Objemová reprezentácia originálnych dát a segmentácia (zelená). 27

5.7 Výsledná trajektória (čierna) spolu s pôvodnými dátami pre 4D príklad - bunka v priestore. Rôzne pohľady pre rez $\theta = 0$. 27

Zoznam tabuliek

5.1 3D príklad - náhodný pohyb kruhu EHM schéma 23
5.2 3D príklad - náhodný pohyb kruhu RDC schéma 23
5.3 3D príklad - pohyb kruhov EHM schéma 25
5.4 3D príklad - pohyb kruhov RDC schéma 25

1 Úvod

Segmentácia obrazu je neoddeliteľnou súčasťou spracovania obrazu a počítačového videnia. Jej hlavným cieľom je rozdeliť obraz do logických celkov na základe informácie o intenzite farby. Ľudia pracujúci s vizuálnymi dátami si často potrebujú týmto spôsobom rozdeliť obraz, aby ho vedeli lepšie analyzovať. Najčastejšie je segmentácia využívaná v oboroch ako je biológia, medicína, či práca so satelitnými snímkami. Segmentácia obrazu je v biológií rozsiahle používaná na segmentovanie buniek, ktoré môžu byť reprezentované buď bunkovým jadrom alebo bunkovým obalom. V medicíne sa často segmentujú orgány, tumory alebo materské znamienka. Následne môžeme pozorovať zmenu tvaru alebo veľkosti a presnejšie určiť ďalší postup pri liečbe. Pri satelitných snímkach sa vďaka segmentácií dá určiť rozsah plochy, na ktorej sa nachádza nerastné bohatstvo.

V tejto práci nadväzujeme na bakalársku prácu [16], v ktorej sme odvodili numerickú schému pre segmentáciu štvorrozmerného (4D) obrazu a testovali ju na umelých príkladoch. Pod pojmom 4D obraz rozumieme trojrozmerné (3D) video. To je svojím spôsobom analogické ku klasickému videu. Avšak rozdiel je v tom, že pri 3D videu sú jednotlivé snímky trojrozmerné. Takáto 3D snímka je reprezentovaná objemom v tvare kvádra. Čiže 4D obraz je video, v ktorom sa v každom čase pozeráme na objem, pričom si tento objem vieme natáčať a pozerať do vnútra. Teraz je našim cieľom otestovať túto numerickú metódu na zložitejších príkladoch, porovnať ju s inou numerickou schémou a aplikovať ju v trekingu buniek. Práve treking buniek je aplikácia segmentácie obrazu v obore biológie. Cieľom trekingu je nájsť trajektóriu, po ktorej sa bunka pohybovala počas svojho života. Na to aby sme mohli použiť algoritmy, ktoré tieto trajektórie hľadajú, potrebujeme mať spoľahlivú segmentáciu danej bunky, lebo je to práve kvalitná segmentácia, ktorá nám zaručí spoľahlivé nájdenie požadovanej trajektórie. Keďže sa bunka pohybuje v časopriestore, tak sa na daný problém treba pozerať ako na štvorrozmernú (4D) úlohu. Výsledné trajektórie sú následne premietnuté do trojrozmerného priestoru. Kvôli deleniu buniek, ktoré nastáva počas životného cyklu buniek, majú tieto trajektórie charakter stromu.

V reálnych biologických dátach sa môžu vyskytovať rôzne nežiaduce komplikácie. Častou komplikáciou býva šum zapríčinený snímacím prístrojom. Taktiež sa u nich môže objaviť aj nedokonalosť v podobe porušenej hranice. Jednoduchšie metódy na segmentáciu, v ktorých sa pozeráme iba na hodnoty intenzity farby v jednotlivých pixeloch tu zlyhávajú. Preto je nutné použiť sofistikovanejšie metódy. Medzi takéto metódy patria metódy založené na parciálnych diferenciálnych rovniciach. V týchto metódach sa na daný obraz pozeráme ako na funkciu, pričom funkčné hodnoty sú dané intenzitou farby v jednotlivých pixeloch. Gradient tejto funkcie je súčasťou parciálnej diferenciálnej rovnice, ktorej riešením je segmentačná funkcia. Matematický model, ktorý používame sa nazýva metóda subjektívnych plôch a bol prezentovaný v [15]. Model je reprezentovaný rovnicou, ktorá je časovo závislá a môžeme ju chápať ako vývin plochy v čase. Táto plocha je reprezentovaná izoplochami segmentačnej funkcie, ktoré určujú výsledný tvar segmentácie. Rovnica má difúzny charakter, vďaka ktorému dokáže segmentovať aj zašumené dáta. Taktiež sa v rovnici vyskytuje aj člen toku podľa strednej krivosti, ktorý zabezpečuje segmentáciu objektov s porušenou hranicou. Obidve prezentované numerické schémy, EHM schéma [1, 4] a Reduced diamond cell schéma [5] sú semi-impicitné v čase a na diskretizáciu v priestore používajú metódu konečných objemov. Tu je dôležité spomenúť, že v našom prípade berieme čas videa ako priestorovú premennú, ktorá je úplne rovnocenná so zvyšnými tromi priestorovými premennými. Tento postup bol pre 3D úlohy (2D + čas) prezentovaný v [9, 10] a pre 4D úlohu (3D + čas) v [11], avšak na segmentáciu bola použitá iná numerická metóda (tzv. diamond cell method). V bakalárskej práci [16] sme používali EHM schému na umelých 2D, 3D a 4D príkladoch. Algoritmus trekingu buniek, tak ako ho používame, bol prezentovaný v prácach [7, 8], v ktorých však nebola použitá 4D segmentácia reálnych dát, ale prepojenie 3D segmentácií pomocou 4D elipsoidov.

2 Matematický model

Aplikácia hľadania trajektórií buniek sa skladá z dvoch samostatných krokov, ktoré však spolu súvisia:

1. Segmentácia buniek
2. Hľadanie trajektórií

V tejto kapitole najskôr predstavíme matematický model na segmentáciu 4D obrazu, popíšeme jeho základné princípy a vlastnosti. Následne popíšeme ako výsledky zo segmentácie aplikujeme na nájdenie trajektórií a popíšeme matematický model hľadania týchto trajektórií.

2.1 Matematický model segmentácie 4D obrazu

Matematický model je daný level set formuláciou toku podľa strednej krivosti. Táto formulácia je založená na vývoji level set funkcie v čase, pričom izoplochy tejto funkcie nám určujú výsledný tvar segmentácie. Odpovedajúca nelineárna parciálna diferenciálna rovnica [15] má nasledovný tvar

$$u_t - \sqrt{\varepsilon^2 + |\nabla u|^2}\nabla . \left(g\left(\sqrt{\varepsilon^2 + |\nabla I^0|^2}\right) \frac{\nabla u}{\sqrt{\varepsilon^2 + |\nabla u|^2}} \right) = 0 \ , \tag{2.1}$$

kde $u\,(t, x)$ je nami hľadaná neznáma level set funkcia, ktorá určuje tvar segmentácie. Preto ju zvykneme nazývať aj *segmentačná funkcia*. Je definovaná na oblasti $Q_T = [0, T] \times \Omega$. Pričom uvažujeme $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 4$, kde $x \in \Omega$ ako súvislú výpočtovú oblasť s Lipschitzovskou hranicou $\partial\Omega$ a $t \in [0, T]$ určuje čas segmentácie, pričom T predstavuje čas, kedy je dosiahnutá finálna segmentácia. V praxi sa väčšinou T neurčuje vopred, ale výpočet sa zastaví po dosiahnutí ustáleného stavu. Ten nastáva, ak sa hodnoty segmentačnej funkcie v dvoch po sebe nasledujúcich časoch nemenia alebo menia už dostatočne málo. V rovnici (2.1) vystupuje váhová funkcia g, dávajúca informáciu o detekcií hrán v segmentovanom obraze I^0. Funkcia $g : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ je nerastúca, $g\,(s) \longrightarrow 0$ pre $s \longrightarrow \infty$. Funkciu g uvažujeme v ε-regularizovanom tvare $g\left(\sqrt{\varepsilon^2 + |\nabla I^0|^2}\right)$. Budeme používať označenie $g^0 = g\left(\sqrt{\varepsilon^2 + |\nabla I^0|^2}\right)$. Hodnoty tejto funkcie sa s časom nemenia, to znamená, že hodnota je pre daný bod konštantná v čase. ε je regularizačný parameter modelu, pre ktorý platí: $1 \geq \varepsilon > 0$. Tento parameter má vplyv na správanie sa rovnice, keďže ovplyvňuje aj hodnotu váhovej funkcie. Pre segmentáciu objektov s jednoznačne určenou hranicou bez porušenia je optimálna voľba $\varepsilon = 1$. Pre segmentáciu objektu s porušenou hranicou potrebujeme zvoliť ε bližšie k nule [2]. Rovnica (2.1) môže byť formálne chápaná ako Evans-Spruckova ε-regularizácia

$$|\nabla u| \approx |\nabla u|_\varepsilon = \sqrt{\varepsilon^2 + |\nabla u|^2} \tag{2.2}$$

rovnice segmentácie

$$u_t - |\nabla u| \nabla . \left(g^0 \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) = 0 \tag{2.3}$$

Na to aby sme mohli rovnicu (2.1) jednoznačne riešiť, je k nej potrebné pridať počiatočnú podmienku a takisto okrajové podmienky. Okrajové podmienky môžu byť Dirichletove

$$u(t,x) = u^D(x), \text{ pre } t \in \,]0,T] \text{ a } x \in \partial\Omega \tag{2.4}$$

alebo nulové Neumannove

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(t,x) = 0, \text{ pre } t \in \,]0,T] \text{ a } x \in \partial\Omega, \tag{2.5}$$

kde $\mathbf{n}$ je vonkajšia jednotková normála. V našich príkladoch uvažujeme nulové Neumannove podmienky. Počiatočnú podmienku uvažujeme v tvare

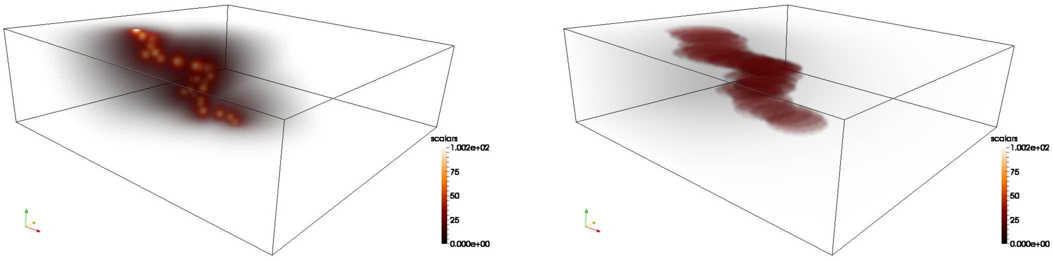
$$u(0,x) = u^0(x), \text{ pre } x \in \Omega \cup \partial\Omega. \tag{2.6}$$

Predpokladáme, že funkcia u^0 je ohraničená, napr. $u^0 \in L_\infty(\Omega)$. Na zostrojenie počiatočnej podmienky potrebuje identifikátor. Identifikátor $S \in R^d, d = 4$ je bod, ktorý nám dáva informáciu o umiestnení objektu, ktorý chceme segmentovať. Je potrebné aby sa nachádzal vo vnútri daného objektu. Funkcia u^0 je zvolená tak aby mala vrchol v bode S, to znamená, že funkcia nadobúda maximum práve vo vnútri segmentovaného objektu. Ak riešime problém, v ktorom objekt mení svoju polohu vzhľadom na čas θ je potrebné poznať viacero identifikátorov. Avšak pre náš model nie je nutné poznať identifikátor v každom čase θ. Je to práve vďaka tomu, že súradnicu θ považujeme za priestorovú premennú. To nám spôsobuje prepojenie jednotlivých 3D objemov do jednej 4D výpočtovej oblasti. V takomto prípade je funkcia u^0 skonštruovaná nasledovne:

- nech S_i, $i = 1, ..., N$ sú identifikátory
- pre každé S_i, $i = 1, ..., N$ zostrojíme funkciu ϕ_i s vrcholom v bode i
- potom $u^0(x) = \max\limits_{1 \le i \le N} \phi_i(x)$

Takže náš matematický model je reprezentovaný rovnicou (2.1) s okrajovými podmienkami (2.5) a počiatočnou podmienkou (2.6).

Tento matematický model je založený na dvoch hlavných princípoch, ktoré sú reprezentované dvoma členmi rovnice. Vďaka týmto členom vie hľadať riešenia aj komplikovanejších úloh, ako je napr. segmentácia objektu s poškodenou hranicou. Rovnicu (2.3) upravme na-



Obr. 2.1: Vývin segmentačnej funkciu u v čase. Objemová reprezentácia počiatočnej podmienky (vľavo) a výsledné riešenie v čase $t = 433$ (vpravo) pre 3D príklad.

sledovne

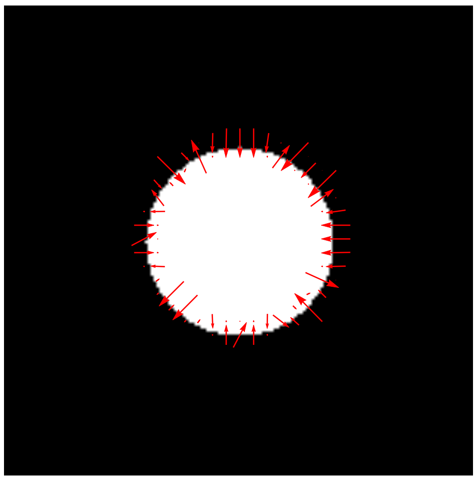
$$u_t = |\nabla u| \nabla g^0 . \frac{\nabla u}{|\nabla u|} + g^0 |\nabla u| \nabla . \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) . \tag{2.7}$$

Následne vykrátime $|\nabla u|$ a od celej rovnice odpočítame $\nabla g^0 . \nabla u$

$$u_t - \nabla g^0 . \nabla u = g^0 \nabla . \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) . \tag{2.8}$$

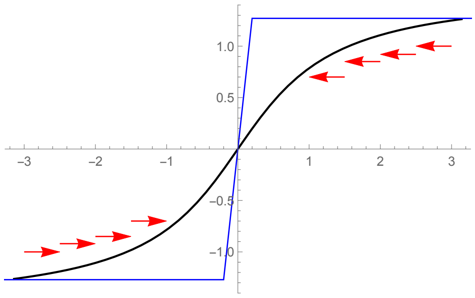
V rovnici (2.8) sa na ľavej strane objavil advekčný člen s rýchlosťou v a na pravej strane člen toku podľa strednej krivosti k

$$v = -\nabla g^0 ,$$
$$k = \nabla . \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) .$$



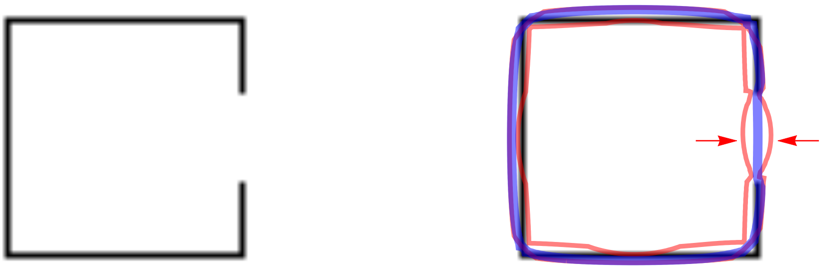
Obr. 2.2: Vektorové pole rýchlostí.

Advekčný člen s rýchlosťou v je reprezentovaný vektorovým poľom rýchlostí (Obr. 2.2). Je skonštruovaný tak, že spôsobuje priťahovanie izočiar funkcie u k hranici segmentovaného objektu. Tento člen závisí od funkcie g^0, ktorá je nerastúca a $g^0 \equiv g(|\nabla I^0|)$. V našich príkladoch sme ju zvolili ako $g(s) = \frac{1}{1+ks^2}$, kde $k > 0$ je voliteľný parameter a $s = |\nabla I^0|$. Pôsobením vektorového poľa rýchlostí je výsledná segmentačná funkcia lomená po častiach konštantná funkcia, pričom lom sa nachádza na hranici objektu (Obr. 2.3).



Obr. 2.3: Ilustračný graf ľubovoľnej spojitej funkcie u pred začiatkom segmentácie (čierna), ilustračný graf ľubovoľnej spojitej funkcie u, po výslednej segmentácií (modrá) a pôsobenie vektorového poľa (červená).

Člen toku podľa strednej krivosti slúži na vyhladzovanie nehladkých častí izočiar. Tie sa vyskytujú v príkladoch segmentácie objektov s porušenou hranicou alebo v príkladoch, v ktorých sa vyskytuje šum. Nehladké časti sa vyskytujú práve v miestach, kde sú na hranici objektu diery. Pretože advekčný člen je v týchto miestach nulový, pôsobí len člen toku podľa strednej krivosti a jeho pôsobením sa diery akoby zalepia (Obr. 2.4). Tento proces zalepenia hranice je veľmi dôležitý, ak chceme výslednú segmentáciu ďalej používať pri trekingu buniek. Ak by totiž nenastal efekt zalepenia porušenej hranice, tak algoritmus hľadajúci trajektóriu bunky zlyhá. Výsledná trajektória by potom vôbec nepopisovala možnú trasu, po ktorej sa bunka pohybovala.



Obr. 2.4: Štvorec s porušenou hranicou (vľavo), izočiary segmentačnej funkcie v segmentačnom čase $t = 7$ (vpravo, červená), červené šípky znázorňujú pôsobenie člena toku podľa strednej krivosti a výsledná izočiara segmentačnej funkcie v segmentačnom čase $t = 119$ (vpravo, modrá).

2.2 Matematický model trekingu

Matematický model bol prezentovaný vo všeobecnejšom tvare v [7, 8, 10]. V práci ho uvádzame ako možnú aplikáciu segmentácie buniek, keďže je to v súčasnosti rozšírená téma.

Celkový postup a reálna aplikácia je popísaná v [6]. Model trekingu je založený na hľadaní lokálneho minima v potenciálovom poli V, pričom lokálne minimum hľadáme pomocou metódy najstrmšieho spádu. Toto potenciálové pole vytvoríme kombináciou dvoch funkcií vzdialenosti. Na to aby sme tieto funkcie vzdialenosti vedeli zostrojiť potrebujeme mať k dispozícií výsledok segmentácie. Obidve funkcie vzdialenosti rátame len vo vnútri segmentácie, preto táto vzdialenosť nie je euklidovská. Prvá funkcia vzdialenosti d reprezentuje vzdialenosť bodu od najvzdialenejšieho identifikátora, s ktorým je súvisle spojená. Druhá funkcia vzdialenosti d_B predstavuje vzdialenosť bodu od hranice 4D segmentácie. Vhodnou kombináciou týchto dvoch funkcií zostrojíme potenciálové pole V. Po tom, ako zostrojíme toto pole môžeme začať s extrakciou trajektórií pomocou metódy najstrmšieho spádu. Čiže celkový postup pri aplikácií 4D segmentácie v trekingu buniek je nasledovný:

1. Nájdenie 4D segmentácie pomocou nelineárnej difúzie

2. Zostrojenie prvej funkcie vzdialenosti d, určujúcej vzdialenosť bodu segmentácie od najvzdialenejšieho identifikátora, s ktorým je súvisle spojená

3. Zostrojenie druhej funkcie vzdialenosti d_B, určujúcej vzdialenosť bodu segmentácie od hranice segmentácie

4. Vytvorenie potenciálového pola v vhodnou kombináciou funkcií d a d_B

5. Extrakcia trajektórie pomocou metódy najstrmšieho spádu v potenciálovom poli v

Výsledná trajektória je reprezentovaná usporiadanou množinou bodov $\{P_i\}_{i=1}^{N-1} \subset R^4$. Identifikátory pre počiatočnú podmienku segmentácie sú taktiež dané usporiadanou množinou bodov $\{S_i\}_{i=1}^{N} \subset R^4$. A keďže pre testovacie príklady sú tieto identifikátory dané presne centrami segmentovaných objektov, tak nám množina bodov S dáva presnú trajektóriu objektu. Vďaka tomuto faktu vieme jednoduchým spôsobom ohodnotiť kvalitu segmentácie q a to aritmetickým priemerom euklidovských vzdialeností jednotlivých bodov P_i od bodov S_i. Čiže pre q platí

$$q = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N-1} m_e\left(S_i, P_i\right), \tag{2.9}$$

kde N je celkový počet daných identifikátorov. Vo vzťahu pre výpočet hodnoty q je $N-1$, keďže výsledkom algoritmu extrakcie trajektórie metódou najstrmšieho spádu je práve $N-1$ bodov trajektórie. Pri reálnych dátach sa takéto ohodnotenie nedá spoľahlivo použiť, keďže identifikátory vo všeobecnosti neodpovedajú centrám buniek.

3 Numerické schémy pre segmentáciu

V tejto časti si predstavíme dve numerické schémy, ktoré sme použili na riešenie parciálnej diferenciálnej rovnice (2.1) spolu s okrajovými podmienkami (2.5) a počiatočnou podmienkou (2.6). Prvou schémou je tzv. EHM schéma [1, 4] a druhou použitou schémou je Reduced Diamond cell schéma [5]. Obe schémy sú semi-implicitné v čase, vďaka čomu je zabezpečená bezpodmienečná stabilita. V priestore vychádzame z metódy konečných objemov, pričom sa schémy od seba líšia v spôsobe numerickej aproximácie gradientu. V závere časti stručne popisujeme implementáciu a algoritmus v jazyku C. Pre zjednodušenie budeme pri odvodzovaní numerických schém vychádzať z rovnice (2.3). Regularizačný parameter ε sa potom objaví až vo výsledných numerických schémach.

3.1 Časová diskretizácia

V rovnici (2.3) použijeme semi-implicitný prístup, ako už bolo spomínané vyššie a aproximujeme časovú deriváciu doprednou diferenciou, pričom zavedieme označenie $u(t^n) \equiv u^n$

$$u_t \approx \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau}.$$

Rovnicu riešime v časovom intervale $[0, T]$ a v N_T časových krokoch τ, potom platí $\tau = T/N_T$. Čiže rovnica (2.3) diskretizovaná v čase vyzerá nasledovne

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} - |\nabla u^n| \nabla . \left(g^0 \frac{\nabla u^{n+1}}{|\nabla u^n|} \right) = 0 \tag{3.1}$$

3.2 EHM schéma

Táto schéma bola predstavená v [1] na riešenie level set rovnice s regularizovaným tokom podľa strednej krivosti a aplikovaná na filtrovanie šumu v spracovaní obrazu. V [4] bolo ukázané, že zaisťuje princíp maxima a taktiež bolo ukázané, že konverguje k riešeniu problému. V bakalárskej práci [16] sme schému rozšírili do 4D a aplikovali na rovnicu segmentácie. Pre úplnosť uvádzame diskretizáciu, odovodenie schémy a jej implementáciu aj v tejto práci. Schéma nepoužíva na aproximáciu objemového gradientu konečného objemu hodnoty v susedných konečných objemoch, tak ako to robia iné numerické metódy, ale používa pomocné hodnoty na hranách konečných objemov.

3.2.1 Diskretizácia

Nech je Ω štvorrozmerná oblasť, taká že existuje $M_1, M_2, M_3, M_4 \in \mathbb{N}$ a $h > 0$ a nech $\Omega = (0, M_1 h_0) \times (0, M_2 h_0) \times (0, M_3 h_0) \times (0, M_4 h_0)$. Povieme, že $\mathcal{D} = (\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mathcal{P})$ je priestorová diskretizácia Ω. Potom definujeme nasledujúce množiny:

- Množina $\mathcal{M}$ je množina konečných objemov, ktorá zároveň odpovedá množine doxlov (*dynamic voxel*).
  $\mathcal{M} = \{\ p_{i,j,k,m} = ((i-1)h, ih) \times ((j-1)h, jh) \times ((k-1)h, kh) \times ((m-1)h, mh),$
  $i = 1, ..., M_1, j = 1, ..., M_2, k = 1, ..., M_3, m = 1, ..., M_4\ \}$

- Množina $\mathcal{P}$ je množina reprezentačných bodov.
  $\mathcal{P} = \{\ x_{i,j,k,m} = \left(\left(i - \frac{1}{2}\right) h, \left(j - \frac{1}{2}\right) h, \left(k - \frac{1}{2}\right) h, \left(m - \frac{1}{2}\right)\right) h,$
  $i = 1, ..., M_1, j = 1, ..., M_2, k = 1, ..., M_3, m = 1, ..., M_4\ \}$

- Množina $\mathcal{E}$ je množina hrán medzi konečnými objemami.
  $\mathcal{E} = \{\ \sigma_{i,j,k,m+\frac{1}{2}} = ((i-1)h, ih) \times ((j-1)h, jh) \times ((k-1)h, kh) \times \{mh\},$
  $i = 1, ..., M_1, j = 1, ..., M_2, k = 1, ..., M_3, m = 0, ..., M_4\ \}$

$\cup$ { $\sigma_{i,j,k+\frac{1}{2},m} = ((i-1)h, ih) \times ((j-1)h, jh) \times \{kh\} \times ((m-1)h, mh),$
$i = 1, ..., M_1, j = 1, ..., M_2, k = 0, ..., M_3, m = 1, ..., M_4$ }
$\cup$ { $\sigma_{i,j+\frac{1}{2},k,m} = ((i-1)h, ih) \times \{jh\} \times ((k-1)h, kh) \times ((m-1)h, mh),$
$i = 1, ..., M_1, j = 0, ..., M_2, k = 1, ..., M_3, m = 1, ..., M_4$ }
$\cup$ { $\sigma_{i+\frac{1}{2},j,k,m} = \{ih\} \times ((j-1)h, jh) \times ((k-1)h, kh) \times ((m-1)h, mh),$
$i = 0, ..., M_1, j = 1, ..., M_2, k = 1, ..., M_3, m = 1, ..., M_4$ }

$\mathcal{E}_{int}$ je podmnožina všetkých $\sigma \in \mathcal{E} \mid \sigma \in \Omega$ a $\mathcal{E}_{ext}$ je podmnožina všetkých $\sigma \in \mathcal{E} \mid \sigma \in \partial\Omega$. Platí, že $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{int} \cup \mathcal{E}_{ext}$. Pre všetky $p \in \mathcal{M}$, $\mathcal{E}_p$ je podmnožina všetkých $\sigma \in \mathcal{E} \mid \sigma \in \partial p$, $\mathcal{N}_p$ je podmnožina všetkých $q \in \mathcal{M} \mid \sigma \in p \cap q$ a pre všetky $\sigma \in \mathcal{E}$, je $\mathcal{M}_\sigma$ podmnožinou $p \in \mathcal{M} \mid \sigma \in \mathcal{E}_p$. Ďalej $|p|$ označuje mieru konečného objemu, $|\sigma|$ mieru hrany konečného objemu a $d_{p\sigma}$ označuje vzdialenosť medzi x_p a x_σ. Vďaka tomu, že pracujeme na pravideľnej mriežke sú tieto hodnoty konštantné a závisia len od dimenzie danej úlohy. Povieme, že $(\tau, \mathcal{D})$, kde $\mathcal{D} = (\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mathcal{P})$ je časovo-priestorová diskretizácia $[0, T] \times \Omega$, ak τ je časová diskretizácia definovaná v časti 3.1.

3.2.2 Odvodenie schémy

Hodnotu na konečnom objeme, ktorú práve počítame si označíme u_p, potom u_q reprezentujú hodnoty na jeho susedných konečných objemoch a u_σ, hodnoty na hranách medzi nimi. Čiže $\forall u_q \in \mathcal{N}_p$ a $\forall u_\sigma \in \mathcal{E}_p$. Keďže narábame s obrázkami, tak naša mriežka má rovnomerné delenie, preto si môžeme dĺžku strany konečného objemu označiť h. Definujeme si aproximáciu počiatočnej podmienky

$$u_p^0 = \frac{1}{|p|} \int_p u_0(x_p) dx, \; \forall p \in \mathcal{M},$$

kde x_p je reprezentačný bod na konečnom objeme p. Hodnoty na hraniciach konečných objemov u_σ^0 vypočítame z počiatočnej podmienky

$$u_\sigma^0 = u_0(x_\sigma) \;, \forall \sigma \in \mathcal{E},$$

kde x_σ je reprezentačný bod na hrane σ. Rovnicu (3.1) upravíme do tvaru

$$\frac{\frac{u^{n+1}-u^n}{\tau}}{|\nabla u^n|} - \nabla . \left(\frac{g^0}{|\nabla u^n|} \nabla u^{n+1} \right) = 0. \tag{3.2}$$

Potom rovnicu (3.2) zintegrujeme cez každý konečný objem p, čím dostaneme

$$\int_p \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau |\nabla u^n|} dx - \int_p \nabla . \left(\frac{g^0}{|\nabla u^n|} \nabla u^{n+1} \right) dx = 0, \; \forall p \in \mathcal{M}. \tag{3.3}$$

Spravíme aproximáciu štvorca gradientu v každom konečnom objeme, tak ako bola prezentovaná v [4].

$$N_p(u^n)^2 = \frac{1}{|p|} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_p} \frac{|\sigma|}{d_{p\sigma}} (u_\sigma^n - u_p^n)^2, \; \forall p \in \mathcal{M}, \tag{3.4}$$

Označme $d \in \mathbb{N}^+$ dimenziu úlohy. Potom pre pravidelnú "štvorcovú" mriežku s dĺžkou hrany h platí, že $|p| = h^d$, $|\sigma| = h^{d-1}$, $d_{p\sigma} = \frac{h}{2}$. A teda dostávame

$$N_p(u^n)^2 = \frac{1}{h^d} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_p} \frac{h^{d-1}}{\frac{h}{2}} (u_\sigma^n - u_p^n)^2, \forall p \in \mathcal{M}. \tag{3.5}$$

Po jednoduchej úprave dostaneme výsledný vzťah pre aproximáciu štvorca gradiantu funkcie $u(x_{t^n,p}) \equiv u_p^n$

$$N_p(u^n)^2 = \frac{2}{h^2} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_p} (u_\sigma^n - u_p^n)^2, \forall p \in \mathcal{M}, \tag{3.6}$$

následne zregularizujeme a označíme

$$f_p^n = \sqrt{N_p(u^n)^2 + \varepsilon^2}, \tag{3.7}$$

čiže $|\nabla u_p^n| \approx f_p^n$. Funkcia I^0 je po častiach konštantná funkcia. Reprezentuje hodnoty doxelov obrazu. Hodnoty na hraniciach doxelov obrazu vypočítame ako priemernú hodnotu dvoch doxelov, medzi ktorými sa hranica nachádza

$$I_\sigma^0 = \frac{I_p^0 + I_q^0}{2} ,$$

ďalej potrebujeme aproximáciu hodnoty gradientu funkcie obrazu I^0. Tú vypočítame podobne ako aproximáciu hodnoty gradientu funkcie u, čiže dostaneme výsledný vzťah

$$N_p(I^0)^2 = \frac{2}{h^2} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_p} (I_\sigma^0 - I_p^0)^2, \ p \in \mathcal{M}, \tag{3.8}$$

následne označíme

$$g_p = g^0 \left(\sqrt{Np(I^0)^2 + \varepsilon^2} \right), \ p \in \mathcal{M}. \tag{3.9}$$

Teraz máme vyjadrené a označené všetky aproximácie, ktoré potrebujeme na ďalšie úpravy rovnice. V rovnici (3.3) na druhý integrál aplikujeme divergenčnú vetu, čím dostávame

$$\int_p \frac{u_p^{n+1} - u_p^n}{\tau |\nabla u^n|} dx - \int_{\partial p} \frac{g^0}{|\nabla u^n|} \nabla u^{n+1}.\mathbf{n} \, d\sigma = 0, \ p \in \mathcal{M}, \tag{3.10}$$

Presné hodnoty nahradíme aproximáciami

$$\int_p \frac{u_p^{n+1} - u_p^n}{\tau f_p^n} dx - \int_{\partial p} \frac{g_p}{f_p^n} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_p} \frac{u_\sigma^{n+1} - u_p^{n+1}}{d_{p\sigma}} \, d\sigma = 0, \ p \in \mathcal{M}, \ \forall n \in \mathbb{N}, \tag{3.11}$$

a zintegrujeme

$$\frac{(u_p^{n+1} - u_p^n) h^d}{\tau f_p^n} - \frac{g_p h^{d-1}}{f_p^n} \frac{2}{h} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_p} \left(u_\sigma^{n+1} - u_p^{n+1} \right) = 0, \ p \in \mathcal{M}, \ \forall n \in \mathbb{N}, \tag{3.12}$$

vydelíme h^{d-2} a dostaneme

$$\frac{h^2(u_p^{n+1}-u_p^n)}{\tau f_p^n} - \frac{2g_p}{f_p^n}\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_p}\left(u_\sigma^{n+1}-u_p^{n+1}\right) = 0,\ p\in\mathcal{M},\ \forall n\in\mathbb{N}. \tag{3.13}$$

Uvažujeme podmienku konzervativity, ktorá vyjadruje, že tok z konečného objemu p do konečného objemu q cez hranicu σ je rovnako veľký, ako tok z konečného objemu q do konečného objemu p cez túto hranicu σ, pričom tieto hodnoty majú opačné znamienka.

$$\frac{g_p(u_\sigma^{n+1}-u_p^{n+1})}{f_p^n} + \frac{g_q(u_\sigma^{n+1}-u_q^{n+1})}{f_q^n} = 0, \forall\sigma\in\mathcal{E}_{int} \text{ s } \mathcal{M}_\sigma = \{p,q\},\ \forall n\in\mathbb{N}$$

$$f_q^n\frac{g_p}{f_p^n}u_\sigma^{n+1} + f_p^n\frac{g_q}{f_q^n}u_\sigma^{n+1} - f_q^n\frac{g_p}{f_p^n}u_p^{n+1} - f_p^n\frac{g_q}{f_q^n}u_q^{n+1} = 0,$$

$$\forall\sigma\in\mathcal{E}_{int} \text{ s } \mathcal{M}_\sigma = \{p,q\},\ \forall n\in\mathbb{N}$$

$$u_\sigma^{n+1} = \frac{f_q^n g_p u_p^{n+1} + f_p^n g_q u_q^{n+1}}{f_q^n g_p + f_p^n g_q},\ \forall\sigma\in\mathcal{E}_{int} \text{ s } \mathcal{M}_\sigma = \{p,q\},\ \forall n\in\mathbb{N} \tag{3.14}$$

Do druhého člena rovnice (3.13) dosadíme vyjadrenú hodnotu u_σ^{n+1} v tvare (3.14). Potom tento člen vyzerá nasledovne

$$\frac{2g_p}{f_p^n}\sum_{q\in\mathcal{N}_p}\left(\frac{f_q^n g_p u_p^{n+1} + f_p^n g_q u_q^{n+1}}{f_q^n g_p + f_p^n g_q} - u_p^{n+1}\right),\ p\in\mathcal{M},\ \forall n\in\mathbb{N}. \tag{3.15}$$

Členy vo vnútri sumy upravíme na spoločného menovateľa a pokračujeme v úpravách

$$\frac{2g_p}{f_p^n}\sum_{q\in\mathcal{N}_p}\left(\frac{f_q^n g_p u_p^{n+1} + f_p^n g_q u_q^{n+1} - f_q^n g_p u_p^{n+1} - f_p^n g_q u_p^{n+1}}{f_q^n g_p + f_p^n g_q}\right) =$$

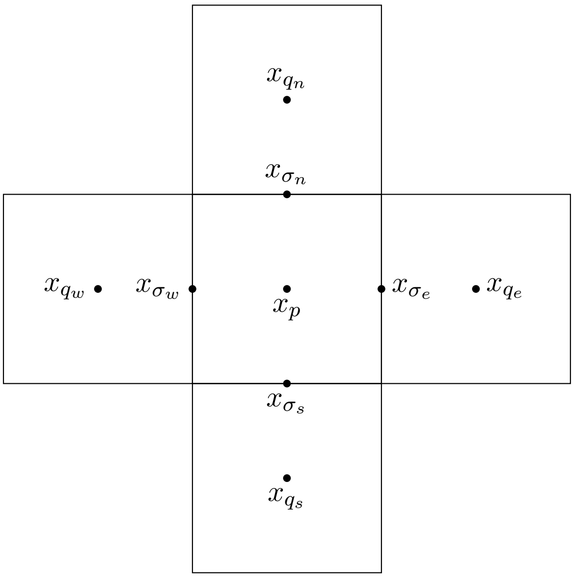
$$= \frac{2g_p}{f_p^n}\sum_{q\in\mathcal{N}_p}\left(\frac{f_p^n g_q u_q^{n+1} - f_p^n g_q u_p^{n+1}}{f_q^n g_p + f_p^n g_q}\right) = \frac{2g_p}{f_p^n}\sum_{q\in\mathcal{N}_p}\left(\frac{f_p^n g_q(u_q^{n+1} - u_p^{n+1})}{f_q^n g_p + f_p^n g_q}\right) =$$

$$= \sum_{q\in\mathcal{N}_p}\left(\frac{2g_p g_q}{f_q^n g_p + f_p^n g_q}(u_q^{n+1} - u_p^{n+1})\right),\ p\in\mathcal{M},\ \forall n\in\mathbb{N}. \tag{3.16}$$

Po dosadení (3.16) do (3.13) dostaneme výslednú numerickú schému našej úlohy, v tvare

$$\frac{h^2(u_p^{n+1}-u_p^n)}{\tau f_p^n} + \sum_{q\in\mathcal{N}_p}\left(\frac{2g_p g_q}{f_q^n g_p + f_p^n g_q}(u_p^{n+1} - u_q^{n+1})\right) = 0,\ p\in\mathcal{M},\ \forall n\in\mathbb{N}. \tag{3.17}$$

Táto numerická schéma sa dá použiť aj na riešenie 2D a 3D úloh. V 2D prípade má konečný objem tvar štvorca a zodpovedá pixelu. Takýto konečný objem má štyry hrany, ktoré majú tvar čiary (Obr. 3.1). Ak rozšírime úlohu o ďalšiu dimenziu a teda riešime úlohu v 3D, tak dostaneme konečný objem v tvare kocky. Tento konečný objem má šesť hrán v tvare štvorca a je totožný s voxelom (*volume pixel*). Voxel je rozšírenie pixela do troch rozmerov. Pri riešení 4D úloh používame konečný objemv v tvare *tesseractu*, ktorý odpovedá doxlu (*dynamic voxel*). *Tesseract* je *hypercube* pre $d = 4$, kde d označuje dimenziu priestoru. Čiže je to analógia kocky v 4D. V tomto prípade má konečný objem osem hrán, pričom každá z hrán má tvar kocky. Konkrétne tieto hrany predstavujú ľavý, pravý, horný, spodný, predný, zadný, predchádzajúci a nasledujúci hraničný objem. Tento fakt je ťažší na predstavenie, keďže si človek prirodzene nevie predstaviť priestor so štyrmi priestorovými dimenziami. O tomto objekte vieme, že jeho rezy majú tvar kocky, čo je aj spôsob ako si budeme výsledky vizualizovať. Ďalším možným spôsobom vizualizácie je premietnutie výslednej segmentačnej izoplochy do 3D, kedy zanedbáme štvrtý rozmer, ktorým je čas θ. Keďže robíme priemet z priestoru s $d = 4$ do priestoru s $d = 3$, tak sa do jedného bodu premieta viac bodov. Vo výslednej vizualizácií zobrazíme potom bod s najväčšou hodnotou segmentačnej level set funkcie. Týmto spôsobom dostaneme časovo-priestorovú trubicu v 3D.



Obr. 3.1: Diskretizácia 2D priestoru, konečný objem p, hranice σ a susedia q

3.2.3 Algoritmus

Teraz máme odvodený systém rovníc (3.17) predstavujúci semi-implicitnú schému, ktorý potrebujeme implementovať a riešiť. V tejto časti predstavujeme postup pri riešení daného systému rovníc. Zavedieme si označenie $u^n_{i,j,k,m}$ namiesto u^n_p, namiesto u^n_σ budeme používať $u^n_{i,j,k,m+\frac{1}{2}}$, $u^n_{i,j,k,m-\frac{1}{2}}$, $u^n_{i,j,k+\frac{1}{2},m}$, $u^n_{i,j,k-\frac{1}{2},m}$, $u^n_{i,j+\frac{1}{2},k,m}$, $u^n_{i,j-\frac{1}{2},k,m}$, $u^n_{i+\frac{1}{2},j,k,m}$, $u^n_{i-\frac{1}{2},j,k,m}$. Najskôr potrebujeme nastaviť hodnoty prvkom $u(0, x)$ pomocou funkcie u^0, ktorú sme vopred skonštruovali postupom uvedeným v časti 2.1.

$$u^0_{i,j,k,m} = u^0(x_{i,j,k,m})$$

$$
\begin{aligned}
u^0_{i+\frac{1}{2},j,k,m} &= u^0(x_{i+\frac{1}{2},j,k,m}),\ u^0_{i,j+\frac{1}{2},k,m} = u^0(x_{i,j+\frac{1}{2},k,m})\\
u^0_{i,j,k+\frac{1}{2},m} &= u^0(x_{i,j,k+\frac{1}{2},m}),\ u^0_{i,j,k,m+\frac{1}{2}} = u^0(x_{i,j,k,m+\frac{1}{2}})\\
u^0_{i-\frac{1}{2},j,k,m} &= u^0(x_{i-\frac{1}{2},j,k,m}),\ u^0_{i,j-\frac{1}{2},k,m} = u^0(x_{i,j-\frac{1}{2},k,m})\\
u^0_{i,j,k-\frac{1}{2},m} &= u^0(x_{i,j,k-\frac{1}{2},m}),\ u^0_{i,j,k,m-\frac{1}{2}} = u^0(x_{i,j,k,m-\frac{1}{2}})
\end{aligned}
$$

Potom si zavedieme označenie pre prvky pre prácu so vstupným obrazom a to $I^0_{i,j,k,m}$ namiesto I^0_p, reprezentujúce hodnoty doxelov z obrazu. Namiesto I^0_σ zavedieme $I^0_{i,j,k,m+\frac{1}{2}}$, $I^0_{i,j,k+\frac{1}{2},m}$, $I^0_{i,j+\frac{1}{2},k,m}$, $I^0_{i+\frac{1}{2},j,k,m}$, $I^0_{i,j,k,m-\frac{1}{2}}$, $I^0_{i,j,k-\frac{1}{2},m}$, $I^0_{i,j-\frac{1}{2},k,m}$, $I^0_{i-\frac{1}{2},j,k,m}$ reprezentujúce hodnoty na hraniciach doxelov. Hodnoty $I^0_{i,j,k,m}$ načítame z obrazu. Na hranicu obrazu nastavíme okrajové podmienky a to tak, že spravíme zrkadlenie hodnôt I^0_p okrajových doxelov smerom von, čím rozšírime výpočtovú oblasť. Ostatné hodnoty (hodnoty na hraniciach doxelov) vypočítame ako priemerné hodnoty doxelov, medzi ktorými sa hranice nachádzajú. A to nasledovne:

$$
\begin{aligned}
I^0_{i+\frac{1}{2},j,k,m} &= \frac{I^0_{i,j,k,m}+I^0_{i+1,j,k,m}}{2},\ I^0_{i,j+\frac{1}{2},k,m} = \frac{I^0_{i,j,k,m}+I^0_{i,j+1,k,m}}{2}\\
I^0_{i,j,k+\frac{1}{2},m} &= \frac{I^0_{i,j,k,m}+I^0_{i,j,k+1,m}}{2},\ I^0_{i,j,k,m+\frac{1}{2}} = \frac{I^0_{i,j,k,m}+I^0_{i,j,k,m+1}}{2}\\
I^0_{i-\frac{1}{2},j,k,m} &= \frac{I^0_{i,j,k,m}+I^0_{i-1,j,k,m}}{2},\ I^0_{i,j-\frac{1}{2},k,m} = \frac{I^0_{i,j,k,m}+I^0_{i,j-1,k,m}}{2}\\
I^0_{i,j,k-\frac{1}{2},m} &= \frac{I^0_{i,j,k,m}+I^0_{i,j,k-1,m}}{2},\ I^0_{i,j,k,m-\frac{1}{2}} = \frac{I^0_{i,j,k,m}+I^0_{i,j,k,m-1}}{2}
\end{aligned}
$$

Tieto hodnoty použijeme na výpočet približných hodnôt gradientov obrazu, ktoré budú v regularizovanej forme vstupovať do funkcie $g^0(s)$. Hodnoty $N_p(I^0)$ označíme ako $N_{i,j,k,m}(I^0)$ a zo vzťahu (3.8) dostávame

$$
\begin{aligned}
2\left(N_{i,j,k,m}(I^0)\right)^2 = &\left(\frac{I^0_{i,j,k,m}-I^0_{i,j,k,m+\frac{1}{2}}}{\frac{h}{2}}\right)^2+\left(\frac{I^0_{i,j,k,m}-I^0_{i,j,k+\frac{1}{2},m}}{\frac{h}{2}}\right)^2+\left(\frac{I^0_{i,j,k,m}-I^0_{i,j+\frac{1}{2},k,m}}{\frac{h}{2}}\right)^2+\left(\frac{I^0_{i,j,k,m}-I^0_{i+\frac{1}{2},j,k,m}}{\frac{h}{2}}\right)^2+\\
+&\left(\frac{I^0_{i,j,k,m}-I^0_{i,j,k,m-\frac{1}{2}}}{\frac{h}{2}}\right)^2+\left(\frac{I^0_{i,j,k,m}-I^0_{i,j,k-\frac{1}{2},m}}{\frac{h}{2}}\right)^2+\left(\frac{I^0_{i,j,k,m}-I^0_{i,j-\frac{1}{2},k,m}}{\frac{h}{2}}\right)^2+\left(\frac{I^0_{i,j,k,m}-I^0_{i-\frac{1}{2},j,k,m}}{\frac{h}{2}}\right)^2
\end{aligned}
$$

Hodnoty funkcie $g^0(s)$ v jednotlivých voxeloch si označíme $g_{i,j,k,m}$ a vypočítame v regularizovanej forme (3.9)

$$
g_{i,j,k,m} = g^0\left(\sqrt{\left(N_{i,j,k,m}(I^0)\right)^2+\varepsilon^2}\right).
$$

Ešte potrebujeme nastaviť okrajové podmienky pre hranice I^0_σ na hranici obrazu. Tie nastavíme obdobnou reflexiou, akú sme použili pre I^0_p.

Okrajové podmienky pre konečné objemy u_p a hranice konečných objemov u_σ ležiace na hranici výpočtovej oblasti nastavíme pomocou rovnakej reflexie akú sme použili pre doxely obrazu. Tento krok budeme musieť aplikovať v každom diskrétnom časovom kroku $n+1, n=0,1,...$ našej úlohy. To isté platí aj o výpočte približnej hodnoty gradientu funkcie u^n_p, označenej $N_{i,j,k,m}(u^n)$ pre každý konečný objem $p \in \mathcal{M}$. Absolútnu hodnotu štvorca gradientu používame v regularizovanej forme f_p^n. Zo vzťahu (3.6) dostávame

$$2\left(N_{i,j,k,m}(u^n)\right)^2 = \left(\frac{u^n_{i,j,k,m}-u^n_{i,j,k,m+\frac{1}{2}}}{\frac{h}{2}}\right)^2 + \left(\frac{u^n_{i,j,k,m}-u^n_{i,j,k+\frac{1}{2},m}}{\frac{h}{2}}\right)^2 + \left(\frac{u^n_{i,j,k,m}-u^n_{i,j+\frac{1}{2},k,m}}{\frac{h}{2}}\right)^2 + \left(\frac{u^n_{i,j,k,m}-u^n_{i+\frac{1}{2},j,k,m}}{\frac{h}{2}}\right)^2 +$$
$$+\left(\frac{u^n_{i,j,k,m}-u^n_{i,j,k,m-\frac{1}{2}}}{\frac{h}{2}}\right)^2 + \left(\frac{u^n_{i,j,k,m}-u^n_{i,j,k-\frac{1}{2},m}}{\frac{h}{2}}\right)^2 + \left(\frac{u^n_{i,j,k,m}-u^n_{i,j-\frac{1}{2},k,m}}{\frac{h}{2}}\right)^2 + \left(\frac{u^n_{i,j,k,m}-u^n_{i-\frac{1}{2},j,k,m}}{\frac{h}{2}}\right)^2$$

aplikáciou Evans-Spruckovej ε-regularizácie (3.7) regularizujeme gradienty $N_p(u^n)$

$$f^n_{i,j,k,m} = \sqrt{\left(N^n_{i,j,k,m}\right)^2 + \varepsilon^2}$$

Potom označíme koeficienty systému rovníc (3.17) pre potreby SOR metódy $w_{i,j,k,m}$, $e_{i,j,k,m}$, $n_{i,j,k,m}$, $s_{i,j,k,m}$, $o_{i,j,k,m}$, $p_{i,j,k,m}$, $q_{i,j,k,m}$, $r_{i,j,k,m}$, $c_{i,j,k,m}$, $b_{i,j,k,m}$ a konštruujeme ich

$$w_{i,j,k,m} = \frac{2g_{i,j,k,m}g_{i-1,j,k,m}}{f^n_{i,j,k,m}g_{i-1,j,k,m}+f^n_{i-1,j,k,m}g_{i,j,k,m}}\ ,\ e_{i,j,k,m} = \frac{2g_{i,j,k,m}g_{i+1,j,k,m}}{f^n_{i,j,k,m}g_{i+1,j,k,m}+f^n_{i+1,j,k,m}g_{i,j,k,m}}$$

$$n_{i,j,k,m} = \frac{2g_{i,j,k,m}g_{i,j-1,k,m}}{f^n_{i,j,k,m}g_{i,j-1,k,m}+f^n_{i,j-1,k,m}g_{i,j,k,m}}\ ,\ s_{i,j,k,m} = \frac{2g_{i,j,k,m}g_{i,j+1,k,m}}{f^n_{i,j,k,m}g_{i,j+1,k,m}+f^n_{i,j+1,k,m}g_{i,j,k,m}}$$

$$o_{i,j,k,m} = \frac{2g_{i,j,k,m}g_{i,j,k-1,m}}{f^n_{i,j,k,m}g_{i,j,k-1,m}+f^n_{i,j,k-1,m}g_{i,j,k,m}}\ ,\ p_{i,j,k,m} = \frac{2g_{i,j,k,m}g_{i,j,k+1,m}}{f^n_{i,j,k,m}g_{i,j,k+1,m}+f^n_{i,j,k+1,m}g_{i,j,k,m}}$$

$$q_{i,j,k,m} = \frac{2g_{i,j,k,m}g_{i,j,k,m-1}}{f^n_{i,j,k,m}g_{i,j,k,m-1}+f^n_{i,j,k,m-1}g_{i,j,k,m}}\ ,\ r_{i,j,k,m} = \frac{2g_{i,j,k,m}g_{i,j,k,m+1}}{f^n_{i,j,k,m}g_{i,j,k,m+1}+f^n_{i,j,k,m+1}g_{i,j,k,m}}$$

$$c_{i,j,k,m} = w_{i,j,k,m} + e_{i,j,k,m} + n_{i,j,k,m} + s_{i,j,k,m} + o_{i,j,k,m} + p_{i,j,k,m} + q_{i,j,k,m} + r_{i,j,k,m} + \frac{h^2}{\tau}\frac{1}{f^n_{i,j,k,m}}$$

$$b_{i,j,k,m} = \frac{h^2}{\tau}\frac{u^n_{i,j,k,m}}{f^n_{i,j,k,m}}$$

a riešime lineárny systém

$$c_{i,j,k,m}u^{n+1}_{i,j,k,m} - w_{i,j,k,m}u^{n+1}_{i-1,j,k,m} - e_{i,j,k,m}u^{n+1}_{i+1,j,k,m} - n_{i,j,k,m}u^{n+1}_{i,j-1,k,m} - s_{i,j,k,m}u^{n+1}_{i,j+1,k,m} -$$
$$-o_{i,j,k,m}u^{n+1}_{i,j,k-1,m} - p_{i,j,k,m}u^{n+1}_{i,j,k+1,m} - q_{i,j,k,1}u^{n+1}_{i,j,k,m-1} - r_{i,j,k,m}u^{n+1}_{i,j,k,m+1} = b_{i,j,k,m}.$$

V tejto práci sme na riešenie tohto systému použili *successive-over-relaxation* (SOR) iteračnú metódu, ktorá je modifikáciou základného Gauss-Seidelovho algoritmu. Po vyriešení systému dostaneme hodnoty $u^{n+1}_{i,j,k,m}$, ktoré predstavujú riešenie úlohy segmentácie v ďalšom segmentačnom časovom kroku. Po vypočítaní riešenia je potrebné vypočítať hodnoty na hraniciach konečných objemoch u_σ ležiacich vo vnútri obrazu a nastaviť okrajové podmienky v konečných objemoch u_p a v hraniciach konečných objemov u_σ ležiacich na hranici obrazu pre nasledujúci segmentačný časový krok. Hodnoty u_σ ležiacich vo vnútri obrazu vypočítame podľa vzťahu (3.14) a okrajové podmienky nastavíme rovnakou reflexiou, ako v 0-tom časovom kroku. V $n+1$-om segmentačnom časovom kroku nastavíme počiatočné hodnoty iterácie takto $u^{n+1(0)}_{i,j,k,m} = u^n_{i,j,k,m}$, $i = 1,2,...,M_1$, $j = 1,2,...,M_2$, $k = 1,2,...,M_3$, $m = 1,2,...,M_4$. Potom v každej iterácií $l = 1, 2, ...$ pre $i = 1, 2, ..., M_1$, $j = 1, 2, ..., M_2$, $k = 1, 2, ..., M_3$, $m = 1, 2, ..., M_4$ riešime nasledovné dva kroky iterácie

$$Y = (\; w_{i,j,k,m} u^{n+1(l)}_{i-1,j,k,m} + n_{i,j,k,m} u^{n+1(l)}_{i,j-1,k,m} + o_{i,j,k,m} u^{n+1(l)}_{i,j,k-1,m} + q_{i,j,k,1} u^{n+1(l)}_{i,j,k,m-1} + \; e_{i,j,k,m} u^{n+1(l-1)}_{i+1,j,k,m} + \\ + s_{i,j,k,m} u^{n+1(l-1)}_{i,j+1,k,m} + p_{i,j,k,m} u^{n+1(l-1)}_{i,j,k+1,m} + r_{i,j,k,m} u^{n+1(l-1)}_{i,j,k,m+1} + b_{i,j,k,m} \;) \; / \; c_{i,j,k,m}$$

$$u^{n+1(l)}_{i,j,k,m} = u^{n+1(l-1)}_{i,j,k,m} + \omega \left(Y - u^{n+1(l-1)}_{i,j,k,m} \right)$$

Iteračný proces zastavíme, ak $R_{(l)} < TOL$, kde $R_{(l)}$ je rezíduum v l-tej iterácií

$$R_{(l)} = \sum(\; c_{i,j,k,m} u^{n+1(l)}_{i,j,k,m} - w_{i,j,k,m} u^{n+1(l)}_{i-1,j,k,m} - e_{i,j,k,m} u^{n+1(l)}_{i+1,j,k,m} - n_{i,j,k,m} u^{n+1(l)}_{i,j-1,k,m} \\ - s_{i,j,k,m} u^{n+1(l)}_{i,j+1,k,m} - o_{i,j,k,m} u^{n+1(l)}_{i,j,k-1,m} - p_{i,j,k,m} u^{n+1(l)}_{i,j,k+1,m} - q_{i,j,k,1} u^{n+1(l)}_{i,j,k,m-1} - r_{i,j,k,m} u^{n+1(l)}_{i,j,k,m+1} - b_{i,j,k,m} \;)^2$$

a TOL je nami vopred zvolená tolerancia. Voľba tolerancie záleží na užívateľovi. Ak chce presnejšie výsledky je potrebné zvoliť menšiu toleranciu, ak mu záleží na rýchlosti výpočtu a postačia mu menej presné výsledky, mal by zvoliť väčšiu toleranciu. Keďže počítanie rezídua predlžuje výpočtový čas, tak je dobré kontrolovať túto podmienku napr. po každej desiatej iterácií. ω je relaxačný parameter, ktorý si volí užívateľ na zrýchlenie konvergencie. Takisto má na výpočtový čas vplyv aj voľba parametra ε a voľba časového kroku τ. Algoritmus vyzerá nasledovne:

1. Načítanie obrazu
   $I^0_{i,j,k,m}$, $I^0_{i,j,k,m+\frac{1}{2}}$, $I^0_{i,j,k+\frac{1}{2},m}$, $I^0_{i,j+\frac{1}{2},k,m}$, $I^0_{i+\frac{1}{2},j,k,m}$
2. Nastavenie počiatočnej podmienky
   $u^0_{i,j,k,m}$, $u^0_{i,j,k,m+\frac{1}{2}}$, $u^0_{i,j,k+\frac{1}{2},m}$, $u^0_{i,j+\frac{1}{2},k,m}$, $u^0_{i+\frac{1}{2},j,k,m}$
3. Výpočet štvorcov gradientov obrazu a váhovej funkcie
   $N^I_{i,j,k,m}$, $g_{i,j,k,m}$
4. Cyklus cez čas $(n = 0, 1, ..., N)$
   (a) Výpočet gradientov funkcie u v časovom kroku n
       $f^n_{i,j,k,m}$
   (b) SOR
   (c) Výpočet hodnôt na hraniciach voxelov a nastavenie okrajových podmienok pre ďalší časový krok
       $u^{n+1}_{i,j,k,m+\frac{1}{2}}$, $u^{n+1}_{i,j,k+\frac{1}{2},m}$, $u^{n+1}_{i,j+\frac{1}{2},k,m}$, $u^{n+1}_{i+\frac{1}{2},j,k,m}$, $u^{n+1}_{i,j,k,m} \in \varepsilon_{ext}$
   (d) Kontrola zastavovacej podmienky

3.3 Reduced diamond cell schéma

Schéma *reduced diamond cell*, predstavená v [5], je zjednodušením pôvodnej *diamond cell* schémy. A to tak, že redukuje počet hodnôt použitých na výpočet gradientu časti hranice konečného objemu. Konkrétne sa pri výpočte takéhoto gradientu pri použití schémy *reduced diamond cell*, zanedbávajú susedia cez vrcholy konečného objemu. Na túto schému sa dá pozerať aj ako na použitie tzv. *2D diamond cell* schémy v každej rovine, v ktorej ležia centrá dvoch susedných doxelov. V nasledujúcej časti budeme používať výrazy *hrana* a *stena*. Označme $d \in \mathbb{N}^+$, $d \geq 3$ dimeziu problému. Potom pojmom *stena* budeme označovať takú časť hranice doxelu, ktorá má dimenziu d^{-1} a pojmom *hrana* takú časť hranice doxelu, ktorá má dimenziu d^{-2}.

3.3.1 Diskretizácia

Nech je Ω štvorrozmerná oblasť, taká že existuje $M_1, M_2, M_3, M_4 \in \mathbb{N}$ a $h > 0$ a nech $\Omega = (0, M_1 h_0) \times (0, M_2 h_0) \times (0, M_3 h_0) \times (0, M_4 h_0)$. Povieme, že $\mathcal{D} = (\mathcal{V}, \mathcal{X}, \mathcal{E}, \mathcal{Y})$ je priestorová diskretizácia Ω. Potom definujeme nasledujúce množiny:

- Množina $\mathcal{P}$ je množina konečných objemov, ktorá zároveň odpovedá množine doxelov (*dynamic voxel*).
  $\mathcal{V} = \{\ v_{i,j,k,m} = ((i-1)h, ih) \times ((j-1)h, jh) \times ((k-1)h, kh) \times ((m-1)h, mh),$
  $i = 1, ..., M_1, j = 1, ..., M_2, k = 1, ..., M_3, m = 1, ..., M_4\ \}$

- Množina $\mathcal{X}$ je množina reprezentačných bodov.
  $\mathcal{X} = \{\ x_{i,j,k,m} = \left(\left(i - \frac{1}{2}\right)h, \left(j - \frac{1}{2}\right)h, \left(k - \frac{1}{2}\right)h, \left(m - \frac{1}{2}\right)h\right),$
  $i = 1, ..., M_1, j = 1, ..., M_2, k = 1, ..., M_3, m = 1, ..., M_4\ \}$

- Pre $\forall v_{i,j,k,m} \in \mathcal{V}$ definujeme takú množinu indexov $I^1_{i,j,k,m} = (p, q, r, s)$, že $p, q, r, s \in \{-1, 0, 1\}, |p| + |q| + |r| + |s| = 1$. Potom je $\mathcal{E}$ množina stien medzi konečnými objemami.
  $\mathcal{E} = \{\ e^{p,q,r,s}_{i,j,k,m}, i = 1, ..., M_1, j = 1, ..., M_2, k = 1, ..., M_3, m = 1, ..., M_4,$
  $p, q, r, s \in I^1_{i,j,k,m}\ \}$

- Pre $\forall p_{i,j,k,m} \in \mathcal{P}$ definujeme takú množinu indexov $I^2_{i,j,k,m} = (p, q, r, s)$, že $p, q, r, s \in \{-1, 0, 1\}, |p| + |q| + |r| + |s| = 2$. Potom je $\mathcal{Y}$ množina stredov hrán konečných objemov.
  $\mathcal{Y} = \{\ y^{p,q,r,s}_{i,j,k,m}, i = 1, ..., M_1, j = 1, ..., M_2, k = 1, ..., M_3, m = 1, ..., M_4,$
  $p, q, r, s \in I^2_{i,j,k,m}\ \}$

Ďalej $|v|$ označuje mieru konečného objemu, $|e|$ mieru steny konečného objemu a d_{vz} označuje vzdialenosť medzi x_v a x_z, kde z je susedný konečný objem. Vďaka tomu, že pracujeme na pravidelnej mriežke sú tieto hodnoty konštantné a závisia len od dimenzie danej úlohy. Povieme, že $(\tau, \mathcal{D})$, kde $\mathcal{D} = (\mathcal{V}, \mathcal{X}, \mathcal{E}, \mathcal{Y})$ je časovo-priestorová diskretizácia $[0, T] \times \Omega$, ak τ je časová diskretizácia definovaná v časti 3.1.

3.3.2 Odvodenie schémy

Hodnotu na konečnom objeme, ktorú práve počítame si označíme u_{ijkm}, potom $u_{i+p,j+q,k+r,m+s}$, $p, q, r, s \in I^1_{ijkm}$ reprezentujú hodnoty na jeho susedných konečných objemoch. Keďže narábame s obrázkami, tak naša mriežka má rovnomerné delenie, preto si môžeme dĺžku hrany konečného objemu označiť h. Potom pre d-dimenzionálnu úlohu platí, že $|v| = h^d, |e| =$

$h^{d-1}, d_{vz} = h$. Definujeme si aproximáciu počiatočnej podmienky

$$u^0_{ijkm} = \frac{1}{|v_{ijkm}|}\int_{v_{ijkm}} u_0(x_{ijkm})dx,\ \forall v_{ijkm} \in \mathcal{V},$$

kde x_{ijkm} je reprezentačný bod na konečnom objeme v_{ijkm}. Rovnicu (3.1) upravíme do tvaru

$$\frac{\frac{u^{n+1}-u^n}{\tau}}{|\nabla u^n|} - \nabla.\left(\frac{g^0}{|\nabla u^n|}\nabla u^{n+1}\right) = 0. \tag{3.18}$$

Teraz rovnicu (3.18) zintegrujeme cez každý konečný objem $v_{ijkm} \in \mathcal{V}$. Dostaneme

$$\int_{v_{ijkm}} \frac{u^{n+1}_{ijkm} - u^n_{ijkm}}{\tau|\nabla u^n_{ijkm}|}dx - \int_{v_{ijkm}} \nabla.\left(\frac{g^0_{ijkm}}{|\nabla u^n_{ijkm}|}\nabla u^{n+1}_{ijkm}\right)dx = 0,\ \forall v_{ijkm} \in \mathcal{V}. \tag{3.19}$$

V rovnici (3.19) použijeme na druhý integrál divergenčnú vetu a dostaneme

$$\int_{v_{ijkm}} \frac{u^{n+1}_{ijkm} - u^n_{ijkm}}{\tau|\nabla u^n_{ijkm}|}dx - \int_{\partial v_{ijkm}} \frac{g^0_{ijkm}}{|\nabla u^n_{ijkm}|}\nabla u^{n+1}_{ijkm}.\mathbf{n}\ de = 0,\ \forall v_{ijkm} \in \mathcal{V}. \tag{3.20}$$

V tejto chvíli si zavedieme aproximácie, ktorými nahradíme štvorec normy objemového gradientu funkcie u, štvorec normy gradientu steny konečného objemu funkcie u a štvorec normy objemového gradientu obrázka I. Schéma používa na výpočet týchto aproximácií hodnoty v bodoch y^{pqrs}_{ijkm}, $(pqrs) \in I^2$, ktoré sú aproximovanými hodnotami v stredoch hrán konečných objemov.

$$\begin{aligned}
u^{pq00}_{ijkm} &= \frac{1}{4}\left(u_{i,j,k,m} + u_{i+p,j,k,m} + u_{i,j+q,k,m} + u_{i+p,j+q,k,m}\right)\\
u^{p0r0}_{ijkm} &= \frac{1}{4}\left(u_{i,j,k,m} + u_{i+p,j,k,m} + u_{i,j,k+r,m} + u_{i+p,j,k+r,m}\right)\\
u^{0qr0}_{ijkm} &= \frac{1}{4}\left(u_{i,j,k,m} + u_{i,j+q,k,m} + u_{i,j,k+r,m} + u_{i,j+q,k+r,m}\right)\\
u^{p00s}_{ijkm} &= \frac{1}{4}\left(u_{i,j,k,m} + u_{i+p,j,k,m} + u_{i,j,k,m+s} + u_{i+p,j,k,m+s}\right)\\
u^{0q0s}_{ijkm} &= \frac{1}{4}\left(u_{i,j,k,m} + u_{i,j+q,k,m} + u_{i,j,k,m+s} + u_{i,j+q,k,m+s}\right)\\
u^{00rs}_{ijkm} &= \frac{1}{4}\left(u_{i,j,k,m} + u_{i,j,k+r,m} + u_{i,j,k,m+s} + u_{i,j,k+r,m+s}\right)
\end{aligned}$$

Potom aproximovanú hodnotu gradientu na stene e^{1000}_{ijkm} vyjadríme nasledovne

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|e^{1000}_{ijkm}|}\int_{e^{1000}_{ijkm}} \nabla u_{ijkm}\,dx \approx{}& \frac{u_{i+1,j,k,m} - u_{i,j,k,m}}{h}e_1 + \frac{u^{1,1,0,0}_{i,j,k,m} - u^{1,-1,0,0}_{i,j,k,m}}{h}e_2 +\\
&+\frac{u^{1,0,1,0}_{i,j,k,m} - u^{1,0,-1,0}_{i,j,k,m}}{h}e_3 + \frac{u^{1,0,0,1}_{i,j,k,m} - u^{1,0,0,-1}_{i,j,k,m}}{h}e_4.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Použitím podobných výrazov si aproximujeme gradienty aj na zvyšných stenách. Týmto dostaneme aproximácie $\nabla^{pqrs}u^{n-1}_{ijkm}$ v centrách stien konečného objemu. Následne si zavedieme označenie

$$
\begin{aligned}
Q^{n;pqrs}_{\varepsilon,ijkm} &= \sqrt{\varepsilon^2 + |\nabla^{pqrs} u^n_{ijkm}|^2} \\
\overline{Q}^n_{\varepsilon,ijkm} &= \sqrt{\varepsilon^2 + \frac{1}{8} \sum_{(pqrs)\in I^1} |\nabla^{pqrs} u^n_{ijkm}|^2} \\
g^{pqrs}_{ijkm} &= g^0\left(\sqrt{|\nabla^{pqrs} I_{ijkm}|^2 + \varepsilon^2}\right).
\end{aligned}
\tag{3.22}
$$

Hodnoty $|\nabla^{pqrs} I_{ijkm}|$ vypočítame obdobným vzťahom, ako sme použili pre $|\nabla^{pqrs} u^{n-1}_{ijkm}|$ ale do výpočtu u^{pqrs}_{ijkm} bude namiesto funkcie u_{ijkm} vstupovať funkcia I^0_{ijkm}. V rovnici (3.20) si integrál cez hranicu konečného objemu prepíšeme na sumu integrálov cez jednotlivé steny konečného objemu a presné hodnoty nahradíme aproximáciami (3.22), čím dostaneme

$$
\int_{v_{ijkm}} \frac{u^{n+1}_{ijkm} - u^n_{ijkm}}{\overline{Q}^n_{\varepsilon,ijkm}\tau} dx - \sum_{(pqrs)\in I^1} \int_{e_{ijkm}} \left(\frac{g^{pqrs}_{ijkm}\left(u^{n+1}_{i+p,j+q,k+r,m+s} - u^{n+1}_{i,j,k,m}\right)}{Q^{n;pqrs}_{\varepsilon,ijkm} h} \right) dx = 0,
$$

$$
\forall v_{ijkm} \in \mathcal{V}. \tag{3.23}
$$

Následnou integráciou a predelením h^{d-2} dostaneme výslednú numerickú schému

$$
\frac{h^2}{\overline{Q}^n_{\varepsilon,ijkm}\tau}\left(u^{n+1}_{ijkm} - u^n_{ijkm}\right) + \sum_{(pqrs)\in I^1} \frac{g^{pqrs}_{ijkm}\left(u^{n+1}_{i,j,k,m} + u^{n+1}_{i+p,j+q,k+r,m+s}\right)}{Q^{n;pqrs}_{\varepsilon,ijkm}} = 0. \tag{3.24}
$$

.

Výsledná schéma reprezentuje sústavu lineárnych algebrických rovníc, ktorú budeme v našom prípade riešiť pomocou algoritmu *SOR*. Táto schéma sa dá použiť aj pre 3D úlohy, pre 2D úlohy je analógiou tejto schémy schéma *diamond cell*. Je to kvôli tomu, že na schému *reduced diamond cell* sa v 3D dá pozerať ako na použitie *diamond cell* schémy v dvoch rovinách obsahujúcich $x_{i,j,k,m}$, $x_{i+1,j,k,m}$.

3.3.3 Algoritmus

Aj pri tejto schéme sme sa dopracovali k systému rovníc (3.24), ktorý predstavuje semi-implicitnú schému. Tento systém potrebujeme implementovať a riešiť. V tejto časti predstavíme postup na riešenie tohto systému rovníc. Najskôr potrebujeme nastaviť hodnoty prvkom $u(0, x)$ pomocou funkcie u^0, ktorú sme vopred skonštruovali postupom uvedeným v časti 2.1.

$$
u^0_{i,j,k,m} = u^0(x_{i,j,k,m})
$$

Následne načítame vstupný obraz, čiže nastavíme hodnoty $I^0_{i,j,k,m}$ načítaním z obrazu. Na hranicu obrazu nastavíme okrajové podmienky a to tak, že spravíme zrkadlenie hodnôt I^0_{ijkm} okrajových doxelov smerom von, čím rozšírime výpočtovú oblasť. Pomocou vzťahu (3.21) vypočítame približné hodnotu normy gradientu obrazu na stenách doxelov $|\nabla^{pqrs} I_{ijkm}|$, ktoré budú v regularizovanej forme vstupovať do funkcie $g^0(s)$ a podľa vzťahu (3.22) vypočítame g^{pqrs}_{ijkm}. Potom budeme v každom čase n počítať hodnoty $Q^{n-1;pqrs}_{\varepsilon,ijkm}$ a $\overline{Q}^{n-1}_{\varepsilon,ijkm}$, ktoré reprezentujú normu gradientu na stene konečného objemu a normu objemového gradientu konečného objemu v regularizovanom tvare. Tieto hodnoty vypočítame podľa vzťahu (3.22). Ďalej označíme koeficienty systému rovníc (3.24) pre potreby SOR metódy $w_{i,j,k,m}$, $e_{i,j,k,m}$, $n_{i,j,k,m}$, $s_{i,j,k,m}$, $o_{i,j,k,m}$, $p_{i,j,k,m}$, $q_{i,j,k,m}$, $r_{i,j,k,m}$, $c_{i,j,k,m}$, $b_{i,j,k,m}$ a konštruujeme ich

$$w_{i,j,k,m} = \frac{g^{-1,0,0,0}_{i,j,k,m}}{Q^{n-1;-1,0,0,0}_{\varepsilon,ijkm}}, \quad e_{i,j,k,m} = \frac{g^{1,0,0,0}_{i,j,k,m}}{Q^{n-1;1,0,0,0}_{\varepsilon,ijkm}}$$
$$n_{i,j,k,m} = \frac{g^{0,-1,0,0}_{i,j,k,m}}{Q^{n-1;0,-1,0,0}_{\varepsilon,ijkm}}, \quad s_{i,j,k,m} = \frac{g^{0,1,0,0}_{i,j,k,m}}{Q^{n-1;0,1,0,0}_{\varepsilon,ijkm}}$$
$$fr_{i,j,k,m} = \frac{g^{0,0,-1,0}_{i,j,k,m}}{Q^{n-1;0,0,-1,0}_{\varepsilon,ijkm}}, \quad ba_{i,j,k,m} = \frac{g^{0,0,1,0}_{i,j,k,m}}{Q^{n-1;0,0,1,0}_{\varepsilon,ijkm}}$$
$$pa_{i,j,k,m} = \frac{g^{0,0,0,-1}_{i,j,k,m}}{Q^{n-1;0,0,0,-1}_{\varepsilon,ijkm}}, \quad fu_{i,j,k,m} = \frac{g^{0,0,0,1}_{i,j,k,m}}{Q^{n-1;0,0,0,1}_{\varepsilon,ijkm}}$$

$$c_{i,j,k,m} = w_{i,j,k,m} + e_{i,j,k,m} + n_{i,j,k,m} + s_{i,j,k,m} + ba_{i,j,k,m} + fr_{i,j,k,m} + pa_{i,j,k,m} + fu_{i,j,k,m} + \frac{h^2}{\overline{Q}^{n-1}_{\varepsilon,ijkm}\tau}$$

$$b_{i,j,k,m} = \frac{h^2 u^{n-1}_{i,j,k,m}}{\overline{Q}^{n-1}_{\varepsilon,ijkm}\tau}$$

a riešime lineárny systém

$$c_{i,j,k,m}u^n_{i,j,k,m} - w_{i,j,k,m}u^n_{i-1,j,k,m} - e_{i,j,k,m}u^n_{i+1,j,k,m} - n_{i,j,k,m}u^n_{i,j-1,k,m} - s_{i,j,k,m}u^n_{i,j+1,k,m} -$$
$$- ba_{i,j,k,m}u^n_{i,j,k-1,m} - fr_{i,j,k,m}u^n_{i,j,k+1,m} - pa_{i,j,k,1}u^n_{i,j,k,m-1} - fu_{i,j,k,m}u^n_{i,j,k,m+1} = b_{i,j,k,m}.$$

Aj na riešenie tohto systému sme použili *successive-over-relaxation* (SOR) iteračnú metódu. Po vyriešení systému dostaneme hodnoty $u^{n+1}_{i,j,k,m}$, ktoré predstavujú riešenie úlohy segmentácie v ďalšom segmentačnom časovom kroku. Po vypočítaní riešenia je potrebné nastaviť okrajové podmienky $u_{i,j,k,m}$ v konečných objemoch ležiacich na hranici výpočtovej oblasti pre nasledujúci segmentačný časový krok. Okrajové podmienky nastavíme rovnakou reflexiou, ako v predchádzajúcej schéme. Nasledovne je celý proces výpočtu riešenia pomocou metódy SOR identický ako pri EHM schéme. Algoritmus vyzerá nasledovne:

1. Načítanie obrazu $I^0_{i,j,k,m}$
2. Nastavenie počiatočnej podmienky $u^0_{i,j,k,m}$
3. Výpočet normy gradientu obrazu na stenách konečných objemov a výpočet váhovej funkcie $g^{pqrs}_{i,j,k,m}$
4. Cyklus cez čas ($n = 0, 1, ..., N$)
   (a) Výpočet gradientov $Q^{n-1;pqrs}_{\varepsilon,ijkm}$ a $\overline{Q}^{n-1}_{\varepsilon,ijkm}$ v časovom kroku n

(b) SOR

(c) Nastavenie okrajových podmienok pre ďalší časový krok $u^{n+1}_{i,j,k,m}$

(d) Kontrola zastavovacej podmienky

4 Numerická schéma pre treking

Ako už bolo spomínané v časti o matematickom modely, schéma pre nájdenie trajektórií je založená na vytvorení potenciálového poľa a následnej metóde najstrmšieho spádu. V [7, 8, 10] je metóda popísaná všeobecnejšie, pre naše príklady stačí použiť jednoduchšiu formu. Pre úplnosť ju popisujeme.

4.1 Vytvorenie potenciálového poľa

Potenciálové pole zostrojíme pomocou dvoch funkcií vzdialenosti. Prvá funkcia určuje vzdialenosť bodu od najvzdialenejšieho centra, s ktorým je súvisle spojená a druhá určuje vzdialenosť od hranice segmentácie. Na výpočet hodnôt týchto funkcií v jednotlivých bodoch (doxeloch) potrebujeme riešiť časovo závislú rovnicu

$$d_t + |\nabla d| = 1 \tag{4.1}$$

pre neznámu funkciu $d\,(x_1, x_2, x_3, \theta, t)$. Opäť riešime 4D úlohu z pohľadu priestoru, kde ∇d je štvorrozmerný gradient, respektíve vektor parciálnych derivácií podľa x_1, x_2, x_3, θ. Pre riešenie rovnice (4.1) potrebujeme predpísať nulové Dirichletove podmienky pre body, od ktorých počítame vzdialenosť. V našom prípade to bude pre body identifikátorov v prípade prvej funkcie vzdialenosti a pre body hranice segmentácie v prípade druhej funkcie vzdialenosti. Túto rovnicu budeme riešiť numericky použitím *Rouy-Tourinovej schémy s fixovaním.* Na to aby sme mohli túto rovnicu riešiť numericky, potrebujeme si zaviesť diskretizáciu a značenie. Výpočtovú oblasť Ω si zvolíme totožnú s oblasťou na ktorej sme robili segmentáciu. Priamočiaro sa nám ponúka diskretizovať oblasť na body umiestnené v centrách doxelov, keďže hodnota segmentačnej funkcie je v každom doxely konštantná. Tieto 4D doxely si označíme V_{ijkm}. Priestorový krok si zvolíme $h = \frac{1}{M_1}$, kde M_1 predstavuje šírku obrazu. Nech d^n_{ijkm} označuje aproximovanú hodnotu riešenia d v centre V_{ijkm} a v diskrétnom časovom kroku $t^n = n\tau$, kde τ označuje veľkosť časového kroku. Pre každý V_{ijkm} definujeme množinu indexov $N_{ijkm} = \{(p, q, r, s)\,,\ |p| + |q| + |r| + |s| = 1\}$ a pre všetky $(p, q, r, s) \in N_{ijkm}$ definujeme

$$D^{pqrs}_{ijkm} = \left(min\left(d^{n-1}_{i+p,j+q,k+r,m+s} - d^{n-1}_{i,j,k,m}, 0\right)\right)^2 \tag{4.2}$$

a následne

$$\begin{aligned} M^{1,0,0,0}_{i,j,k,m} &= max\left(D^{1,0,0,0}_{i,j,k,m}, D^{-1,0,0,0}_{i,j,k,m}\right),\ M^{0,1,0,0}_{i,j,k,m} = max\left(D^{0,1,0,0}_{i,j,k,m}, D^{0,-1,0,0}_{i,j,k,m}\right),\\ M^{0,0,1,0}_{i,j,k,m} &= max\left(D^{0,0,1,0}_{i,j,k,m}, D^{0,0,-1,0}_{i,j,k,m}\right),\ M^{0,0,0,1}_{i,j,k,m} = max\left(D^{0,0,0,1}_{i,j,k,m}, D^{0,0,0,-1}_{i,j,k,m}\right), \end{aligned} \tag{4.3}$$

Použitím tohto označenia má Rouy-Tourinovej schéma nasledujúci tvar

$$d_{ijkm}^{n} = d_{ijkm}^{n-1} + \tau - \frac{\tau}{h}\sqrt{M_{ijkm}^{1000} + M_{ijkm}^{0100} + M_{ijkm}^{0010} + M_{ijkm}^{0001}}, \tag{4.4}$$

aby bola schéma stabilná potrebujeme zvoliť $\tau = \frac{h}{2}$. V rovnici (4.4) si môžeme všimnúť, že hodnota d_{ijkm}^{n} sa mení len vďaka susedom s nižšou hodnotou. V bode V_{ijkm} sme dosiahli ustálený stav, ak sa hodnota d_{ijkm}^{n} mení už len slabo a teda $\left(d_{ijkm}^{n} - d_{ijkm}^{n-1}\right) \leq TOL$. Nech $\mathcal{I}$ je množina všetkých indexov $(ijkm)$ a nech množina $\mathcal{F} \subset \mathcal{I}$ taká, že v doxeloch prislúchajúcim k indexom $(ijkm)$ už nastal ustálený stav. Teda o doxeloch V_{ijkm} takých, že $(ijkm) \in \mathcal{F}$ povieme, že sú fixované a už v nich nepočítame hodnotu v ďalších časových krokoch. Keďže všetky operácie vykonávame len na množine bodov, ktoré ešte nedosiahli ustálený stav (počet bodov v ustálenom stave s rastúcim časom t narastá), tak sa čas na výpočet jedného časového kroku pre narastajúci čas zmenšuje. Algoritmus Rouy-Tourinovej schémy je nasledovný:

- Do while $\mathcal{F} \neq \mathcal{I}$
  - Do for all $(ijkm) \in \mathcal{I}$
    - if $(ijkm) \in \mathcal{F}$ then continue
    - else
      - update d_{ijkm}^{n+1} with (4.4)
      - if $\left(d_{ijkm}^{n+1} - d_{ijkm}^{n}\right) \leq TOL$ then $\mathcal{F} = \mathcal{F} \cup \{(ijkm)\}$
  - $n = n + 1$

Vyššie uvedený algoritmus na riešenie rovnice (4.1) použijeme pre výpočet prvej distance funkcie d a druhej distance funkcie d_B. Tie sú použité na skonštruovanie potenciálového poľa nasledujúcim spôsobom:

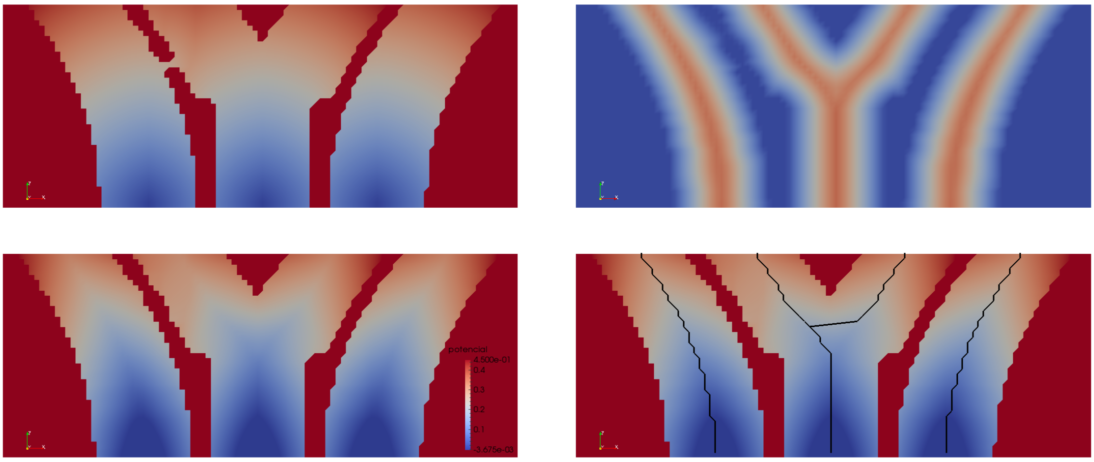
1. Vypočítame hodnoty funkcie d. Podľa nami vybratej izoplochy reprezentujúcej segmentáciu si zvolíme prahovú konštantu λ. Pre všetky V_{ijkm}, také, že hodnota segmentačnej funkcie $u_{ijkm} < \lambda$ nastavíme hodnotu $d_{ijkm}^{0} = BIG$ a $\mathcal{F} = \mathcal{F} \cup (ijkm)$. Pre ostatné V_{ijkm} nastavíme $d_{ijkm}^{0} = 0$. Ak je V_{ijkm} doxel, v ktorom sa nachádza identifikátor S_z^0, $z = 1, 2, ..., n_0$ tak $\mathcal{F} = \mathcal{F} \cup (ijkm)$. Následne na výpočet d použijeme algoritmus Rouy-Tourinovej schémy uvedený vyššie.

2. Postupujeme ako v predchádzajúcom kroku, avšak pre každý doxel nastavíme počiatočnú hodnotu funkie $d_B^0 = 0$ a zafixujeme všetky V_{ijkm}, ktoré sa nachádzajú na hranici alebo mimo 4D segmentácie, čiže V_{ijkm}, $u_{ijkm} \leq \lambda$.

3. Výsledné potenciálové pole v skonštruujeme odčítaním druhej funkcie vzdialenosti d_B od prvej funkcie vzdialenosti d a teda

$$v\left(x_1, x_2, x_3, \theta\right) = d\left(x_1, x_2, x_3, \theta\right) - d_B\left(x_1, x_2, x_3, \theta\right).$$

Pre ujasnenie si môžeme naše potenciálové pole v predstaviť ako úzke údolie (kaňon), nachádzajúce sa vo vnútri segmentácie. Toto údolie klesá z bodu najviac vzdialeného od bodu



Obr. 4.1: Rez grafu funkcie d (vľavo hore), grafu funkcie d_B (vpravo hore), rez grafu funkcie v (vľavo dole) a spolu s trajektóriami (vpravo dole). Rozmer θ je orientovaný vo vertikálnom smere.

počiatočného identifikátora až dosiahne minimum práve v bode tohto identifikátora. Pričom hĺbka údolia sa zväčšuje smerom do stredu segmentácie. Po tom ako sme skonštruovali potenciálové pole, môžeme pristúpiť k extrakcií trajektórií.

4.2 Extrakcia trajektórií

Algoritmus extrakcie trajektórií je založený na metóde najstrmšieho spádu. Túto metódu si môžeme predstaviť akoby sme v tomto údolí (potenciálové pole) pustili loptičku, ktorá by štartovala v najvyššom bode údolia. Tá by prišla až do najnižšieho bodu údolia. Trajektória je reprezentovaná postupnosťou bodov v časopriestore P_z^θ, kde $\theta \in [N_b, N_e]$ a $1 \leq N_b < N_e \leq N_{\theta_T}$. Extrakcia trajektórií sa deje v dvoch krokoch:

1. Použitie metódy najstrmšieho spádu v potenciálovom poli v pre identifikátory $S_z^{\theta_T}$
2. Použitie metódy najstrmšieho spádu pre funkciu d_B v časovom kroku θ

V tejto časti algoritmu už nepovažujeme štvrtú súradnicu θ za priestorovú, ale budeme o nej hovoriť ako o čase. V prvom kroku si vytvoríme pomocný bod $P_T^\theta = S^\theta$. Potom v najbližšom okolí bodu P_T^θ hľadáme rekurzívne doxel s minimálnou hodnotou potenciálu v, ale len v časovom kroku θ a $\theta - 1$. Ako bod trajektórie P^θ pre časový krok θ si označím doxel z ktorého sme sa posunuli do bodu v predchádzajúcom časovom kroku $\theta - 1$. Bod do ktorého sme sa posunuli si označíme ako pomocný bod $P_T^{\theta-1}$ a opakujeme tento postup. Ak sa v čase θ nevieme posunúť do predchádzajúceho času, tak časopriestorová segmentačná izoplocha nie je spojitá a je potrebné použiť všeobecnejšiu formu algoritmu, tak ako je popísaná v [8]. Pre potreby našich príkladov to nie je potrebné.

Po nájdení trajektórie zopakujeme rovnaký postup, budeme hľadať lokálne maximá pre funkciu d_B ale vždy iba v danom konkrétnom časovom kroku θ a ako pomocný bod P_T^θ si zvolíme už nájdený bod trajektórie P^θ. Týmto spôsobom trajektórie vycentrujeme.

5 Numerické výsledky

V tejto časti predstavujeme výsledky príkladov, na ktorých sme testovali obidve schémy. Schémy boli testované v 3D a 4D úlohách, v ktorých sa pohybovali objekty. Cieľom bolo segmentovať objekt a následne použiť segmentáciu na hľadanie trajektórie tohto objektu. Nájdená trajektória nám pri umelých príkladoch dáva určitú informáciu o kvalite segmentácie. Funkciu ϕ_i, ktorá sa používa na vytvorenie funkcie u^0 určujúcej počiatočnú podmienku (časť 2.1) sme pre každý príklad zvolili nasledovne

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x-S_i|+b}, & \text{ak } |x-S_i| \leq R^2 \\ \frac{1}{R+b}, & \text{inak} \end{cases}, \tag{5.1}$$

kde $x = (x_1, x_2, x_3, \theta)$, $S_i, i = 1, ..., N$ sú identifikátory, R je polomer a $\frac{1}{b}$ je maximum tejto funkcie. Funkciu $g(s)$, ktorá poskytuje informáciu o hranách v obraze, vyzerá v regularizovanom tvare nasledovne

$$g(s) = \sqrt{\varepsilon^2 + \left(\frac{1}{1+Ks^2}\right)^2}, \tag{5.2}$$

kde s je norma gradientu obrazu, ε je regularizačný parameter a $K > 0$.

5.1 3D príklady

Najskôr predstavíme 3D príklady (2D video), keďže sa tieto dáta dajú lepšie vizualizovať. Ako prvý príklad predstavujeme segmentáciu kruhu, ktorý sa pohybuje náhodne v štvorcovej oblasti 100×100. Obraz má veľkosť 30 v časovom rozmere θ. Celkový rozmer dát je $100 \times 100 \times 30$, keďže sa na video pozeráme ako na jeden 3D objekt. Ide o príklad bez porušenej hranice, tak sme zvolili $\varepsilon = 1$ podľa [2]. Parameter K, ktorý vystupuje vo funkcií $g(s)$ sme volili rôzne. Ako kritérium pre zastavenie výpočtu sme zvolili $L_2(\Omega)$ normu rozdielu funkcií v dvoch po sebe nasledujúcich časových krokoch. Ak bola táto norma menšia ako 0.0005 tak sme výpočet zastavili. Veľkosť časového kroku sme zvolili proporcionálne k priestorovému $\tau = h^2$. Na príklad sme použili obe schémy, ich porovnanie môžete vidieť v tabuľke 5.1 a 5.2. Pri oboch schémach sa ako najlepšia voľba javí $K = 0.1$. Do tabuliek sme na porovnanie uviedli počet časových krokov, vzdialenosť nájdenej trajektórie od identifikátorov pred a po centrovaní. Vizualizáciu výsledkov ukazujeme na Obr. 5.1. Na obrázku sú zvizualizované jednotlivé 2D časové rezy poukladané na sebe, čím vytvárajú 3D objem. Môžete vidieť pôvodné dáta, segmentačnú funkciu a zvolené izoplochy, ktoré boli použité na nájdenie trajektórie.

Ďalším 3D príkladom je simulácia situácie, že sa vedľa seba pohybuje viacero buniek, pričom dochádza aj k deleniu bunky. Predstavujeme podobnú úlohu ako v [9], v ktorej sa pohybujú 3 disky iba v smere osi x, pričom v polovici videa príde k deleniu stredného disku. Všetky parametre sme zvolili ako v predchádzajúcej úlohe a takisto sme na riešenie použili obe metódy. Výsledky prezentujeme v tabuľke 5.3, tabuľke 5.4 a obrázku 5.3, kde sú výsledky pre EHM schému $K = 1$ a RDC schému $K = 10$.

Tabuľka 5.1: 3D príklad - náhodný pohyb kruhu EHM schéma

K	n_T	d	d(centrovaná)
0.001	491	4.715	4.025
0.01	546	4.674	3.849
0.1	581	4.365	3.704
1	691	4.633	3.798
10	812	4.688	4.03
100	475	-	-
1000	546	-	-

Tabuľka 5.2: 3D príklad - náhodný pohyb kruhu RDC schéma

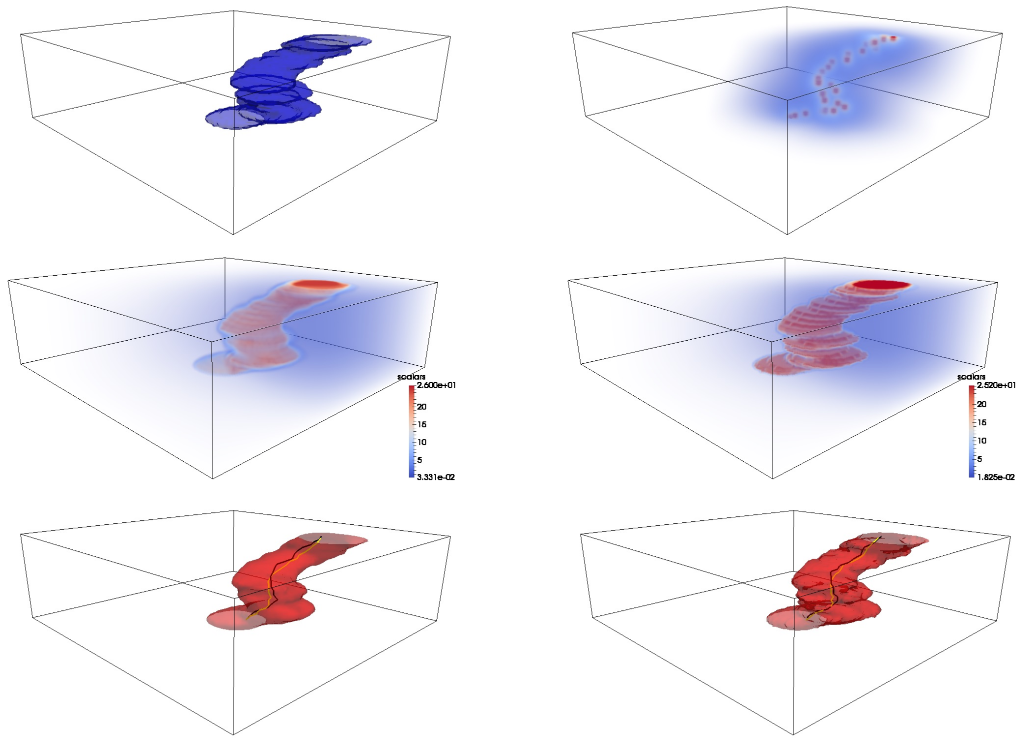
K	n_T	d	d(centrovaná)
0.001	421	4.063	3.558
0.01	399	4.236	3.473
0.1	433	4.229	3.552
1	752	4.526	3.616
10	710	4.685	3.735
100	945	-	-
1000	680	-	-

5.2 4D príklady

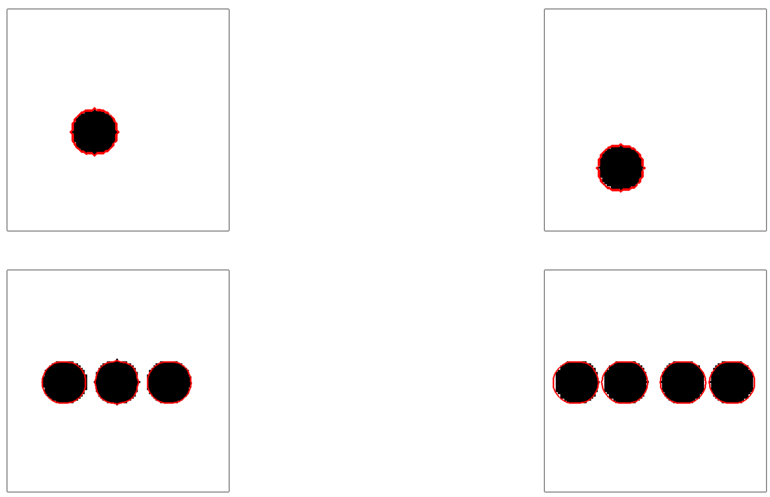
V nasledujúcich príkladoch už pracujeme s 4D obrazom (3D video). Počiatočná podmienka a aj funkcia $g(s)$ ostávajú rovnaké, iba sa analogicky rozšíria o jednu dimenziu. V príklade ktorý prezentujeme máme za úlohu segmentovať gule, ktoré sa pohybujú v objeme 40^3. Video sa skladá z 15 časových krokov, čiže celkový rozmer obrazu je $40 \times 40 \times 40 \times 15$. Na začiatku sa v objeme nachádzajú dve gule, ale v siedmom časovom kroku sa jedna z nich rozdelí na dve. Na riešenie sme použili obe schémy s rovnakými parametrami. EHM schéma riešila túto úlohu efektívnejšie, výpočet jej trval 405 časových krokov, pričom vzdialenosť nájdenej trajektórie od identifikátorov bola $2,127$. RDC schéma vysegmentovala dané objekty za 735 časových krokov. Vzdialenosť trajektórie nájdenej pomocou segmentácie RDC schémou bola $2,458$. Na Obr. 5.4 môžete vidieť segmentáciu vypočítanú EHM schémou a trajektórie.

Teraz sme v príklade so sférami odstránili väčšinu identifikátorov. Ponechali sme len identifikátory v časových krokoch $\theta = 0, 3, 7, 10, 13$. Z pôvodných 39 identifikátorov sme pre počiatočnú podmienku použili len 13. Týmto príkladom overujeme, či model dokáže nájsť segmentáciu aj v časových krokoch, v ktorých chýba identifikátor a teda, či má zmysel uvažovať o θ ako o priestorovej premennej. Na riešenie úlohy sme použili EHM schému, pričom segmentácia trvala len o 7 časových krokov dlhšie a vzdialenosť nájdenej trajektórie je 0,217 väčšia. Výslednú segmentáciu a nájdenú trajektóriu môžte vidieť na Obr. 5.5

Ako posledný predstavujeme príklad segmentácie reálnych dát. Tieto dáta majú rozmer 40^4 a predstavujú výsek z 3D videa, ktoré zachytáva prenatálny vývoj rybičky $zebrafish$. Vo videu môžme pozorovať ako sa v časopriestore pohybujú bunky, ktoré sú reprezentované



Obr. 5.1: Kruh náhodne pohybujúci sa v rovine (hore vľavo) a počiatočná podmienka (hore vpravo). Segmentačná funkcia EHM schéma (vľavo v strede) a RDC schéma (vpravo v strede) a vybraná izoplocha numerického riešenia 3D príkladu EHM schéma (vľavo dole) a RDC schéma (vpravo dole). Žltou farbou je zobrazená nájdená trajektória pred vycentrovaním a čiernou farbou po vycentrovaní.



Obr. 5.2: 2D rezy 3D príkladov. Segmentácia príkladu náhodne pohybujúceho sa kruhu v rovine pomocou RDC schémy (hore) $\theta = 4$ (vľavo), $\theta = 25$ (vpravo). Segmentácia príkladu viacerých kruhov v rovine pomocou EHM schémy (dole) $\theta = 12$ (vľavo), $\theta = 36$ (vpravo).

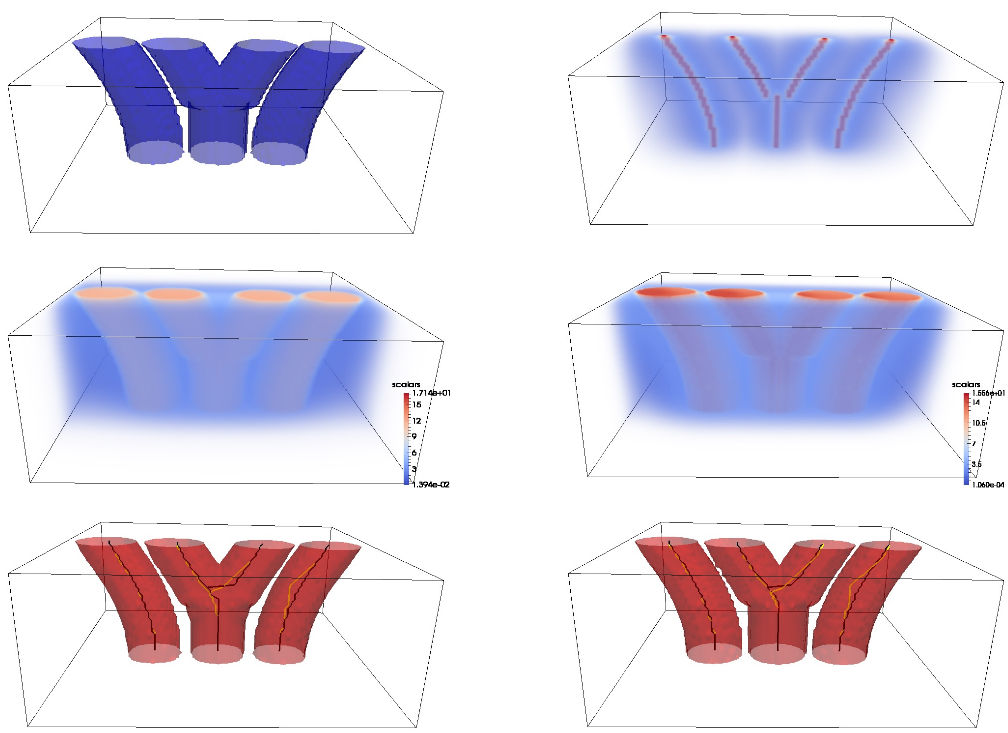
svojimi jadrami. Dáta sú už filtrované a máme dodané aj identifikátory jedného jadra pre všetky časové kroky. Tieto identifikátory sa získavajú pomocou parciálnej difernciálnej rov-

Tabuľka 5.3: 3D príklad - pohyb kruhov EHM schéma

K	n_T	**d**	**d(centrovaná)**
0.01	338	1.007	0.825
0.1	330	0.976	0.737
1	268	0.978	0.620
10	286	-	-

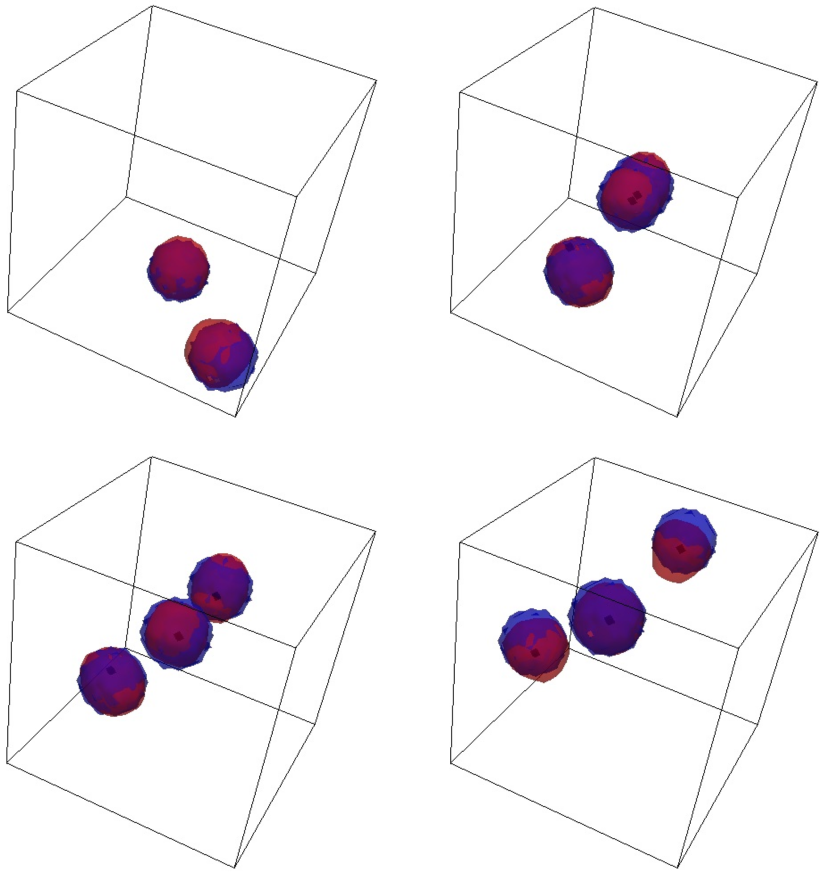
Tabuľka 5.4: 3D príklad - pohyb kruhov RDC schéma

K	n_T	**d**	**d(centrovaná)**
0.01	287	1.023	0.774
0.1	285	1.030	0.773
1	308	1.008	0.766
10	234	0.984	0.686

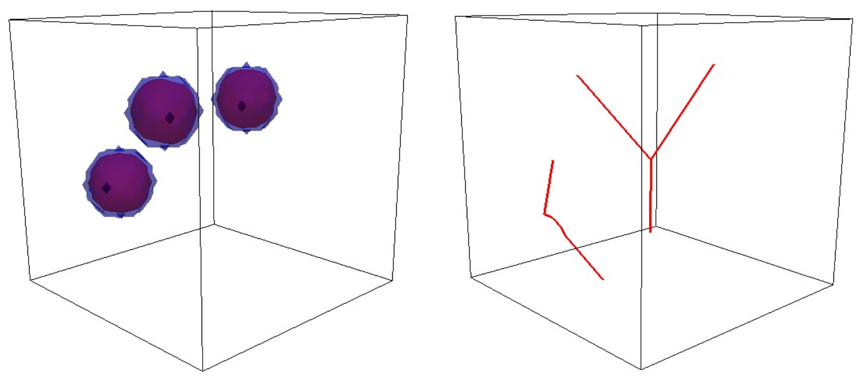


Obr. 5.3: Kruhy pohybujúce sa v sme osi x (hore vľavo) a počiatočná podmienka (hore vpravo). Segmentačná funkcia EHM schéma (vľavo v strede) a RDC schéma (vpravo v strede) a vybraná izoplocha numerického riešenia 3D príkladu EHM schéma (vľavo dole) a RDC schéma (vpravo dole). Žltou farbou je zobrazená nájdená trajektória pred centrovaním a čiernou farbou po centrovaní.

nice popísanej v [6]. Našim cieľom je vysegmentovať dané bunkové jadro ako súvislý objekt v časopriestore a následne použiť segmentáciu na nájdenie trajektórie danej bunky. Pre tento príklad sme nastavili regularizačný parameter $\varepsilon = 10^{-5}$, keďže hranica jadier môže byť po-



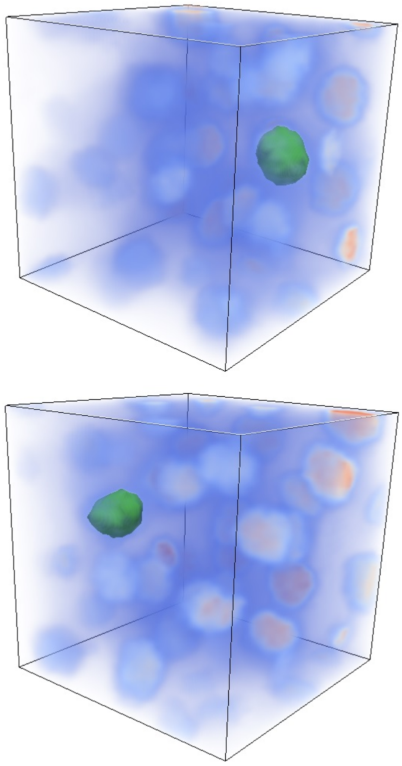
Obr. 5.4: 4D príklad - gule v priestore. Časové rezy $\theta = 0$ (vľavo hore), $\theta = 8$ (vpravo hore), $\theta = 11$ (vľavo dole) a $\theta = 14$ (vpravo dole). Modrou farbou sú zobrazené originálne dáta, červenou farbou segmentácia a čiernou centrovaná trajektória.



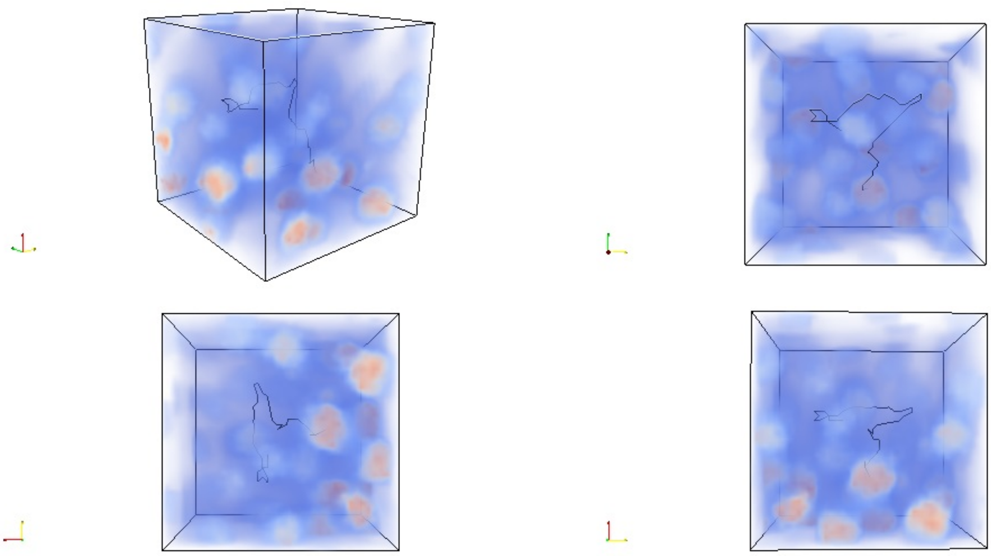
Obr. 5.5: 4D príklad - gule s chýbajúcimi identifikátormi v priestore. Časový rez $\theta = 11$ (vľavo) a nájdené trajektórie (vpravo).

rušená. Ostatné parametre sme nastavili nasledovne: $K = 1$, $TOL = 0.0001$, $\tau = h^2$. V počiatočnej podmienke sme zvolili polomer $R = 0.2$ a koeficient $b = 1$, keďže objekty, ktoré chceme segmentovať sú menšie ako v predchádzajúcich príkladoch. Úloha bola opäť riešená oboma schémami, pričom EHM schéma potrebovala 38 a RDC schéma 36 časových krokov.

Riešenie trvalo menej časových krokov kvôli nižším hodnotám počiatočnej podmienky. Tentokrát na Obr. 5.7 prezentujeme výslednú segmentáciu RDC schémou.



Obr. 5.6: 4D príklad - bunka v priestore. Časové rezy: $\theta = 1$ (vľavo hore), $\theta = 8$ (vpravo hore), $\theta = 22$ (vľavo dole) a $\theta = 39$ (vpravo dole). Objemová reprezentácia originálnych dát a segmentácia (zelená).



Obr. 5.7: Výsledná trajektória (čierna) spolu s pôvodnými dátami pre 4D príklad - bunka v priestore. Rôzne pohľady pre rez $\theta = 0$.

6 Záver

V práci sme predstavili dve numerické schémy: EHM schému a Reduced diamond cell (RDC) schému, ktoré sme rozšírili do štvorrozmerného priestoru. Použili sme ich na riešenie parciálnej diferenciálnej rovnice, ktorá rieši úlohu segmentácie obrazu. Ukázalo sa, že obidve metódy dávajú porovnateľné výsledky. RDC schéma pri príkladoch s členitou hranicou dosahuje mierne lepšie výsledky. Ak sa rieši príklad s menej členitou hranicou tak sa viac osvedčila EHM schéma. Ďalej sme výsledky segmentácie použili na treking, čím sme ukázali reálnu aplikáciu segmentácie. Zároveň sme vďaka trekingu dokázali pri umelých príkladoch aj určitým spôsobom ohodnotiť kvalitu segmentácie. Ďalším pokračovaním v práci by mohlo byť použitie schém na zovšeobecnenú metódu subjektívnych plôch, ako aj testovanie komplexnejších príkladov a paralelizácia výpočtu.

Literatúra

[1] R.Eymard, A.Handlovicova, K.Mikula, Non-diffusive numerical scheme for regularized mean curvature flow level set equation in image processing, Proceedings of the 3rd International Congress on Image and Signal Processing CISP-BMEI 2010, Yantai, China, Vol. 2 (2010) pp. 748-753

[2] K.Mikula, A.Sarti, F.Sgallari, Co-volume level set method in subjective surface based medical image segmentation, in: Handbook of Medical Image Analysis: Segmentation and Registration Models (J.Suri et al., Eds.), Springer, New York, 2005, pp. 583-626

[3] S.Corsaro, K.Mikula, A.Sarti, F.Sgallari, Semi-implicit co-volume method in 3D image segmentation, SIAM Journal on Scientific Computing, Vol. 28, No. 6 (2006) pp. 2248-2265

[4] R.Eymard, A.Handlovicova, K.Mikula, Study of a finite volume scheme for the regularised mean curvature flow level set equation, IMA Journal on Numerical Analysis, Vol. 31 (2011) pp. 813-846

[5] K.Mikula, M.Remesikova, Finite volume schemes for the generalized subjective surface equation in image segmentation, Kybernetika, Vol. 45, No. 4 (2009) pp. 646-656

[6] Emmanuel Faure, Thierry Savy, Barbara Rizzi, Camilo Melani, Olga Stašová, Dimitri Fabreges, Robert Spir, Mark Hammons, Robert Cunderlik, Gaëlle Recher, Benoît Lombardot, Louise Duloquin, Ingrid Colin, Jozef Kollár, Sophie Desnoulez, Pierre Affaticati, Benoît Maury, Adeline Boyreau, Jean-Yves Nief, Pascal Calvat, Philippe Vernier, Monique Frain, Georges Lutfalla, Yannick Kergosien, Pierre Suret, Mariana Remešíková, René Doursat, Alessandro Sarti, Karol Mikula, Nadine Peyriéras and Paul Bourgine, A workflow to process 3D+time microscopy images of developing organisms and reconstruct their cell lineage, Nature Communications 7, Article number: 8674, doi:10.1038/ncomms9674, February 2016

[7] K.Mikula, R.Spir, M.Smisek, E.Faure, N.Peyrieras, Nonlinear PDE based numerical methods for cell tracking in zebrafish embryogenesis, Applied Numerical Mathematics, Vol. 95 (2015) pp. 250-266

[8] K.Mikula, N.Peyrieras, R.Spir, Numerical algorithm for tracking cell dynamics in 4D biomedical images, Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series S (DCDS-S) Volume 8, Number 5 (2015) pp. 953 - 967

[9] K. Mikula, M. Smisek, R. Spir, Parallel algorithms for segmentation of cellular structures in 2D+Time and 3D morphogenesis data, ALGORITMY 2012, 19th Conference on Scientific Computing, Podbanske, Slovakia, September 9-14, 2012, Proceedings of contributed papers and posters (Eds. A.Handlovicova, Z.Minarechova, D.Sevcovic), ISBN 978-80-227-3742-5, Publishing House of STU, 2012, pp. 416-426

[10] Y.Bellaiche, F.Bosveld, F.Graner, K.Mikula, M.Remesikova, M.Smisek, New Robust Algorithm for Tracking Cells in Videos of Drosophila Morphogenesis Based on Finding an

Ideal Path in Segmented Spatio-Temporal Cellular Structures, Proceeding of the 33rd Annual International IEEE EMBS Conference, Boston Marriott Copley Place, Boston, MA, USA, August 30 - September 3, 2011, IEEE Press, 2011, 4 pages

[11] K.Mikula, N.Peyrieras, M.Remesikova, M.Smisek, 4D numerical schemes for cell image segmentation and tracking, in Finite Volumes in Complex Applications VI, Problems and Perspectives, Eds. J.Fořt et al. (Proceedings of the Sixth International Conference on Finite Volumes in Complex Applications, Prague, June 6-10, 2011), Springer Verlag, 2011, pp. 693-702

[12] P.Bourgine, R.Cunderlik, O.Drblikova, K.Mikula, N.Peyrieras, M.Remesikova, B.Rizzi, A.Sarti, 4D embryogenesis image analysis using PDE methods of image processing, Kybernetika, Vol. 46, No. 2 (2010) pp. 226-259

[13] C.Zanella, M.Campana, B.Rizzi, C.Melani, G.Sanguinetti, P.Bourgine, K.Mikula, N.Peyrieras, A.Sarti, Cells Segmentation from 3-D Confocal Images of Early Zebrafish Embryogenesis, IEEE Transactions on Image Processing, Vol.19, No.3 (2010) pp. 770-781

[14] K.Mikula, A.Sarti, Parallel co-volume subjective surface method for 3D medical image segmentation, in: Parametric and Geometric Deformable Models: An application in Biomaterials and Medical Imagery, Volume-II, Springer Publishers, (Eds. Jasjit S. Suri and Aly Farag), ISBN: 0-387-31204-8, 2007, pp. 123-160

[15] A. Sarti, R. Malladi, and J. Sethian, "Subjective surfaces: A method for completing missing boundaries," Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA, vol. 97, no. 12, pp. 6258–6263, 2000

[16] T.Hornáček, vedúci práce: K.Mikula, "Numerické metódy na segmentáciu 4D obrazu," Bakalárska práca, 2015