

SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE

Stavebná fakulta

Evidenčné číslo: SvF-5343-67678

Geometrický model lumbálnej chrbtice a jej biomechanická odozva

Diplomová práca

Študijný program: Matematicko-počítačové modelovanie

Číslo študijného odboru: 1114

Názov študijného odboru: 9.1.9.Aplikovaná matematika

Školiace pracovisko: Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie

Vedúci záverečnej práce: RNDr. Mária Minárová, PhD.

Bratislava 2014

Bc. Mária Tješšová

ČESTNÉ PREHLÁSENIE

Čestne prehlasujem, že na diplomovej práci som pracovala samostatne na základe vlastných teoretických a praktických poznatkov, konzultácii a štúdia odbornej literatúry, ktorej úplný prehľad je uvedený v zozname použitej literatúry.

v Bratislave, 2.5.2014

.....

POĎAKOVANIE

Chcela by som sa poďakovať vedúcej mojej práce RNDr. Márii Minárovej, PhD. za odbornú pomoc a pripomienky pri jej vypracovaní a prof. Ing. Milanovi Sokolovi, PhD., za poskytnutie všetkých potrebných informácií a softvéru.

SÚHRN

Práca je venovaná vytvoreniu geometrického modelu lumbálnej časti ľudskej chrbtice a skúmaniu jej biomechanickej odozvy. Počet ochorení tejto časti chrbtice v posledných rokoch stále stúpa, preto je téme venovaná veľká pozornosť. Práca je rozdelená na dve tematické sekcie. V prvej sekcii sú na začiatku zhrnuté poznatky o anatómii tela stavca a Bézierových krivkách, ktoré sú využité pri modelovaní tela stavca a medzistavcovej platničky. V praktickej časti prvej sekcie je na riešenie využitý konečnoprvkový softvérový aparát, s ktorým bola robená analýza pohybového segmentu. Skúmané boli tri stavy záťaže pohybového segmentu - sed/ státie vzpriamene, predklon/záklon a ohýbanie v pravo/vľavo. Druhá sekcia je venovaná jednému z ochorení chrbtice - skolióze, kde sú stručne popísané teoretické o tomto ochorení. Cieľom druhej sekcie práce je vytvorenie modelu zdravej chrbtice z RTG snímok chorej ľudskej chrbtice, ktoré boli z dispozícií. Toto virtuálne vyrovňovanie chrbtice je robené z dôvodu neskoršieho porovnania napäťovej analýzy chorej a zdravej chrbtice konkrétneho pacienta.

ABSTRACT

The work deals with the creation of a geometric model of the human lumbar spine and analyzes its biomechanical response. The number of diseases of the spine is still increasing in recent years, so therefore, this topic reaches further close attention. The work is divided into two thematic parts. Knowledge about the anatomy of the vertebral body and Bézier curves are summarized at the beginning of the first part, which are used for modeling of the vertebral body and intervertebral disc. In the practical part of the first section finite element software maker is used to solve, which was used for analysis of the locomotive segment. The three states of load of the locomotive segment are examined - seats / standing upright, bending forward / backward bend and bend to the right / left . The second part is devoted to the early work of one of the diseases of the spine - scoliosis. We give briefly described theoretical explanation about the disease. The goal of the second part is to create a model of a healthy spine from X-ray images of diseased human spine, which have been available. This virtual alignment of the spine is done due to later comparison analysis diseased and healthy spinal particular patient.

OBSAH

1. Úvod	9
2. Ciele práce	9
3. Pohybový segment, napät'ová analýza	10
3.1. Morfológia stavca.....	10
3.2. Bézierove krivky	12
3.3. Vlastnosti Bernsteinových polynómov	15
3.4. Vlastnosti Bézierových kubík	16
3.5. Modelovanie Bézierových kriviek	18
3.6. Spojitosť Bézierových kriviek	19
3.7. Modelovanie stavca.....	21
3.8. Analýza pohybového segmentu v konečnoprvkovom softvéri	23
4. Zakrivenie chrbtice	31
4.1. Sagitálne zakrivenie chrbtice	31
4.2. Laterálna deformita chrbtice – skolióza.....	31
4.3. Cobbov uhol	32
4.4. Druhy skolióz	33
4.5. Diagnostika skoliózy	34
4.6. Terapia.....	34
5. Geometria konfigurácie stavcov podľa RTG snímok.....	36
5.1. Aktuálny skoliotický stav.....	36
5.2. Referenčné body stavcov, spline interpolujúci referenčné body. Spinálna krivka.....	37
5.3. Korigovaný stav spinálnej krivky po terapii	40
6. Napät'ová analýza	46
7. Záver.....	49
8. Zoznam použitej literatúry	50

1. ÚVOD

Téme biomechanika je venovaná v posledných rokoch veľká pozornosť. Hlavným dôvodom tejto pozornosti je vzrastajúce množstvo ochorení chrbtice. Medzi najzávažnejšie ochorenia patria degeneratívne ochorenia medzistavcovej platničky a stavca, posuny platničky a skolióza. Preto je biomechanika úzko spojená s inžinierstvom a pomerne často využíva tradičné inžinierske vedy na analyzovanie biologických systémov. Biologické systémy sú však viac komplexné ako ľuďmi postavené systémy. Numerické metódy sú preto aplikované v skoro všetkých biomechanických štúdiách. Výskum sa vykonáva v opakovaných procesoch hypotéz a overovania, zahŕňajúc niekoľko krokov modelovania, počítačových simulácií a experimentálnych meraní. [13]

Táto práca nadväzuje na moju bakalársku prácu, v ktorej bol riešený problém modelovania medzistavcovej platničky ako rotačne symetrického telesa. Napät'ová analýza bola teoreticky popísaná a pre rotačne symetrické zjednodušenie pohybového segmentu boli realizované v konečnoprvkovom softvéri tri druhy okrajových podmienok. Skúmané boli tri stavy namáhania platničky, a to rovnomerné zaťaženie (zodpovedá státiu vzpriamene alebo sedu), nerovnomerné zaťaženie (predklon, záklon) a rotácia (otáčanie do strán).

V mojej prvej časti práce sa venujem presnejšiemu tvaru stavca a medzistavcovej platničky, ktorý je modelovaný pomocou Bézierových kriviek. Bol vybraný pohybový segment (stavec - platnička- stavec), na ktorom bola urobená napät'ová analýza.

V ďalšej časti práce sa venujem jednému z ochorení chrbtice- skolióze, kde pracujem s röntgenovou snímku pacienta a snažím sa získať tvar spinálnej krivky t.j. krivky, ktorá spája referenčné body jednotlivých stavcov a taktiež opisujem vyrovňovanie tejto krivky na účely porovnávania chorej a zdravej chrbtice.

2. CIELE PRÁCE

Cieľom interdisciplinárneho výskumu, ktorého časť je riešená v tejto práci, je tvorba optimálneho geometrického modelu jednotlivých stavcov, na ktorých sa bude robiť napät'ová analýza a skúmanie vplyvov liečby skoliózy na stupeň zmiernenia napätia v chrbtici po prechádzajúcej úspešnej terapii. Napät'ovej analýze vykonanej v konečno prvkovom multifyzikálnom softvéri ANSYS predchádza tvorba geometrie oblasti, na

ktorej sa výpočet realizuje. Na tento účel bol vyvinutý program BMPCOORDINATES [11], ktorým lekár interaktívne vytvára 3D model chrbtice konkrétneho pacienta zadaním niekoľkých referenčných charakteristík priamo na RTG snímkach (predo zadný a bočný pohľad). Program vytvára geometriu vhodnú pre priame použitie na výpočet napäťovej analýzy.

Keďže na röntgenové vyšetrenia sú posielaní pacienti už s chorou chrbticou, snímky pre model zdravej chrbtice na analýzu mechanickej odozvy nemáme k dispozícii. Skoliózou trpia väčšinou mladé dievčatá a podľa rozhovoru s doktorom nie je žiaduce posielat' ich na CT vyšetrenia a taktiež na časté röntgenové vyšetrenia. Príliš časté ožarovanie môže spôsobiť neplodnosť alebo rakovinu štítnej žľazy.

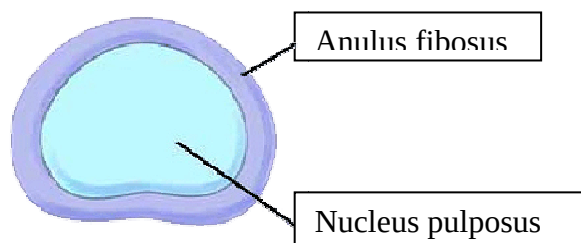
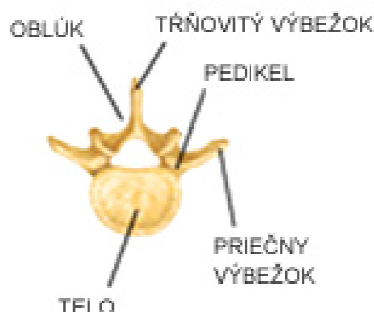
Mojou úlohou bolo doplniť program BPMCOORDINATES [11] o procedúry zabezpečujúce možnosť úpravy geometrie podľa voľby lekára v škále od pôvodného skoliotického stavu až do úplného narovnania. Následne sa dajú porovnať napätosti v oboch stavoch – v prípade pôvodného patologického stavu a terapiou zlepšeného stavu.

Tento program môže byť použitý aj na určenie o koľko pacient "vyrastie" po liečení skoliózy, taktiež aj na určenie Cobbovho uhla podľa, ktorého sa určuje aj stupeň skoliózy a tiež na určenie tvaru spinálnej krivky.

3. POHYBOVÝ SEGMENT, NAPÄŤOVÁ ANALÝZA

3.1. MORFOLÓGIA STAVCA

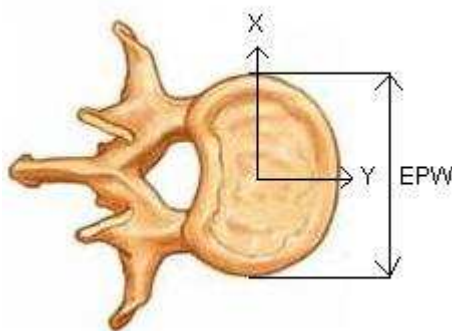
Pri modelovaní pohybového tela stavca a medzistavcovej platničky sa vychádzalo zo základnej anatómie medzistavcovej platničky (Obr. 3.1.2) a stavca (Obr. 3.1.1).



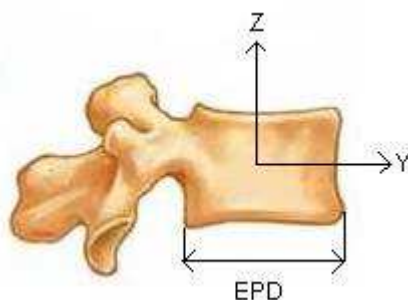
Obr. 3.1.1: Anatómia stavca Obr. 3.1.2 : Anatómia medzistavcovej platničky

Model stavca je zjednodušený. V prvej časti mojej práce modelujem telá stavcov, bez pediklov - výbežkov na stavci a medzistavcové platničky.

Na nasledujúcich obrázkoch (Obr. 3.1.3 a Obr. 3.1.4) sa nachádzajú označenia jednotlivých rozmerov stavca. Pre šírku tela stavca je označenie EPW a pre dĺžku tela stavca je označenie EPD. Z týchto rozmerov som vychádzala pri určovaní bodov na tvorbu Bézierových kriviek.

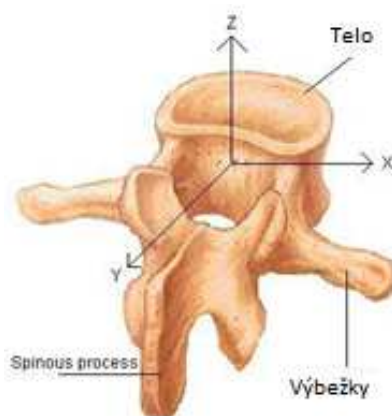


Obr. 3.1.3: Pohľad zhora a označenie rozmeru tela stavca



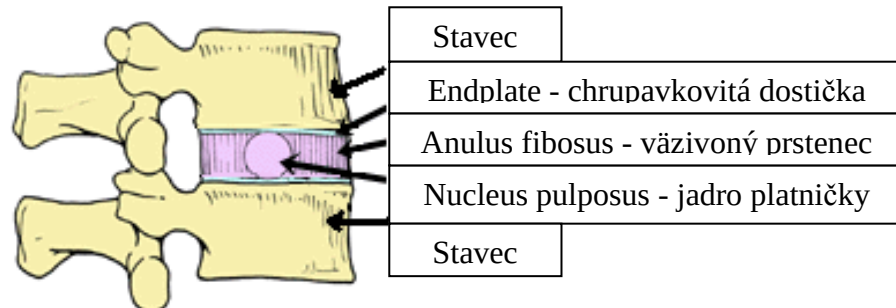
Obr. 3.1.4: Pohľad z boku a označenie rozmeru tela stavca

Na nasledujúcom obrázku (Obr. 3.1.5) je znázornené ako boli zvolené smery súradnicových osí na tele stavca.



Obr. 3.1.5: Označenie smerov a častí stavca

Na analýzu v konečnoprvkovom softvéri bol vybraný pohybový segment (Obr. 3.6), ktorý je zložený zo stavca nad platničkou, medzistavcovej platničky a stavca pod platničkou a tenkých vrstvičiek endplate medzi stavcom a platničkou.



Obr. 3.1.6: Pohybový segment

3.2. BÉZIEROVE KRIVKY

Zápis polynomickej krivky v tvare:

$$r(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 = [1 \ t \ t^2 \ t^3] \cdot [a_0 \ a_1 \ a_2 \ a_3]^T, \quad t \in \langle 0,1 \rangle \quad (3.1)$$

má z hľadiska geometrického modelovania nevýhodu v tom, že nepoznáme geometrický význam koeficientov a_0, a_1, a_2, a_3 a ich vzťah ku krivke.

Vhodnejšie je zadávať takúto krivku jej krajnými bodmi R_0, R_1 a sklonmi - dotykovými vektormi r'_0, r'_1 v týchto krajných bodoch. Úlohou je zapísať parametrické vyjadrenie polynomickej krivky tretieho stupňa určenej krajnými bodmi R_0, R_1 a sklonmi r'_0, r'_1 . Krivka (3.1) má deriváciu

$$r'(t) = [0 \ 1 \ 2t \ 3t^2] \cdot [a_0 \ a_1 \ a_2 \ a_3]^T. \quad (3.2)$$

Ak do vzťahov (3.1) a (3.2) dosadíme za parameter t hodnoty 0,1 a zohľadníme pozíciu, do ktorej sme "nominovali" body R_0, R_1 a vektory r'_0, r'_1 dostaneme:

$r(0) = R_0, r(1) = R_1, r'(0) = r'_0, r'(1) = r'_1$ resp. $a_0 = R_0, a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = R_1, a_1 = r'_0, a_1 + 2a_2 + 3a_3 = r'_1$. Z toho vyplýva: $a_0 = R_0, a_1 = R_1 - R_0, a_2 = 3(R_1 - R_0) - 2r'_0 - r'_1, a_3 = 2(R_0 - R_1) + r'_0 + r'_1$, potom môžeme v (3.1) zapísať:

$$\begin{aligned}
 r(t) &= [1 \ t \ t^2 \ t^3] \begin{bmatrix} R_0 \\ r'_0 \\ 3(R_1 - R_0) - 2r'_0 - r'_1 \\ 2(R_0 - R_1) + r'_0 + r'_1 \end{bmatrix} = \\
 &= [1 \ t \ t^2 \ t^3] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_0 \\ R_1 \\ r'_0 \\ r'_1 \end{bmatrix} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{M}_H \cdot \mathbf{G}_H
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Teda $r(t) = \mathbf{T} \cdot \mathbf{M}_H \cdot \mathbf{G}_H$ je hľadané maticové vyjadrenie polynomickeho kubického segmentu (3.1) pomocou geometrických prvkov t.j. krajných bodov R_0, R_1 a dotykových vektorov r'_0, r'_1 v týchto krajných bodoch. Tieto sú uložené v tzv. geometrickej matici $\mathbf{G}_H$. Matica $\mathbf{M}_H$ je matica tzv. koeficientov Hermita.[14]

Hermitova kubika má v geometrickej matici $\mathbf{G}_H$ dva krajné body R_0, R_1 , a dva dotykové vektory r'_0, r'_1 v týchto krajných bodoch. Tieto Hermitove kubiky modifikáciou veľkostí dotykových vektorov r'_0, r'_1 alebo ich polohy ponúkajú širokú paletu kubických kriviek. Pri ilustrácii týchto kriviek intuitívne cítime zmenu krivky, ale chýba nám výraznejšie „ohraničenie“ oblasti, v ktorej krivka leží. Autormi spracovania kriviek, ktoré ležia v „ohraničenej“ oblasti boli v období rokov 1958-60 dvaja Francúzi: Pierre Etienne Bézier a Paul de Faget Casteljau.[14]

Postup opisu kubických Bézierových kriviek ilustrujeme v súlade s myšlienkou „ohraničiť“ oblasť, v ktorej krivka leží. Úpravy zrealizujeme v geometrickej matici $\mathbf{G}_H$:

$$\mathbf{G}_H = [R_0 \ R_1 \ r'_0 \ r'_1]^T. \tag{3.4}$$

Určíme štvoricu bodov: V_0, V_1, V_2, V_3 :

$$V_0 = R_0 \quad V_1 = R_0 + \frac{1}{3}r'_0 \quad V_2 = R_1 - \frac{1}{3}r'_1 \quad V_3 = R_1,$$

kde $V_i, i=0,1,2,3$, označuje polohové vektory bodov. Vyjadríme dátovú štvoricu R_0, R_1, r'_0, r'_1 pomocou štvorice bodov V_0, V_1, V_2, V_3 :

$$R_0 = V_0 \quad R_1 = V_3 \quad r'_0 = 3(V_1 - V_0) \quad r'_1 = 3(V_3 - V_2).$$

Dosadíme do geometrickej matice (3.4):

$$\mathbf{G}_H = \begin{bmatrix} R_0 \\ R_1 \\ r'_0 \\ r'_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_0 \\ V_3 \\ 3(V_1 - V_0) \\ 3(V_3 - V_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_0 \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

a následne do matice koeficientov Hermita:

$$r(t) = \mathbf{T} \cdot \mathbf{M}_H \cdot \mathbf{G}_H = [1 \ t \ t^2 \ t^3] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_0 \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{M}_B \cdot \mathbf{G}_B. \quad (3.6)$$

Získali sme maticové vyjadrenie polynomickeho segmentu (3.1) pomocou geometrických prvkov: bodov: V_0, V_1, V_2, V_3 . Tieto sú uložené v tzv. geometrickej matici $\mathbf{G}_B$. Lomená čiara V_0, V_1, V_2, V_3 sa nazýva riadiaci polygón a je to vstupná dátová štvorica $[V_0 \ V_1 \ V_2 \ V_3]$. Po vynásobení matíc $\mathbf{T}$ a $\mathbf{M}_B$ dostaneme riadkovú maticu:

$$\mathbf{B}_B = [(1-t)^3 \quad 3t(1-t)^2 \quad 3t^2(1-t) \quad t^3]. \quad (3.7)$$

Prvky tejto matice označíme :

$B_{03} = (1-t)^3$ $B_{13} = 3t(1-t)^2$ $B_{23} = 3t^2(1-t)$ $B_{33} = t^3$ a sú to zmiešavacie funkcie tretieho stupňa, nazývame ich Bernsteinove polynómy.

Teraz parametrickú reprezentáciu polynomickeho segmentu (3.1) kubickej krivky zapíšeme pomocou Bernsteinových polynómov $B_{i3}(t)$, $i = 0, 1, 2, 3$, a riadiacich bodov V_0, V_1, V_2, V_3 :

$$r(t) = B_{03}(t)V_0 + B_{13}(t)V_1 + B_{23}(t)V_2 + B_{33}(t)V_3, \quad t \in \langle 0,1 \rangle \quad (3.8)$$

a hovoríme, že je zapísaná v Bézierovom tvare a označuje sa $b^3(t)$.

Teda:

$$b^3(t) = \sum_{i=0}^3 V_i B_{i3}(t), \quad t \in \langle 0,1 \rangle \quad (3.9)$$

je Bézierovou krivkou stupňa $n=3$ na intervale $\langle 0,1 \rangle$.

Bernsteinove polynómy $B_{03} = (1-t)^3$, $B_{13} = 3t(1-t)^2$, $B_{23} = 3t^2(1-t)$, $B_{33} = t^3$ pre stupeň $n=3$ môžeme zapísať v tvare:

$$B_{i3}(t) = \binom{3}{i} t^i (1-t)^{3-i}, i = 0,1,2,3. \quad (3.10)$$

Ak vo vzťahoch (3.6) a (3.7) vykonáme zovšeobecnenie z 3 na n , dostaneme Bernsteinove polynómy stupňa n :

$$B_{in}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}, i = 0,1,2,3 \dots n, \quad t \in \langle 0,1 \rangle \quad (3.11)$$

kde

$$\binom{n}{i} = \begin{cases} \frac{n!}{i!(n-i)!}, & 0 \leq i \leq n \\ 0, & \text{inak} \end{cases}$$

a taktiež dostávame aj Bézierove krivky stupňa n

$$b^n(t) = \sum_{i=0}^n V_i B_{in}(t), \quad t \in \langle 0,1 \rangle. \quad (3.12)$$

Treba však poznamenať, že ak $i \notin \{0,1,\dots, n\}$, je $\binom{n}{i} = 0$ a teda aj $B_{in}(t) \equiv 0$. Toto prirodzene platí aj pre $n = 3$. [14]

3.3. VLASTNOSTI BERNSTEINOVÝCH POLYNÓMOV

Bernsteinove polynómy majú mnoho zaujímavých vlastností, z ktorých vyplývajú dôležité vlastnosti Bézierových kriviek.

A. Z vlastnosti kombinačných čísel $\binom{n}{i} = \binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1}$ vyplýva, že $\binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} = (1-t) \binom{n-1}{i} t^i (1-t)^{n-1-i} + t \binom{n-1}{i-1} t^{i-1} (1-t)^{(n-1)-(i-1)}$ a teda môžeme zapísať $B_{in}(t) = (1-t)B_{in-1}(t) + tB_{i-1,n-1}(t)$ tzv. rekurentný vzorec.

B. Z binomickej vety dostávame vzťah: $1 = [t + (1-t)]^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} = \sum_{i=0}^n B_{in}(t)$ a teda platí $\sum_{i=0}^n B_{in}(t) = 1$, pre každé t , tzv. rozklad na jednotky.

C. Z definície Bernsteinových polynómov a predchádzajúcej vlastnosti vyplýva: $B_{0n}(0) = 1$ a $B_{in}(0) = 0$ pre $i=1,2,\dots,n$
 $B_{nn}(1) = 1$ a $B_{in}(1) = 0$ pre $i=1,2,\dots,n-1$.

D. $B_{in}(t) \geq 0$ pre každé i, n a $t \in \langle 0,1 \rangle$, tzv. nezápornosť.

3.4. VLASTNOSTI BÉZIEROVÝCH KUBÍK

Nech $V_0, V_1, V_2, V_3, \dots, V_n$ je daná postupnosť bodov v priestore $E(E^2, E^3)$. Potom množina bodov v priestore E , ktorých súradnice vyhovujú rovnici:

$$b^n(t) = \sum_{i=0}^n V_i B_{in}(t), \quad t \in \langle 0, 1 \rangle,$$

kde $B_{in}(t)$, $i=1, 2, \dots, n$, sú Bernsteinove polynómy, je Bézierova krivka stupňa n .

Ďalej sú uvedené vlastnosti Bézierových kriviek:

A. Platí interpolácia krajných bodov riadiaceho polygónu : $b^n(0) = V_0$, $b^n(1) = V_n$ t.j. Bézierova krivka prechádza prvým a posledným bodom riadiaceho polygónu.

B. Bézierova krivka $b^n(t)$ leží v konvexnom obale svojich riadiacich bodov $V_0, V_1, V_2, V_3, \dots, V_n$ (polynómy $B_{in}(t)$ sú pre $t \in [0, 1]$ nezáporné, $b^n(t)$ je konvexnou kombináciou riadiacich bodov V_i).

C. Máme vektor prvej derivácie

$$\begin{aligned} b'^n(t) &= \sum_{i=0}^n V_i B'_{in}(t) = \\ &= -n(1-t)^{(n-1)} V_0 + (n(1-t)^{(n-1)} - nt(n-1)(1-t)^{(n-2)})V_1 + \dots \\ &\quad \dots + (n(n-1)t^2(1-t) - nt^{n-1})V_{n-1} + nt^{n-1}V_n = \\ &= n(1-t)^{(n-1)}(V_1 - V_0) + \dots + nt^{n-1}(V_n - V_{n-1}), \end{aligned} \quad (3.13)$$

ak použijeme $\Delta V_i = V_{i+1} - V_i$, tak

$$b'^n(t) = n[(1-t)^{(n-1)} \dots t^{n-1}][\Delta V_0 \dots \Delta V_{n-1}]^T = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta V_i B_{in-1}(t) \quad (3.14)$$

je potom Bézierova krivka $(n-1)$ stupňa na vektorovej zložke.

Pre $t = 0$: $b'^n(0) = n\Delta V_0 = n(V_1 - V_0)$, teda Bézierova krivka $b^n(t)$ sa v začiatočnom bode V_0 dotýka prvej strany svojho riadiaceho polygónu (dotykový vektor je $n(V_1 - V_0)$) a pre $t = 1$: $b'^n(1) = n\Delta V_{n-1} = n(V_n - V_{n-1})$, teda Bézierova krivka $b^n(t)$ sa v poslednom bode V_n dotýka poslednej strany svojho riadiaceho polynómu (dotykový vektor je $n(V_n - V_{n-1})$).

D. Pre vektor druhej derivácie:

$$b^{n''}(t) = n(n-1) \sum_{i=0}^{n-2} (V_{i+2} - (n-1)V_{i+1} + V_i) B_{in-2}(t) \quad (3.15)$$

platí: pre $t = 0$: $b^{n''}(0) = n(n-1)(V_2 - 2V_1 + V_0)$, teda vektor druhej derivácie začiatočnom bode V_0 je rovnobežný s uhlopriečkou rovnobežníka určeného bodmi V_0 , V_1 , V_2 a pre $t = 1$: $b^{n''}(1) = n(n-1)(V_n - 2V_{n-1} + V_{n-2})$, teda vektor druhej derivácie konečnom bode V_n je rovnobežný s uhlopriečkou rovnobežníka určeného bodmi V_{n-2} , V_{n-1} , V_n .

E. Platí symetria:

$$\sum_{i=0}^n V_i B_{in}(t) = \sum_{i=0}^n V_{n-i} B_{in} \quad (3.16)$$

to znamená, že riadiaca krivka sa nezmení, ak obrátíme poradie jej riadiacich bodov a súčasne parameter t necháme prebiehať od 1 po 0.

F. Bézierove krivky sú invariantné vzhľadom na transformáciu parametra:

$$\sum_{i=0}^n V_i B_{in}(t) = \sum_{i=0}^n V_i B_{in}\left(\frac{u-a}{b-a}\right) \quad u \in \langle a, b \rangle \quad t \in \langle 0, 1 \rangle. \quad (3.17)$$

G. Bézierove krivky sú invariantné vzhľadom na afinné transformácie t.j. pre každú afinnú transformáciu T platí:

$$T\left(\sum_{i=0}^n V_i B_{in}(t)\right) = \sum_{i=0}^n T(V_i) B_{in}(t) \quad (3.18)$$

t.j. afinný obraz Bézierovej krivky danej riadiacimi bodmi V_0 , V_1 , V_2 , $V_3, \dots, V_n$ bude rovnaký ako Bézierova krivka daná afinnými obrazmi jednotlivých riadiacich bodov pôvodného riadiaceho polygónu.

H. Platí pseudolokálne riadenie, t.j. Bézierove krivky nemožno lokálne upravovať, zmena riadiaceho bodu V_i síce spôsobí zmenu tvaru celej krivky, ale výrazné zmeny nastanú v okolí bodu $t = \frac{i}{n}$ (lokálne maximum polynómov) inde sú menej výrazné.[14]

3.5. MODELOVANIE BÉZIEROVÝCH KRIVIEK

Majme vstupnú n -ticu riadiacich bodov $V_0, V_1, V_2, V_3, \dots, V_n$.

A. Vyčísľovacie algoritmy:

$$b^n(t) = B_{0n}(t)V_0 + B_{1n}(t)V_1 + \dots + B_{n-2n}(t)V_{n-2} + B_{nn}(t)V_n, \quad t \in \langle 0,1 \rangle$$

Výpočet Bézierovej krivky môžeme zrealizovať dosadzovaním hodnôt parametra t do uvedeného vzťahu a následne pospájať vypočítané body úsečkami. Zmena parametra t je obyčajne konštantná. Tento spôsob nie je veľmi efektívny lebo nerešpektuje veľkosť zakrivenia. Jeho výhodou je, že generuje dopredu známy počet úsečiek.

B. Casteljauov algoritmus(CA):

V roku 1959 spracoval de Casteljau pre firmu Citroen algoritmus pre vyčísľovanie bodov Bézierovej krivky, ktorým sa bod na krivke vyčísľuje pomocou lineárnej interpolácie, teda nie priamo pomocou Bernsteinových polynómov, ale vychádza sa z rekurzívnej vlastnosti Bernsteinových polynómov: $B_{in}(t) = (1-t)B_{i,n-1}(t) + tB_{i-1,n-1}(t)$.

Zápis algoritmu pre n bodov $V_0, V_1, V_2, V_3, \dots, V_n$:

Vstup: riadiace body

- 0) $V_i^0(t) = V_i \quad i = 0, 1, \dots, n$
- 1) $V_i^1(t) = (1-t)V_i^0(t) + tV_{i+1}^0(t) \quad i = 0, 1, \dots, n-1$
- $\vdots$
- r) $V_i^r(t) = (1-t)V_i^{r-1}(t) + tV_{i+1}^{r-1}(t) \quad r = 1, 2, \dots, n \quad i = 0, 1, \dots, n-r$
- $\vdots$
- $n-1$) $V_0^{n-1}(t) = (1-t)V_0^{n-2}(t) + tV_1^{n-2}(t), V_1^{n-1}(t) = (1-t)V_1^{n-2}(t) + tV_2^{n-2}(t)$
- n) $V_0^n(t) = (1-t)V_0^{n-1}(t) + tV_1^{n-1}(t)$

výstup: bod krivky $b^n(t) = V_0^n(t)$ [14]

Teda algoritmus pre výpočet bodu krivky môžeme zapísať nasledovne:[14]

- načítaj body $V_0, V_1, V_2, V_3, \dots, V_n$, polož $V_0^0 = V_0, V_0^1 = V_1, \dots, V_0^n = V_n$
- $t=0$
- urči Δt
- $b^0 = V_0$
- Opakuj kým $t < 1$: $t = t + \Delta t$
- Opakuj pre $r=1 \dots n$
- Opakuj pre $i=0 \dots n-j$

- $V_i^r = (1-t) V_i^{r-1} + t V_{i+1}^{r-1}$
- Vykresli úsečku $b^0 V_0^n$
- $b^0 = V_0^n$

Všimnime si, že keď robíme CA pre Bezierovu krivku ľubovoľného stupňa n v pevnom bode $t \in \langle 0,1 \rangle$ potom :

a) Na každej strane $V_i V_{i+1}$ jej radiaceho polygónu vytvárame bod

$$V_i^1(t) = (1-t)V_i + t V_{i+1} .$$

b) Pre každé $r \in \{1,2, \dots, n\}$ ku každej hrane $V_i^{r-1}(t) V_{i+1}^{r-1}(t)$ vytvárame bod

$$V_i^r(t) = (1-t) V_i^{r-1}(t) + t V_{i+1}^{r-1}(t) .$$

Takémuto procesu tvorby bodov sa hovorí lineárna interpolácia.

Ďalšie možnosti vytvárania Bézierových kriviek sú:

- C. Prerozdeľovanie
- D. Zvyšovanie stupňa
- E. Metóda dopredného diferencovania [14]

3.6. SPOJITOSŤ BÉZIEROVÝCH KRIVIEK

Opis krivky zložitého tvaru (s veľkým počtom radiacích bodov) si vyžaduje Bezierovu krivku vysokého stupňa, čo je nevýhodné najmä z numerických dôvodov a navyše často jednoduchý Bézierov oblúk nespĺňa požiadavky “dobrej” aproximácie radiaceho polygónu. Riešením môžu byť zložené Bézierove krivky, ktoré sú vytvorené zo segmentov jednoduchých Bézierových oblúkov, v našom prípade Bezierových kubíkov, pri splnení podmienok ich hladkého spojenia – “zošitia”.

Nech 0S je segment Bézierovej krivky n° s radiacimi bodmi ${}^0V_0, {}^0V_1, {}^0V_2, {}^0V_3, \dots, {}^0V_n$:

$${}^0S: \quad {}^0b(t) = \sum_{i=0}^n {}^0V_i B_{in}(t), \quad t \in \langle 0,1 \rangle.$$

Úlohou je túto krivku 0S hladko napojiť inú Bézierovu krivku 1S stupňa n :

$${}^1S: \quad {}^1b(t) = \sum_{i=0}^n {}^1V_i B_{in}(t), \quad t \in \langle 0,1 \rangle,$$

ktorej radiace body budú ${}^1V_0, {}^1V_1, {}^1V_2, {}^1V_3, \dots, {}^1V_n$. Tieto radiace body vyčíslime, a to na základe podmienok geometrickej spojitosti:

a) geometrická spojitosť 0. rádu G^0 - spojitosť (polohová spojitosť):

$${}^1b(0) = {}^0b(1) \Leftrightarrow {}^1V_0 = {}^0V_n$$

b) geometrická spojitosť 1. rádu G^1 - spojitosť (dotyčnicová spojitosť):

$${}^1b'(0) = \beta_1 {}^0b'(1), \beta_1 > 0 \Leftrightarrow {}^1V_1 = \beta_1 ({}^0V_n - {}^0V_{n-1})$$

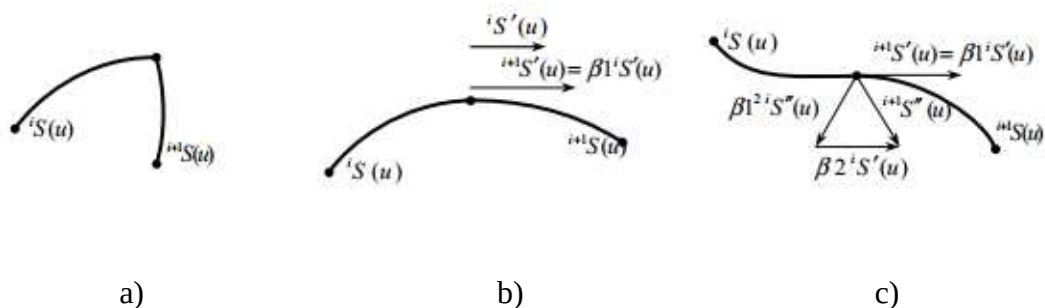
Bod 1V_1 je bodom priamky ${}^0V_{n-1} {}^0V_n$.

c) geometrická spojitosť 2. rádu G^2 - spojitosť (krivostná spojitosť):

$${}^1b''(0) = \beta_1^2 {}^0b''(1) + \beta_2 {}^0b'(1), \beta_1, \beta_2 > 0 \Leftrightarrow$$

$${}^1V_2 = \beta_1^2 {}^0V_{n-2} + \left(-2\beta_1 - 2\beta_1^2 - \frac{1}{2}\beta_2\right) {}^0V_{n-1} + \left(1 + 2\beta_1 + \beta_1^2 - \frac{1}{2}\beta_2\right) {}^0V_n$$

Riadiaci bod 1V_2 je určený pomocou bodov ${}^0V_{n-2} {}^0V_{n-1} {}^0V_n$.



Obr. 3.6.1: Geometrická spojitosť a) prvého rádu b) druhého rádu c) tretieho rádu

Je pravda, že možnosť voľby parametrov β_1, β_2 ponúka modelovať krivku najmä v okolí napojenia dvoch segmentov. Pri praktických aplikáciách sa siahla k “tvrdšej” požiadavke a tou je parametrická spojitosť t.j. $\beta_1 = 1, \beta_2 = 0$:

a) parametrická spojitosť 0. rádu C^0 - spojitosť:

$${}^1b(0) = {}^0b(1) \Leftrightarrow {}^1V_0 = {}^0V_n$$

b) parametrická spojitosť 1. rádu C^1 - spojitosť:

$${}^1b'(0) = {}^0b'(1) \Leftrightarrow {}^1V_1 = {}^0V_n + ({}^0V_n - {}^0V_{n-1}) \Leftrightarrow {}^1V_n = \frac{1}{2}({}^1V_1 - {}^0V_{n-2})$$

Bod 0V_n je stred úsečky ${}^0V_{n-1} {}^1V_1$.

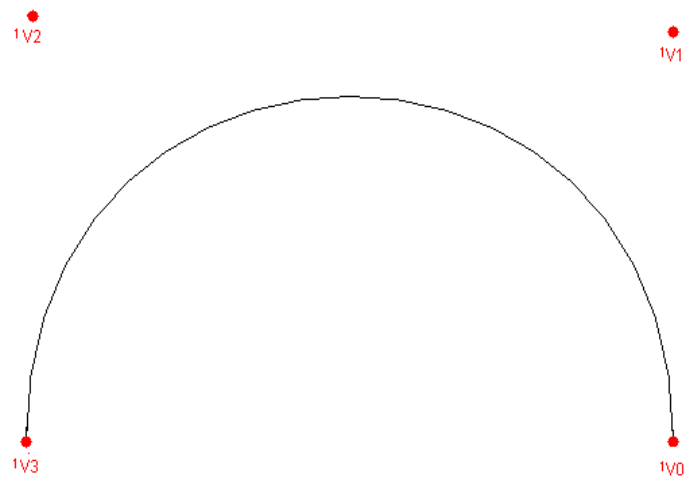
c) geometrická spojitosť 2. rádu C^2 - spojitosť:

$${}^1b''(0) = {}^0b''(1) \Leftrightarrow {}^1V_2 = {}^0V_{n-2} + 4({}^0V_n - {}^0V_{n-1})$$

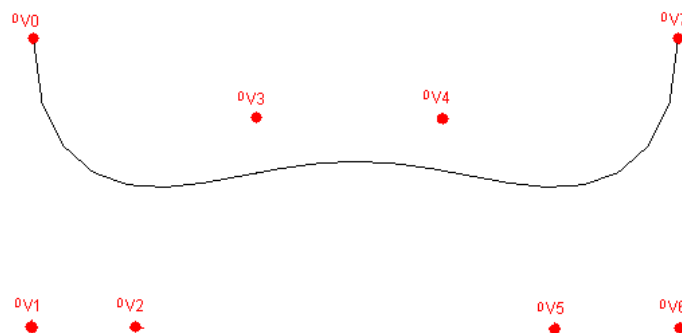
Riadiaci bod 1V_2 leží na priamke prechádzajúcej bodom ${}^0V_{n-2}$ a rovnobežnej a priamkou ${}^0V_{n-1} {}^0V_n$. [14]

3.7. MODELOVANIE STAVCA

Modelovanie som začala s hornou podstavou tela stavca, ktorú som rozdelila na dve krivky podľa obrázkov (Obr. 3.7.1) a (Obr. 3.7.2) a určila som pre ne riadiace body kriviek- červené body, podľa rozmerov stavca. V bodoch 0V_0 , 0V_7 , 1V_0 a 1V_3 je parametrická spojitosť 1. rádu.



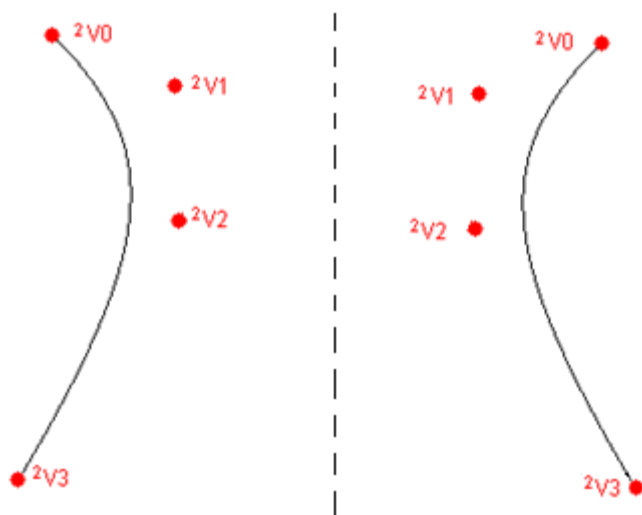
Obr. 3.7.1: Prvá krivka a riadiace body



Obr. 3.7.2: Druhá krivka a riadiace body

Na modelovanie spodnej podstavy bol použitý ten istý postup, avšak riadiace body mali súradnice podľa rozmerov práve tejto podstavy a taktiež všetky vodorovné rezy tela stavca budú mať tento tvar, odlišný bude iba rozmer.

Ďalej som modelovala krivku, ktorá určuje bočné steny stavca. Na nasledujúcom obrázku (Obr. 3.7.3) sú určené riadiace body tejto krivky.



Obr. 3.7.3: Krivka bočnej steny a jej riadiace body

Body tejto krivky som znovu vytvorila programom naprogramovaným v jazyku C++, keď som mala body tejto krivky, zrkadlením som vytvorila body, ktoré sú oproti tejto krivke. Krivka steny stavca je napojená geometrickou spojitosťou 0. rádu na krivku hornej podstavy v bodoch ${}^0V_0 = {}^1V_0 = {}^2V_0$, taktiež je geometrická spojitosť 0 rádu v koncových bodoch stenových kriviek a dolnej podstavy. Body stenových kriviek boli vytvorené preto, aby mohlo byť vymodelované telo stavca, a to takým spôsobom, že body stenových kriviek, ktoré sú zrkadlovo oproti sebe, boli nastavené ako začiatkové a koncové body kriviek, ktoré majú tvar podstáv. Riadiace body kriviek tvaru podstáv, boli určené tak, ako v prípade podstáv, len súradnice boli preškalované vždy v jednotlivej vrstve. Čiže riadiace body Bézierových kriviek pre jednotlivé rovnobežkové krivky tela stavca sa preškálujú v každej vrstve vzhľadom na vzdialenosť krajného bodu vodiacej krivky v príslušnom vodorovnom reze od osi súmernosti oboch vodiacich kriviek.

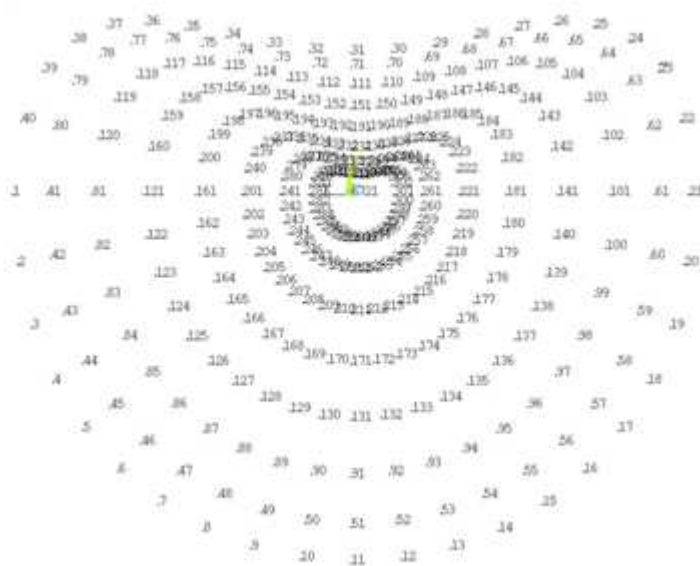
3.8. ANALÝZA POHYBOVÉHO SEGMENTU V KONEČNOPRVKOVOM SOFTVÉRI

Pri analýze v konečnoprvkovom softvéri sa využili Lamého rovnice - základné rovnice pružnosti:

$$\mu \Delta v_i + (\mu + \lambda) \frac{\partial}{\partial x_i} \operatorname{div} \mathbf{v} + b_i = 0, \quad (3.19)$$

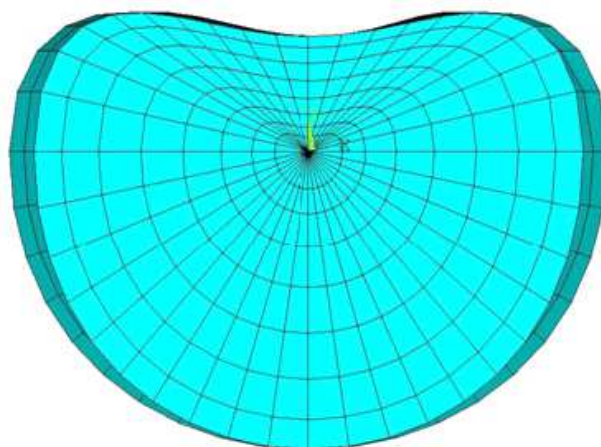
kde $\mathbf{v}$ je vektor posunutia, b_i sú zložky sily, ktoré pôsobia na objemovú jednotku, tzv. objemové sily a μ, λ sú Lamého konštanty: $\lambda = \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}$, $\mu = \frac{E}{2(1+\sigma)}$, σ je Poissonovo číslo. Matematické rozpracovanie metódy konečných prvkov sa nachádza v mojej bakalárskej práci.[15]

Prvý krok metódy konečných prvkov je rozdelenie na elementy, ktoré boli vytvorené nasledovným postupom. Z bodov kriviek boli vytvorené uzly a aby mohli byť vytvorené elementy museli byť jednotlivé vrstvy uzlov kriviek kopírované a škálované smerom do stredu jednotlivých vrstvy(Obr. 3.8.1).

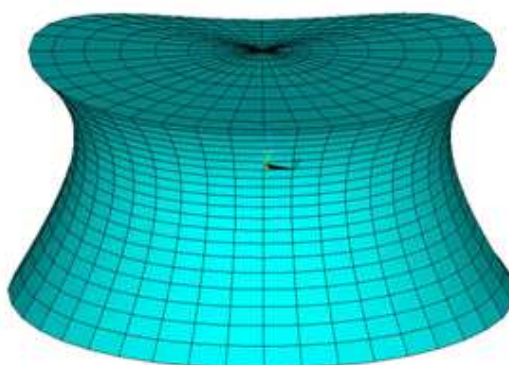


Obr. 3.8.1: Uzly vytvorené kopírovaním a škálovaním na jednej vrstve tela stavca

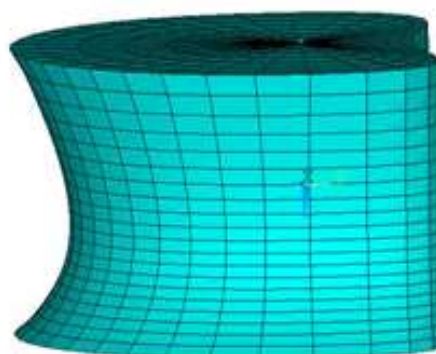
Keď boli vytvorené uzly všetkých vrstiev mohli sa vytvoriť elementy. Týmto spôsobom bol vytvorený stavec rozdelený na elementy - geometria vhodná na použitie v konečnoprvkovom softvéri (Obr. 3.8.2) , (Obr. 3.8.3) a (Obr. 3.8.4).



Obr. 3.8.2: Pohľad zhora na konečnoprvkovú sieť stavca

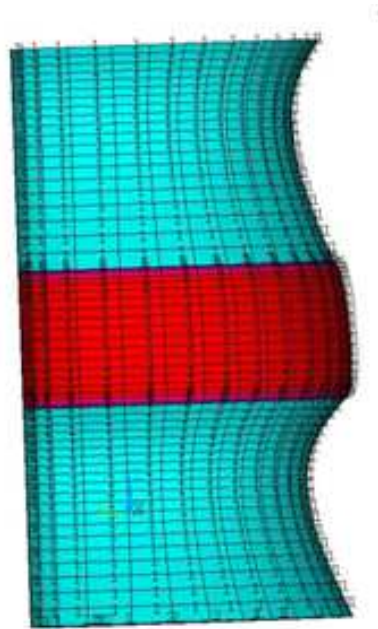


Obr. 3.8.3: Pohľad spredu na konečnoprvkovú sieť stavca



Obr. 3.8.4: Pohľad zboku na konečnoprvkovú sieť stavca

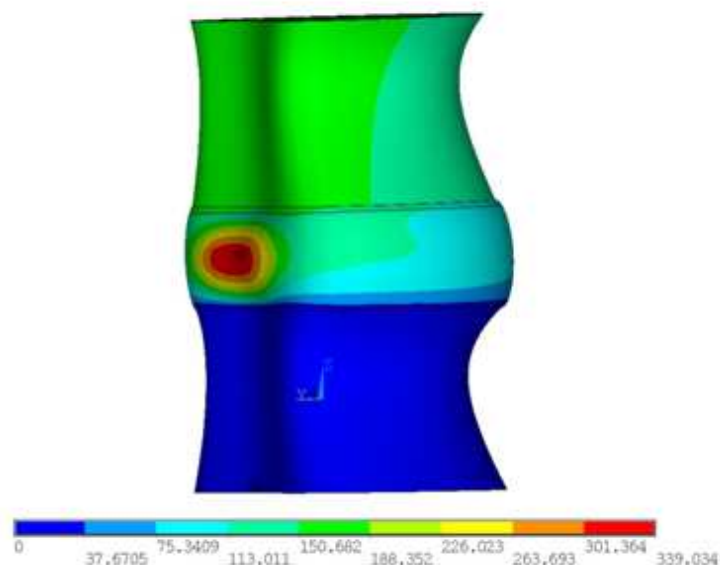
Rovnakým spôsobom bol vymodelovaný aj druhý stavec pohybového segmentu. Medzistavcová platnička bola potom domodelovaná tak, že bočná vodiaca krivka je vydutá smerom von a tvar podstavy je rovnaký ako u stavcov. V miestach, kde sa platnička napája na stavec sa, ešte nachádza tenká vrstva endplate.(Obr. 3.8.5)



Obr. 3.8.5: Konečnoprvková sieť pohybového segmentu

Keď bol vymodelovaný pohybový segment, mohla byť robená napät'ová analýza v konečnoprvkovom softvéri. Skúmané boli tri zaťažovacie stavy - rovnomerné zaťaženie (zodpovedajúce sedu alebo státiu vzpriamene) a nerovnomerné zaťaženie, kde boli skúmané dve polohy (predklon - záklon, ohyb vpravo - vľavo).

Prvá záťaž bola zadaná rovnomerne na hornú podstavu stavca, čo zodpovedá státiu vzpriamene alebo sedu. Záťaž bola aplikovaná na hornú podstavu vrchného stavca. Na obrázku (Obr. 3.8.6) je zobrazené celkové posunutie. K najväčším posunom dochádza na medzistavcovej platničke na strane kde prechádza miechový kanál. Ako je známe z lekárskej praxe práve v týchto miestach dochádza ku ochoreniam medzistavcovej platničky, čo môže spôsobovať bolesť kvôli tomu, že platnička tlačí na miechu.(Obr. 3.8.7)

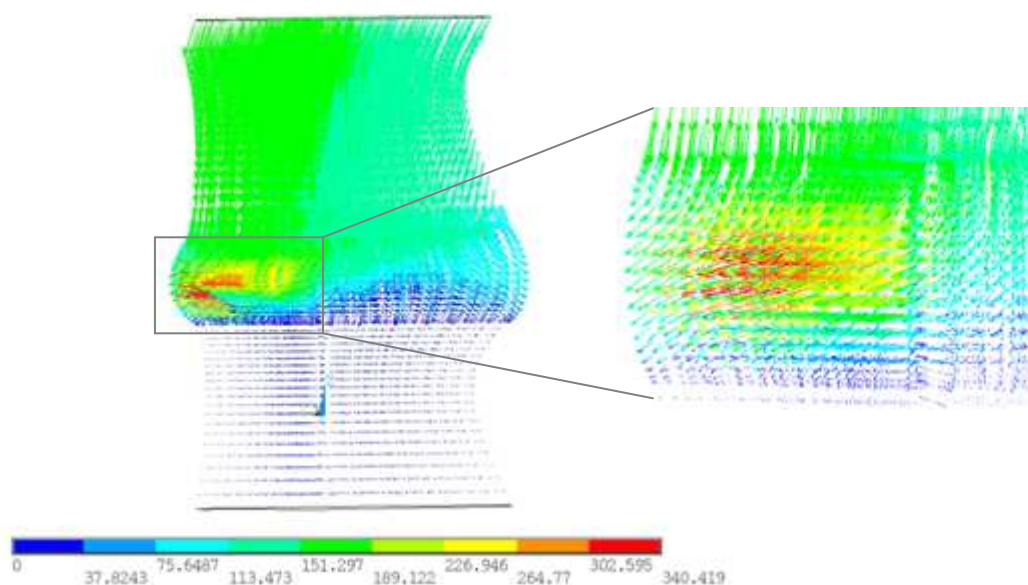


Obr. 3.8.6: Celkové posunutia na pohybovom segmente - rovnomerné zaťaženie

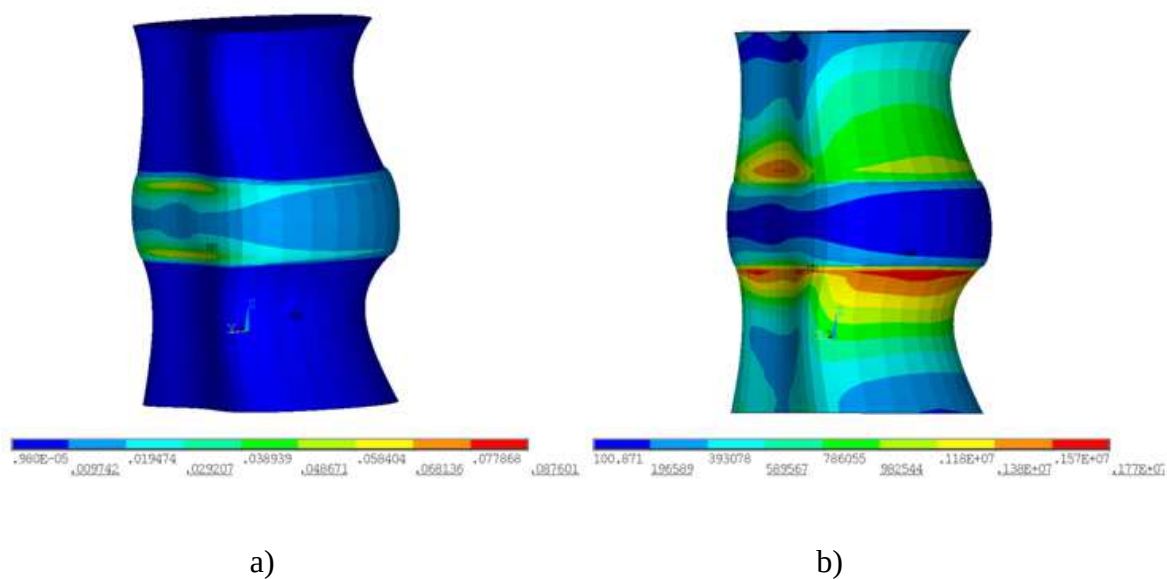


Obr. 3.8.7: Stupne ochorenia medzistavcovej platničky

Na obrázku (Obr. 3.8.8) sú zobrazené vektorové posunutia uzlov konečnoprvkovej siete. Práve tu je vidieť, že dolný stavec sa nedeformuje a vzhľadom na podložku ani neposúva, horný sa iba posúva ale nedeformuje, čo je zapríčinené tým, že kosť je tvrdá. Platnička sa deformuje výrazne a teda prenáša záťaž.

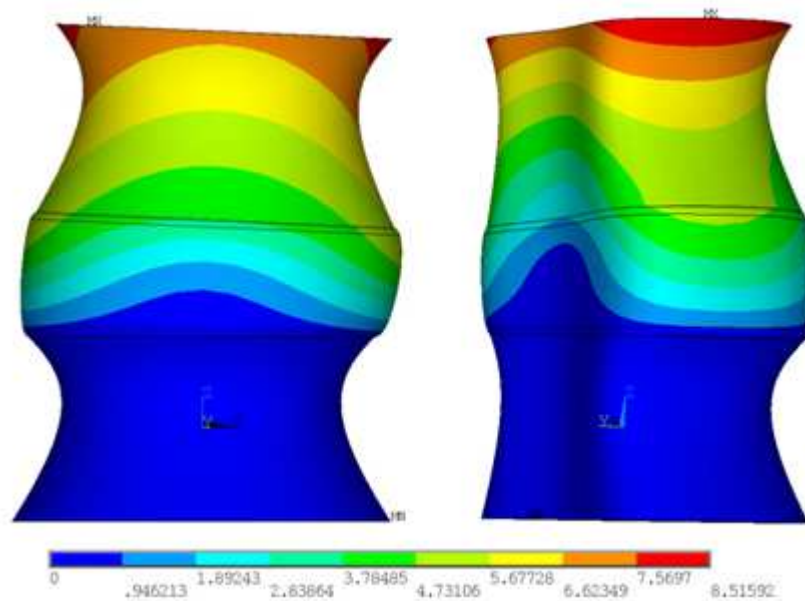


Obr. 3.8.8: Vektorové posunutia konečnoprvkovej siete - rovnomerné zaťaženie

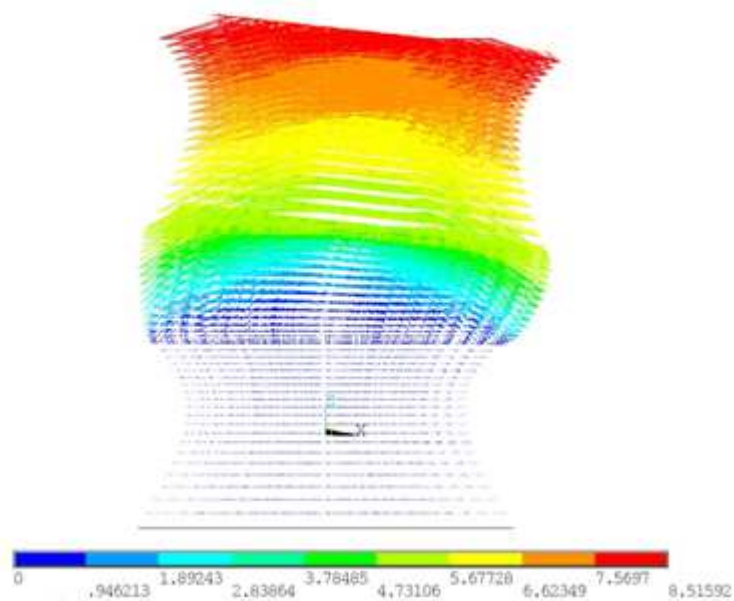


Obr. 3.8.9: Von Missesove a) pomerné deformácie b) napätia pri rovnomernom zaťažení

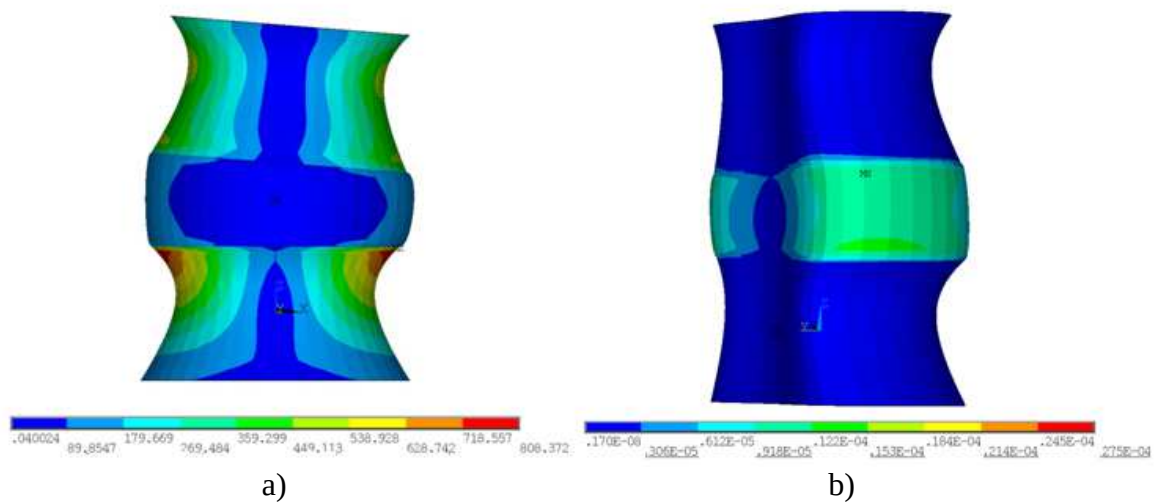
Druhé zaťaženie bolo robené nerovnomerné lineárne v smere osi x, čo zodpovedá ohýbaniu sa do strán, čiže vpravo - vľavo. Na obrázku (Obr. 3.8.10) je vidieť, že k najväčším posunom dochádza na stranách stavca v hornej časti vrchného stavca .



Obr. 3.8.10: Celkové posunutie na pohybovom segmente - nerovnomerné zaťaženie v smere osi x

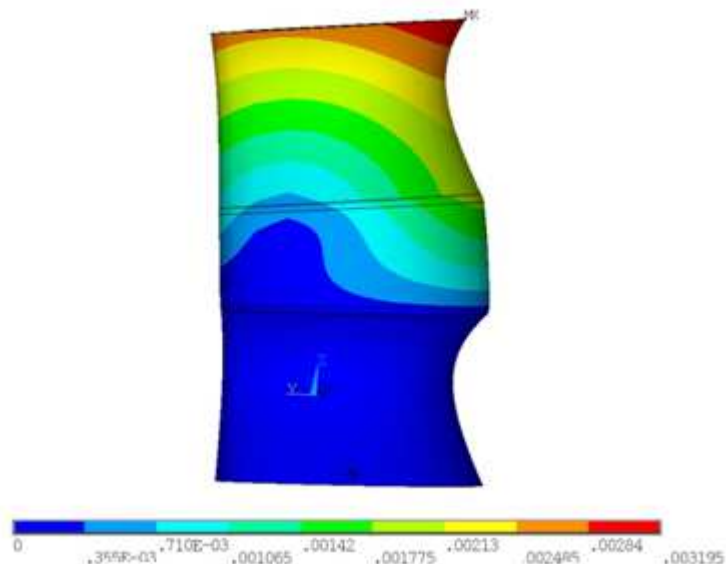


Obr. 3.8.11: Vektorové posunutia konečnoprvkovej siete - nerovnomerné zaťaženie v smere osi x

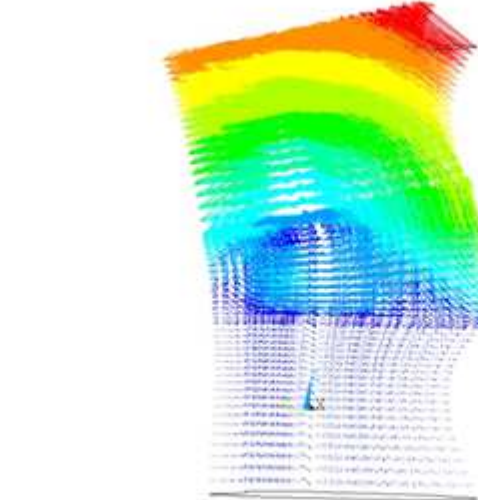


Obr. 3.8.12: Von Missesove a) napätia b) pomerné deformácie pri nerovnomernom zaťažení v smere osi x

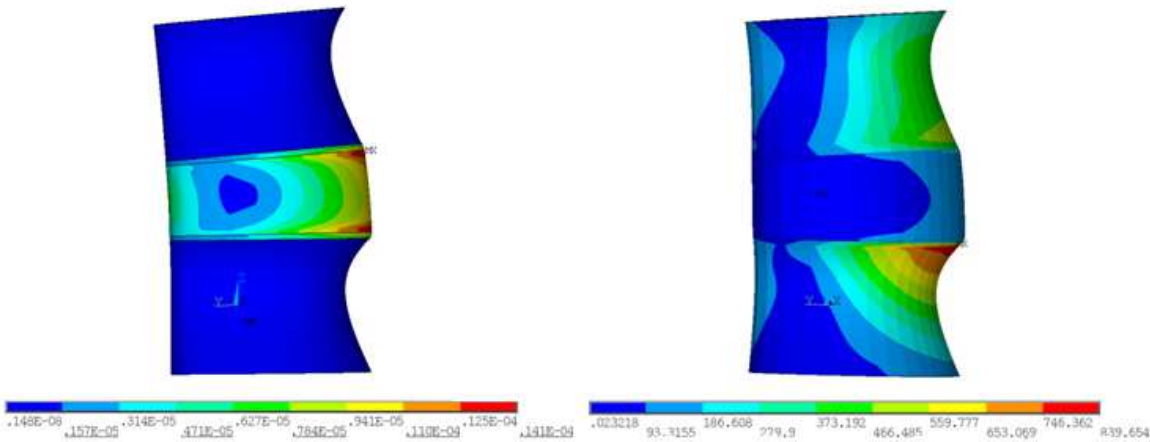
Posledný stav skúmaný na pohybovom segmente bolo nerovnomerné zaťaženie v smere osi y, čo zodpovedá predklonu alebo záklonu. Na obrázku (Obr. 3.8.13) je zobrazený pohľad z boku pre celkové posunutia, z dôvodu lepšieho vyobrazenia výsledkov. Tak ako v predchádzajúcom stav, je vidieť, že k najväčším posunom dochádza v hornej časti vrchného stavca, najväčšie pomerné deformácie sú v oblasti platničky.



Obr. 3.8.13: Celkové posunutie na pohybovom segmente - nerovnomerné zaťaženie v smere osi y



Obr. 3.8.14: Vektorové posunutia konečnoprvkovej siete -nerovnomerné zaťaženie v smere osi y



Obr. 3.8.15: Von Misesove a) pomerné deformácie b) napätia pri nerovnomernom zaťažení v smere osi y

4. ZAKRIVENIE CHRBTICE

4.1. SAGITÁLNE ZAKRIVENIE CHRBTICE

Chrbtica má v sagitálnej rovine (rovine, ktorá delí telo na pravú a ľavú stranu) fyziologické zakrivenie lordózy a kyfózy. Lordóza je oblúkovité zakrivenie vyklenuté (konvexné) dopredu, kyfóza je oblúk vyklenutý dozadu (konkávne). Striedajú sa kraniokaudálne:

lordóza krčná - s vrcholom pri C4-C5; upevňuje a zvyrazňuje sa v dobe, keď dieťa z polohy na bruchu zdvíha hlavu činnosťou šijového svalstva,

kyfóza hrudná - s vrcholom pri Th6-Th7; prechádza od dolnej hrudnej chrbtice (od Th10) do bedrovej lordózy; je zvyškom pôvodného plynulého kyfotického zakrivenia celej presakrálnej chrbtice a kompenzuje lordózy,

lordóza bedrová - vrchol pri L3-L4; vzniká neskôr činnosťou hlbokého zadného svalstva, až v dobe, keď si dieťa sadá a učí sa stát' a chodiť,

os sacrum pokračuje od promontoria kyfotickým zakrivením.[1]

Toto dvojnásobné zakrivenie chrbtice zabezpečuje optimálne prenášanie zaťaženia, a zároveň maximálnu flexibilitu pohybu. Nezriedka je zakrivenie v sagitálnej rovine patologické a býva zdrojom ochorení sprevádzaných bolesťami. Medzi poruchy v rovine sagitálnej patria hyperkyfózy, hyperlordózy, plochý chrbát (tzv. zmiznutie fyziologického zakrivenia) a inverzné zakrivenie chrbtice (opačné zakrivenie).

4.2. LATERÁLNA DEFORMITA CHRBTICE – SKOLIÓZA

Vybočenie chrbtice v rovine frontálnej (rovine deliacej ľudské telo na prednú a zadnú časť) sa nazýva skolióza. Až 70% skolióz je neznámeho pôvodu (idiopatická skolióza vzniká a vyvíja sa v priebehu rastového obdobia u jedincov s pôvodne priamou chrbticou). Celkové štatistické údaje o výskyte skoliózy v populácii kolíšu väčšinou medzi 2 až 10 %, pretože nie je stanovené presné kritérium pre konštatovanie, že ide o skoliózu. Medzi známe nevrodené príčiny vzniku skoliózy patrí napr. nesprávne držanie tela, jednostranný pohyb alebo nedostatok pohybu, nerovnaká dĺžka nôh, nevhodná obuv.

Skolióza vzniká i prechodne, pri asymetrickej záťaži chrbtice (napr. pri stoji na jednej nohe). Takmer každá chrbtica má v pokoji mierne vybočenie s vrcholom medzi Th3 až Th5, ktoré je vo väčšine prípadov dextrokonvexné. Nazýva sa fyziologická skolióza. Ako vysvetlenie býva uvádzané asymetrické umiestenie vnútorných orgánov v brušnej a hrudnej dutine, jedna z možných príčin je tiež v asymetrii končatín (jedna dolná končatina

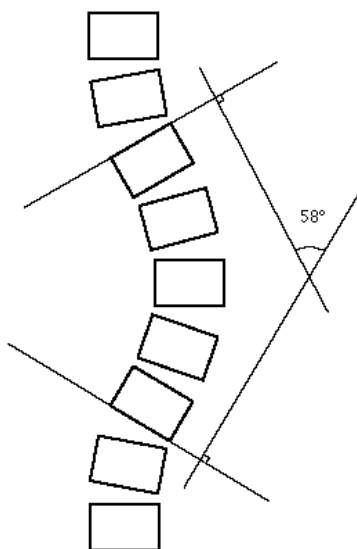
je spravidla trochu dlhšia než druhá, panva je preto mierne zošikmená a chrbtica potom naklonená vyrovnáva skoliózu). Hranica fyziologickej skoliózy voči patologickej je nepresná, patologická skolióza je však typicky spojená s rotáciou stavcov okolo všetkých troch svojich osí.

Skolióza je teda porucha postavenia (držania, tvaru) chrbtice vo všetkých troch hlavných rovinách - zmeny v rovine frontálnej sú sprevádzané zmenami v rovine sagitálnej i transverzálnej (rotácia). Skoliotická krivka je buď jednoduchá (typu C), alebo s viacerými krivkami (typu S - tzv. "esovitá"). Skupina ochorení chrbtice, ktoré sa prejaví skoliotickou deformitou, je pomerne rôznorodá a príčin skoliózy je mnoho - môžu to byť stavy od kongenitálnych deformít stavcov až po napr. nerovnakú dĺžku dolných končatín.

Skolióza má vždy páry počet oblúkov. Jeden oblúk vychýľuje chrbticu do strany a druhý oblúk ju v inom úseku chrbtice vracia späť, aby bola zachovaná rovnováha. Najvýraznejší rozdiel od fyziologického zakrivenia je v oblasti hrudnej chrbtice, pretože rotované stavce sťahujú rebrá na jednej strane dopredu a na druhej strane ich naopak vytláčajú dozadu. Ak sú oblúky pri skolióze viac zakrivené, dochádza ku skracovaniu trupu, deformácii hrudnej a brušnej dutiny a zároveň k útlaku orgánov v nich uložených. Skolióza sa objavuje už u detí školského veku, miernejšia porucha sa nachádza u veľkého počtu detí. Iba u niektorých sa táto porucha začne rozvíjať a dosiahne značný stupeň. Skolióza nie je len ochorením nosného a pohybového ústrojenstva, ale má i vplyv na orgány uložené v hrudníku (útlak). Ťažšími formami skoliózy je negatívne ovplyvnený predovšetkým kardiopulmonálny systém.[9,10]

4.3. COBBOV UHOL

Základným parametrom stupňa skoliózy je Cobbov uhol. (Obr. 4.3.1) Meria sa v predo zadnom pohľade - je to uhol medzi dvomi stavcami (uhol medzi dolnou podstavou nižšie položeného stavca a hornou podstavou vyššie položeného stavca), ktoré majú najväčší odklon svojej zvislej osi od vertikálneho smeru.



Obr.: 4.3.1: Cobbov uhol

4.4. DRUHY SKOLIÓZ

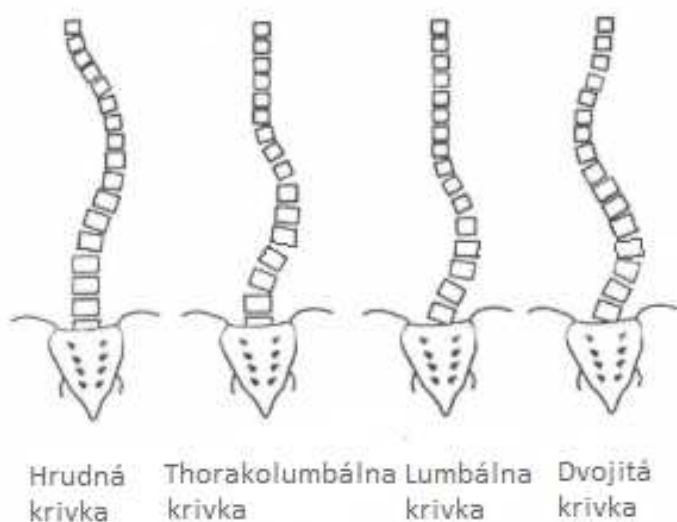
Rozdelenie skolióz podľa obtiažnosti, ktorá je daná veľkosťou Cobbovho uhla krivky z hľadiska indikácie terapie

0 – 10°- (podľa Cobbovho uhla) sa nepovažuje za skoliózu;

10 – 20°- iba sa sleduje, či nedochádza k progresii; interval sledovania; zo začiatku 3 mesiace, ak je bez progresie interval 6 mesiacov;

20 – 40°- liečba korzetom;

nad 40°- pri progresii operačné liečenie;[2,12]



Obr.4.4.1: Rozdelenie skolióz podľa miesta vybočenia

Rozdelenie skolióz podľa miesta vybočenia (Obr. 4.4.1)

- a) Lumbálna skolióza - najčastejšie sú postihnuté dievčatá v dospievajúcom veku.
- b) Thorakolumbálna skolióza – je málo častá
- c) Hrudná skolióza - je najčastejšia. Postihnuté sú hlavne dievčatá.

Rozdelenie skolióz podľa počtu zakrivení

- a) Skolióza s jednoduchou krivkou – je pomerne vzácna. Celá chrbtica je v jednoduchom oblúku vychýlená na jednu stranu - „C“ skolióza.
- b) Skolióza s dvojitou krivkou – „S“ skolióza. Jedno zakrivenie je v hrudnej a druhé v lumbálnej alebo thorakolumbálnej krajine.
- c) Skolióza s mnohopočetnými krivkami - s trojitou, štvoritou i viacpočetnou primárnou deformitou. Prognóza býva dobrá. [9]

4.5. DIAGNOSTIKA SKOLIÓZY

Klinické vyšetrenie – anamnéza

- aspekcia (prípadne i palpácia) chrbta vo vzpriamenom stoji a v predklone
- kĺbová laxita, výška pacienta
- orientačné neurologické vyšetrenie
- skoliometer - meranie asymetrie paravertebrálnych svalov v predklone
- funkčné testy chrbtice
- vyšetrenie pomocou olovnice
- meranie rebrovej prominencie (gibbu) pomocou vodováhy

Vyšetrenia prístrojové – röntgenové vyšetrenie – meranie závažnosti zakrivenia (tzv. Cobbov uhol), meranie rotácie stavcov a určenie kostného veku (podľa Risserovej zóny)

- pri každej vážnejšej skolióze je nutné i spirometrické vyšetrenie pľúc.[3,4,7,8]

4.6. TERAPIA

Dlhodobá terapia je rozdelená na niekoľko stupňov, ktoré sa vzájomne dopĺňajú. Použitie konkrétnej metódy na konkrétneho človeka je závislé na vzájomnej spolupráci, znalostiach, skúsenostiach i technických možnostiach pracoviska.

Bazálna konzervatívna terapia

Je komplex opatrení používaný pri liečení všetkých skolióz. Základom je cielená rehabilitácia a zdravotná telesná výchova. Pacient je podrobne poučený a opakovane kontrolovaný, avšak cvičí doma 2 - 3x denne. Odporúča sa horizontálna poloha pri učení, čítaní, sledovaní televízie apod. Statická záťaž sa obmedzuje, telesná výchova a šport sa

modifikuje, pre skoliózy od zakrivenia s Cobbovým uhlom od 20° krivky sa neodporúčajú skoky, behy a gymnastika. Vrcholový šport nie je kontraindikovaný do 10°, pri krivkách s väčším zakrivením sa postupuje individuálne. Bazálna konzervatívna terapia sa používa ako monoterapia u neprogredujúcich kriviek do 30°, vzácné i u kriviek väčších.

Intenzívna konzervatívna terapia

Je indikovaná u pacientov s primárnym záchytnom nad asi 25°, progresii a pri zlej spolupráci rodiny. Je prevádzaná na lôžkových ortopedických oddeleniach, alebo v liečebniach. Polohovanie, trakcia a skrátene vyučovanie je kombinované s individuálnym cvičením pod dohľadom rehabilitačných pracovníčok a primeranou telesnou aktivitou v kolektíve. Cieľom je zastaviť progresiu, zlepšiť krivku a vytvoriť potrebné návyky u pacientov.[2,9,10]

Korzetoterapia

Je indikovaná u kriviek v rozmedzí 20°- 40° pri progresii, niekedy i pri zlej spolupráci pacienta. V súčasnej dobe sa používajú dva typy ortéz. CTLS ortéza alebo Milwaukee korzet a TLS ortéza známa pod názvom Bostonský korzet. Používajú sa tiež k doliečovaniu po operáciách. Ortéza sa nosí 23 hodín denne, odkladá sa iba na hygienu a cvičenie. Výsledky korzetoterapie sú sľubné, je možné dosiahnuť korekcie až cez 50% už pri krátkodobej aplikácii korzetu. Súčasťou tejto liečby je pravidelné cvičenie. [8]

Operačná terapia

Má v prvom rade za cieľ predísť komplikáciám zo strany kardiopulmonálneho aparátu, potom obmedziť depresívny efekt skoliózy na pracovný potenciál človeka, na poslednom mieste je efekt kozmetický. Operatíva skolióz nie je bez rizika, preto sa indikuje až pri vážnych prípadoch skolióz - Cobbov uhol nad 50°, od 40° iba pri rýchlej a nevládateľnej progresii. Princípom je korekcia krivky a stuženie postihnutého úseku v korigovanom postavení (spondylodéza). Stuženie chrbtice sa dosiahne aplikáciou kostných štepov. Po zhojení kože sa prikladá korekčný sadrový korzet na rok a doliečuje sa niektorou z ortéz. Korekcia krivky je možná o 50 a viac percent.[2,9,10,12]

5. GEOMETRIA KONFIGURÁCIE STAVCOV PODĽA RTG SNÍMOK

Existuje veľké množstvo najrôznejších modelov ľudskej chrbtice, ktoré okrem iného simulujú odozvu aj na mechanické zaťaženie, ale pre priame použitie v lekárskej praxi. Sú príliš ťažkopádne a zdĺhavé.

Program BMPCOORDINATES [11], ktorý využívam, umožňuje dynamickú tvorbu geometrie chrbtice – oblasti pre konečno prvkovú analýzu. Tento program som doplnila o procedúry umožňujúce interaktívnu zmenu stupňa skoliotického zakrivenia spinálnej krivky v rozmedzí od jej pôvodného skoliotického stavu až po jej úplné narovnanie. Výstupom z programu BMPCOORDINATES [11], je okrem 3D modelu aj súbor s geometriou pre použitie v konečno prvkovom softvéri.

5.1. AKTUÁLNY SKOLIOTICKÝ STAV

V tejto práci sa venujem skoliotickému stavu, ktorý je vyobrazený na röntgenovej snímke (Obr. 5.1.1). Program je vytvorený tak, aby si používateľ mohol zvoliť snímku, s ktorou chce pracovať. Na prvom obrázku je vyobrazená bočná projekcia a na druhom predzo zadná projekcia.



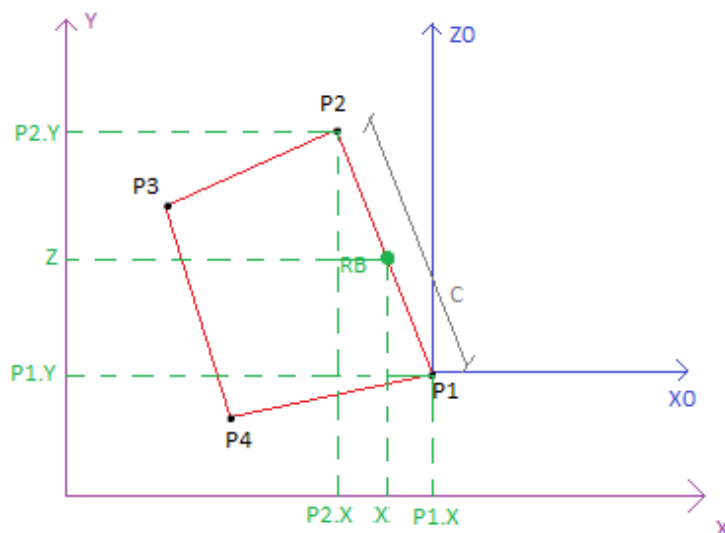
Obr. 5.1.1: Bočná projekcia a predozadná projekcia

5.2. REFERENČNÉ BODY STAVCOV, SPLINE INTERPOLUJÚCI REFERENČNÉ BODY. SPINÁLNA KRIVKA

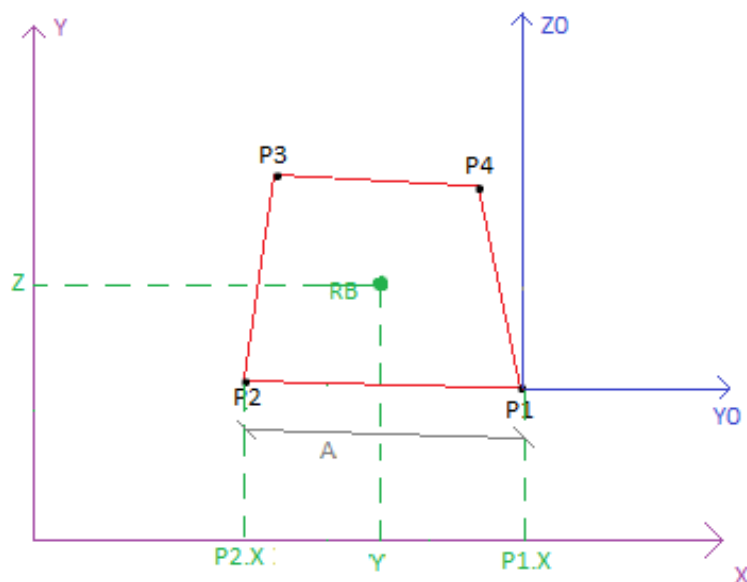
Pre vykreslenie spinálnej krivky pomocou interpolujúceho splajnu je najprv potrebné stanoviť referenčné body stavcov. Tieto body sú definované nasledovne. V bočnej projekcii bola zistená lokálna x-ová súradnica stavca (X) ako stred x-ových súradníc bodov $P1$ a $P2$, ktoré špecifikujú výšku stavca (C) a lokálna z-ová súradnica stavca (Z) ako stred y-ových súradníc bodov $P1$ a $P2$, ktoré určujú výšku stavca v karteziánskom súradnicovom systéme (Obr. 5.2.1). Keďže skolióza je problémom všetkých troch rovín je treba špecifikovať aj lokálnu y-ovú súradnicu stavca (Y). Tá je získaná z predozadnej projekcie

ako stred x-ových súradníc bodov $P1$ a $P2$, ktoré vymedzujú šírku stavca (A) v karteziánskom súradnicovom systéme.(Obr. 5.2.2).

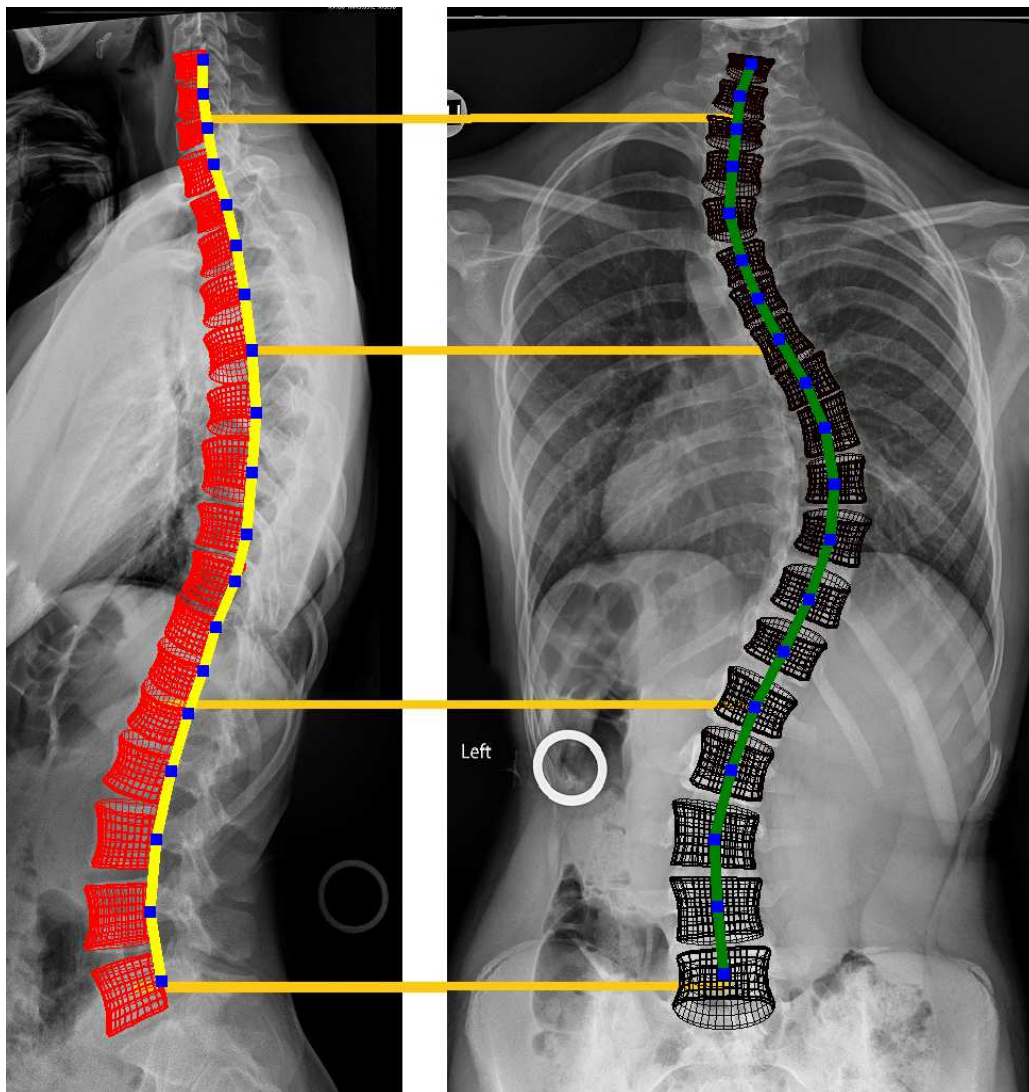
Po špecifikácii referenčných bodov stavcov mohla byť vykreslená spinálna krivka v bočnej aj predo zadnej projekcii. (Obr. 5.2.3)



Obr.5.2.1: Odvodenie X a Z súradnice referenčného bodu stavca (RB)



Obr.5.2.2: Odvodenie Y súradnice referenčného bodu stavca



Obr. 5.2.3: Spinálna krivka v bočnej a predozadnej projekcii

Ďalej boli vypočítané odklony stavcov ich zvislej osi od vertikálneho smeru (uhol ALX). Tieto odklony sa môžu potom používať na výpočet Cobbovho uhla, keďže vieme stanoviť, ktoré majú najväčší odklon svojej zvislej osi od vertikálneho smeru. Odklon ALX je daný nasledujúcim vzťahom:

$$ALX = \arctan \frac{dy}{dx}, \quad (5.1)$$

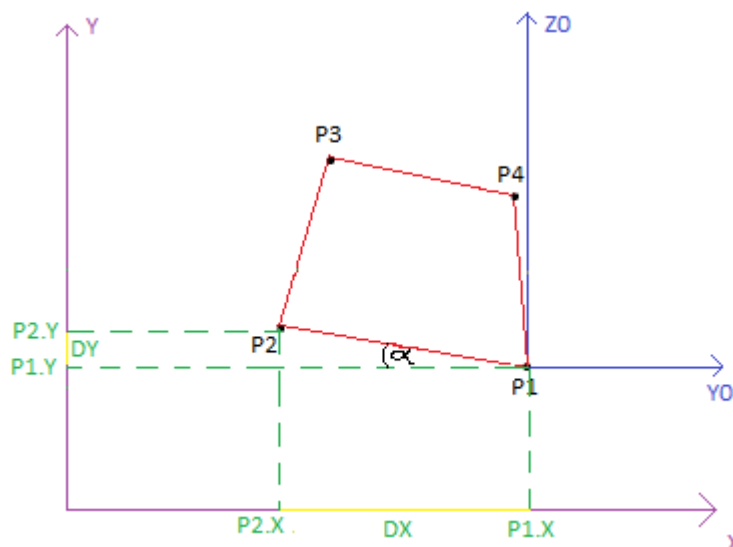
kde

$$dy = P2.Y - P1.Y \quad (5.2)$$

a

$$dx = P1.X - P2.X \quad (5.3)$$

Tento vzťah (použitá je konvencia jazyka Pascal) je determinovaný z predzo zadnej projekcie, keďže aj narovnávanie spinálnej krivky a výpočet Cobbovho uhla sa robí práve v tejto projekcii. (Obr. 5.2.4)



Obr. 5.2.4: Výpočet odklonu stavca

Podobným spôsobom boli určené aj odklony od osi y a z (*ALZ*). Pritom odklon od osi y sa získa z bočnej projekcie a odklon od osi z je vlastne rotácia stavca okolo svojej lokálnej osi z. Celková torzia chrbtice je potom určená sústavou uhlov *ALZ* jednotlivých stavcov.

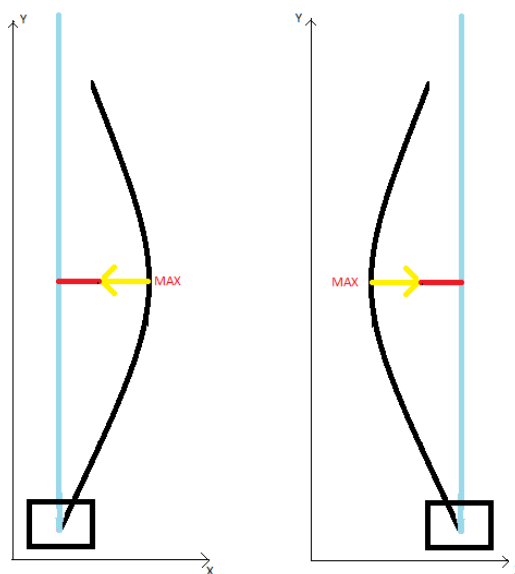
5.3. KORIGOVANÝ STAV SPINÁLNEJ KRIVKY PO TERAPII

Mojou úlohou bolo doplniť rozšíriť program *BMPCOORDINATE* [11] o možnosť interaktívne meniť krivku spájajúcu počiatkové body lokálnych systémov súradníc jednotlivých stavcov – spinálnu krivku. Keďže tento program má slúžiť lekárom, vykreslila som túto krivku na oboch projekciách. Táto krivka uceluje obraz o natočení stavcov okolo zvislej osi (torzia chrbtice). Narovnávanie krivky sa udeje dynamicky podľa voľby lekára priamo v obrázku s modelom na RTG snímkach (ťahá úsečku priamo v obrázku a chrbtica sa narovnáva). Celková dĺžka spinálnej krivky sa samozrejme musí zachovať, preto pacienti po preliečení skoliózy „vyrastú“. Okrem dynamického modelovania 3D modelu chrbtice program *BMPCOORDINATE*[11] vytvorí v ktoromkoľvek okamihu stanovenom užívateľom (teda pre konfiguráciu geometrie, ktorú si

zvolí) súbor s geometriou - časť vstupného súboru pre neskoršie použitie v programe ANSYS, kde sa realizuje konečnoprvková analýza odozvy na mechanické zaťaženie. [11]

Pri vyrovnávaní krivky bolo potrebné, aby sa vzdialenosti medzi stavcami zachovávali, keďže toto je fyziologicky dané. Stavce totiž spája pružná medzistavcová platnička, ktorej objem sa pri jej deformácii mení iba minimálne. Je prirodzené, že podľa toho, kde sa nachádza najväčšie vybočenie spinálnej krivky od zvislej priamky prechádzajúcej cez prvý stavec lumbálnej chrbtice, budeme ťahať aj krivku tak, aby sa spinálna krivka (na obrázku čierna) približovala ku zvislej (na obrázku bledo modrej) (Obr.5.3.1).

Narovnávanie spinálnej krivky reprezentovanej interpolačným splajnom prvého stupňa sa deje pri zachovaní celkovej dĺžky, teda jednotlivý referenčný bod sa pohybuje po kružnici so stredom v referenčnom bode predchádzajúceho stavca (nižšie položeného) a polomerom rovným vzdialenosti oboch referenčných bodov, pričom y-ová súradnica nového referenčného bodu je determinovaná veľkosťou úsečky, ktorú lekár vymedzil myšou na obrázku a vodorovnou vzdialenosťou najviac vybočeného stavca od vertikály prechádzajúcej referenčným bodom prvého (najnižšieho) stavca. Pomer týchto dvoch úsečiek (*pomer*), vid' Obr. 5.3.1, stanovuje mieru narovňania, teda y-ovú súradnicu referenčného bodu novej polohy stavca. Z-ová súradnica referenčného bodu sa dopočíta z rovnice tejto kružnice a pootočením okolo osi z sa realizuje vzhľadom sa celkovú torziu chrbtice a ju tiež indikované parametrom "pomer".



Obr. 5.3.1: Pohyb krivky ku zvislej - určenie smeru

Ako prvé bolo potrebné stanoviť, ktorý stavec je najviac vzdialený (max) od zvislej priamky prechádzajúcej cez prvý stavec. Cez prvý stavec zvislá priamka prechádza pretože s týmto stavcom sa hýbať pri vyrovnávaní spinálnej krivky hýbať nebude. Taktiež sa vypočíta aj vzdialenosť najviac vybočeného stavca (Y_{max}) od zvislej priamky prechádzajúcej cez prvý stavec (Y_1),

$$rozdiel = Y_{max} - Y_1, \quad (5.4)$$

$$vzdialenosť = Abs(rozdiel). \quad (5.5)$$

Ďalej je potrebné určiť, či je rozdiel kladný alebo záporný, aby sa vedelo, kde sa nachádza najviac vybočený stavec, či vpravo alebo vľavo od spinálnej krivky :

$$\begin{cases} \text{príznak} = 1, & \text{rozdiel} > 0 \\ \text{príznak} = -1, & \text{rozdiel} < 0 \\ \text{príznak} = 0, & \text{rozdiel} = 0. \end{cases} \quad (5.6)$$

Je jasné, že stavec, ktorý je najviac vybočený, sa musí aj najviac posunúť smerom ku zvislej priamke v smere y a ostatné sa musia v rovnakom pomere potom posunúť tiež. Pomer, v akom sa majú stavce v smere y posúvať, je určený z nasledujúceho vzťahu:

$$pomer = dĺžka / vzdialenosť, \quad (5.7)$$

kde dĺžka je veľkosť úsečky, ktorú nakreslil lekár ťahaním myšou. Aby bol pomer v intervale $<0,1>$ a aby nedochádzalo k deleniu nulou, ak už je stavec posunutý na zvislú priamku musí platiť:

$$\begin{cases} vzdialenosť = 0, & pomer = 0 \\ vzdialenosť = dĺžka, & pomer = 1 \\ \text{inak,} & pomer = \frac{dĺžka}{vzdialenosť} \end{cases} \quad (3.8)$$

Ostatné súradnice pohybujúceho bodu sa dopočítajú z jednotlivých parametrov spinálnej krivky, pozri vzťah (5.11).

Keďže lekár si môže zvoliť či spinálnu krivku vyrovnávať alebo viac vykrivovať, tým ktorým smerom bude ťahať myš. To znamená, ak myš užívateľ potiahne smerom ku

zvislej krivke prechádzajúcej cez prvý stavec, spinálna krivka sa bude vyrovnávať, ak ju bude ťahať opačným smerom bude sa viac zakrivovať.

$$\begin{cases} \text{príznak2} = 1, & P1.X - P2.X > 0 \\ \text{príznak2} = -1, & P1.X - P2.X < 0 \\ \text{príznak2} = 0, & P1.X - P2.X = 0. \end{cases} \quad (5.9)$$

Po určení všetkých podmienok sa môže pristúpiť k určeniu nových súradníc referenčného bodu stavca po posunutí smerom ku zvislej priamke. Keďže vyrovnávanie sa vykonáva iba v predo zadnej projekcii x-ová súradnica sa nebude meniť, budú sa meniť y-ová súradnica, z-oná súradnica a taktiež odklon stavca. Pri výpočte novej y-ovej súradnice sa overuje, kde sa stavec nachádza, to znamená či naľavo, napravo alebo na spinálnej krivke a podľa toho sa rozhodne, či sa pomer pripočíta, odčíta alebo bude nulový. Vzťah pre výpočet novej y-ovej súradnice je daný nasledovne (Obr. 5.3.2):

$$\begin{cases} YPred_i - Y_1 > 0, & Y_i = YPred_i - p * p2 * pom * Abs(YPred_i - Y_1) \\ YPred_i - Y_1 < 0, & Y_i = YPred_i + p * p2 * pom * Abs(YPred_i - Y_1) \\ YPred_i - Y_1 = 0, & Y_i = Y_1, \end{cases} \quad (5.10)$$

kde i je číslo stavca, Y je označenie vypočítanej súradnice stavca, $YPred$ je pre označenie starej y-ovej súradnice stavca, Y_1 je y-ová súradnica prvého stavca, p je *príznak*, $p2$ je *príznak2* a pom je *pomer*.

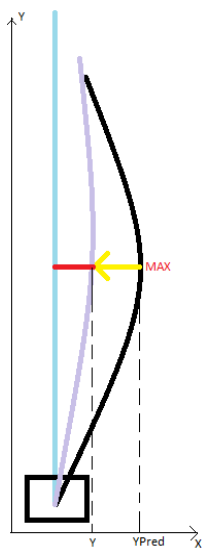
Pri výpočte z-ovej súradnice bola použitá rovnica kružnice so stredom v bode (Y_{i-1}, Z_{i-1}) a s *polomerom*

$$\text{polomer} = \sqrt{(YPred_i - YPred_{i-1})^2 + (ZPred_i - ZPred_{i-1})^2}, \quad (5.11)$$

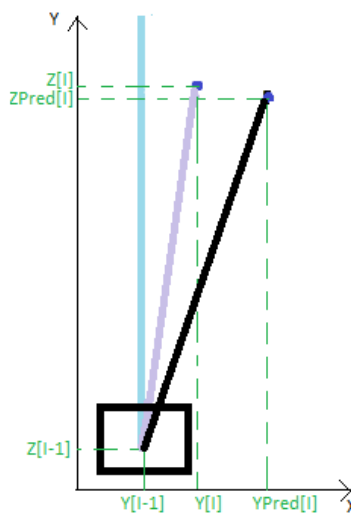
keďže musí byť zachovaná vzdialenosť medzi stavcami. Vzťah a odvodenie pre výpočet z-ovej súradnice vyzerá nasledovne (Obr. 5.3.3) :

$$Z_i = \sqrt{\text{polomer}^2 - (Y_{i-1} - Y_i)^2} + Z_i, \quad (5.12)$$

kde $ZPred_i$ je stará z-ová súradnica i -teho stavca, Z je označenie pre vypočítanú a Z_{i-1} označenie pre z-ovú súradnicu predchádzajúceho stavca.



Obr. 5.3.2: Výpočet y-ovej súradnice



Obr. 5.3.3: Výpočet z-ovej súradnice

Pri vyrovňovaní spinálnej krivky sa mení aj odklon stavca od zvislej priamky, teda jeho natočenie okolo osi x . Pomocou uhla (α_0) medzi dvoma priamkami - zvislou priamkou prechádzajúcou cez referenčný bod prvého stavca a priamkou, ktorá spája referenčný bod posunutého stavca a referenčný bod prvého stavca a pomocou uhla (α) medzi priamkami, z ktorých jedna prechádza cez referenčný bod posunutého stavca a referenčný bod prvého stavca a druhá cez referenčný bod pôvodného stavca a referenčný bod prvého stavca, bol vypočítaný *pomeruhlov*. Vzťah pre výpočet odklonu osi stavca od vertikálneho smeru je odvodený nasledovne (Obr. 5.3.4):

$$a1 = -(ZPred_i - Z_1)$$

$$b1 = YPred_i - Y_1$$

$$a2 = -(Z_i - Z_1)$$

$$b2 = Y_i - Y_1$$

$$a0 = -\sqrt{(Y_1 - Y_i)^2 + (Z_1 - Z_i)^2} - Z_1,$$

$$b0 = Y_1 - Y_i$$

$$\alpha = \arccos(Abs(a2*a1+b2*b1)/(\sqrt{(a2^2 + b2^2)} \sqrt{(a1^2 + b1^2)})) \quad (5.13)$$

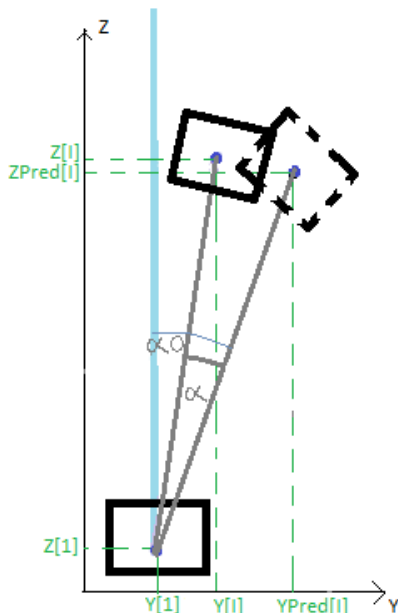
$$\alpha_0 = \arccos(Abs(a1*a0+b1*b0)/(\sqrt{(a1^2 + b1^2)} \sqrt{(a0^2 + b0^2)})) \quad (5.14)$$

Po určení odklonu stavca posunutého od zvislej priamky prechádzajúcej cez prvý stavec (α_0) a odklonu posunutého stavca od pôvodného stavca (α) môže byť vypočítaný *pomeruhlov* v akom sa zmení odklon zvislej osi stavca od vertikálneho smeru (ALX) a to nasledovne:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \alpha = \alpha_0, & pomeruhlov = 1 \\ \alpha = 0, & pomeruhlov = 0 \\ \text{inak,} & pomeruhlov = \alpha/\alpha_0 \end{array} \right. \quad (5.15)$$

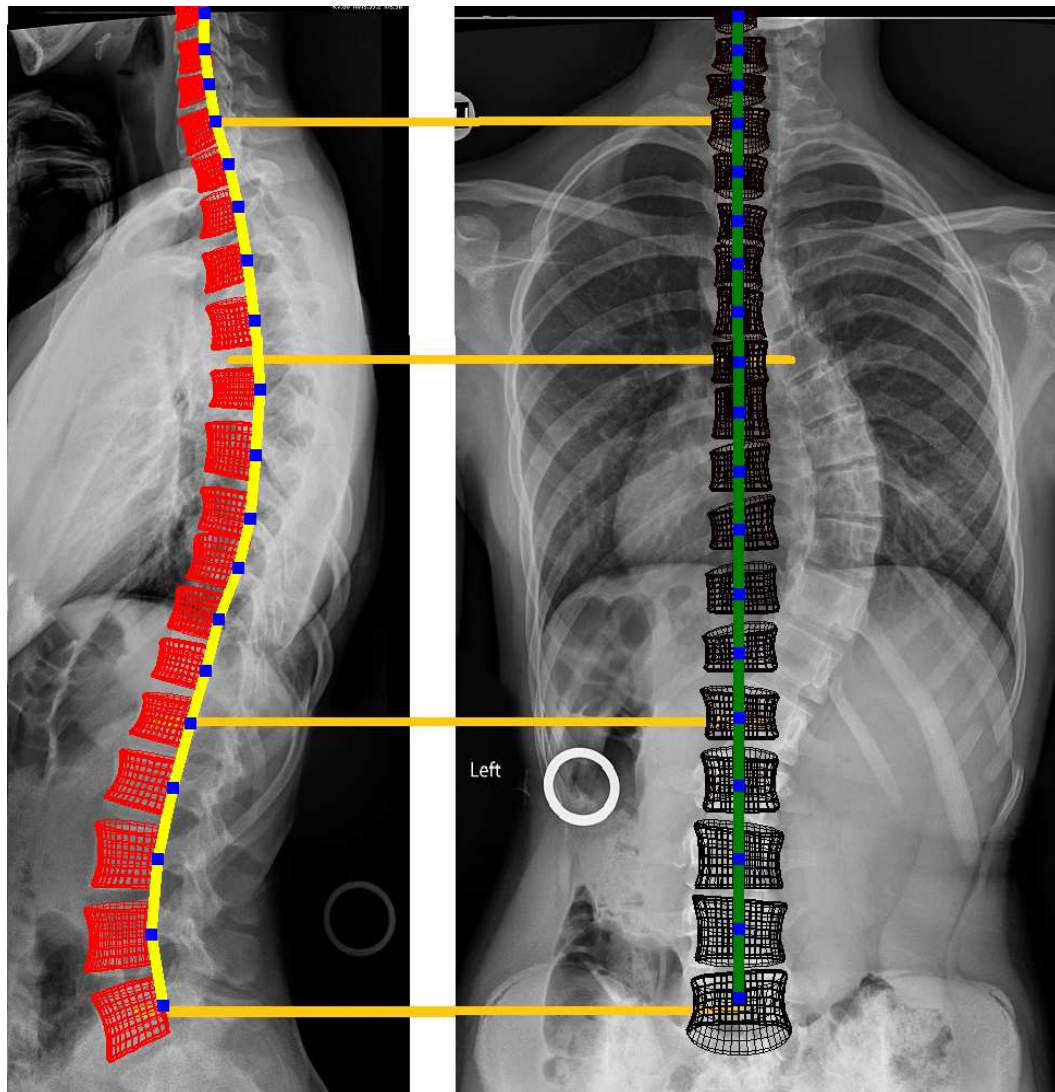
Keď je definovaný *pomeruhlov* môže byť vypočítaný nový odklon stavca a to dvoma spôsobmi, podľa toho či spinálnu krivku vyrovnávam alebo viac vykrivujem. Vzťah je nasledovný:

$$\left\{ \begin{array}{l} ALX_i = ALXPred_i - ALXPred_i * pomeruhlov \\ ALX_i = ALXPred_i + ALXPred_i * pomeruhlov \\ ALX_i = 0. \end{array} \right. \quad (5.16)$$



Obr. 5.3.4: Výpočet pomeru uhlov pre výpočet odklonu ALX po posunutí spinálnej krivky

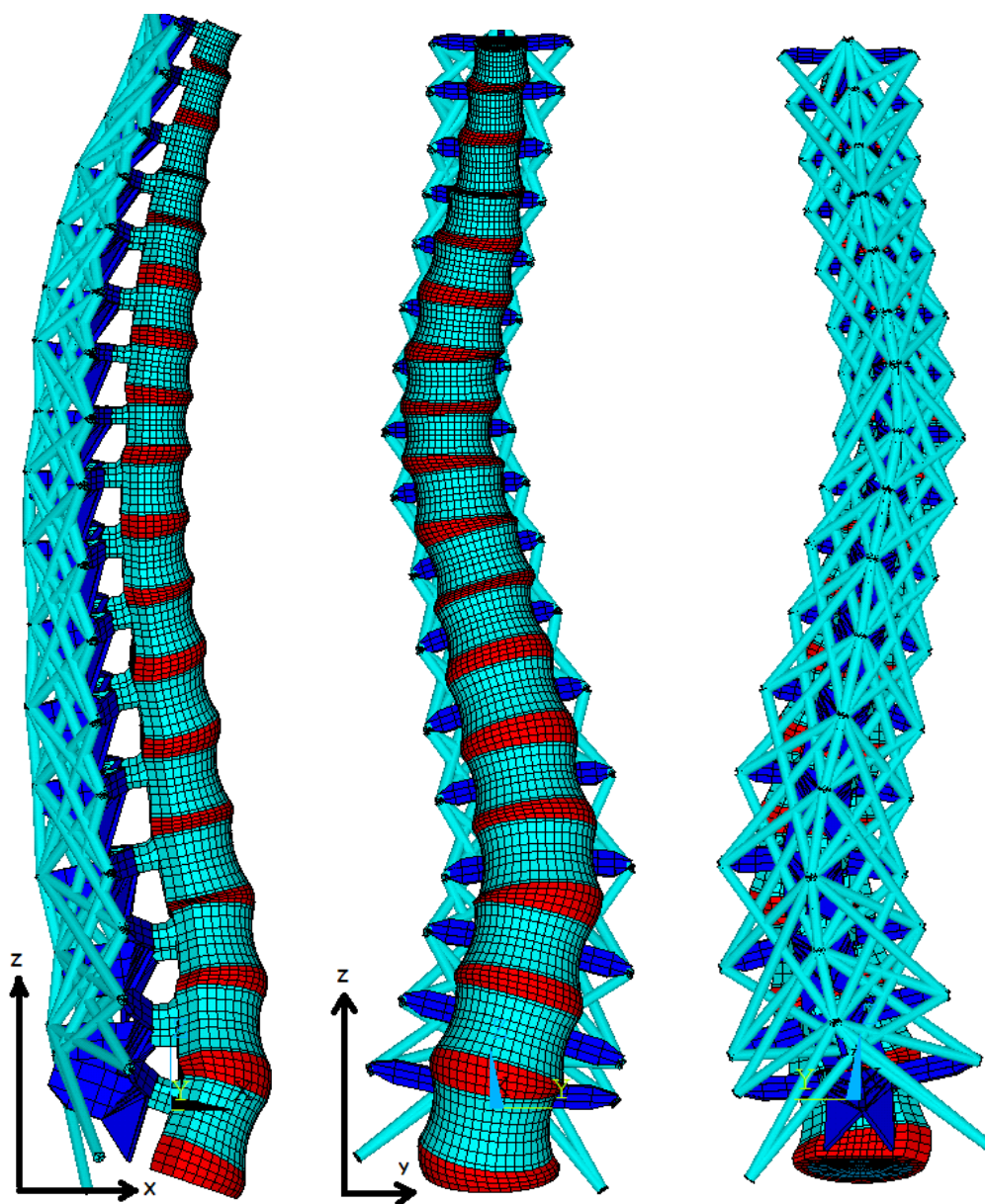
Po vyrovnaní spinálnej krivky (Obr. 5.3.5) pacient ako keby "vyrastie". V skúmanom prípade "vyrástol" o šesť centimetrov.



Obr. 5.3.5: Vyrovnaná spinálna krivka

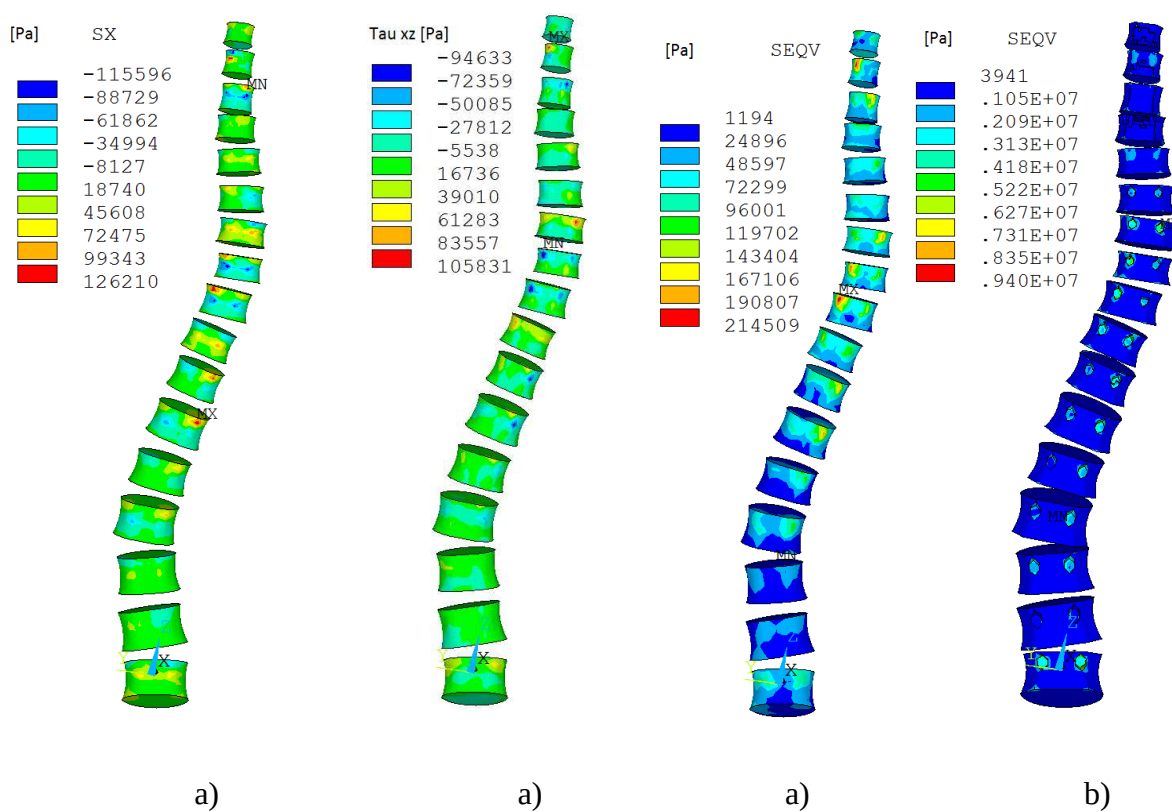
6. NAPĚŤOVÁ ANALÝZA

V tejto kapitole je uvádzam príklad z [11], ktorý prezentuje mechanickú odozvu skoliotickej chrbtice (Obr. 6.1) na zaťaženie tiažou tela - vertikálna gravitačná sila, približne polovica váhy pacienta, pôsobí na najvrchnejší stavec v z-ovom smere. Vo výpočte je zahrnuté aj pôsobenie svalstva bezprostredne napojeného na chrbticu.

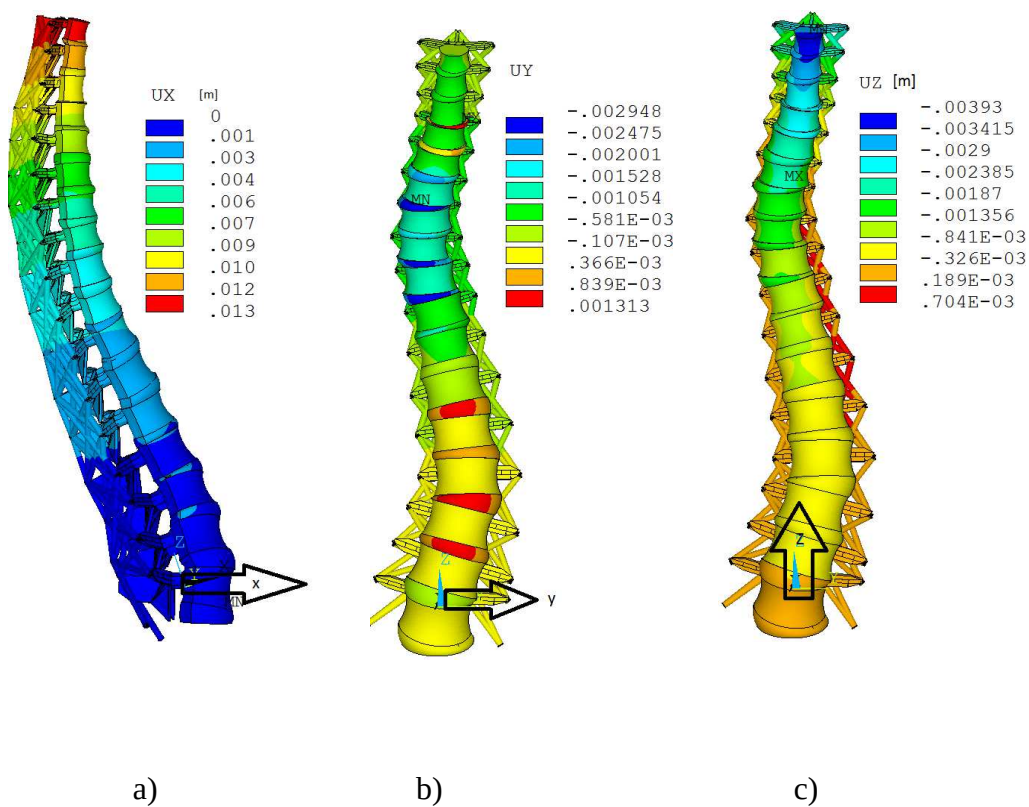


Obr. 6.1: KP model chrbtice – scolióza: a) bočný pohľad b) predný pohľad c) zadný pohľad [11]

Na základe výsledkov z mechanickej odozvy možno vypočítať mieru napätia v niektorých častiach chrbtice (Obr. 6.2) . Posunutia na chrbtici sú tiež k dispozícii (Obr. 6.3). Tieto výsledky môžu ukázať oblasti možného prasknutia stavca, posunutia medzistavcovej platničky atď. [11]



Obr. 6.2: Napätie v a) spongióznej kosti b) kortikálnej kosti [11]



Obr. 6.3: Posunutia a) Ux b) Uy c) Uz [11]

7. ZÁVER

Problematika ochorenia chrbtice je v dnešnej dobe veľmi aktuálna. Výskum popísaný v tejto práci má za cieľ čo najpresnejšie vymodelovať telo stavca a medzistavcovú platničku, ktoré môžu byť neskôr použité na vytvorenie modelu celej ľudskej chrbtice a taktiež rozvíjať neinvazívne metódy liečby pacientov. Táto práca bola preto rozdelená na dva celky.

Prvý sa zameriava na pohybový segment - venuje sa vymodelovaniu tela stavca a medzistavcovej platničky, čo aj bolo dosiahnuté pomocou Bézierových kriviek. Taktiež aj analýza pohybového segmentu priniesla veľmi zaujímavé výsledky. Z nich sa môžeme dozvedieť, v ktorých miestach stavca a medzistavcovej platničky dochádza k najčastejším poruchám.

Druhý celok sa už venuje jednému z ochorení chrbtice- skolióze. Dôležitú rolu tu zohráva výpočet mechanickej odozvy chrbtice na zaťaženie – hlavne porovnanie tejto odozvy pred a po liečbe skoliózy. Túto problematiku rozpracovali autori v [11] , kde vytvorili program pre dynamické modelovanie chrbtice z RTG snímok. Značná časť práce je venovaná tvorbe novej konfigurácie chrbtice (preliečený stav) podľa určenia lekára. Pritom proces „narovnávanie“ skolitickej chrbtice na obrázku je veľmi jednoduchý – lekár ťahá myšou a ihneď vidí výsledok – viac či menej narovnanú chrbticu (obrázok sa mení dynamicky). Použitím tohto nástroja môže napokon lekár spresňovať prognózu ďalšieho vývoja zdravotného stavu pacienta bez jeho zbytočného vystavovania röntgenovému žiareniu.

8. ZOZNAM POUŽITEJ LITERATÚRY

- [1] Čihák, R. Anatomie. 2. vyd. Praha: Grada Publishing, 2001. 497 s. ISBN 80-7169-970-5
- [2] Dungl, P. Ortopedie 1. vyd. Praha: Grada Publishing, 2005. 1280 s. ISBN 80-247-0550-8
- [3] Gross, J. M. a kol. Vyšetření pohybového aparátu. 2. vyd. Praha: TRITON, 2005. 599 s. ISBN 80-7254-720-8
- [4] Haladová, E., Nechvátalová, L. Vyšetřovací metody hybného systému. 2. vyd. Brno: Národní centrum ošetřovatelství a nelékařských zdravotnických oborů, 2003. 135 s. ISBN 80-7013-393-7
- [5] Janda, V. a kol. Svalové funkční testy. 1. vyd. Praha: Grada Publishing, 2004. 328 s. ISBN 80-247-0722-5
- [6] Janda, V., Pavlů, D. Goniometrie. 1. vyd. Brno: Institut pro další vzdělávání pracovníků ve zdravotnictví, 1993. 108 s. ISBN 80-7013-160-8
- [7] Janda, V. Vyšetřování hybnosti. 3. vyd. Praha: Avicenum, 1981. 259 s.
- [8] Janíček, P. a kol. Ortopedie. 1. vyd. Brno: MU, 2001. 124 s. ISBN 80-210-2535-2
- [9] Křivánek, F. Ortopedie, traumatologie a ortopedická protetika. 2. vyd. Praha: Avicenum, 1972. 384 s.
- [10] Lomíček, M. Idiopatická skoliosa. 1. vyd. Praha: Avicenum, 1973. 82 s.
- [11] Sokol, M., Velísková, P., Rehák, L., Žabka, M.: Three-Dimensional Mechanical Model of the Human Spine and the Versatility of its Use. Slovak Journal of Civil Engineering, Vol. XXI, 2013, No. 4, pp. 1 – 7
- [12] Sosna, A. a kol. Základy Ortopedie. 1. vyd. Praha: TRITON, 2001. 175 s. ISBN 80-7254-202-8
- [13] <http://en.wikipedia.org/wiki/Biomechanics>
- [14] <http://fractal.dam.fmph.uniba.sk/~kg/kudlickova/index.html>
- [15] Tješšová, M., Matematické a numerické modelovanie biomechaniky medzistavcovej platničky - Bakalárska práca