SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE

Stavebná fakulta

Využitie metód evolúcie plôch v softvéri pre obuvnícky priemysel

Diplomová práca

SvF-5343-35935

Bratislava 2011 **Bc. Martin Tunega**

SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE

Stavebná fakulta

Využitie metód evolúcie plôch v softvéri pre obuvnícky priemysel

Diplomová práca

SvF-5343-35935

Študijný program:	Matematicko-počítačové modelovanie
Číslo a názov študijného odboru:	9.1.9 aplikovaná matematika
Školiace pracovisko:	Katerdra matematiky a deskriptívnej geometrie
Vedúci diplomovej práce:	Prof. RNDr. Mikula Karol, DrSc.

Bratislava 2011 **Bc. Martin Tunega**

Čestné prehlásenie

Vyhlasujem, že som prácu vypracoval samostatne s použitím uvedenej odbornej literatúry a s odbornou pomocou vedúceho práce.

Bratislava 20. 5. 2011 ....

Vlastnoručný podpis

Abstrakt:
V práci zadefinujeme dve metódy pre pohyb plôch, ktoré v našom prípade budú reprezentované obuvníckymi kopytami. Povrchy budú popísané dvoma typmi sietí - štvoruholníkovou alebo trojuholníkovou. Pre trojuholníkové siete zadefinujeme metódu konečných objemov na numerické riešenie parabolických parciálnych diferenciálnych rovníc pre pohyb plochy. Metóda je založená na aproximácii povrchu konečným počtom trojuholníkov a vytvorení slabej formulácie pre Laplace-Beltramiho operátor na tomto povrchu. Numerickou aproximáciou slabej formulácie dostaneme lineárny systém rovníc pre hodnoty riešenia na jednotlivých konečných objemoch, ktorý dokážeme efektívne vyriešiť iteračnou numerickou metódou v každom diskrétnom časovom kroku. Pre štvoruholníkové siete odvodíme metódu, ktorá popisuje pohyb jednotlivých kriviek určujúcich daný povrch a pohyb týchto kriviek zviažeme. Krivky budeme hýbať v smere vektora krivosti, v smere vhodne zvoleného externého vektorového poľa a tak aby sa asymptoticky zachovávala rovnomerná redistribúcia bodov na odpovedajúcich krivkách. V oboch prípadoch je počiatočná podmienka daná začiatočným tvarom obuvníckeho kopyta. Plocha kopyta sa pri vhodne zvolených okrajových podmienkach 'premietne' do roviny. Takýto priemet je nevyhnutný pre správne nanesenie textúry na jeho povrch.
Kľúčové slová: evolúcia plôch, Laplace-Beltramiho operátor, metóda konečných objemov, rovnomerná redistribúcia bodov
Abstract:
In this work we define two different surface evolution methods. In our case a manifold will be represented by surface of the shoelast. Discretized surfaces will be represented by two types of meshes - triangular and rectangular. For triangular meshes we define surface finite volume method for the numerical solution of parabolic partial differential equations for evolving manifold. The main idea is based on approximation of the surface by finite number of triangles and construction of a weak formulation for the Laplace-Beltrami operator on the manifold. By the finite volume approximation of the weak

formulation we obtain a system of linear equations which can be efficiently solved in each discrete time step by an iterative solver. For rectangular meshes we introduce a new method that takes into account the evolution of separate curves which define the surface and then we bind up evolution of these curves. We move the curves in a direction of its curvature vector, suitable external vector field and we keep assymptotically uniform tangential redistribution of curve representing points. In both cases the initial condition is given by the initial shape of the shoelast. For suitably chosen boundary conditions the surface of the shoelast translates into the plane. This 'projection' is necessary for a proper texture mapping onto the surface.
Key words: surface evolution, Laplace-Beltrami operator, finite volume method, uniform redistribution of points

Poďakovanie

Ďakujem vedúcemu práce Prof. RNDr. Karolovi Mikulovi, DrSc., za cenné rady, odbornú pomoc a konzultácie, ktoré mi poskytol pri vypracovaní práce a takisto ďakujem RNDr. Lubomírovi Dižovi z firmy Wing, s.r.o. Partizánske za poskytnutie dát obuvníckeho kopyta a prípravu vhodného formátu dát pre náš algoritmus.

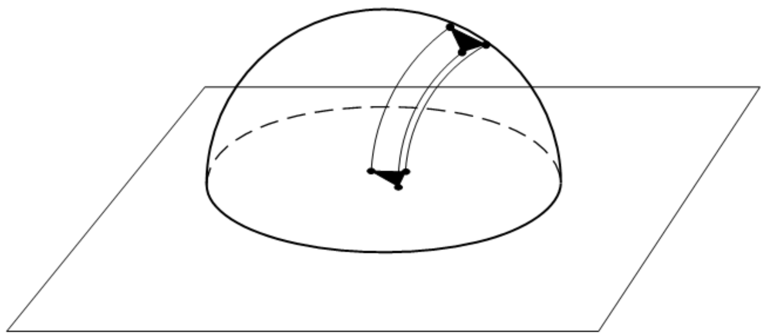
Obsah

Kapitola 1

Úvod

Plochy, ktoré prirodzeným spôsobom minimalizujú svoj povrch boli predmetom už mnohých štúdií. Ide hlavne o plochy, ktoré sú vplyvom povrchového napätia nútené zaujať stav s minimálnou potenciálnou energiou. Takéto povrchy sú napríklad tenká vrstva mydlovej vody, mydlová bublina, štruktúra buniek a pod. Predstavme si mydlovú bublinu zachytenú na nejakej kovovej doske (Obr. 1.1). Ak by sme zabezpečili aby sa vzduch vo vnútri bubliny plynulo vytrácal a pôdorys bubliny ostával zachovaný, body na povrchu by sa vplyvom povrchového napätia premietli do roviny danej pôdorysom.

Našim cieľom bude popísať takýto pohyb a využiť ho na tvorbu priemetov iných zložitejších povrchov. V tejto práci sa budeme venovať evolúcii topánkovej plochy ω v smere strednej krivosti, pretože vektor strednej krivosti $\kappa\mathbf{N}(\mathbf{x})$, kde κ je stredná krivosť a $\mathbf{N}$ normála v danom bode $\mathbf{x} \in \omega$, môžeme chápať ako vektor sily pôsobiacej v dôsledku povrchového napätia v danom bode. Pre vhodné okrajové podmienky budú v rovnovážnom stave všetky body tejto plochy ležať v jednej rovine. Takýto priemet 3D plochy do 2D je potrebný v počítačovej grafike pre správne "nanesenie"textúry na 3D teleso.



Obr. 1.1: Vývoj mydlovej bubliny.

V práci navrhneme dve rôzne metódy na pohyb trojrozmerných plôch. Prvá metóda je založená na aproximácii Laplace-Beltramiho operátora pomocou metódy konečných objemov. Takýto prístup je vhodný pre všeobecnejšie trojuholníkové sieťe. Druhá metóda je navrhnutá pre prirodzene štvoruholníkové siete. Plochy popísané takýmto typom sietí umožnujú veľmi prirodzenú a jednoduchú manipuláciu s krivkami popisujúcich daný povrch. Metóda pracuje s jednotlivými krivkami, pre ktoré je predpísaný pohyb v smere vektora krivosti, vhodne zvoleného vektorového poľa a je zabezpečená rovnomerná redistribúcia bodov na krivke. Krivky však nehýbeme každú osobitne ale ich pohyb je zviazaný a popísaný jedným systémom rovníc.

Kapitola 2

Vývoj topánkovej plochy v smere strednej krivosti

Diferenciálna rovnica, ktorá popisuje pohyb ľubovolnej súvislej a hladkej plochy $\omega \subset \mathbf{R}^3$ závislý od strednej krivosti má v našom prípade nasledujúci tvar

$$\partial_t \mathbf{r} - \Delta_s \mathbf{r} = 0, t \in [0, T], \tag{2.1}$$

pričom uvažujeme počiatočnú podmienku

$$\mathbf{r}(0) = \omega. \tag{2.2}$$

Riešením je vektorová funkcia $\mathbf{r}(t) = [x(t), y(t), z(t)]$, ktorá popisuje vývoj plochy ω, $t \in [0, T]$ je čas a Δ_s je Laplace-Beltramiho operátor, ktorý predstavuje zovšeobecnený Laplaceov operátor na zakrivenom povrchu. Rovnicu budeme riešiť numericky, metódou konečných objemov, využijeme pritom prístup prezentovaný v prácach [10] a [9].

Časovú os $[0, T]$ môžeme rozdeliť na konečný počet bodov t_k, $k = 0, \dots, K$, ktoré budú od seba vzdialené o časový interval $\tau_k = t_k - t_{k-1}$, $k = 1, \dots, K$. Potom funkcia $\mathbf{r}(t_k)$ bude reprezentovať riešenie na k-tej časovej vrstve. Časovú deriváciu $\partial_t \mathbf{r}(t)$ aproximujeme spätnou diferenciou

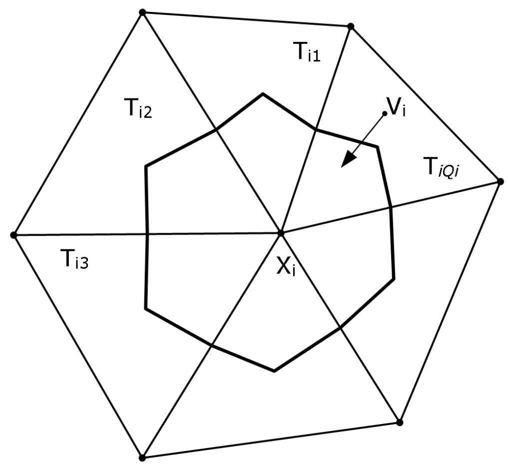
$$\partial_t \mathbf{r}(t) \approx \frac{\mathbf{r}^k - \mathbf{r}^{k-1}}{\tau_k}, k = 1, \dots, K. \tag{2.3}$$

Pre sprehľadnenie zavedieme označenie $\mathbf{r}(t_k) = \mathbf{r}^k$.

2.1 Slabá formulácia úlohy a jej numerická aproximácia

Hlavná myšlienka je založená na aproximácii vyvýjajúcej sa plochy $\mathbf{r}(t)$ konečným počtom trojuholníkov, pomocou ktorých zostrojíme systém konečných objemov. Využijeme Greenovu vetu pre Laplace-Belramiho operátor na zadefinovanie slabej formulácie rovnice (2.1) na konečnom objeme. Numerickou aproximáciou slabej formulácie dostaneme lineárny systém rovníc pre hodnoty riešenia na jednotlivých konečných objemoch, ktorý vieme efektívne vyriešiť iteračnou metódou.

Sieť bodov $X_i = \mathbf{r}_i^k$, $i = 1, \dots, N$ a im prislúchajúce trojuholníky T_{iq}, $q = 1, \dots, Q_i$ máme dané. Číslo Q_i reprezentuje počet trojuholníkov, ktoré majú vrchol v bode X_i. Pre každý bod X_i zadefinujeme konečný objem V_i ako mnohouholník, ktorého vrcholy budú vždy v ťažiskách trojuholníkov a v polovici spojnice bodu X_i a jeho susedov (Obrázok 2.1).



Obr. 2.1: Konečný objem V_i

Rovnicu (2.1), zintegrujeme na konečnom objeme V_i [3],

$$\int_{V_i} \partial_t \mathbf{r} \mathrm{d}\mathbf{x} - \int_{V_i} \Delta_s \mathbf{r} \mathrm{d}\mathbf{x} = 0, \tag{2.4}$$

využijeme Greenovu vetu [2] a dostaneme

$$\int_{V_i} \partial_t \mathbf{r} \mathrm{d}\mathbf{x} - \int_{\partial V_i} \nabla_s \mathbf{r} \cdot \vec{\eta}_i \mathrm{d}s = 0, \tag{2.5}$$

kde vektor $\vec{\eta}_i$ predstavuje vektor jednotkovej vonkajšej normály ku hranici konečného objemu V_i a $\nabla_s \mathbf{r} = [\nabla_s x(t), \nabla_s y(t), \nabla_s z(t)]$ povrchový gradient zložiek vektorovej funkcie $\mathbf{r}$ na príslušnej ploche.

Z geometrie V_i vyplýva, že druhý člen môžeme zapísať ako sumu cez jednotlivé časti hranice ∂V_i a dostaneme tak slabú formuláciu úlohy na konečnom objeme V_i:

$$\int_{V_i} \partial_t \mathbf{r} \mathrm{d}\mathbf{x} - \sum_{q=1}^{Q_i} \int_{\partial V_{iq}} \nabla_s \mathbf{r} \cdot \vec{\eta}_{iq} \mathrm{d}s = 0, \tag{2.6}$$

kde $\vec{\eta}_{iq}$ predstavujú normály ku častiam hranice ∂V_{iq} (Obrázok 2.2). Prvý člen rovnice (2.6) aproximujeme spätnou diferenciou (2.3) a pri jeho numerickej aproximácii na konečnom objeme V_i uvažujeme konštantnú reprezentáciu riešenia danú vektorom $\mathbf{r}_i^k$ v časovom kroku k. Ak v druhom člene rovnice (2.6) uvažujeme riešenia na časovej vrstve k, dostaneme

$$m(V_i)\frac{\mathbf{r}_i^k - \mathbf{r}_i^{k-1}}{\tau_k} - \sum_{q=1}^{Q_i} \int_{\partial V_{iq}} \nabla_s \mathbf{r}^k \cdot \vec{\eta}_{iq} \mathrm{d}s = 0, \tag{2.7}$$

kde $m(V_i)$ predstavuje mieru množiny V_i, v našom prípade plochu konečného objemu V_i.

Pri numerickej aproximácii druhého člena rovnice (2.7) uvažujeme lineárnu reprezentáciu riešenia $\mathbf{r}^k$ na jednotlivých trojuholníkoch, ktorých časti tvoria konečný objem V_i. V takom prípade je povrchový gradient konštantný a teda rovný svojej strednej hodnote, ktorú označíme $P_{T_{iq}}^k$. Potom

$$\nabla_s \mathbf{r}^k \approx P_{T_{iq}}^k = \frac{1}{m(T_{iq})} \int_{T_{iq}} \nabla_s \mathbf{r}^k \mathrm{d}\mathbf{x}, \tag{2.8}$$

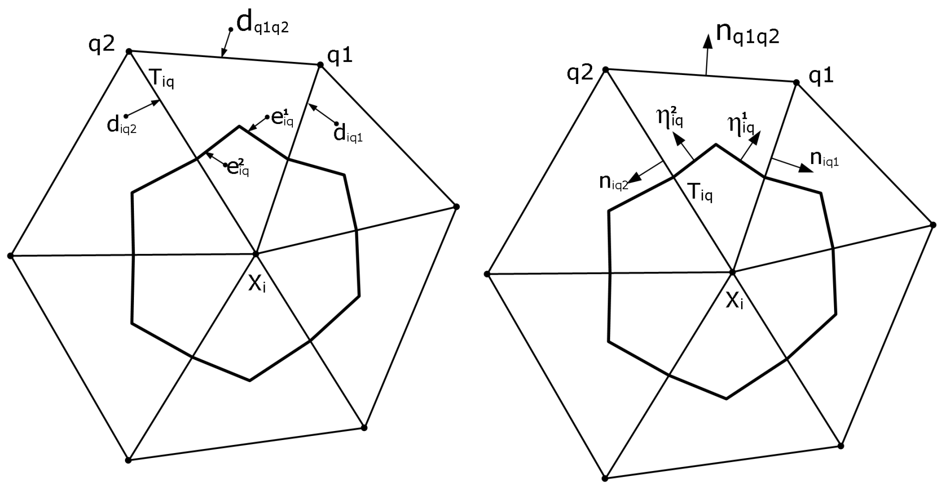
kde $m(T_{iq})$ predstavuje plochu trojuholníka T_{iq}. Využitím Greenovej vety dostaneme

$$P_{T_{iq}}^k = \frac{1}{m(T_{iq})} \int_{\partial T_{iq}} \mathbf{r}^k \vec{n}_{iq} \mathrm{d}s, \tag{2.9}$$

kde $\vec{n}_{iq}$ predstavuje vektor jednotkovej normály na hranu trojuholníka T_{iq} (Obrázok 2.2). Pri lineárnej reprezentácii riešenia môžene tento integrál vypočítať ako súčet priemerov hodnôt riešenia na jednotlivých stranách a dostaneme

$$P_{T_{iq}}^k = \frac{1}{m(T_{iq})}\left(\frac{\mathbf{r}_i^k + \mathbf{r}_{q1}^k}{2} d_{iq1}\vec{n}_{iq1} + \frac{\mathbf{r}_i^k + \mathbf{r}_{q2}^k}{2} d_{iq2}\vec{n}_{iq2} + \frac{\mathbf{r}_{q1}^k + \mathbf{r}_{q2}^k}{2} d_{q1q2}\vec{n}_{q1q2}\right), \tag{2.10}$$

kde d_{iq1}, d_{iq2}, d_{q1q2} sú dĺžky strán trojuholníka T_{iq} a $\mathbf{r}_{q1}^k$, $\mathbf{r}_{q2}^k$ sú hodnoty riešenia v uzlových bodoch $q1$, $q2$ trojuholníka T_{iq} (Obrázok 2.2).



Obr. 2.2: Parametre konečného objemu V_i

Rovnicu (2.7) môžeme potom zapísať v tvare

$$m(V_i)\frac{\mathbf{r}_i^k - \mathbf{r}_i^{k-1}}{\tau_k} - \sum_{q=1}^{Q_i} \int_{\partial V_{iq}} P_{T_{iq}}^k \cdot \vec{\eta}_{iq} \mathrm{d}s = 0. \tag{2.11}$$

Konštantný vektor $P_{T_{iq}}^k$ môžeme vybrať pred integrál a $\int_{\partial V_{iq}} \vec{\eta}_{iq} \mathrm{d}s$ vyjadriť ako $(m(e_{iq}^1)\vec{\eta}_{iq}^1 + m(e_{iq}^2)\vec{\eta}_{iq}^2)$, kde $m(e_{iq}^1)$, $m(e_{iq}^2)$ sú dĺžky príslušných hrán. Potom naša numerická aproximácia má tvar

$$m(V_i)\frac{\mathbf{r}_i^k - \mathbf{r}_i^{k-1}}{\tau_k} - \sum_{q=1}^{Q_i}(m(e_{iq}^1)\vec{\eta}_{iq}^1 \cdot P_{T_{iq}}^k + m(e_{iq}^2)\vec{\eta}_{iq}^2 \cdot P_{T_{iq}}^k) = 0. \tag{2.12}$$

Úpravou rovnice (2.12) dostaneme lineárny systém pre x,y,z súradnice bodov $\mathbf{r}_i^k$

$$\mathbf{r}_i^k - \frac{\tau_k}{m(V_i)}\sum_{q=1}^{Q_i}(m(e_{iq}^1)\vec{\eta}_{iq}^1 \cdot P_{T_{iq}}^k + m(e_{iq}^2)\vec{\eta}_{iq}^2 \cdot P_{T_{iq}}^k) = \mathbf{r}_i^{k-1}. \tag{2.13}$$

Vzhladom na tvar $P_{T_{iq}}^k$, v rovnici pre uzlový bod $X_i = \mathbf{r}_i^k$ vystupujú neznáme hodnoty $\mathbf{r}_i^k$ a $\mathbf{r}_{q1}^k$, $\mathbf{r}_{q2}^k$, $q = 1, \ldots, Q_i$ pre všetkých susedov uzlového bodu X_i. Členy $\mathbf{r}_i^k$, $\mathbf{r}_{q1}^k$ a $\mathbf{r}_{q2}^k$ reprezentujú lokálne označenie neznámych na trojuholníkoch T_{iq}. Pretože meníme v čase geometriu triangulácie sú všetky parametre súvisiace s trianguláciou plochy závislé od času a sú brané z predchádzajúceho časového kroku a mali by mať horný index $k-1$. Pre zprehladnenie sme toto označenie neuvádzali. Tým pádom je nami odvodená schéma semi-implicitná.

V rovnici pre každý uzlový bod X_i, $i = 1, \ldots, N$, budeme mať teda $Q_i + 1$ neznámych $\mathbf{r}_i^k, \mathbf{r}_{i1}^k, \ldots, \mathbf{r}_{iQ_i}^k$. Z rovnice (2.13) si vyjmeme členy, ktoré stoja pri $\mathbf{r}_i^k, \mathbf{r}_{i1}^k, \ldots, \mathbf{r}_{iQ_i}^k$ a nazveme ich $a_{i0}, a_{i1}, \ldots, a_{iQ_i}$. Tieto čísla budú tvoriť nenulové prvky i-teho riadku matice $\mathbf{A}$ rozmeru $N \times N$. Členy $a_{i0}, a_{i1}, \ldots, a_{iQ_i}$ budeme ukladať do stĺpcov podľa globálneho číslovania neznámej, ktorej prislúchajú. Vektor pravej strany b bude daný vektorom riešenia $\mathbf{r}_i^{k-1}$ z predchádzajúceho časového kroku $k-1$.

Pre každý čas k, $k = 1, \ldots, K$ riešime tri lineárne systémy

$$\mathbf{A}x^k = x^{k-1}$$
$$\mathbf{A}y^k = y^{k-1}$$
$$\mathbf{A}z^k = z^{k-1}$$

pričom $\mathbf{r}^0 = \mathbf{r}[x^0, y^0, z^0]$ predstavuje počiatočnú podmienku. Pre dostatočne velké K dospejeme k rovnovážnemu stavu, v ktorom je krivosť plochy minimálna.

Môžeme si všimnúť, že pre krivostnú rovnicu na ploche koeficienty matice **A** závisia od času a vplyv má tiež diskretizácia geometrie povrchu a velkosť časového kroku τ_k. Pretože chceme lineárne systémy riešiť SOR algoritmom matica musí byť diagonálne dominantná. Čiže absolútna hodnota diagonálneho člena musí byť väčšia alebo rovná sume absolútnych hodnôt nediagonálnych členov v danom riadku,

$$|\mathbf{A}_{ii}| \geq \sum_{j \neq i} |\mathbf{A}_{ij}| \qquad i = 1, \ldots, N. \tag{2.14}$$

Experimentálna skúsenosť ukazuje, že pri voľbe

$$\tau_k = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} m(V_i) \tag{2.15}$$

je táto podmienka splnená a SOR metóda konverguje. Pre takúto volbu τ_k najskôr otestujeme podmienku (2.14) a pri jej splnení riešime lineárny systém SOR algoritmom. Pokiaľ by (2.14) nebola splnená zmenšili by sme τ_k na polovicu a vykonali test znova. Je dôležité si všimnúť, že pri evolúcii plochy v čase meníme polohy jednotlivých bodov, preto je nutné zvoliť nový časový krok τ_k po každej časovej iterácii.

2.2 Numerické experimenty

2.2.1 Guľa

V tejto časti si najprv overíme správnosť schémy (2.13) na diskretizovanej guli a odhadneme rád metódy. Porovnáme presnosť metódy s analytickým riešením, sťahujúcou sa guľou, ktorej v čase sa meniaci polomer $\mathbf{r}(t)$ spĺňa

$$\mathbf{r}_p(t) = \sqrt{(\mathbf{r}(0)^2 - 4t)}. \tag{2.16}$$

Z tohoto vzorca vyplýva, že za čas $t = 0.25$ bude v prípade jednotkovej gule polomer rovný 0. Na odhadnutie chyby err použijeme L_2 normu danú

$$err_N^K = \sqrt{\sum_{k=1}^{K} \tau_k \sum_{i=1}^{N} (|\mathbf{r}_p(k\tau_k)| - |\mathbf{r}_i^k|)^2 m(V_i)}. \tag{2.17}$$

Odhad rádu metódy je potom daný

$$EOC = \log_2 \frac{err_N^K}{err_{2N}^{2K}}. \tag{2.18}$$

Chyby err_N^K sme počítali v časovom intervale $[0, T]$, kde $T = 0.1$, $|\mathbf{r}(0)| = 1$, pre rôzne počty uzlových bodov K. Časový krok τ_k sme pre každú diskretizáciu volili podľa (2.14) a po dobu výpočtu sme ho nechali konštantný. Z tabuľky 2.1. vyplýva, že metóda je prvého rádu.

Tabuľka 2.1: Odhad rádu metódy pri väzbe $\tau \sim h$

K	err_N^K	EOC	τ_k	čas výpočtu (s)
602	0.0075987495		0.020763	0.181
1178	0.0047176325	0.687698981	0.010638	0.760
2402	0.0024261229	0.959410403	0.005225	2.855
4706	0.0012204106	0.991286019	0.002668	10.254
9602	0.0006034815	1.015985165	0.001308	39.339
19496	0.000300434	1.006261454	0.000644	161.606

Tabuľka 2.2: Odhad rádu metódy pri väzbe $\tau \sim h^2$

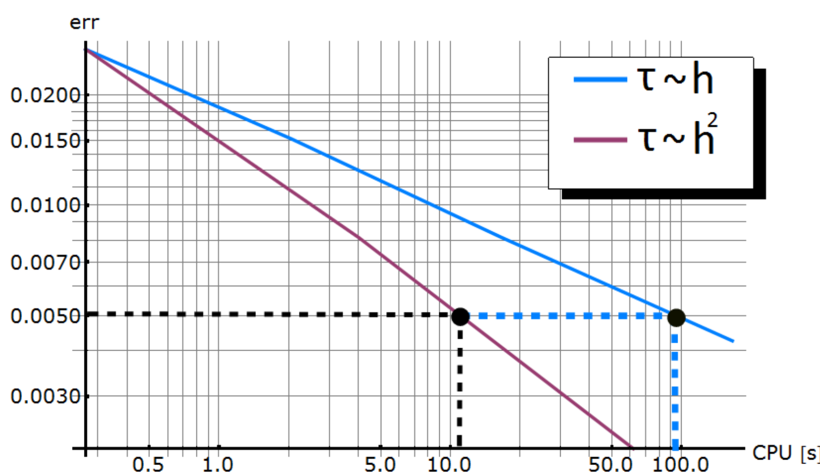
K	err_{2N}^{4K}	EOC	τ_k	čas výpočtu (s)
602	0.0103814610		0.01038146	0.367
1178	0.0023318223	2.154479	0.00531922	1.317
2402	0.0006096656	1.935367	0.00130615	9.924
4706	0.0001410474	2.111838	0.00033355	81.707

Na Obr.2.3 sú porovnané dva prístupy k voľbe časového kroku. V prvom prípade (modrý graf), sme volili $\tau_k \sim h$, kde h chápeme ako veličinu vyjadrujúcu dĺžku najväčšej hrany trojuholníka. Potom je plocha trojuholníka proporcionálna h^2 a teda pri rozdelení hrán na polovicu dostaneme štyri nové trojuholníky zo zhruba štvrtinovou plochou. Preto je prirodzená väzba $\tau_k \sim h^2$, t.j čas sa viaže k ploche trojuholníka. V takom prípade definujeme

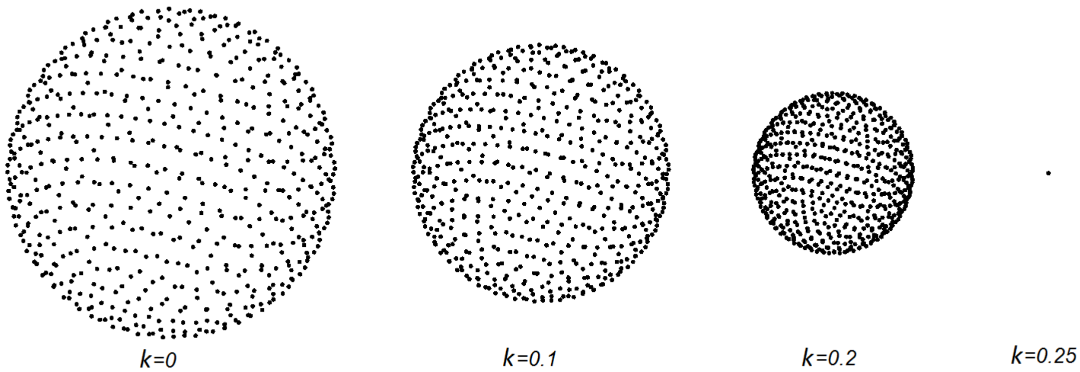
$$EOC = \log_2 \frac{err_N^K}{err_{2N}^{4K}} \tag{2.19}$$

a tabuľky (Tabuľka2.2) vidíme, že metóda je druhého rádu.

Z grafu (Obr.2.3) je zrejmé, že pri voľbe $\tau_k \sim h^2$ dostaneme rovnakú odchylku od presného riešenia $err = 0.005$ za približne 10 sekúnd. Pre voľbu $\tau_k \sim h$ by sme potrebovali približne 10 krát viac času.



Obr. 2.3



Obr. 2.4: Evolúcia guľovej plochy podla krivosti. Počítané pre $N = 602$, $\tau_k = 0.157$, $|\mathbf{r}(0)| = 1$ a $T = 0.25$.

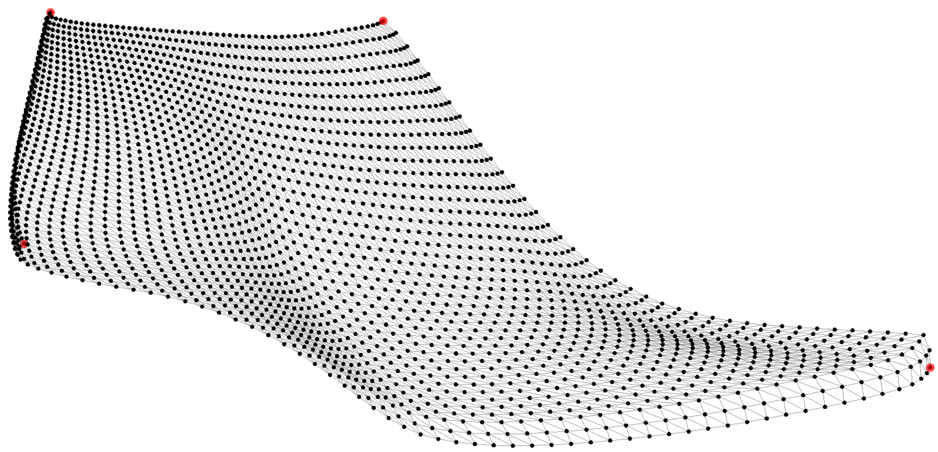
2.2.2 Vývoj topánkovej plochy

Na záver aplikujeme rovnicu (2.1) na topánkovú plochu. Pretože nejde o uzavretú plochu musíme zvoliť vhodné okrajové podmienky. Našim cielom je premietnuť plochu do roviny určenú štyrmi rohovými bodmi (Obr.2.5). Pre tieto body zvolíme Dirichletovu okrajovú podmienku.

$$\mathbf{r}_i(t) = \mathbf{r}_i(0), i \in \mathbf{N}_r, \tag{2.20}$$

kde $\mathbf{N}_r$, je množina globálnych čísel rohových bodov.

Pre ostatné krajné body máme viacero možností. Voľba okrajovej podmienky výrazne ovplyvní celkový výsledok, preto jej budeme venovať špeciálnu pozornosť. Chceme aby priemet plochy bol čo najmenej zdeformovaný, čo znamená, že body by mali byť rovnomerne rozdistribuované po celej ploche a takisto na krajných krivkách.



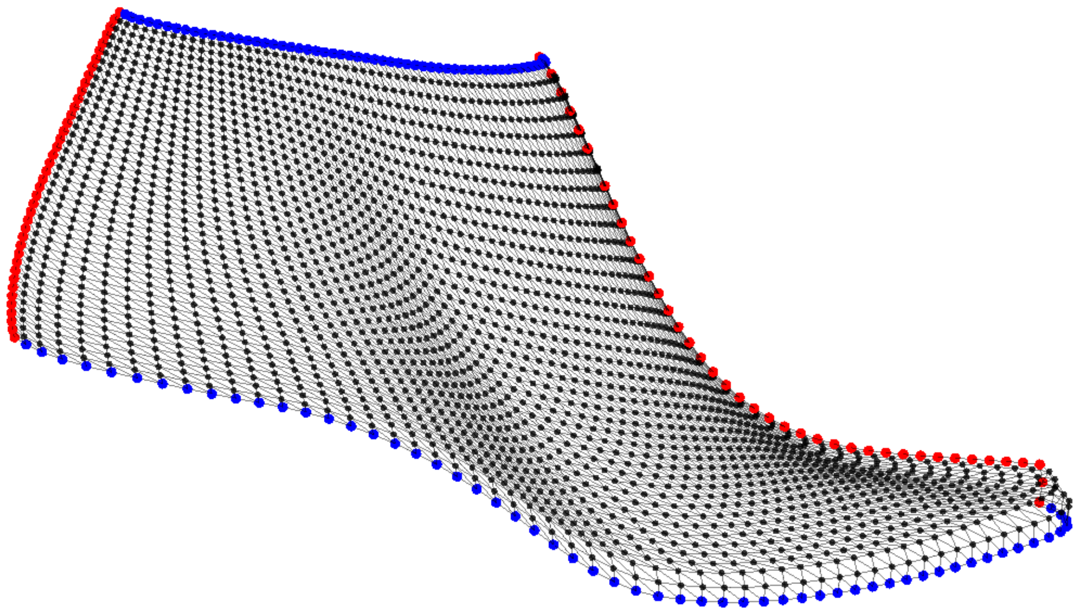
Obr. 2.5: Sieť bodov, ktoré popisujú povrch topánky. Štyri červené body určujú rovinu, do ktorej chceme plochu premietnuť.

Môžeme im zadefinovať rovnakú Dirichletovu okrajovú podmienku, tak ako pre rohové body. To by znamenalo, že ich poloha by sa v čase nemenila, čo nie je vhodné pre horný a spodný okraj topánky. Pre tieto dve línie zvolíme špeciálnu okrajovú podmienku, ktorá zaistí, že body sa budú hýbať len v smere osi kolmej na rovinu priemetu. Pre ostatné krajné body zvolíme rovnakú Dirichletovu okrajovú podmienku tak ako pre rohové body (2.20).

Body topánky sme posunuli a pootočili v priestore tak, že rovina do ktorej robíme priemet je daná rovinou $y = 0$. V takomto prípade pre body vyznačené modrou farbou (Obr.2.6) zadefinujeme okrajovú podmienku ako

$$x_i(t) = x_i(0), \qquad z_i(t) = z_i(0), \qquad i \in \mathbf{N}_b, \tag{2.21}$$

kde $\mathbf{N}_b$ je množina globálnych čísel bodov vyznačených modrou farbou (Obr.2.6). Tento prístup k voľbe okrajovej podmienky si môžeme predstaviť tak, že robíme priemet vektora strednej krivosti na vektor normály priemetovej roviny. Takúto okrajovú podmienku zrealizujeme velmi jednoducho, a to realizaciou SOR algoritmu len pre ypsilonovú zložku vyznačených bodov.

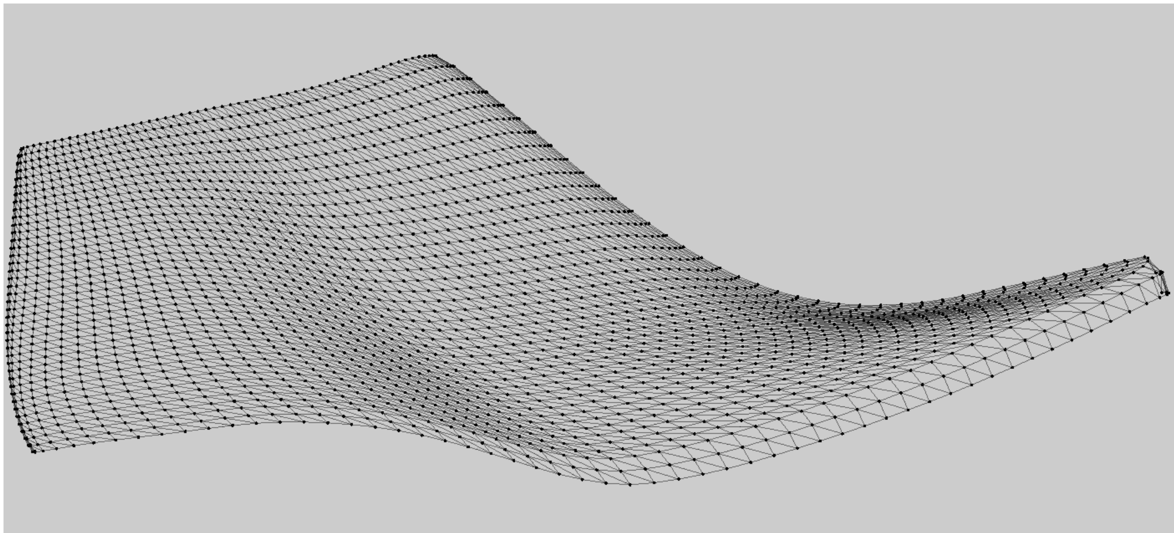


Obr. 2.6: Sieť bodov, ktoré popisujú povrch topánky. Pre modré body definujeme špeciálnu okrajovú podmienku. Pre červené body definujeme Dirichletovu okrajovú podmienku.

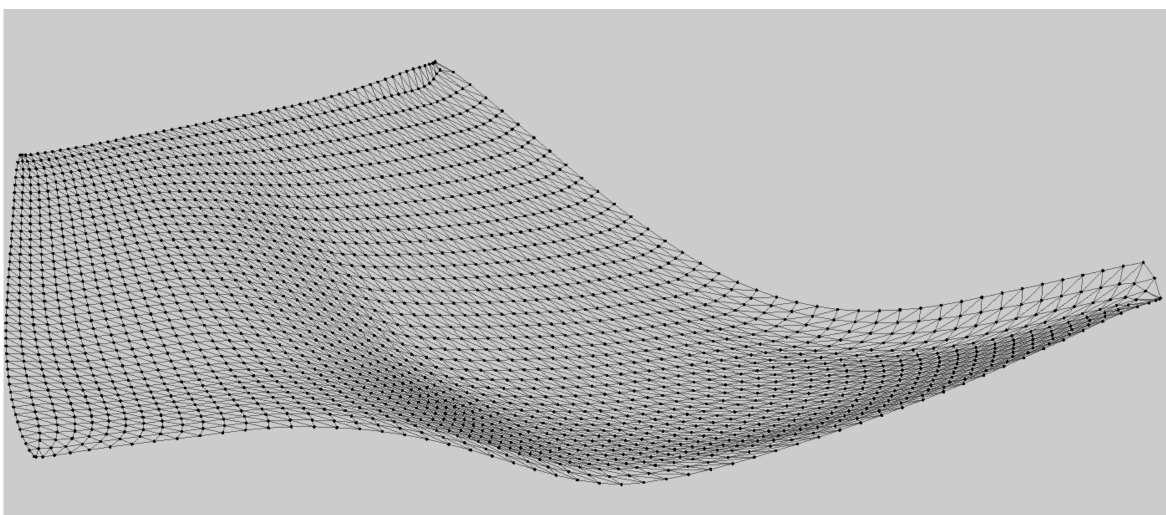
2.2.3 Výsledky

Vstupnými dátami, ktoré nám dodala firma Wing, s.r.o. Partizánske je súbor obsahujúci súradnice uzlových bodov a hrany v ktorých sa príslušný bod nachádza. Obsahom súboru sú takisto ďalšie informácie o sieti, ktoré však nie sú potrebné pre náš algoritmus. Pre nás je podstatné vytvoriť si štruktúru, ktorá nám hovorí o susednosti uzlových bodov. Numerickú schému sme testovali na topánkovej ploche, ktorá mala 2419 uzlových bodov. Pre tieto dáta sme potrebovali 2500 iterácií na premietnutie plochy do roviny. Časový krok τ_k sme volili v každom kroku podľa podmienky (2.14) aby sme zabezpečili stabilitu algoritmu.

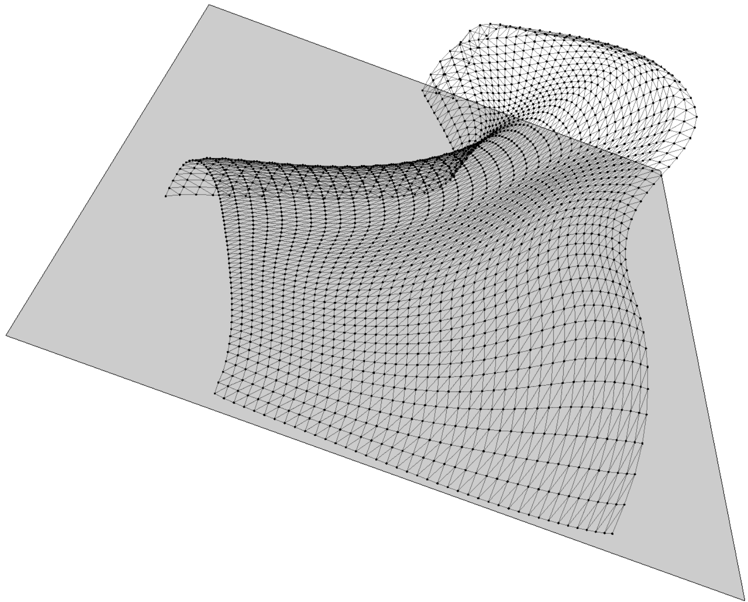
Je potrebné povedať, že výsledky získané takýmto prístupom (pohyb len v smere krivosti) zatiaľ nespĺňajú celkom naše očakávania. Napríklad niektoré body v pravom hornom rohu topánky (Obr. 2.11) sa nehýbu tak ako by sme predpokladali. Príčin môže byť niekoľko. Takýto vývoj bodov je daný buď lokálnym charakterom siete, alebo to spôsobuje kumulácia bodov na krajných krivkách (Obr. 2.12). Navyše vnútorné body nie sú rovnomerne rozdistribuované v priemete. Je preto veľmi aktuálne pridať do modelu (2.1) aj pohyb bodov triangulácie v tangenciálnom smere a dosiahnuť tak rovnomernejšie rozloženie bodov v priemete. Toto bude obsahom našej práce v budúcnosti, v tejto diplomovej práci sme zvolili iný prístup na dosiahnutie tohto cieľa a to pre logicky štvoruholníkovú diskretizáciu topánkovej plochy, ktorú máme spolu s trianguláciou k dispozícii. Takýto prístup popisujeme v nasledujúcej kapitole.



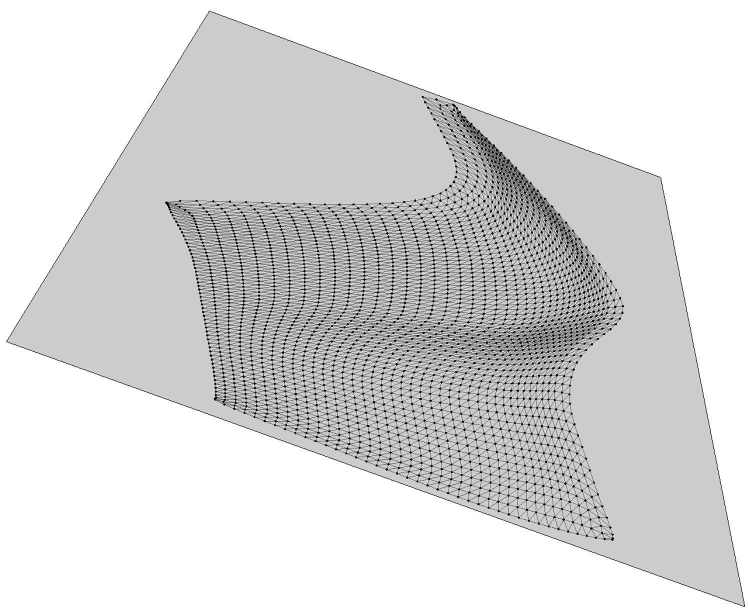
Obr. 2.7: Sieť bodov v čase $T = 0$.



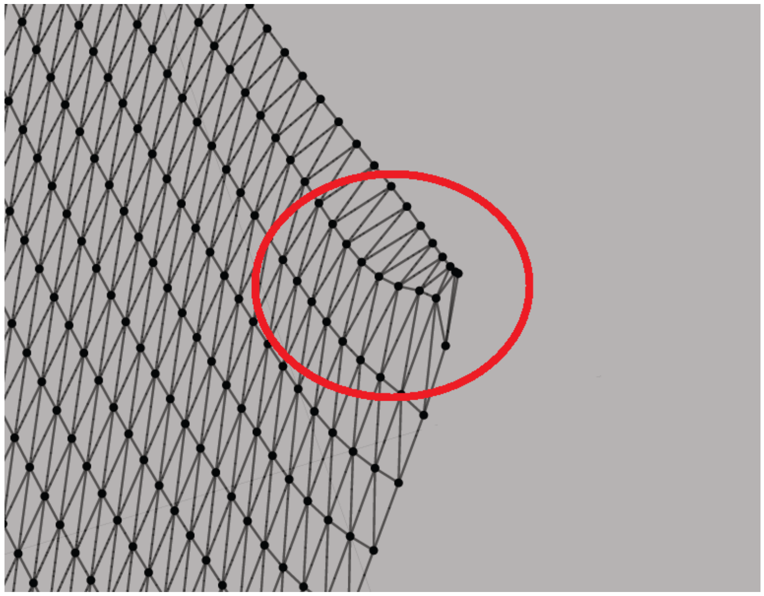
Obr. 2.8: Sieť bodov po 2500 iteráciach.



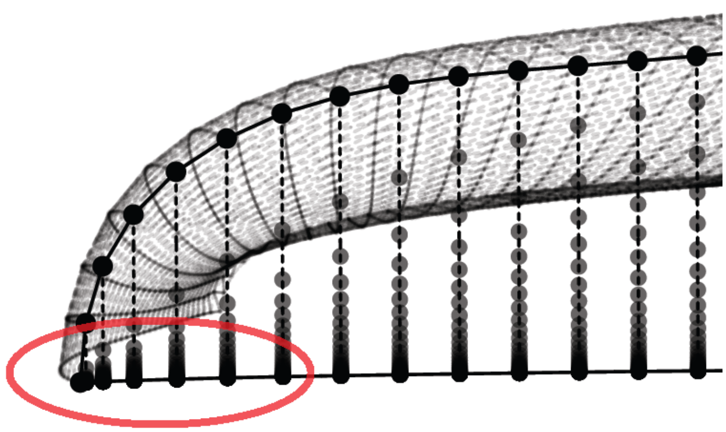
Obr. 2.9: Sieť bodov v čase $T = 0$.



Obr. 2.10: Sieť bodov po 2500 iteráciach.



Obr. 2.11: Pravý horný roh topánky.



Obr. 2.12: Nerovnomerná distribúcia bodov na krajnej krivke po premietnutí do roviny.

Kapitola 3

Vývoj topánkovej plochy s rovnomernou redistribúciou bodov

3.1 Matematický model

Metódy, ktoré popisujú pohyb 3D priestorových kriviek pohybujúcich sa v smere krivosti stabilizované vhodnou tangenciálnou rýchlosťou odvodili K. Mikula a J. Urbán v prácach [11, 8] vychádzajúc z [1, 4, 5, 6, 7]. Autori odvodili numerickú schému pre pohyb 3D krivky tak, aby sa zachovávala aspymptoticky rovnomerná redistribúcia bodov, krivky sa hýbali v smere krivosti a k tomu ešte aj v smere vhodne zvoleného vektorového poľa. Rovnomerná redistribúcia bola zabezpečená vhodnou voľbou tangenciálnej rýchlosti tak, aby sa zachovávala priemerná vzdialenosť medzi bodmi na krivke. Autori využili tieto metódy na nájdenie ideálnej cesty pre kameru virtuálnej kolonoskopie. My sme sa rozhodli využiť takýto prístup na pohyb kriviek popisujúcich povrch obuvníckeho kopyta. Sieť bude v tomto prípade štvoruholníková, pretože práca s krivkami popisujúcich povrch je v prípade takýchto sietí veľmi prirodzená.

Kvoli úplnosti a čitatelnosti práce načrtneme odvodenie diskretizačnej schémy pre pohyb priestorovej krivky ako je uvedené v [8]. Náš hlavný prínos bude v tom, že skombinujeme pohyb kriviek, ktoré sa navzájom pretínajú a odvodíme tak novú numerickú schému pre pohyb bodov prirodzene štvoruholníkových diskretizácií plôch v smere krivosti s rovnomernou redistribúciou bodov.

Uvažujme priestorovú krivku danú polohovým vektorom $\mathbf{r} = [x, y, z]$, ktorý je funkciou prirodzenej parametrizácie oblúkom s a času t. Pohyb takejto krivky v smere vektora krivosti je popísaný diferenciálnou rovnicou

$$\partial_t \mathbf{r} = \kappa \mathbf{n}, \tag{3.1}$$

kde $\kappa \mathbf{n} = \partial_{ss} \mathbf{r}$ je vektor krivosti.

Využitím metódy "plávajúvich"konečných objemov [5, 7] môžeme pre rovnicu (3.1) odvodiť nasledujúcu semi-diskrétnu schému

$$\partial_t \mathbf{r}_i = \frac{2}{h_{i+1} + h_i} \left(\frac{\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i}{h_{i+1}} - \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i-1}}{h_i} \right), \tag{3.2}$$

kde $\mathbf{r}_i = [x_i, y_i, z_i]$, $i = 0, \ldots, N$ je od času závislé diskrétne riešenie rovnice (3.1) a $h_i = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i-1}|$ je Euklidovská vzdialenosť dvoch susedných uzlových bodov. Numerická schéma (3.2) sa dá prepísať na systém lineárnych rovníc viacerými spôsobmi [1, 5, 7]. My použijeme spätnú Eulerovu metódu, tzv. semi-implicitnú schému, ktorá je prvého rádu a vyzerá nasledovne

$$\frac{\mathbf{r}_i^{k+1} - \mathbf{r}_i^k}{\tau} = \frac{2}{h_{i+1}^k + h_i^k} \left(\frac{\mathbf{r}_{i+1}^{k+1} - \mathbf{r}_i^{k+1}}{h_{i+1}^k} - \frac{\mathbf{r}_i^{k+1} - \mathbf{r}_{i-1}^{k+1}}{h_i^k} \right), \tag{3.3}$$

pre $i = 1, \ldots, N-1$, kde τ je diskrétny časový krok. Začiatočný a koncový bod budeme fixovať, preto $\mathbf{r}_0^k = [x_0, y_0, z_0]$ a $\mathbf{r}_N^k = [x_N, y_N, z_N]$. Vzdialenosti bodov sú dané vzťahom

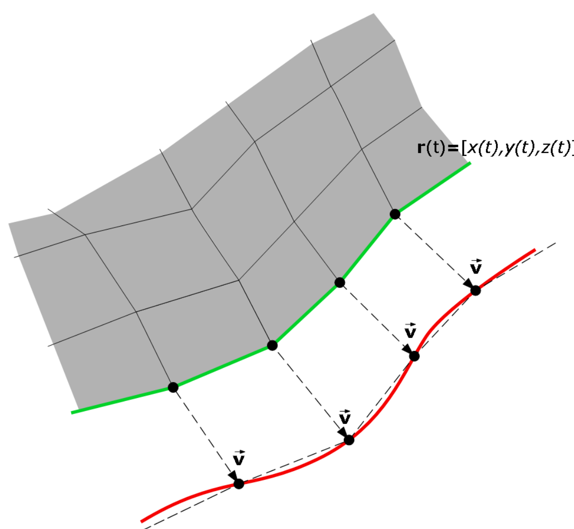
$$h_i^k = \sqrt{(x_i^k - x_{i-1}^k)^2 + (y_i^k - y_{i-1}^k)^2 + (z_i^k - z_{i-1}^k)^2}. \tag{3.4}$$

Týmto sme odvodili metódu, ktorá nám umožnuje hýbať krivku v priestore v smere vektora krivosti. Na pohyb krivky máme ešte dve požiadavky. Krajné krivky (Obr. 3.1 - zelenou farbou) potrebujeme hýbať smerom ku krajným líniam (Obr. 3.1 - červenou farbou), ktoré ohraničujú nami požadovaný priemet. Takýto pohyb zabezpečíme vhodnou voľbou vektorového poľa $\mathbf{v}$. Pohyb krivky vo vektorovom poli $\mathbf{v}$ popisuje zákon

$$\partial_t \mathbf{r} = \mathbf{v}(\mathbf{r}), \tag{3.5}$$

na riešenie ktorého môžeme použiť explicitnú numerickú schému

$$\frac{\mathbf{r}_i^{k+1} - \mathbf{r}_i^k}{\tau} = \mathbf{v}(\mathbf{r}_i^k). \tag{3.6}$$



Obr. 3.1: Evolúcia krajnej krivky plochy.

Je známe, že tvar pohybujúcej sa krivky je určený pohybom v normálovom smere a pohyb v tangenciálnom smere zase ovplyvnuje rozloženie bodov na krivke. Najprv budeme uvažovať iba pohyb v normálovom smere. Preto zanedbáme vplyv tangenciálnej zložky rýchlostného poľa $\mathbf{v}$ a budeme určovať len jeho priemet do normálovej roviny ku krivke. Uvažujme jednotkový tangenciálny vektor krivky $\mathbf{T}$. Potom priemet vektora $\mathbf{v}$ definujeme ako $\mathbf{N_v} = \mathbf{v} - (\mathbf{T} \cdot \mathbf{v})\mathbf{T}$. Vektor krivosti nie je potrebné meniť, lebo už leží v normálovej rovine a tým pádom nemá žiadny priamy vplyv na rozloženie bodov na krivke. Vývoj krivky v normálovej rovine je potom daný predpisom

$$\partial_t \mathbf{r} = \delta_2 \mathbf{N_v} + \delta_1 \kappa \mathbf{N}. \tag{3.7}$$

Parametrami δ_1 a δ_2 vieme riadiť vplyv krivosti a vektorového poľa na vývoj tvaru krivky. Znova použijeme semi-implicitnú schému a dostaneme

$$\frac{\mathbf{r}_i^{k+1} - \mathbf{r}_i^k}{\tau} = \delta_2 (\mathbf{N_v})_i^k + \delta_1 \frac{2}{h_{i+1}^k + h_i^k} \left(\frac{\mathbf{r}_{i+1}^{k+1} - \mathbf{r}_i^{k+1}}{h_{i+1}^k} - \frac{\mathbf{r}_i^{k+1} - \mathbf{r}_{i-1}^{k+1}}{h_i^k} \right), \tag{3.8}$$

pre $i = 1, \ldots, N-1$.

Teraz by sme potrebovali zaviesť vhodnú rýchlosť v tangenciálnom smere tak, aby uzlové body krivky boli rovnomerne rozložené. Pre tento účel, rovnako ako v [4, 8] zavedieme ortonormálnu bázu, ktorá obsahuje tangenciálny vektor $\mathbf{T}$ a dva kolmé vektory ležiace v normálovej rovine $\mathbf{N_1}$ a $\mathbf{N_2}$ definované ako

$$\begin{aligned} \mathbf{N_1} &= \frac{\mathbf{N_v}}{|\mathbf{N_v}|} \\ \mathbf{N_2} &= \mathbf{N_1} \times \mathbf{T}. \end{aligned}$$

Teraz zadefinujeme priemety vektora krivosti $\kappa\mathbf{N}$ do smerov $\mathbf{N_1}$ a $\mathbf{N_2}$ ako

$$\begin{aligned}\kappa_1 &= \kappa\mathbf{N}\cdot\mathbf{N_1}\\ \kappa_2 &= \kappa\mathbf{N}\cdot\mathbf{N_2}.\end{aligned}$$

Takýto rozklad pohybu krivky spolu s uvážením pohybu v smere tangenty rýchlosťou α nám umožnuje uvažovať zákon (3.7) v tvare

$$\partial_t\mathbf{r} = U\mathbf{N_1} + V\mathbf{N_2} + \alpha\mathbf{T}, \tag{3.9}$$

kde hodnoty U a V sú dané vzťahmi

$$\begin{aligned}U &= \delta_1\kappa_1 + \delta_2|\mathbf{N_v}|\\ V &= \delta_1\kappa_2.\end{aligned}$$

Uvažujme lokálnu dĺžku $g \approx \frac{|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_{i-1}|}{h}$, kde $h = \frac{1}{N}$ a celkovú dĺžku krivky L. Bude nás zaujímať pomer aktuálnej diskrétnej lokálnej dĺžky a priemernej dĺžky

$$\frac{g}{L} \approx \frac{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i-1}|}{Lh} = \frac{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i-1}|}{\frac{h}{N}} = \frac{h_i}{\frac{h}{N}}.$$

Cieľom je zabezpečiť aby sa pomer $h_i/\frac{h}{N}$ blížil k jednej alebo aby kvantita $\theta = \ln(\frac{g}{L})$ konvergovala k nule. Pre deriváciu θ podľa času platí

$$\partial_t\theta = \partial_t\left(\ln\left(\frac{g}{L}\right)\right) = \frac{L}{g}\frac{\partial_t gL - g\partial_t L}{L^2}. \tag{3.10}$$

Ako bolo ukázané v [4], pre časovú zmenu lokálnej dĺžky g platí

$$\partial_t g = g\partial_s\alpha - g(U\kappa_1 + V\kappa_2) \tag{3.11}$$

a pre zmenu celkovej dĺžky krivky dostaneme

$$\partial_t L = < U\kappa_1 + V\kappa_2 >_\Gamma L. \tag{3.12}$$

Dosadením vzťahov (3.11) a (3.12) do (3.10) dostaneme

$$\partial_t \theta = \partial_s \alpha - (U\kappa_1 + V\kappa_2) + < U\kappa_1 + V\kappa_2 >_\Gamma L. \tag{3.13}$$

Riešením diferenciálnej rovnice

$$\partial_t \theta = (e^{-\theta} - 1)\omega_r,$$

kde ω_r je parameter, ktorý riadi rýchlosť redistribúcie bodov, dotaneme takú funkciu θ, ktorá spĺňa našu požiadavku, konverguje k nule pre $t \to \infty$. Pre tangenciálnu rýchlosť α potom platí

$$\partial_s \alpha = (U\kappa_1 + V\kappa_2) - < U\kappa_1 + V\kappa_2 >_\Gamma + \left(\frac{L}{g} - 1\right)\omega_r. \tag{3.14}$$

Kedže $\mathbf{T} = \partial_s \mathbf{r}$ a $\kappa\mathbf{N} = \partial_{ss}\mathbf{r}$ na záver dostávame nasledujúci model pre pohyb 3D krivky

$$\partial_t \mathbf{r} = \delta_1 \partial_{ss}\mathbf{r} + \alpha \partial_s \mathbf{r} + \delta_2 \mathbf{N_v}, \tag{3.15}$$

pričom α je dané rovnicou (3.14). Tento model zabezpečuje asymptoticky rovnomernú redistribúciu bodov pri pohybe podľa krivosti a externého poľa.

Nakoniec uvádzame diskretizácie rovníc (3.14)-(3.15), viď [8]. Pre diskrétnu tangenciálnu rýchlosť dostaneme

$$\alpha_i^k = \alpha_{i-1}^k + h_i^k (U_i^k \kappa_{1i}^k + V_i^k \kappa_{2i}^k) - h_i^k < U\kappa_1 + V\kappa_2 >_\Gamma^k + \left(\frac{L^k}{N} - h_i^k\right)\omega_r,$$

pre $i = 1, \dots, N-1$, pričom $\alpha_0^k = 0$ a

$$< U\kappa_1 + V\kappa_2 >_\Gamma^k L = \frac{1}{L^k}\sum_{l=1}^{N} h_l^k (U_l^k \kappa_{1l}^k + V_l^k \kappa_{2l}^k), \quad L^k = \sum_{l=1}^{N} h_l^k,$$

kde U_l^k, κ_{1l}^k, V_l^k, κ_{2l}^k sú aproximácie príslušných hodnôt na jednotlivých úsekoch kriviek (dané ako priemer uzlových hodnôt). Rovnica (3.15) sa diskretizuje pomocou semi-implicitnej schémy a dostaneme

$$\frac{h_{i+1}^k + h_i^k}{2} \frac{\mathbf{r}_i^{k+1} + \mathbf{r}_i^k}{\tau} = \delta_2 \frac{h_{i+1}^k + h_i^k}{2} (\mathbf{N_v})_i^k + \tag{3.16}$$
$$\delta_1 \left(\frac{\mathbf{r}_{i+1}^{k+1} - \mathbf{r}_i^{k+1}}{h_{i+1}^k} \frac{\mathbf{r}_i^{k+1} - \mathbf{r}_{i-1}^{k+1}}{h_i^k} \right) + \frac{\alpha_i^k}{2} (\mathbf{r}_{i+1}^{k+1} - \mathbf{r}_{i-1}^{k+1}),$$

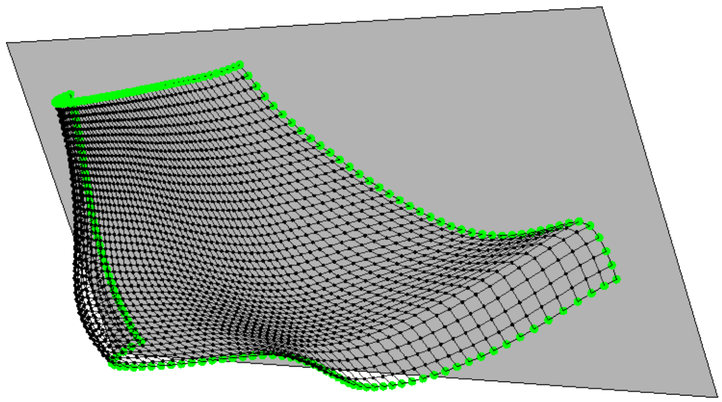
pre $i = 1, \ldots, N-1$. Hodnoty $\mathbf{r}_0^{k+1}$ a $\mathbf{r}_N^{k+1}$ máme dané z okrajovej podmienky. Numerická schéma (3.17) predstavuje trojdiagonálny systém

$$\boldsymbol{A}_i^k \mathbf{r}_{i-1}^{k+1} + \boldsymbol{B}_i^k \mathbf{r}_i^{k+1} + \boldsymbol{C}_i^k \mathbf{r}_{i+1}^{k+1} = \boldsymbol{F}_i^k \tag{3.17}$$

s koeficientami danými ako

$$\boldsymbol{A}_i^k = -\frac{\delta_1}{h_i^k} + \frac{\alpha_i^k}{2}, \quad \boldsymbol{C}_i^k = -\frac{\delta_1}{h_{i+1}^k} - \frac{\alpha_i^k}{2}, \quad \boldsymbol{B}_i^k = \frac{h_i^k + h_{i+1}^k}{2\tau} - \boldsymbol{A}_i^k - \boldsymbol{B}_i^k$$
$$\boldsymbol{F}_i^k = \frac{h_i^k + h_{i+1}^k}{2\tau} \mathbf{r}_i^k + \delta_2 (\mathbf{N_v})_i^k \frac{h_i^k + h_{i+1}^k}{2}.$$

Efektívnu metódu na riešenie takéhoto systému predstavuje Thomasov algoritmus. Riešením systému (3.17) sú súradnice bodov krivky $\mathbf{r}$ v nasledujúcom diskrétom čase. Naším cieľom však je popísať pohyb plochy.



Obr. 3.2: Vnútorné body plochy - čiernou. Krajné línie budeme hýbať osobitne vo vhodne zvolenom vektorovom poli.

Uvažujme teda plochu ω popísanú štvoruholníkovou sieťou danú diskrétnou množinou bodov, ktorých súradnice sú dané polohovým vektorom $\mathbf{r}_{ij}$, $i = 0, \ldots, N_i$ a $j = 0, \ldots, N_j$ pričom N_i a N_j sú počty bodov v danom smere. Každým vnútorným bodom uvažovanej plochy $\mathbf{r}_{ij}$, $i = 1, \ldots, N_i - 1$ a $j = 1, \ldots, N_j - 1$ (Obr. 3.2) prechádzajú dve krivky. Pre každú z týchto kriviek vieme predpísať systém rovníc v zmysle (3.17) s príslušnými koeficientami. Pre i-tu krivku máme teda systém rovníc

$$a_w \mathbf{r}^k_{i,j-1} + a^i_p \mathbf{r}^k_{i,j} + a_e \mathbf{r}^k_{i,j+1} = f^{k-1}_{pi} \tag{3.18}$$

a pre j-tu krivku

$$a_s \mathbf{r}^k_{i-1,j} + a^j_p \mathbf{r}^k_{i,j} + a_n \mathbf{r}^k_{i+1,j} = f^{k-1}_{pj}, \tag{3.19}$$

pričom $i = 1, \ldots, N_i - 1$ a $j = 1, \ldots, N_j - 1$. Okrajovým bodom predpisujeme

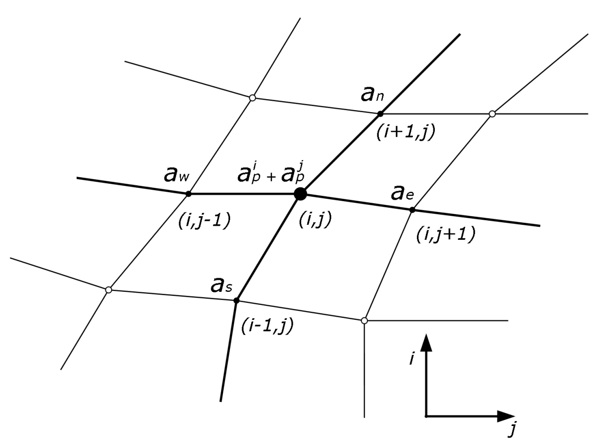
Dirichletovu okrajovú podmienku

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{0,j}^k &= F_j^k && j = 0, \dots, N_j \\ \mathbf{r}_{N_i,j}^k &= T_j^k && j = 0, \dots, N_j \\ \mathbf{r}_{i,0}^k &= H_i^k && i = 0, \dots, N_i \\ \mathbf{r}_{i,N_j}^k &= C_i^k && i = 0, \dots, N_i. \end{aligned}$$

Krivky však nechceme hýbať osobitne ale chceme aby bol ich pohyb zviazaný a popísaný jedným systémom. Preto tieto dve rovnice (3.18)-(3.19) sčítame a dostaneme výsledný systém pre vnútorné body plochy

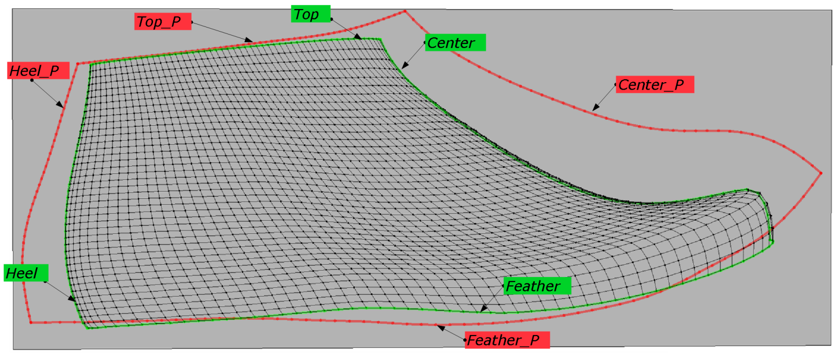
$$a_s \mathbf{r}_{i-1,j}^k + a_w \mathbf{r}_{i,j-1}^k + (a_p^j + a_p^i)\mathbf{r}_{i,j}^k + a_e \mathbf{r}_{i,j+1}^k + a_n \mathbf{r}_{i+1,j}^k = f_{pi}^{k-1} + f_{pj}^{k-1} \quad (3.20)$$

pre $i = 1, \dots, N_i - 1$ a $j = 1, \dots, N_j - 1$. Tento systém (3.20) budeme riešiť tak ako v prechádzajúcej metóde iteratívnym SOR algoritmom. Z toho vyplýva podmienka na diagonálnu dominantnosť systému (2.14), preto ak nejaký nami zvolený časový krok τ nebude spĺňať túto podmienku zmenšíme ho na polovicu a znova otestujeme diagonálnu dominantnosť.



Obr. 3.3: Detail štvoruholníkovej siete na ploche ω.

Na záver je ešte potrebné vyriešit ako sa budú hýbať krajné línie plochy (Obr. 3.2). Okraj topánky rozdelíme na štyri časti, ktoré nazveme *Center*, *Top*, *Heel* a *Feather*[1] (Obr. 3.4 - zelenou). K týmto krivkám zodpovedajú štyri krivky, ktoré ohraničujú nami požadovaný priemet. Tieto krajné krivky máme dané a boli získané experimentálne obuvníkmi, ktorí navrhujú topánky. Nazveme ich *Center_P*, *Top_P*, *Heel_P* a *Feather_P*.



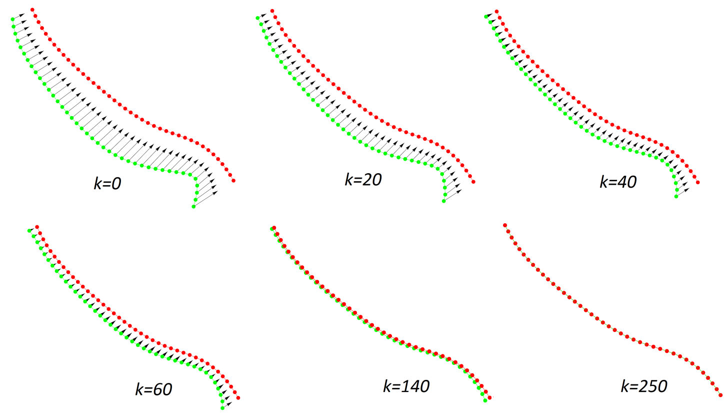
Obr. 3.4: Na obrázku sú krajné línie priemetu znázornené červenou farbou a okraj topánky zelenou.

Hraničné krivky topánky budeme hýbať každú osobitne podľa zákona (3.15) tak, aby sa každá premietla na jej zodpovedajúcu krivku v priemete. Takýto pohyb zabezpečíme vhodnou voľbou vektorového poľa $\mathbf{v}$. Nech polohová funkcia ${}^{green}\mathbf{r}(\mathbf{x})$ popisuje ľubovolnú krivku zo štyroch kriviek ohraničujúcich topánku, potom ${}^{green}\mathbf{r}_i$, pre $i = 0, \ldots, N$ je diskrétna množina bodov popisujúcich krivku. Podobným spôsobom vieme popísať ľubovolnú krivku ohraničujúcu priemet ${}^{red}\mathbf{r}(\mathbf{x})$ danú diskrétnou množínou ${}^{red}\mathbf{r}_i$, pre $i = 0, \ldots, N$. Vektorové pole $\mathbf{v}$, v ktorom budeme hýbať bod ${}^{green}\mathbf{r}_i$ budeme potom voliť nasledovne

$$\mathbf{v}_i = \delta({}^{red}\mathbf{r}_i - {}^{green}\mathbf{r}_i) \tag{3.21}$$

[1]Takýmito názvami sa zvyknú pomenuvávať jednotlivé krajné časti v obuvníckom priemysle

pre $i = 0, \dots, N$, kde δ je nami volený parameter.



Obr. 3.5: Vývoj krivky ${}^{green}\mathbf{r}$ vo vektorovom poli, ktoré bolo vytvorené podľa vzťahu (3.21)*(Na obrázku je vektorové poľe prenásobené štyrmi pre lepšiu názornosť)*. Výsledok bol prepočítaný pre parametre $\delta_2 = \delta_1 = \delta = 1$, $\omega_r = 10$ a časový krok bol zvolený ako $\tau = 0.15$.

3.2 Výsledky

Druhú metódu (3.20) sme takisto testovali na vstupných dátach dodaných firmou Wing, s.r.o, Partizánske. Štruktúra dát je v tomto prípade iná, plocha nie je popísaná trojuholníkmi ale štvoruholníkmi. Súbor obsahuje súradnice uzlových bodov uložených v matici rozmeru N_ixN_j, kde jeden riadok/stĺpec matice predstavuje jednu krivku určujúcu plochu. Metódu testujeme na dvoch kopytách - *damen*[2] a *ortho*[3]. V oboch prípadoch je sieť popísaná 2419 bodmi (tak ako v predchádzajúcom prípade) a matica uzlových bodov je rozmeru $N_i = 59$ a $N_j = 41$. Krajné línie hýbeme podľa zákona (3.15) vo vektorovom poli $\mathbf{v}$ zvolenom tak, ako bolo predísane v (3.21). Pohyb vnútorných bodov jednotlivých kriviek je zase predpísaný systémom (3.20). Pre tieto body takisto volíme vhodné vektorové poľe $\mathbf{v}$ a to tak aby smerovalo

[2]Obuvnícke kopyto pre dámsky typ topánky
[3]Ortopedické obuvnícke kopyto

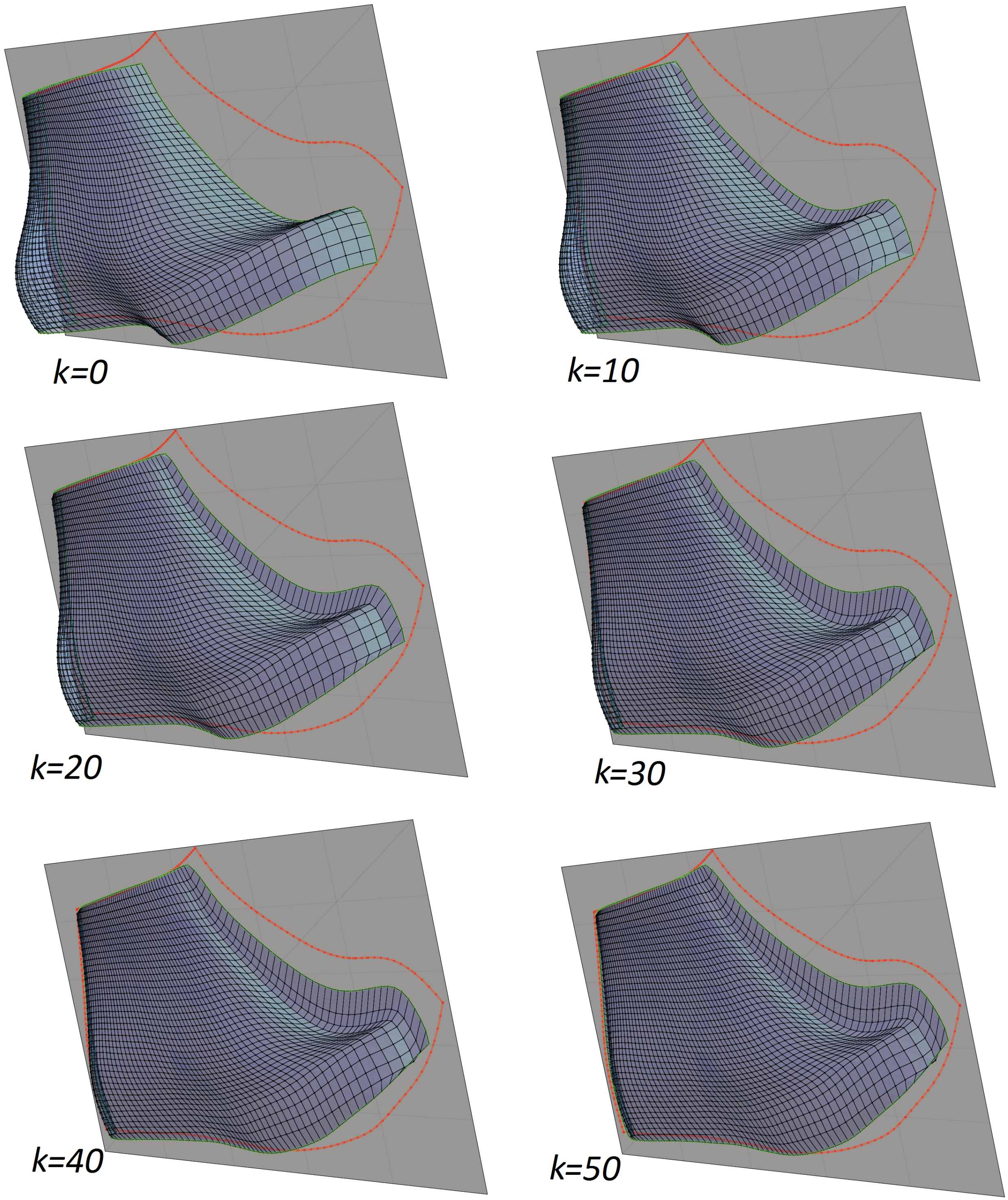
kolmo na rovinu priemetu. Časový krok sa volí podľa podmienky (2.14) a voľba parametrov je zapísaná v (Tabuľke 3.1).

Tabuľka 3.1: Parametre

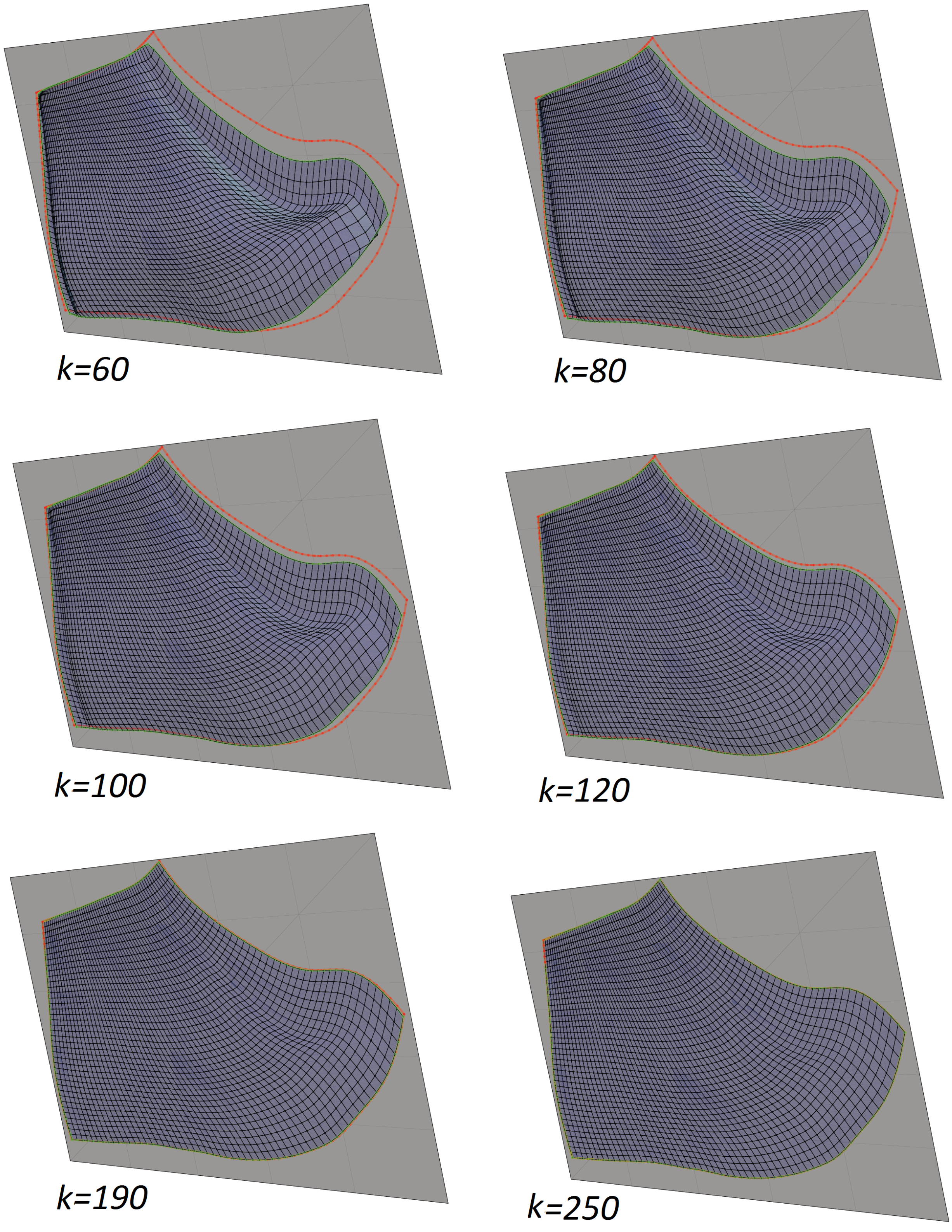
	ortho - kraj	ortho - vnútorné línie	damen - kraj	damen - vnútorné línie
ω_r	10	8	10	5
δ_2	1	0.8	1	1
δ	1	0.8	1	1
δ_1	1	20	1	1
τ	0.15	0.015	0.15	0.02

Pre takúto voľbu parametrov sme dosiahli najlepšie výsledky v jednotlivých prípadoch. V prípade ortopedického kopyta bolo treba zmenšiť vplyv vektorového poľa **v** na vnútorné body, pretože inak sme mali problém s bodmi v oblasti hornej časti topánky (krivka *Top*). Tieto body sa premietli príliš rýchlo do roviny priemetu a body za začali prekrývať, čo spôsobovalo problémy so stabilitou výpočtu. Preto sme zvolili $\delta_2 = 0.8$, $\delta = 0.8$ a navyše sme zvýšili vplyv krivosti voľbou $\delta_1 = 20$. Náš predpoklad bol taký, že ak body dospejú do stavu, v ktorom sa začínajú prekrývať, bude v tejto oblasti veľká krivosť, preto ak zvýšime intenzitu pohybu v smere krivosti budeme ju prirodzeným spôsobom zmenšovať a docielime tým to, že sa body neprekryjú (Obr.3.9 - Obr.3.10). Na nasledujúcich stranách prezentujeme jednotlivé výsledky pre oba typy obuvníckych kopýt. Na obrázkoch (Obr.3.6) - (Obr.3.8) môžeme vidieť evolúciu plochy pre kopyto typu *damen* v jednotlivých časových krokoch. Na obrázkoch (Obr.3.9) - (Obr.3.12) sú zase zobrazené výsledky pre ortopedické kopyto. V oboch prípadoch sa nám podarilo premietnuť plochy do roviny[4] stým, že sme zachovali rovnomernú redistribúciu bodov na ploche v smere jednotlivých kriviek popisujúcich povrch.

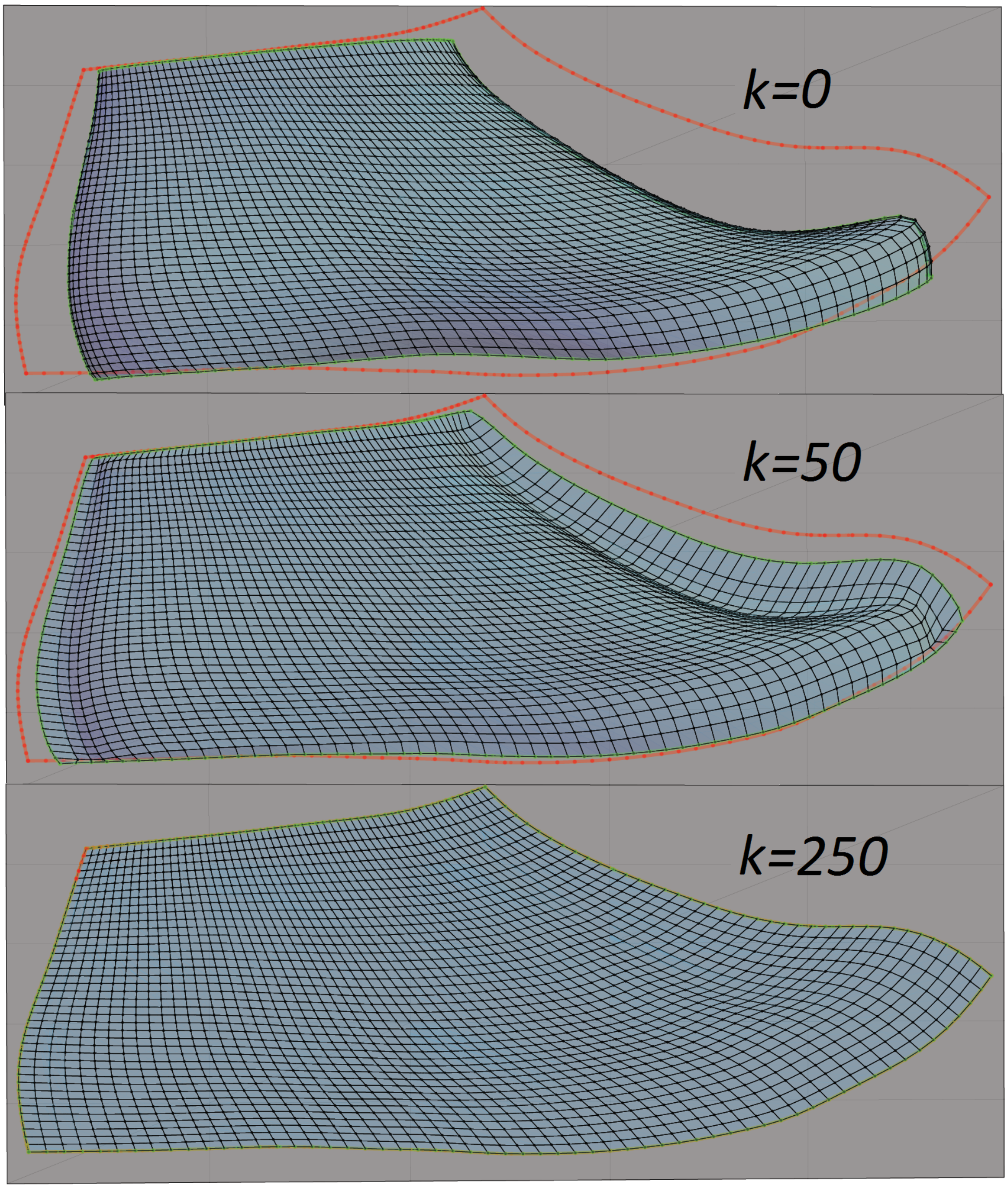
[4]Je potrebné povedať, že vzialenosť väčšiny bodov plochy od roviny priemetu bola nenulová, ale dostatočne malá nato aby sme mohli daný stav topánky považovať za priemet. Finálny priemet do 2D je možné docieliť zanedbaním jednej súradnice.



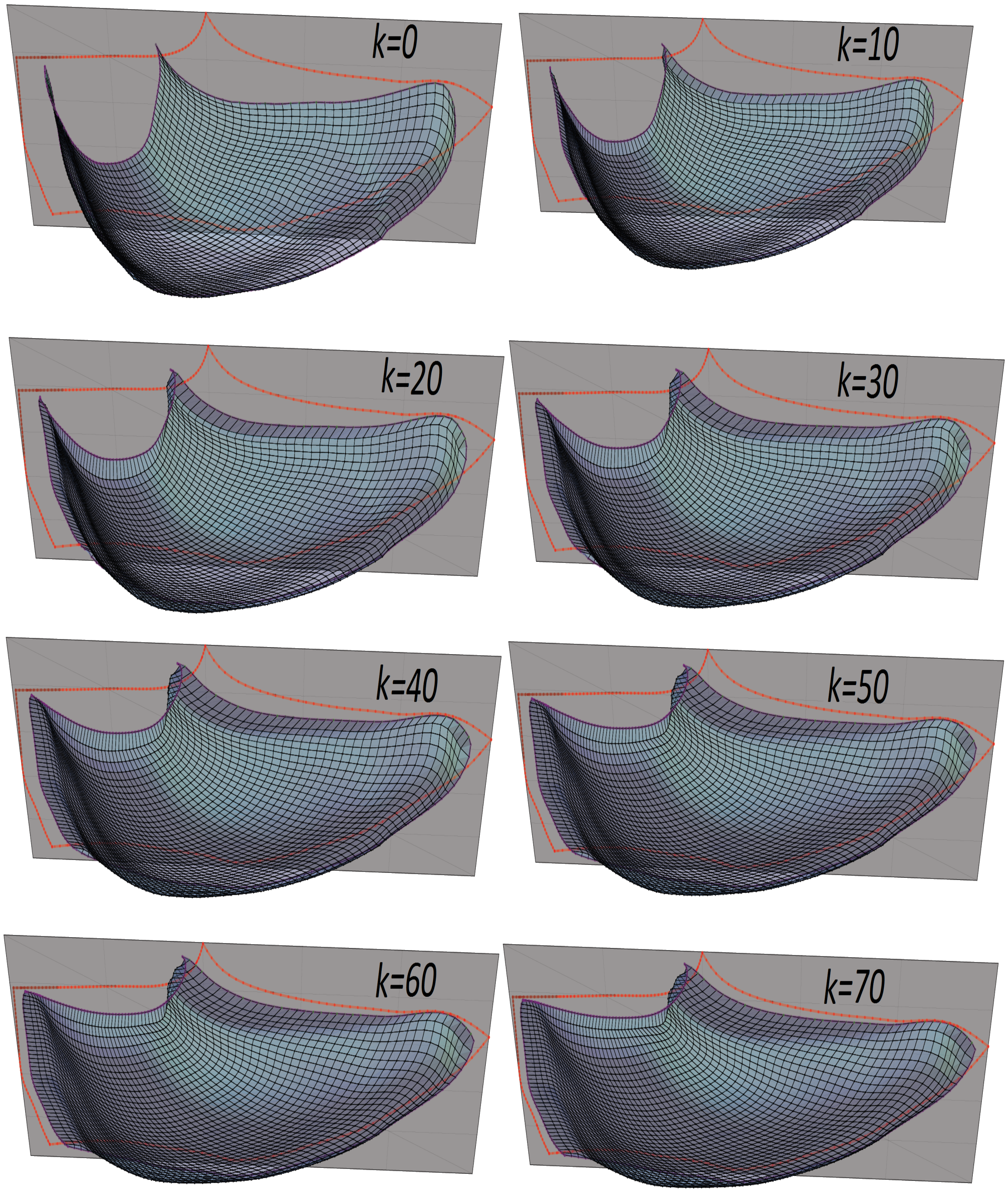
Obr. 3.6: Evolúcia topánky typu *damen* v jednotlivých časových krokoch.



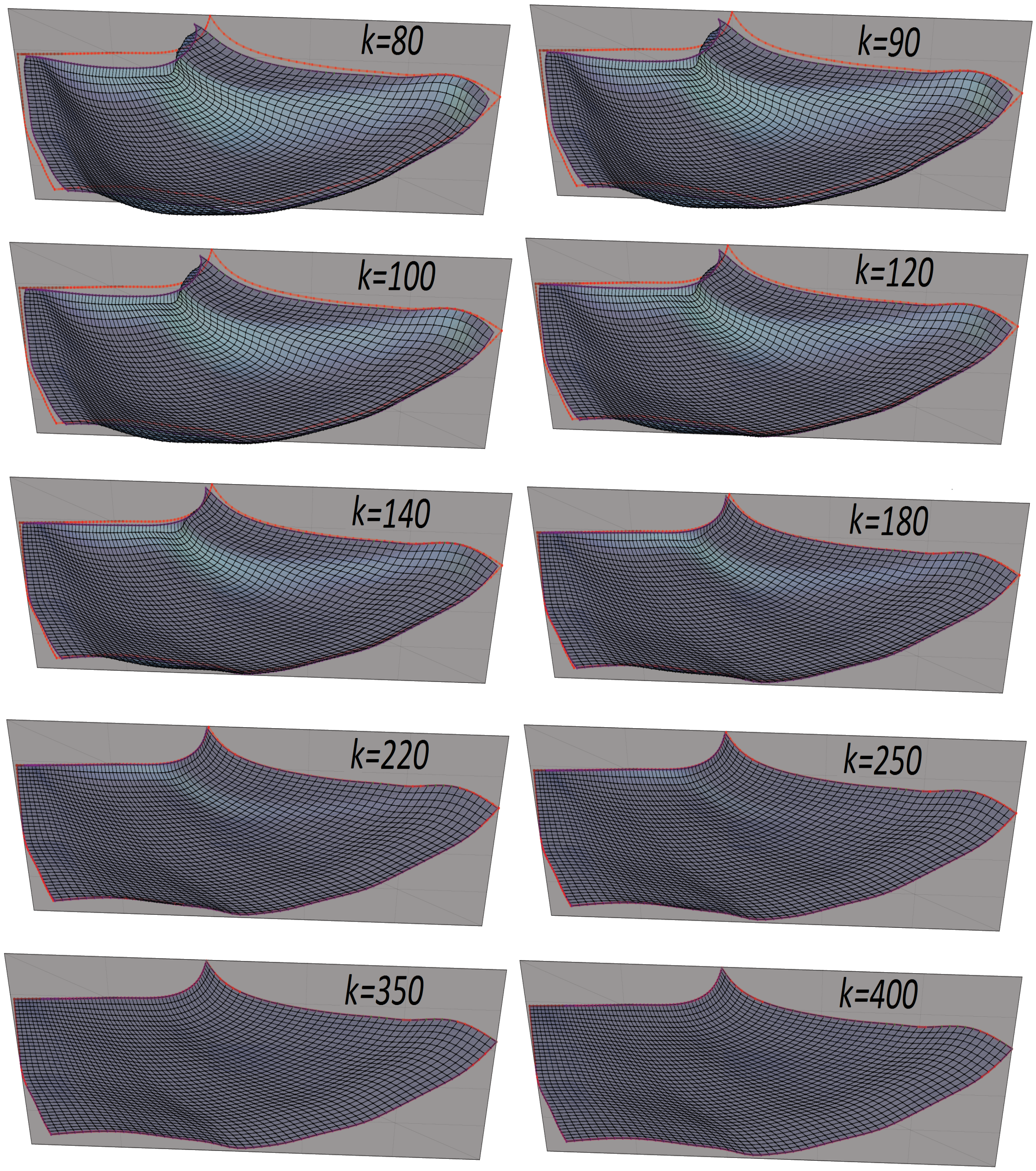
Obr. 3.7: Evolúcia topánky typu *damen* v jednotlivých časových krokoch.



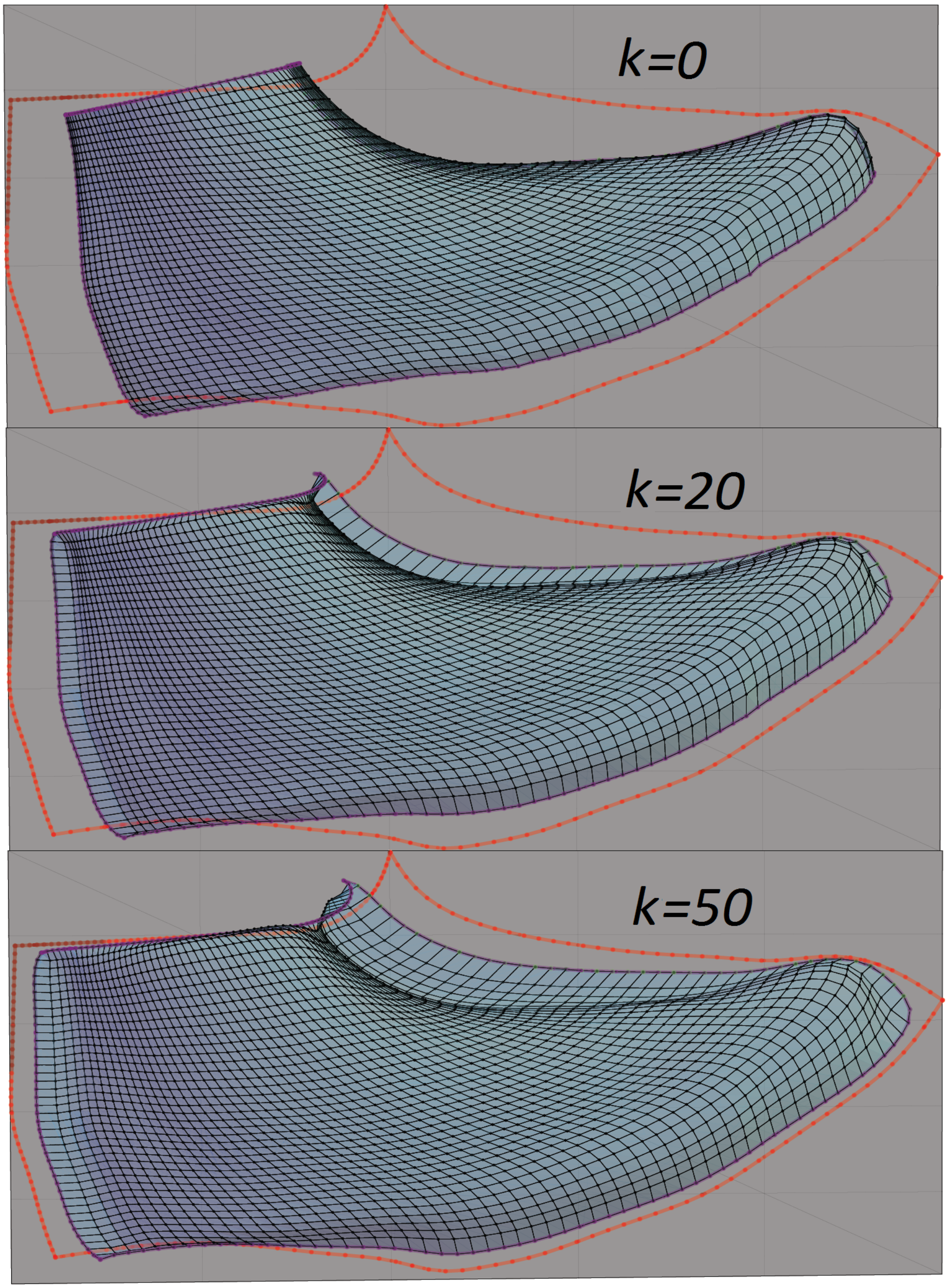
Obr. 3.8: Evolúcia topánky typu *damen* v jednotlivých časových krokoch. Pohľad zhora.



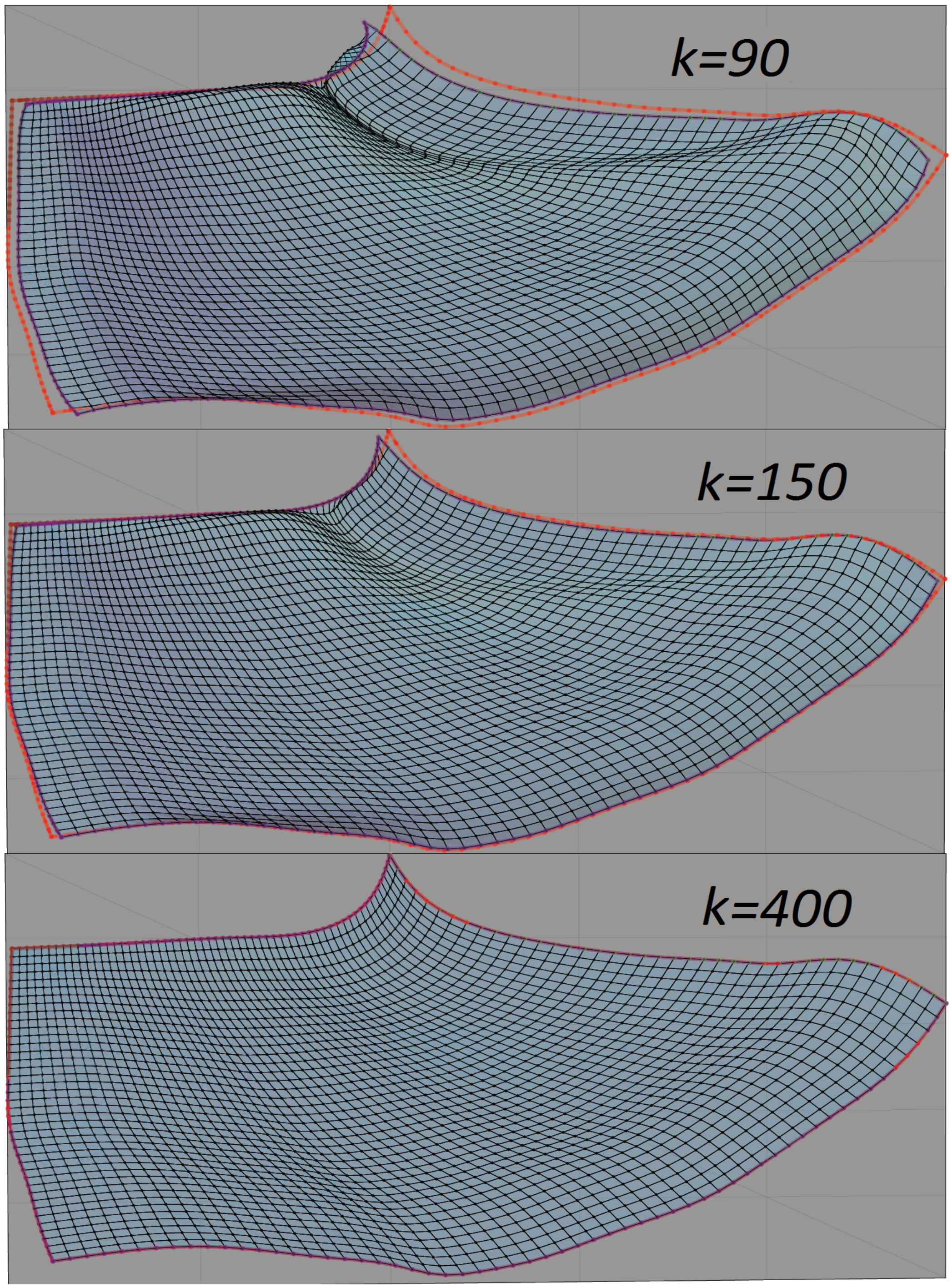
Obr. 3.9: Evolúcia topánky typu *ortho* v jednotlivých časových krokoch.



Obr. 3.10: Evolúcia topánky typu *ortho* v jednotlivých časových krokoch.



Obr. 3.11: Evolúcia topánky typu *ortho* v jednotlivých časových krokoch. Pohľad zhora.



Obr. 3.12: Evolúcia topánky typu *ortho* v jednotlivých časových krokoch. Pohľad zhora.

Kapitola 4

Záver

V práci sme zadefinovali dve metódy popisujúce pohyb plôch. Každá z týchto metód pracovala s iným typom sietí. V prvom prípade išlo o všeobecnejšie trojuholníkové siete, pre ktoré sme popísali ich pohyb v smere strednej krivosti. Pohyb plochy bol popísaný parabolickou parciálnou diferenciálnou rovnicou. Numerické riešenie sme hladali pomocou metódy konečných objemov, ktorá bola založená na vytvorení slabej formulácie pre Laplace-Beltramiho operátor na trojuholníkmi diskretizovanom povrchu. Numerickou aproximáciou slabej formulácie sme pre každý diskrétny čas dostali lineárny systém rovníc pre hodnoty numerického riešenia v jednotlivých uzlových bodoch. Správnosť schémy sme overlili porovnaním analytického riešenia s numerickým pre jednotkovú guľu a názorne sme odhadli rád tejto metódy. Takisto sme ukázali prečo je pre takýto typ numerických schém rozumná voľba $\tau \sim h^2$.

V závere prvej časti sme aplikovali rovnicu na topánkovú plochu s cieľom dosiahnuť vhodný priemet tejto plochy do roviny. Rovinu priemetu sme určili pomocou štyroch rohových bodov. Vzľadom na to, že sa nejednalo o uzavretú plochu bolo potrebné zvoliť vhodné okrajové podmienky. Ako rozumné riešenie sa nám zdalo zafixovať body na krajných líniach, ktoré už ležali v rovine, teda predpísať im Dirichletovu okrajovú podmienku. Pre ostatné krajné body sme určili špeciálny typ okrajovej podmienky, ktorý môžeme chápať ako priemet vektora strednej krivosti na vektor normály priemetovej roviny. Na priemet povrchu topánky bolo potrebných 2500 iterácii[1]. Všetky body sa podarilo premietnuť do roviny ale vznikali problémy s kumuláciou bodov v rohoch topánky, čo pravdepodobne zapríčinilo nežiadúce správanie sa metódy v týchto oblastiach.

Pri druhej metóde sme zvolili iný prístup. Povrch sme mali definovaný štvoruholníkovou sieťou, ktorá veľmi prirodzene, po líniách popisuje topánku. Zadefinovali sme metódu, ktorá popisuje evolúciu priestorovej krivky v smere vektora krivosti, vhodne zvoleného vektorového poľa a tak aby sa zachovávala asymptoticky rovnomerná redistribúcia bodov na krivke. Tú sme potom využili na pohyb štvorcovej siete a to tak, že sme zviazali pohyb vnútorných kriviek reprezentujúcich plochu a popísali ho jedným globalným systémom. Okrajové krivky sme hýbali osobitne takým spôsobom aby nadobudli nami požadovaný tvar. Takýmto prístupom sa nám podarilo odstrániť problémy, ktoré mala predchádzajúca metóda. Výsledné priemety mali rovnomerne rozložené body na ploche a pri vhodne zvolených parametroch nebol problém s dosiahnutím požadovaného výsledku. Pozitívne bolo aj to, že na výpočet priemetu bolo potrebných omnoho menej interácii. V prípade *damen* topánky len 250 iterácii[2] a pre ortopedickú topánku bolo potrebných 400 iterácii.

Výsledkom diplomovej práce sú dve metódy popisujúce evolúciu priestorových plôch, ktoré boli aplikované na povrchy popisujúce topánky. Obe metódy boli zrealizované v programovacom jazyku C a výsledky reprezentované v progame Mathematica. Do budúcnosti by bolo vhodné doprogamovať vstupné a výstupné rozhranie, ktoré by umožnovali pohodlnné zadávanie vstupných dát (počiatočný stav topánky, krivky určujúce priemet, vstupné parametre, ...) a následne by bolo možné zobraziť evolúciu premietanej plochy. Takéto riešenie by mohlo predstavovať samostatnú aplikáciu, ktorá by bola schopná vytvoriť priemet danej plochy.

[1]približne 15 minút výpočtu na Intel(R) Core(TM)2 Duo CPU T6500 @ 2.10GHz s 2GB pamäte

[2]približne 82 sekúnd na rovnakej PC konfigurácii

Literatúra

[1] G. Dziuk, *Convergence of a semi discrete scheme for the curve shortening flow*, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, 4 (1994), pp. 589–606.

[2] G. Dziuk, C.M.Elliott, *Surface finite elements for parabolic equations*, Journal of Computational Mathematics, Vol. 25, No. 4 (2007) pp. 385-407

[3] R. Eymard, T. Gallouet, R. Herbin, *The finite volume method*, in: Handbook for Numerical Analysis, Vol.7 (Ph. Ciarlet, J.L. Lions, eds.), Elsevier, 2000

[4] T. Y. Hou, I. Klapper and H. Si, *Removing the Stiffness of Curvature in Computing 3-D Filaments*, J. Comput. Phys. , 143 , 628-664 1

[5] K. Mikula, D. Ševčovič, *Evolution of plane curves driven by a nonlinear function of curvature and anisotropy*, SIAM J. Appl. Math., 61 (2001), pp. 1473–1501.

[6] K.Mikula, D. Ševčovič, *A direct method for solving an anisotropic mean curvature flow of planar curve with an external force*,in: Mathematical Methods in Applied Sciences, Vol. 27, No. 13 (2004), pp. 1545-1565

[7] K.Mikula, D.Ševčovič, M.Balažovjech, *A simple, fast and stabilized flowing finite volume method for solving general curve evolution equati-*

ons,in: Communications in Computational Physics, Vol. 7, No. 1 (2010) pp. 195-211

[8] K. Mikula, J.Urban, *3D curve evolution algorithm with tangential redistribution for a fully automatic finding of an ideal camera path in virtual colonoscopy*, in: Proceedings of the Third International Conference on Scale Space Methods and Variational Methods in Computer Vision, May 29th - June 2nd, 2011, Ein Gedi, Dead Sea, Israel, Lecture Notes in Computer Science Series, Springer, 2011.

[9] M. Tunega, K. Mikula, R. Čunderlík, , *Filtrácia geodetických dát na povrchu Zeme pomocou nelineárnych difúznych rovníc*, in: MAGIA 2009 Proceedings, pp 21-35

[10] M. Tunega, *Filtrácia geodetických dát na povrchu Zeme pomocou nelineárnych difúznych rovníc*, as Bachelor thesis, STU Bratislava, 2009.

[11] J. Urban, *Hľadanie ideálnej cesty pre kameru virtuálnej kolonoskopie*, in: Študentská vedecká konferencia, STU Bratislava 2010