

SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE
Stavebná fakulta

Evidenčné číslo: SvF-5343-67705

**Riešenie parciálnych diferenciálnych rovníc na
nerovnomerných logicky štvoruholníkových
siet'ach metódou konečných objemov**

Diplomová práca

Študijný program: matematicko-počítačové modelovanie
Číslo študijného odboru: 1114
Názov študijného odboru: 9.1.9 aplikovaná matematika
Školiace pracovisko: Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie
Vedúci záverečnej práce: prof. RNDr. Karol Mikula, DrSc.



ZADANIE DIPLOMOVEJ PRÁCE

Študent: **Bc. Matej Medľa**

ID študenta: 67705

Študijný program: matematicko-počítačové modelovanie

Študijný odbor: 9.1.9 aplikovaná matematika

Vedúci práce: prof. RNDr. Karol Mikula, DrSc.

Názov práce: **Riešenie parciálnych diferenciálnych rovníc na nerovnomerných logicky štvoruholníkových sietiach metódou konečných objemov**

Špecifikácia zadania:

Cieľom práce je vytvorenie numerickej schémy na riešenie parciálnych diferenciálnych rovníc na 2D a 3D nerovnomerných logicky štvoruholníkových sietiach. Na tvorbu sietí bude použitá evolúcia kriviek a plôch a na diskretizáciu bude použitá metóda konečných objemov. Diskretizácia bude využitá na riešenie Laplaceovej rovnice so šikmou deriváciou modelujúcej tiažové pole Zeme.

Riešenie zadania práce od: 17. 02. 2014

Dátum odovzdania práce: 22. 05. 2014

L. S.

Bc. Matej Medľa
študent

prof. RNDr. Radko Mesiar, DrSc.
vedúci pracoviska

prof. RNDr. Magdaléna Komorníková, PhD.
garantka študijného programu

POKYNY na vypracovanie diplomovej práce

Úvodné ustanovenie

V zmysle zákona . 131/2002 Z. z. o vysokých školách a o zmene a doplnení niektorých zákonov v znení neskorších predpisov je sú as ou štúdia pod a každého študijného programu aj závere ná práca. Jej obhajoba patrí medzi štátne skúšky. Závere nou prácou pri štúdiu pod a študijného programu druhého stup a je diplomová práca. Podkladom na vypracovanie diplomovej práce je zadanie diplomovej práce

Štruktúra závere nej práce

- titulný list,
- zadanie závere nej práce,
- pokyny na vypracovanie,
- vyhlásenie autora,
- názov a abstrakt v slovenskom a v anglickom jazyku (spolu v rozsahu jednej strany),
- obsah s o íslovaním kapitol,
- zoznam príloh,
- zoznam skratiek a zna iek,
- text samotnej práce (odporú ané lenenie),
 - úvod,
 - sú asný stav problematiky,
 - ciele závere nej práce,
 - vlastné riešenie lenené na kapitoly pod a charakteru práce,
 - zhodnotenie dosiahnutých výsledkov resp. navrhnutých riešení,
 - záver,
- resumé (len pre práce vypracované v cudzom jazyku),
- zoznam použitej literatúry,
- prílohy (výkresy, tabu ky, mapy, ná rty) vrátane postera s rozmermi 1000x700 mm.

Rozsah a forma

1. Obsah a forma závere nej práce musí by spracovaná v zmysle vyhlášky MŠVVaŠ SR . 233/2011 Z. z., ktorou sa vykonávajú niektoré ustanovenia zákona . 131/2002 Z. z. a v zmysle Metodického usmernenia . 56/2011 o náležitostiach závere ných prác.
2. Vyžadovaný rozsah diplomovej práce je 30 až 50 strán. Odovzdáva sa v dvoch vyhotoveniach. Jedno vyhotovenie musí by viazané v pevnej väzbe (nie hrebe ovej) tak, aby sa jednotlivé listy nedali vybera . Rozsiahle grafické prílohy možno v prípade súhlasu vedúceho práce odovzda v jednom vyhotovení.
3. Autor práce je povinný vloži prácu v elektronickej forme do akademického informa ného systému. Autor zodpovedá za zhodu listinného aj elektronického vyhotovenia.

4. Po vložení závere tej práce do informa ného systému, predloží autor fakulte ním podpísaný návrh licen tej zmluvy. Návrh licen tej zmluvy je vytvorený akademickým informa ným systémom.
5. Odporú aný typ písma je Times New Roman, ve kos 12 a je jednotný v celej práci. Odporú ané nastavenie strany - riadkovanie 1,5, okraj vnútorný 3,5 cm, vonkajší 2 cm, zhora a zdola 2,5 cm, orientácia na výšku, formát A4.
6. Obrázky a vzorce sa íslujú v rámci jednotlivých kapitol (napr. obr. 3.1 je obrázok . 1 v kapitole 3). Vzorce sa íslujú na pravom okraji riadku v okrúhlych zátvorkách - napr. (3.1).
7. Všetky výpo ty musia by usporiadane tak, aby bolo možné preveri ich správnos .
8. Pri všetkých prevzatých vzorcoch, tabu kách, citovaných astiach textu musí by uvedený prame .
9. Citovanie literatúry vrátane elektronických materiálov sa uvádza pod a STN ISO 690 (01 0197): 2012. *Informácie a dokumentácia. Návod na tvorbu bibliografických odkazov na informa né pramene a ich citovanie.*
10. Príklad zoznamu bibliografických odkazov:

ABELOVI , J. a kol.: *Meranie v geodetických sie ach.* Bratislava, Alfa 1990, ISBN 0-1554-9173.

MICHAL ÁK, O. – ADLER, E.: Výskum stability dunajských hrádzí. In: *Zborník vedeckých prác Stavebnej fakulty SVŠT.* Bratislava: Edi né stredisko SVŠT 1976, s. 17-28. ISBN 0-3552-5214.

ŠÜTTI, J.: Ur ovanie priestorových posunov stavebných objektov. *Geodetický kartografický obzor.* 2000, ro . 2, . 3, s. 8-16. ISSN 0811-6900.

Article 18. Technical Cooperation. <http://www.lac.uk/iso/tc456> (2013-09-28)
11. Za jazykovú a terminologickú správnos závere tej práce zodpovedá diplomant.
12. Formu postera (elektronická alebo aj tla ená) ur í garant študijného programu.
13. Vzor pre poster je uvedený na dokumentovom serveri v akademickom informa nom systéme univerzity.

.....
podpis garanta študijného programu

Ustanovenia týchto pokynov som vzal na vedomie. Som si vedomý(á), že ak nebude moja diplomová práca vypracovaná v súlade s týmito pokynmi, nebude prijatá na obhajobu.

V Bratislave
.....
podpis študenta

Čestné prehlásenie

Vyhlasujem, že som diplomovú prácu Riešenie parciálnych diferenciálnych rovníc na nerovnomerných logicky štvoruholníkových sieťach metódou konečných objemov výpracoval samostatne s použitím citovanej literatúry a s odbornou pomocou vedúceho práce.

20. mája 2014

vlastnoručný podpis

.....

Pod'akovanie

Ďakujem môjmu vedúcemu práce prof. RNDr. Karolovi Mikulovi, DrSc. za jeho cenné rady a podnetné pripomienky, ktoré mi ochotne poskytoval pri tvorbe tejto práce.

Abstrakt

V práci sa venujeme riešeniu Laplaceovej rovnice metódou konečných objemov na ne-rovnomerných sieťach v 2D a 3D. Výpočtová oblasť môže reprezentovať napríklad výsek nad topografiou Zeme v 3D a výsek nad rezom topografiou Zeme v 2D. V prvej kapitole práce prezentujeme diskretizáciu výpočtovej oblasti. Sieť vytvárame vývojom otvorenej plochy (krivky), ktorá je častou diskretizovanej topografie Zeme. Krivka sa vyvíja podľa krivosti a konštantnou silou f . Takýmto vývojom zabezpečíme, že plocha (krivka) nadobudne približne tvar výseku gule (kružnice). Vhodnou tangenciálnou redistribúciou zabezpečíme približne rovnakú veľkosť vnútorných konečných objemov a polovičnú veľkosť okrajových konečných objemov, čo je dôležité pre implementáciu Dirichletovej okrajovej podmienky. V druhej kapitole sa venujeme metóde konečných objemov na takto vytvorenej nerovnomernej sieti skladajúcej sa zo šeststenov (štvoruholníkov). V jej prvej časti prezentujeme novú diskretizáciu Laplaceovej rovnice metódou konečných objemov. Rozdiel v prístupe oproti diskretizácii na rovnomernej sieti je, že deriváciu v smere normály k hrane konečného objemu rozdelíme na deriváciu v smere tangenty a deriváciu v smere vektora, ktorý spája reprezentačné body. V druhej časti sa venujeme Neumannovým okrajovým podmienkam a v tretej časti prípadu, keď je namiesto derivácie v smere normály zadaná derivácia v šikmom smere. V prípade šikmej derivácie nahradzame hranicu hraničnou oblasťou a riešime okrajovú podmienku v tvare šikmej derivácie ako rovnicu advekcie s využitím up-wind metódy.

Abstract

This work is devoted to solving the Laplace equation using the finite volume method on non-uniform 2D and 3D grids. Computational domain can represents e.g. a bounded domain above the Earth topography in 3D or a bounded domain above the crossing of the Earth topography in 2D. The first chapter deals with discretization of the computational domain. The grid is created by evolution of an open surface (curve) which is evolved according to its curvature and by a constant force f . Such evolution ensures that the surface (curve) take a form of partial sphere (circular arc). A redistribution of grid points in tangential direction guarantees the uniform size of internal finite volumes and half size of boundary finite volumes, which is important when implementing the Dirichlet boundary conditions. The second chapter deals with the finite volume method on the non-uniform 3D (2D) grid consisting of hexahedrons (tetragons) created in the first chapter. In its first section the Laplace equation is discretized by a new finite volume method. In comparison with the finite volume method on a uniform grid, the derivative in the normal direction to the edge of finite volume is split into the direction of tangent to the edge and to the vector connecting the representative points of finite volumes. The second section deals with the Neumann boundary condition and the third section deals with the prescribed derivative in an oblique direction. In the case of the oblique derivative, the boundary is replaced by a boundary layer and the oblique derivative boundary condition is solved as an advection equation using the up-wind method.

Obsah

1	Úvod	1
2	Tvorba siete v 2D	2
2.1	Vývoj krivky závislý od krivosti a vonkajšej sily	2
2.2	Odvodenie tangenciálnej rýchlosťi	3
2.3	Numerická approximácia	7
2.4	Riešenie sústavy rovníc	8
2.5	Preškálovanie	10
3	Diskretizácia okrajových úloh v 2D	12
3.1	Riešenie Laplaceovej rovnice s Dirichletovými okrajovými podmienkami	12
3.2	Riešenie Laplaceovej rovnice s Neumannovými okrajovými podmienkami v normálovom smere	15
3.3	Riešenie Laplaceovej rovnice s predpísanou deriváciou v šikmom smere	17
3.4	Numerické experimenty	19
4	Tvorba siete v 3D	23
4.1	Vývoj plochy závislý od krivosti a vonkajšej sily	23
4.2	Odvodenie tangenciálnej rýchlosťi	24
4.3	Numerická approximácia	28
4.4	Numerické experimenty	31
5	Diskretizácia okrajových úloh v 3D	34

5.1	Riešenie Laplaceovej rovnice s Dirichletovými okrajovými podmienkami	34
5.2	Riešenie Laplaceovej rovnice s Neumannovými okrajovými podmienkami v normálovom smere	37
5.3	Riešenie Laplaceovej rovnice s predpísanou deriváciou v šikmom smere	39
5.4	Numerické experimenty	41
6	Záver	43
7	Literatúra	44

Kapitola 1

Úvod

Laplaceova rovnica je parciálna diferenciálna rovnica opisujúca dej v rôznych častiach fyziky. V geodézii je to geodetická okrajová úloha s pevnou hranicou na oblasti Ω

$$\begin{aligned}\Delta T(x) &= 0, & x \in \Omega \\ v(x) \cdot \nabla T(x) &= g(x), & x \in \Gamma \\ T(x) &= T_{Dir}(x), & x \in \partial\Omega - \Gamma,\end{aligned}$$

kde $T(x)$ je poruchový potenciál, ktorý sa vypočíta ako rozdiel skutočného tiažového potenciálu a normálneho tiažového potenciálu generovaného rotujúcim elipsoidom. Hranica výpočtovej oblasti sa rozdeľuje na dve časti. Spodnú časť hranice, kde sú dané tzv. tiažové poruchy a hornú a bočné časti hranice, kde je daná hodnota poruchového potenciálu získaného zo satelitov. Jej riešenie pri zložitých oblastiach so zložitými okrajovými podmienkami nie je vždy jednoduché, preto sa využívajú rôzne numerické metódy. Práca sa zaobrá riešením Laplaceovej rovnice od vytvárania siete na výpočtovej oblasti, cez diskretizáciu Laplaceovej rovnice metódou konečných objemov, po diskretizácii Neumannových okrajových podmienok a predpísanej šikmej derivácie na okraji. Prvá časť sa venuje špeciálnemu prípadu tvorby siete na oblasti, ktorá reprezentuje priestor nad výsekom rezu topografie Zeme. V práci sú prezentované numerické experimenty ukazujúce rád metód.

Kapitola 2

Tvorba siete v 2D

2.1 Vývoj krivky závislý od krivosti a vonkajšej sily

Uvažujeme, že máme výpočtovú oblasť, ktorej dolnou hranicou je časť rezu topografie Zeme a horná hranica je časť kružnice v určitej výške H nad topografiou Zeme. Túto výpočtovú oblasť diskretizujeme a vytvoríme sieť skladajúcu sa z konvexných štvoruholníkov.

Uvažujeme krivku Γ , ktorá reprezentuje rez topografiou Zeme. Ďalej uvažujeme, že máme danú hornú hranicu oblasti, ktorou je časť kružnice. Sieť vytvoríme postupným vývojom krivky Γ podľa krivosti a konštantnej sily f , čím docielime, že výsledná krivka nadobudne približne tvar časti kružnice s polomerom $1/f$. Ako f zvolíme $1/R$, kde R je polomer Zeme. Takýto vývoj spôsobí, že krivka nadobudne približne tvar časti kružnice, ale jej polomer nebude H . Túto krivku budeme musieť ešte preškálovať, aby krivka v konečnom čase vývoja mala polomer H a krivka v čase 0 bola nezmenená. Body siete budú tvorené bodmi preškálovanej krivky v jednotlivých časových krokoch vývoja.

Všeobecná rovnica pre vývoj krivky má tvar

$$(2.1) \quad \partial_t \mathbf{r} = \beta \mathbf{N} + \alpha \mathbf{T},$$

kde \mathbf{r} je pozičný vektor krivky Γ , ktorá je daná predpisom $\Gamma = \{\mathbf{r}(u, t), u \in S^1, t \geq 0\}$, kde S^1 je úsečka jednotkovej dĺžky a t je čas. Od okrajových bodov chceme, aby sa

v konečnom čase t_{end} dostali do vzdialenosťi R od stredu Zeme, teda máme okrajové podmienky $\mathbf{r}(0, t) = \mathbf{r}(0, 0) + \frac{\mathbf{r}(0, 0)}{|\mathbf{r}(0, 0)|}(R - |\mathbf{r}(0, 0)|)\frac{t}{t_{end}}$ a $\mathbf{r}(1, t) = \mathbf{r}(1, 0) + \frac{\mathbf{r}(1, 0)}{|\mathbf{r}(1, 0)|}(R - |\mathbf{r}(1, 0)|)\frac{t}{t_{end}}$ pre všetky t . Nazvime s taký parameter, aby rovnako veľkej zmene parametra prislúchala vždy rovnaká zmena dĺžky krivky. Ide o jednotkovú dĺžkovú parametrizáciu. Pre takto danú parametrizáciu platí, že každej hodnote s prislúcha jedinečný bod na krivke. Označme $g = |\mathbf{r}_u| = \sqrt{(\frac{dr_1}{du})^2 + (\frac{dr_2}{du})^2}$, potom platí $ds = gdu$.

Krivka sa bude vyvíjať v smere normály \mathbf{N} rýchlosťou β a v smere tangenty \mathbf{T} rýchlosťou α . Posun bodov krivky v smere tangenty nebude mať vplyv na výsledný tvar krivky len na rozloženie bodov, čo nám v našom prípade zabezpečí čo najrovnomernejsiu výslednú siet.

Rýchlosť β bude závislá od krivosti krivky v danom bode krát ε , čo spôsobí, že krivka bude nadobúdať tvar časti kružnice. Bude tiež závislá od sily f , vďaka ktorej sa vývoj krivky zastaví, keď krivka bude mať krivosť f/ε a teda pôjde o časť kružnice s polomerom ε/f . Rovnica pre β má tvar

$$(2.2) \quad \beta = -\varepsilon k + f.$$

V rovnici je $\varepsilon > 0$ reálny parameter, ktorý bude určovať, ako rýchlo sa bude krivka zhľadzovať, k je krivosť krivky a f je konštanta.

Rozpísaním rovnice (2.1) dostaneme

$$(2.3) \quad \partial_t \mathbf{r} = -\varepsilon k \mathbf{N} + f \mathbf{N} + \alpha \mathbf{T}.$$

Pre každý bod sa dá tangenta vypočítať ako $\mathbf{T} = \partial_s \mathbf{r}$. Vďaka Frenetovým vzorcom d'alej platí $k \mathbf{N} = -\partial_s \mathbf{T} = -\partial_{ss} \mathbf{r}$. Čo nám dovoľuje prepísať rovnicu na tvar

$$(2.4) \quad \partial_t \mathbf{r} = \varepsilon \partial_{ss} \mathbf{r} + f \mathbf{N} + \alpha \partial_s \mathbf{r}.$$

2.2 Odvodenie tangenciálnej rýchlosťi

Dôležitou súčasťou vývoja krivky numerickou metódou je riadené rozdelenie bodov. Bez takého rozdelenia by na krivke mohli vznikať body singularity, kde by sa viacero

bodov dostalo do jedného bodu, čím by vytvorili hranu na inak hladkej krvke. Ďalším problémom je, že by sa body mohli predbehnúť a tým by sa krvka mohla zauzliť.

Pre deriváciu (2.1) podľa u platí

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{r}_t)_u &= (\beta\mathbf{N} + \alpha\mathbf{T})_u = \frac{d(\beta\mathbf{N} + \alpha\mathbf{T})}{du} \\
 &= \frac{d(\beta\mathbf{N} + \alpha\mathbf{T})}{\frac{1}{g}ds} = g(\beta\mathbf{N} + \alpha\mathbf{T})_s \\
 (2.5) \quad &= g(\beta_s\mathbf{N} + \beta\mathbf{N}_s + \alpha_s\mathbf{T} + \alpha\mathbf{T}_s).
 \end{aligned}$$

Podľa Frenetových vzorcov platí $\mathbf{T}_s = k\mathbf{N}$ a $\mathbf{N}_s = -k\mathbf{T}$. Na základe čoho môžeme rovnicu prepísať na

$$(2.6) \quad g(\beta_s\mathbf{N} + \beta\mathbf{N}_s + \alpha_s\mathbf{T} + \alpha\mathbf{T}_s) = g((k\alpha + \beta_s)\mathbf{N} + (-k\beta + \alpha_s)\mathbf{T}).$$

Z čoho vyplýva, že

$$(2.7) \quad (\mathbf{r}_t)_u = g((k\alpha + \beta_s)\mathbf{N} + (-k\beta + \alpha_s)\mathbf{T}).$$

Ďalej platí, že

$$(2.8) \quad \mathbf{r}_u = \frac{d\mathbf{r}}{du} = \frac{d\mathbf{r}}{\frac{1}{g}ds} = g\frac{d\mathbf{r}}{ds} = g\mathbf{r}_s = g\mathbf{T}.$$

Pre časový vývoj g môžeme napísať

$$(2.9) \quad g_t = |\mathbf{r}_u|_t = \frac{\mathbf{r}_u}{|\mathbf{r}_u|} \cdot (\mathbf{r}_u)_t.$$

Ked'že platí $(\mathbf{r}_u)_t = (\mathbf{r}_t)_u$, tak z (2.8) a (2.7) môžeme (2.9) prepísať na

$$\begin{aligned}
 g_t &= \frac{g\mathbf{T}}{g} \cdot g((k\alpha + \beta_s)\mathbf{N} + (-k\beta + \alpha_s)\mathbf{T}) \\
 &= g(k\alpha + \beta_s)\mathbf{N} \cdot \mathbf{T} + g(-k\beta + \alpha_s)\mathbf{T} \cdot \mathbf{T} \\
 &= g(-k\beta + \alpha_s) = -gk\beta + g\frac{d\alpha}{ds} \\
 &= -gk\beta + \frac{d\alpha}{\frac{1}{g}ds} = -gk\beta + \frac{d\alpha}{du} \\
 (2.10) \quad &= -gk\beta + \alpha_u.
 \end{aligned}$$

Zintegrovaním rovnice dostaneme

$$(2.11) \quad \begin{aligned} \int_{S^1} g_t du &= \int_{S^1} -gk\beta du + \int_{S^1} \alpha_u du \\ ds = gdu \Rightarrow \frac{1}{dt} \int_{\Gamma} ds &= \int_{\Gamma} -k\beta ds + \alpha(1) - \alpha(0). \end{aligned}$$

Ked'že chceme, aby sa poloha bodov $\mathbf{r}(0, t)$ a $\mathbf{r}(1, t)$ v čase nemenila, musí byť tangenciálna rýchlosť týchto bodov nulová. Zvolíme $\alpha(0) = 0$ a $\alpha(1) = 0$. Z toho vyplýva

$$(2.12) \quad L_t = - \int_{\Gamma} k\beta ds.$$

Pretože chceme zachovať rovnomernú redistribúciu bodov, chceme, aby bolo g , teda zmena dĺžky vzhľadom na parameter u , konštantné. Ked'že

$$(2.13) \quad \int_0^1 gdu = L,$$

tak sa konštantné $g = L$. Z čoho vyplýva, že by sme potrebovali, aby $\frac{g}{L} \rightarrow 1$ pre $t \rightarrow \infty$ [2, 4, 5]. Pre zmenu $\frac{g}{L}$ v čase platí

$$(2.14) \quad \begin{aligned} \left(\frac{g}{L}\right)_t &= \frac{g_t L - g L_t}{L^2} = \frac{(-gk\beta + g\alpha_s)L + gL\langle k\beta \rangle_{\Gamma}}{L^2} \\ &= \frac{g}{L} (-k\beta + \langle k\beta \rangle_{\Gamma} + \alpha_s). \end{aligned}$$

Ak zvolíme $(\frac{g}{L})_t = 0$, bude platiť $0 = -k\beta + \langle k\beta \rangle_{\Gamma} + \alpha_s$, kde $\langle k\beta \rangle_{\Gamma} = \frac{1}{L} \int_{\Gamma} k\beta ds$. Teda $\alpha_s = k\beta - \langle k\beta \rangle_{\Gamma}$. Pretože sa nebude meniť pomer $\frac{g}{L}$, nebude sa meniť rozloženie bodov na krivke [1, 3].

V práci [8] je g chápáné ako tzv. hustota dĺžky, pričom pre predchádzajúce redistribúcie platí, že hustota dĺžky sa bud' nemení v čase, alebo konverguje ku konštante s narastajúcim časom. Vzhľadom na naše ďalšie ciele pri vytváraní sieti bude užitočné navrhnúť model s predpísanou hustotou dĺžky krivky. Ak chceme, aby krivka nadobudla hustotu dĺžky v , zvolíme

$$(2.15) \quad \left(\frac{g}{L}\right)_t = \omega \left(\frac{v}{L} - \frac{g}{L}\right).$$

Potom pôjde pomer $\frac{g}{L}$ k $\frac{v}{L}$, a teda pôjde g k v .

Rovnicu (2.14) môžeme prepísať

$$(2.16) \quad \alpha_s = k\beta - \langle k\beta \rangle_\Gamma + \omega \frac{L}{g} \left(\frac{v}{L} - \frac{g}{L} \right),$$

$$(2.17) \quad \alpha_s = k\beta - \langle k\beta \rangle_\Gamma + \omega \left(\frac{L}{g} \frac{v}{L} - 1 \right),$$

$$(2.18) \quad \alpha_s = k\beta - \langle k\beta \rangle_\Gamma + \omega \left(\frac{v}{g} - 1 \right).$$

Ked'že g bude konvergovať k v v nekonečne a pre všetky g platí rovnica (2.13), musíme zvoliť v , pre ktoré platí

$$(2.19) \quad \int_0^1 v du = L,$$

Označme v' funkciu relatívnej hustoty dĺžky, ktorá nespĺňa vzťah (2.19) a označme

$$(2.20) \quad L_2 = \int_0^1 v' du,$$

potom môžeme funkciu relatívnej hustoty v' upraviť na funkciu hustoty dĺžky, aby splňala vzťah (2.19) transformáciou

$$v = \frac{v' L}{L_2}$$

$$(2.21) \quad \alpha_s = k\beta - \langle k\beta \rangle_\Gamma + \omega \left(\frac{\frac{v' L}{L_2}}{g} - 1 \right).$$

Ak chceme, aby g bolo rovnomerné, zvolíme za $v' = L$ a teda

$$(2.22) \quad \alpha_s = k\beta - \langle k\beta \rangle_\Gamma + \omega \left(\frac{L}{g} - 1 \right),$$

2.3 Numerická aproximácia

Zintegrovaním rovnice (2.4) na oblasti $[\mathbf{r}_{i-1/2}, \mathbf{r}_{i+1/2}]$ dostaneme

$$(2.23) \quad \int_{\mathbf{r}_{i-1/2}}^{\mathbf{r}_{i+1/2}} \partial_t \mathbf{r} ds = \int_{\mathbf{r}_{i-1/2}}^{\mathbf{r}_{i+1/2}} \varepsilon \partial_{ss} \mathbf{r} ds + \int_{\mathbf{r}_{i-1/2}}^{\mathbf{r}_{i+1/2}} f(\partial_s \mathbf{r})^\perp ds + \int_{\mathbf{r}_{i-1/2}}^{\mathbf{r}_{i+1/2}} \alpha \partial_s \mathbf{r} ds,$$

kde f a ε sú konštantné na celej oblasti. Vzdialenosť $\mathbf{r}_{i-1/2}$ od $\mathbf{r}_{i+1/2}$ vypočítame ako $|\mathbf{r}_{i+1/2} - \mathbf{r}_{i-1/2}| = \frac{h_{i+1} + h_i}{2}$, kde $h_i^m = \sqrt{(x_i^m - x_{i-1}^m)^2 + (y_i^m - y_{i-1}^m)^2}$ a časovú deriváciu nahradíme spätnou diferenciou. To nám dovoluje prepísaať rovnicu na tvar

$$(2.24) \quad \frac{h_{i+1}^m + h_i^m}{2} \frac{\mathbf{r}_i^{m+1} - \mathbf{r}_i^m}{\Delta t} = \varepsilon [\partial_s \mathbf{r}]_{\mathbf{r}_{i-1/2}}^{\mathbf{r}_{i+1/2}} + f([\mathbf{r}]_{\mathbf{r}_{i-1/2}}^{\mathbf{r}_{i+1/2}})^\perp + \alpha [\mathbf{r}]_{\mathbf{r}_{i-1/2}}^{\mathbf{r}_{i+1/2}},$$

kde $\mathbf{r}_i^{m+1} = [x_i^{m+1}, y_i^{m+1}], i = 1, \dots, n$ sú neznáme body na krivke. Ked' nahradíme derivácie v prvom člene pravej strany centrálnymi diferenciami a $\mathbf{r}_{i+1/2} = \frac{\mathbf{r}_i + \mathbf{r}_{i+1}}{2}$, dostaneme rovnicu

$$(2.25) \quad \frac{h_{i+1}^m + h_i^m}{2} \frac{\mathbf{r}_i^{m+1} - \mathbf{r}_i^m}{\Delta t} = \varepsilon \left(\frac{\mathbf{r}_{i+1}^{m+1} - \mathbf{r}_i^{m+1}}{h_{i+1}^m} - \frac{\mathbf{r}_i^{m+1} - \mathbf{r}_{i-1}^{m+1}}{h_i^m} \right) + f_i^m \mathbf{N}_i^m + \alpha \frac{\mathbf{r}_{i+1}^{m+1} - \mathbf{r}_{i-1}^{m+1}}{2},$$

kde \mathbf{N}_i^m je normálka, ktorú získame ako $\mathbf{N}_i^m = [n_{xi}^m, n_{yi}^m] = (\frac{\mathbf{r}_{i+1}^m - \mathbf{r}_{i-1}^m}{2})^\perp = [(y_{i-1}^m - y_{i+1}^m)/2, (x_{i+1}^m - x_{i-1}^m)/2]$. Z okrajových podmienok vyplýva, že $\mathbf{r}_1^{m+1} = \mathbf{r}_1^1$ a $\mathbf{r}_n^{m+1} = \mathbf{r}_n^1$

Tangenciálnu rýchlosť α vypočítame zo vzťahu

$$(2.26) \quad \alpha_s = k\beta - \langle k\beta \rangle_\Gamma + \omega \left(\frac{\frac{v'L}{L_2}}{g} - 1 \right).$$

Po diskretizácii

$$(2.27) \quad \frac{\alpha_i^m - \alpha_{i-1}^m}{h_i^m} = k_{i-1/2}^m \beta_{i-1/2}^m - \frac{\sum_{j=1}^n k_{j-1/2}^m \beta_{j-1/2}^m h_j^m}{\sum_{j=1}^n h_j^m} + \omega \left(\frac{\frac{(v')_i^m \sum_{j=1}^n h_j^m}{\sum_{j=2}^n (v')_j^m}}{nh_i^m} - 1 \right),$$

kde

$$(2.28) \quad \begin{aligned} k_{i-1/2}^m &= \frac{\operatorname{sgn}(\det(\mathbf{h}_{i-1}^m, \mathbf{h}_{i+1}^m))}{2h_i^m} \arccos\left(\frac{\mathbf{h}_{i-1}^m \cdot \mathbf{h}_{i+1}^m}{h_{i-1}^m h_{i+1}^m}\right), \\ \beta_{i-1/2}^m &= -\varepsilon k_{i-1/2}^m + f_{i-1/2}^m, \\ f_{i-1/2}^m &= \frac{f_{i-1}^m + f_i^m}{2}, \\ \mathbf{h}_i^m &= \mathbf{r}_i^m - \mathbf{r}_{i-1}^m. \end{aligned}$$

Voľbou $\alpha_i^m = 0$ zabezpečíme, že prvý bod sa bude hýbať iba v normálovom smere a nie tangenciálnom. Ostatné tangenciálne rýchlosť sa vypočítajú vzťahom

$$(2.29) \quad \alpha_i^m = \alpha_{i-1}^m + k_{i-1/2}^m \beta_{i-1/2}^m h_i^m - h_i^m \frac{\sum_{j=1}^n k_{j-1/2}^m \beta_{j-1/2}^m h_j^m}{\sum_{j=1}^n h_j^m} + \omega \left(\frac{(v')_i^m \sum_{j=1}^n h_j^m}{\sum_{j=1}^n (v')_j^m} - h_i^m \right).$$

Vo vzťahu (2.29) je $\sum_{j=1}^n h_j^m$ rovné L . Do hodnoty α_n^m sa zosumujú všetky predchádzajúce α_i^m . Časť vzťahu $\frac{(v')_i^m L}{\sum_{j=1}^n (v')_j^m} - h_i^m$ sa zosumuje na 0 lebo h_i^m sa zosumuje na L a $\frac{(v')_i^m L}{\sum_{j=1}^n (v')_j^m}$ sa tiež zosumuje na L , kedže $\frac{(v')_i^m L}{\sum_{j=1}^n (v')_j^m}$ sa zosumuje na 1.

V našom prípade, ked' vytváramo siet' pre metódu konečných objemov, chceme, aby konečné objemy na okraji výpočtovej oblasti mali polovičný obsah, teda zvolíme $(v')_i^m = 1/2$ pre $i = 1$ a $i = n$, a $(v')_i^m = 1$ inde. Výsledok tejto redistribúcie je vidieť na obrázku 2.2.

Na obrázku 2.1 je krivka z redistribuovanými bodmi, ked' numerická hodnota funkcie relatívnej hustoty dĺžky v' je daná vzťahom

$$(2.30) \quad (v')_i^m = 5 \frac{|k_{i-1/2}^m - k_{min}^m|}{k_{max}^m - k_{min}^m} + 1,$$

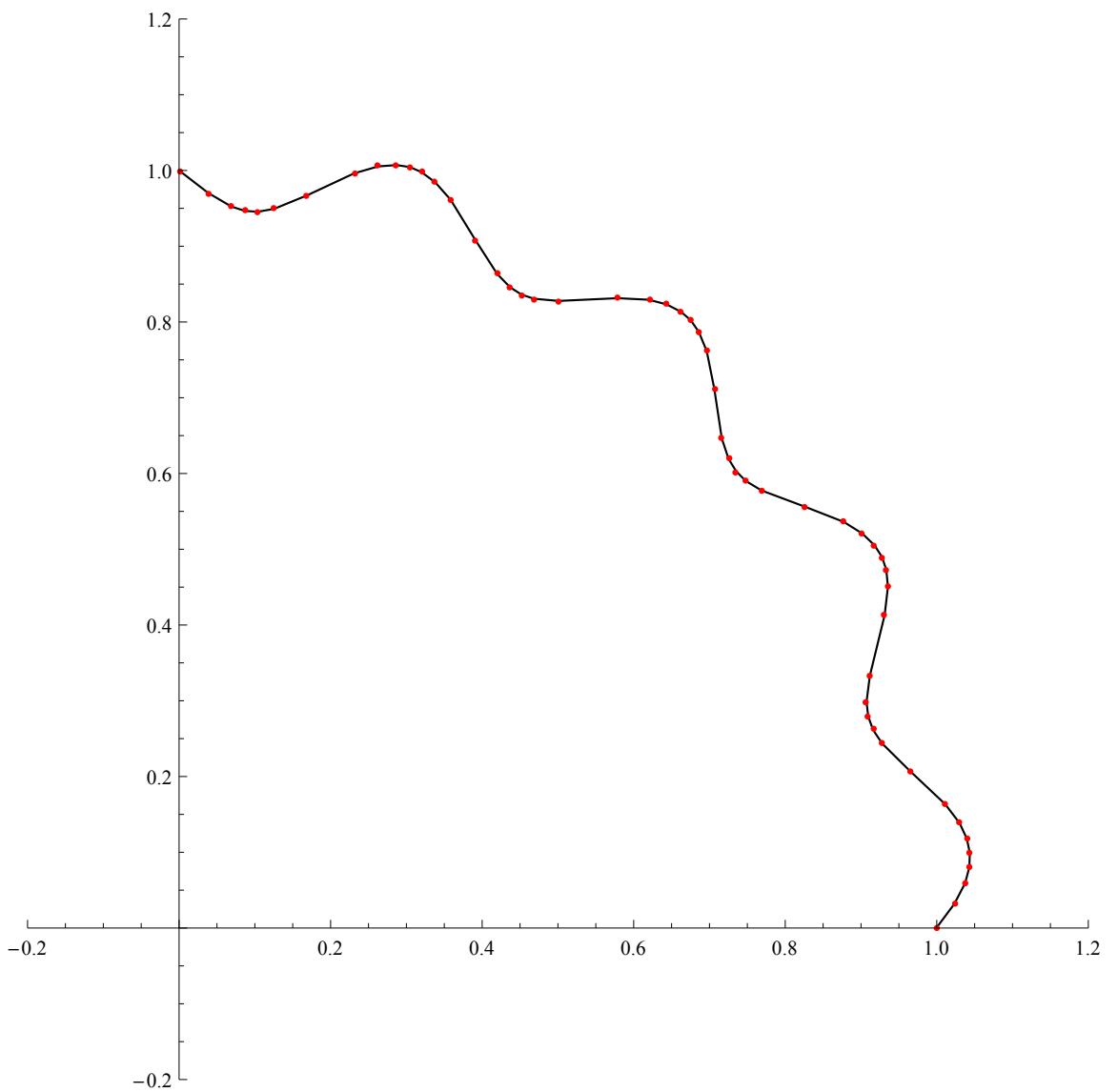
kde k_{max}^m je maximálna krivost' a k_{min}^m je minimálna krivost'. Takáto voľba funkcie v' zabezpečí, že sa body redistribuujú podľa krivosti. Funkcia v' nie je priamo funkcia krivosti, lebo v prípade nulovej krivosti by sa vo vzťahu (2.29) delilo nulou. Distribúcia podľa krivosti nie je v tejto práci priamo využitá, ale može byť veľmi užitočná.

2.4 Riešenie sústavy rovníc

Zo vzťahu (2.25) dostaneme

$$(2.31) \quad \left(\frac{\alpha_i^m}{2} - \frac{\varepsilon}{h_i^m} \right) \mathbf{r}_{i-1}^{m+1} + \left(\frac{h_{i+1}^m + h_i^m}{2\Delta t} + \frac{\varepsilon}{h_{i+1}^m} + \frac{\varepsilon}{h_i^m} \right) \mathbf{r}_i^{m+1} + \left(-\frac{\alpha_i^m}{2} - \frac{\varepsilon}{h_{i+1}^m} \right) \mathbf{r}_{i+1}^{m+1} = \frac{h_{i+1}^m + h_i^m}{2\Delta t} \mathbf{r}_i^m + f_i^m \mathbf{N}_i^m,$$

kde $i = 2, \dots, n-1$. Hodnoty α_i^m získame z vyššie uvedených rovníc a \mathbf{r}_i^m je riešenie z predchádzajúceho časového kroku. Zo vzťahu (2.31) získame $n-1$ rovníc s $n-1$ neznámymi. Tento systém budeme riešiť ako trojdiagonálny systém.



Obr. 2.1: Krivka s redistribuovanými bodmi podľa krivosti

Výsledný systém má tvar:

$$\begin{aligned}
 b_i &= \left(\frac{h_{i+1}^m + h_i^m}{2\Delta t} + \frac{\varepsilon}{h_{i+1}^m} + \frac{\varepsilon}{h_i^m} \right) \\
 a_i &= \left(\frac{\alpha_i^m}{2} - \frac{\varepsilon}{h_i^m} \right), \\
 c_i &= \left(-\frac{\alpha_i^m}{2} - \frac{\varepsilon}{h_{i+1}^m} \right), \\
 p_i &= \frac{h_{i+1}^m + h_i^m}{2\Delta t} \mathbf{r}_i^m + f_i^m \mathbf{r}_i^m, \\
 a &= \left(\frac{\alpha_1^m}{2} - \frac{\varepsilon}{h_1^m} \right), \\
 c &= \left(-\frac{\alpha_n^m}{2} - \frac{\varepsilon}{h_{n+1}^m} \right).
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

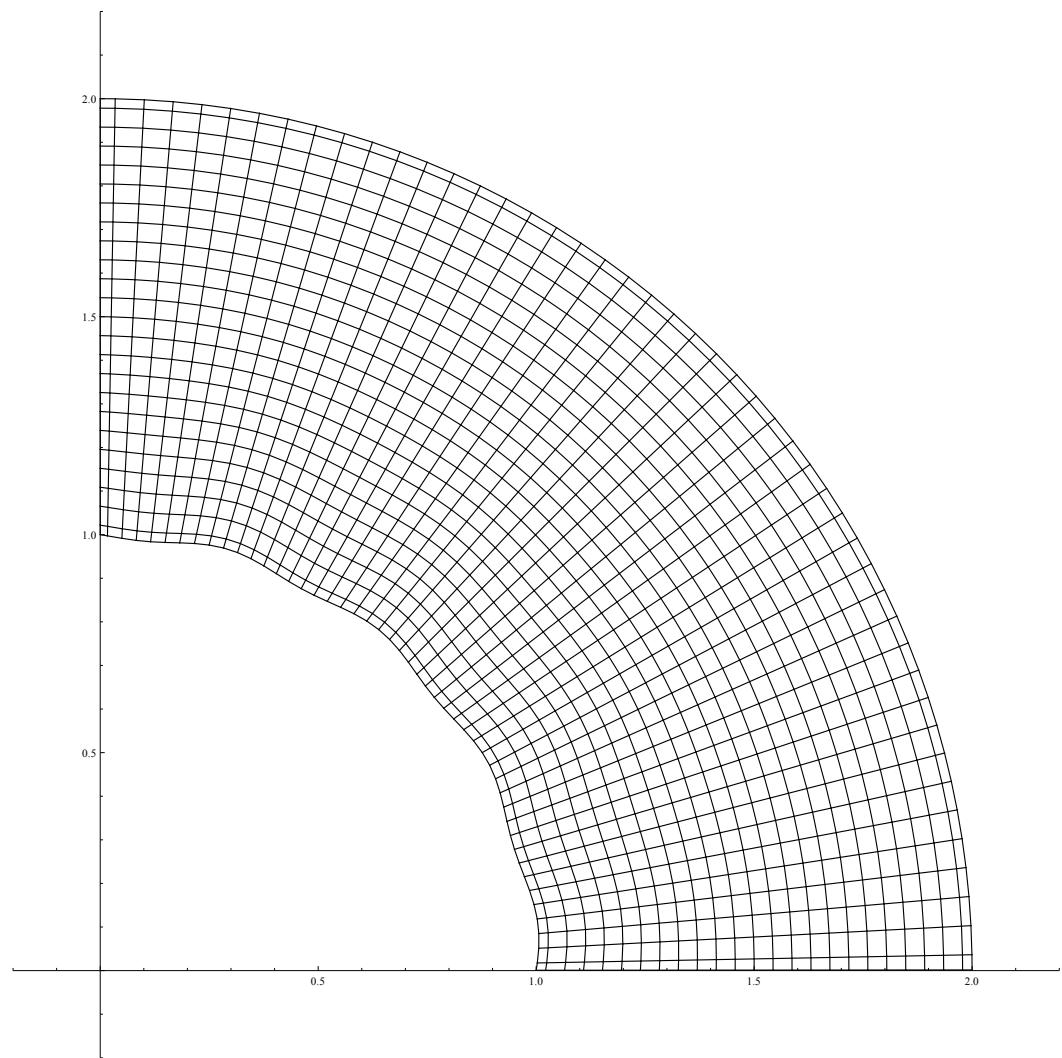
$$\begin{pmatrix}
 b_2 & c_2 & 0 & \dots & & \dots & 0 & 0 \\
 a_3 & b_3 & c_3 & 0 & & & 0 & \\
 \vdots & & \ddots & & & & \vdots & \\
 & 0 & a_i & b_i & c_i & 0 & & \\
 & \vdots & & & \ddots & & \vdots & \\
 & 0 & & 0 & a_{n-2} & b_{n-2} & c_{n-2} & \\
 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & a_{n-1} & b_{n-1}
 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
 p_2 - ar_1^{m+1} \\
 p_3 \\
 \vdots \\
 p_i \\
 \vdots \\
 p_{n-2} \\
 p_{n-1} - cr_n^{m+1}
 \end{pmatrix} \tag{2.33}$$

Na riešenie použijeme metódu SOR.

2.5 Preškálovanie

Ďalším krokom je preškálovanie kriviek v jednotlivých časových okamihoch, aby sme dosiahli diskretizáciu celej výpočtovej oblasti. Preškálujeme ich tak, aby sa prvá krivka nezmenila a posledná krivka bola časťou kružnice s polomerom H a so stredom v strede Zeme. To znamená, že každý bod krivky preškálujeme pomocou rovnice

$$\mathbf{r}_i^m = \left(\frac{m}{M} \left(\frac{H}{R} - 1 \right) + 1 \right) (\mathbf{r}_i^m - \mathbf{C}) + \mathbf{C}. \tag{2.34}$$



Obr. 2.2: Výsledná siet²

kde \mathbf{C} je stred Zeme, R je jej polomer a M je posledný časový krok vývoja krvky. Pre $m = 0$ platí $\mathbf{r}_i^m = \mathbf{r}_i^0$ a pre $m = M$ platí $\mathbf{r}_i^m = \frac{H}{R}(\mathbf{r}_i^m - \mathbf{C}) + \mathbf{C}$. Jednotlivé body \mathbf{r}_i^m budú tvoriť uzly siete.

Na obrázku 2.2 je výsledná siet vytvorená prezentovaným postupom.

Kapitola 3

Diskretizácia okrajových úloh v 2D

3.1 Riešenie Laplaceovej rovnice s Dirichletovými okrajovými podmienkami

Uvažujeme Laplaceovu rovnicu na oblasti Ω s Dirichletovými okrajovými podmienkami.

$$(3.1) \quad \Delta T = 0,$$

$$(3.2) \quad T(x) = T_{Dir}, \quad x \in \partial\Omega.$$

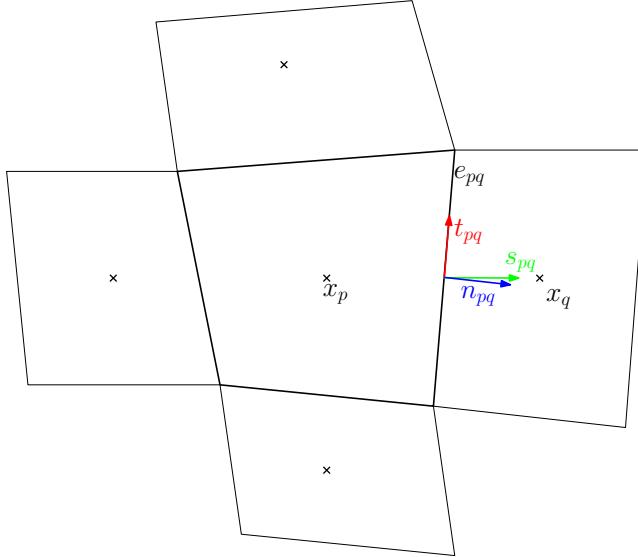
Oblast Ω rozdelíme na konečný počet konvexných štvoruholníkových podoblastí (konečných objemov) tak, aby každý konečný objem, ktorý nie je na hranici, mal štyroch susedov, s ktorými má spoločnú hranu. Množinu týchto susedov nazveme $N(p)$. Každý objem bude mať aj štyroch susedov, s ktorými má spoločný vrchol. Pre okrajové konečné objemy bude hodnota predpísaná Dirichletovou okrajovou podmienkou. Označme množinu konečných objemov, v ktorých je hodnota T neznáma, ako P .

Zintegrovaním rovnice (3.1) na konečnom objeme $p \in P$ dostaneme

$$(3.3) \quad \int_p \Delta T dx = 0.$$

Použitím Greenovej vety dostaneme

$$(3.4) \quad \int_{\partial p} \nabla T \cdot \mathbf{n} d\tau = 0.$$



Obr. 3.1: Konečný objem

Ked' budeme uvažovať, že konečný objem p má susedné objemy $q \in N(p)$, pričom e_{pq} je hranica medzi objemami p a q , môžeme rovnicu (3.4) prepísať na tvar

$$(3.5) \quad \sum_{q \in N(p)} \int_{e_{pq}} \nabla T \cdot \mathbf{n} d\tau = 0.$$

Oblast Ω zdiskretizujeme tak, že každému konečnému objemu $p \in P$ priradíme reprezentačný bod $x_p = (x_{1p}, x_{2p})$, ako ťažisko konečného objemu p . V bode x_p budeme uvažovať neznámu hodnotu T_p . Okrajovým konečným objemom priradíme reprezentačný bod do polovice hranice konečného objemu, ktorá leží na hranici oblasti Ω .

Jednotkový vektor \mathbf{s}_{pq} smerujúci do susedného bodu x_q z bodu x_p je daný vzťahom

$$(3.6) \quad \mathbf{s}_{pq} = \frac{x_q - x_p}{|x_q - x_p|}.$$

Tangenta \mathbf{t}_{pq} k hranici medzi objemami p a q je daná vzťahom

$$(3.7) \quad \mathbf{t}_{pq} = \frac{x_{pq}^2 - x_{pq}^1}{|x_{pq}^2 - x_{pq}^1|},$$

kde x_{pq}^1 a x_{pq}^2 sú súradnice hraničných bodov úsečky e_{pq} .

Pre normálu k hranici objemu platí

$$(3.8) \quad \mathbf{n}_{pq} = \mathbf{t}_{pq}^\perp,$$

pričom normála sa skonštruuje tak, aby išlo o vonkajšiu normálu k objemu p .

Ked'že vektor \mathbf{s}_{pq} môžeme rozložiť do dvoch navzájom kolmých vektorov \mathbf{n}_{pq} a \mathbf{t}_{pq} [7], platí

$$(3.9) \quad \nabla T \cdot \mathbf{s}_{pq} = \nabla T \cdot (\beta_{pq} \mathbf{n}_{pq} + \alpha_{pq} \mathbf{t}_{pq}) = \beta_{pq} \nabla T \cdot \mathbf{n}_{pq} + \alpha_{pq} \nabla T \cdot \mathbf{t}_{pq},$$

kde

$$(3.10) \quad \beta_{pq} = \mathbf{s}_{pq} \cdot \mathbf{n}_{pq}$$

a

$$(3.11) \quad \alpha_{pq} = \mathbf{s}_{pq} \cdot \mathbf{t}_{pq}.$$

V prípade, že \mathbf{s}_{pq} a \mathbf{n}_{pq} sú totožné $\beta_{pq} = 0$ a $\alpha_{pq} = 0$.

Z toho vyplýva, že pre deriváciu v smere normály platí

$$(3.12) \quad \nabla T \cdot \mathbf{n}_{pq} = \frac{1}{\beta_{pq}} (\nabla T \cdot \mathbf{s}_{pq} - \alpha_{pq} \nabla T \cdot \mathbf{t}_{pq}).$$

Rovnicu (3.12) aproximujeme vzťahom

$$(3.13) \quad \frac{1}{\beta_{pq}} (\nabla T \cdot \mathbf{s}_{pq} - \alpha_{pq} \nabla T \cdot \mathbf{t}_{pq}) \approx \frac{1}{\beta_{pq}} \frac{T_q - T_p}{d_{pq}} - \frac{\alpha_{pq}}{\beta_{pq}} \frac{T_{pq}^2 - T_{pq}^1}{m(e_{pq})},$$

kde T_{pq}^1 a T_{pq}^2 sú hodnoty v bodoch x_{pq}^1 , x_{pq}^2 a d_{pq} je vzdialenosť medzi bodmi x_q a x_p , a $m(e_{pq})$ je dĺžka hranice e_{pq} .

Využitím rovnice (3.13) môžeme rovnicu (3.5) prepísat na tvar

$$(3.14) \quad \sum_{q \in N(p)} \left(m(e_{pq}) \frac{1}{\beta_{pq}} \frac{T_q - T_p}{d_{pq}} - \frac{\alpha_{pq}}{\beta_{pq}} (T_{pq}^2 - T_{pq}^1) \right) = 0,$$

kde T_p je neznáma hodnota v konečnom objeme p . V prípade vnútorných konečných objemov je T_{pq} neznáma hodnota v susedných konečných objemoch. V prípade konečných objemov, ktoré susedia s objemami na hranici výpočtovej oblasti Ω , je hodnota T_{pq} na hraničnom objeme, daná Dirichletovou okrajovou podmienkou (3.2).

Hodnoty T_{pq}^1 a T_{pq}^2 vyjadrimo pomocou bilineárnej interpolácie.

$$(3.15) \quad T_{pq}^l = T(x_{pq}^l) = a + b * x_{1pq}^l + c * x_{2pq}^l + d * x_{1pq}^l * x_{2pq}^l, \quad l = 1, 2.$$

Označme hodnoty riešenia v konečných objemoch, na hraniciach ktorých leží bod x_{pq}^l ako $T_{pq1}^l, T_{pq2}^l, T_{pq3}^l, T_{pq4}^l$. Potom koeficienty a, b, c, d možno získať riešením sústavy rovníc

$$(3.16) \quad \begin{aligned} T_{pq1}^l &= T(x_{pq1}^l) = a + b * x_{1pq1}^l + c * x_{2pq1}^l + d * x_{1pq1}^l * x_{2pq1}^l, \\ T_{pq2}^l &= T(x_{pq2}^l) = a + b * x_{1pq2}^l + c * x_{2pq2}^l + d * x_{1pq2}^l * x_{2pq2}^l, \\ T_{pq3}^l &= T(x_{pq3}^l) = a + b * x_{1pq3}^l + c * x_{2pq3}^l + d * x_{1pq3}^l * x_{2pq3}^l, \\ T_{pq4}^l &= T(x_{pq4}^l) = a + b * x_{1pq4}^l + c * x_{2pq4}^l + d * x_{1pq4}^l * x_{2pq4}^l. \end{aligned}$$

V koeficientoch a, b, c, d vystupujú neznáme hodnoty $T_{pq1}^l, T_{pq2}^l, T_{pq3}^l, T_{pq4}^l$, pričom bilineárnu interpoláciu prepíšeme do tvaru

$$(3.17) \quad T_{pq}^l = T(x_{pq}^l) = k_{pq1}^l * T_{pq1}^l + k_{pq2}^l * T_{pq2}^l + k_{pq3}^l * T_{pq3}^l + k_{pq4}^l * T_{pq4}^l.$$

Rovnicu (3.14) môžeme pomocou (3.17) prepísať do tvaru

$$(3.18) \quad \sum_{q \in N(p)} \left(m(e_{pq}) \frac{1}{\beta_{pq}} \frac{T_q - T_p}{d_{pq}} - \frac{\alpha_{pq}}{\beta_{pq}} (k_{pq1}^2 * T_{pq1}^2 + k_{pq2}^2 * T_{pq2}^2 + k_{pq3}^2 * T_{pq3}^2 + k_{pq4}^2 * T_{pq4}^2) \right. \\ \left. - \frac{\alpha_{pq}}{\beta_{pq}} (k_{pq1}^1 * T_{pq1}^1 + k_{pq2}^1 * T_{pq2}^1 + k_{pq3}^1 * T_{pq3}^1 + k_{pq4}^1 * T_{pq4}^1) \right) = 0.$$

Aj keď sa zdá, že v rovnici vystupuje veľa neznámych, ide len o 9 neznámych, keďže väčšina rôzne označených neznámych je totožná.

Rovnica (3.18) platí pre každý konečný objem $p \in P$ s neznámou hodnotou T_p . Z toho vyplýva, že máme toľko rovníc, kol'ko máme neznámych. Z týchto rovníc vytvoríme sústavu, ktorú následne riešime.

3.2 Riešenie Laplaceovej rovnice s Neumannovými okrajovými podmienkami v normálovom smere

Uvažujeme Laplaceovu rovnicu na oblasti Ω s Neumannovými okrajovými podmienkami danými na časti hranice Γ a Dirichletovými okrajovými podmienkami danými na

zvyšku hranice $\partial\Omega - \Gamma$. T.j. máme danú rovnicu (3.1) a okrajové podmienky

$$(3.19) \quad \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}}(x) = g(x), x \in \Gamma.$$

$$(3.20) \quad T(x) = T_{Dir}(x), x \in \partial\Omega - \Gamma$$

Oblast Ω rozdelíme na konečný počet konvexných štvoruholníkových podoblastí (konečných objemov), viď predchádzajúcu kapitolu. Pre konečné objemy, ktorých časť hranice leží na $\partial\Omega - \Gamma$, je daná hodnota T pomocou Dirichletových okrajových podmienok. Označme množinu konečných objemov s neznámou hodnotou T ako P .

Pre konečne objemy P budeme pokračovať ako v predchádzajúcej kapitole, až po rovnicu (3.18). Tu si však treba uvedomiť rozdiel, že v prípade okrajových konečných objemov, na ktorých nie je predpísaná Dirichletova okrajová podmienka, sa bod $x_p = (x_{1p}, x_{2p})$ vypočíta ako ťažisko konečného objemu p a nie ako stred hranice.

V rovnici (3.18) pre objemy p , nachádzajúce sa na okraji oblasti Ω , vystupujú neznáme susedné hodnoty T_q , ktoré nie sú definované. Tohto problému sa zbavíme pridaním nových neznámych v smere normály \mathbf{n}_{pq} vo vzdialosti od hranice e_{pq} , ktorá je rovná vzdialenosťi e_{pq} od x_p . Teda bod x_q , v ktorom uvažujeme novú neznámu T_q sa vypočíta ako

$$(3.21) \quad x_q = x_p + 2|x_p, e_{pq}| \mathbf{n}_{pq},$$

kde $|x_p, e_{pq}|$ je vzdialosť x_p od e_{pq} . Označme množinu všetkých novo pridaných neznámych a ich súradníc ako N . Tým sme každému hraničnému objemu z množiny P pridali susednú neznámu, s ktorou susedí s hranicou. Vždy keď sme pridali suseda T_q cez hranu e_{pq} , pridali sme suseda aj ďalším konečným objemom, ktoré majú vrchol vo vrchole e_{pq} .

Objemy p , nachádzajúce sa na okraji oblasti Ω , so susedným objemom s predpísanou Dirichletovou okrajovou podmienkou majú stále jedného alebo aj viacerých neexistujúcich susedov, susediacich cez vrchol. Tohto suseda pridáme do najbližšieho bodu k vrcholu, cez ktorý má susediť, kde je predpísaná Dirichletova okrajová podmienka. Bude to sused s prepísanou Dirichletovou okrajovou podmienkou.

Pridaním $|N|$ neznámych sme spôsobili, že máme viac neznámych ako rovníc. Tento problém nám pomôže vyriešiť rovnica (3.19). Pre každú novo pridanú neznámu T_p , pridáme rovnicu

$$(3.22) \quad \frac{T_p - T_q}{d_{pq}} = g\left(\frac{x_p + x_q}{2}\right), p \in N$$

Vďaka pridaniu týchto rovníc je počet neznámych a počet rovníc rovnaký, čo nám dovoľuje vyriešiť túto sústavu rovníc.

3.3 Riešenie Laplaceovej rovnice s predpísanou deriváciou v šikmom smere

Uvažujeme Laplaceovu rovnicu (3.1) na oblasti Ω s danou kladnou deriváciou v ľubovoľnom smere v , smerujúcim von s oblasti Ω , na časti hranici Γ a Dirichletovými okrajovými podmienkami (3.20) na zvyšku hranice, t.j.

$$(3.23) \quad v \cdot \nabla T = g(x), x \in \Gamma$$

Pri delení oblasti na podmnožiny budeme postupovať ako v predchádzajúcej kapitole, až kým nedôjdeme do časti, kde pridávame neznáme. V tejto časti okrem toho, že pridáme neznáme hodnoty, pridáme k nim celé konečné objemy. Pridané konečné objemy budú konvexné štvoruholníky s jednou hranou spájajúcou nový konečný objem s konečným objemom p . Ďalšie dve hrany, budú predĺžením hrán konečného objemu p , ktoré majú spoločný bod s novo pridanou hranou a budú rovnako dlhé ako hrany, ktorých predĺžením sú. Posledná hrana je už jednoznačne určená predchádzajúcimi hranami. Množinu novo pridaných konečných objemov označíme N .

Rovnicu (3.23) budeme chápať ako rovnicu advekcie, pozri tiež [6], a zintegrujeme ju na konečnom objeme $p \in N$

$$(3.24) \quad \int_p v \cdot \nabla T dx = \int_p g dx.$$

Ked'že platí

$$(3.25) \quad v \cdot \nabla T = \nabla \cdot (vT) - T \nabla \cdot v,$$

môžeme rovnicu (3.24) prepísať do tvaru

$$(3.26) \quad \int_p \nabla \cdot (vT) dx - \int_p T \nabla \cdot v dx = \int_p g dx.$$

Ked'že považujeme hodnotu T za konštantnú na konečnom objeme, môžeme T v druhom integráli vyňať pred integrál

$$(3.27) \quad \int_p \nabla \cdot (vT) dx - T_p \int_p \nabla \cdot v dx = \int_p g dx.$$

Použitím Greenovej vety môžeme rovnicu prepísať do tvaru

$$(3.28) \quad \int_{\partial p} T v \cdot \mathbf{n} ds - T_p \int_{\partial p} v \cdot \mathbf{n} ds = \int_p g dx.$$

Predpokladajme g konštantné na objeme a T konštantné na hraniciach a ked'že konečný objem má hranice e_{pq} , môžeme rovnicu prepísať do tvaru

$$(3.29) \quad \sum_{q \in N(p)} T_{pq} \int_{e_{pq}} v \cdot \mathbf{n} ds - T_p \sum_{q \in N(p)} \int_{e_{pq}} v \cdot \mathbf{n} ds = |p|g,$$

kde T_{pq} je hodnota na hranici e_{pq} .

Tu sa využije metóda up-wind. Označme tok

$$(3.30) \quad v_{pq} = \int_{e_{pq}} v \cdot \mathbf{n} ds.$$

V prípade, že $v_{pq} > 0$ ide o tok z oblasti, takzvaný outflow, a $T_{pq} = T_p$. V prípade, že $v_{pq} < 0$ ide o tok do oblasti, takzvaný inflow, a $T_{pq} = T_q$. Označme $N^{out}(p)$ susedov, pre ktorých platí $v_{pq} > 0$ a $N^{in}(p)$ susedov, pre ktorých platí $v_{pq} < 0$. Potom môžeme rovnicu (3.29) prepísať do tvaru

$$(3.31) \quad \sum_{q \in N^{in}(p)} T_q v_{pq} ds - \sum_{q \in N^{in}(p)} T_p v_{pq} + \sum_{q \in N^{out}(p)} T_p v_{pq} - \sum_{q \in N^{out}(p)} T_p v_{pq} = |p|g.$$

Po úprave tejto rovnice dostaneme rovnicu

$$(3.32) \quad \sum_{q \in N^{in}(p)} v_{pq} (T_q - T_p) = |p|g,$$

kde

$$(3.33) \quad v_{pq} = m(e_{pq})(v \cdot \mathbf{n}).$$

Ked'že sme poslednú hranu konečného objemu $p \in N$ vytvorili tak, aby vektor v vychádzal von z oblasti, vo výslednej rovnici tento neexistujúci sused nebude vystupovať.

Vďaka pridaniu týchto rovníc je počet neznámych a počet rovníc rovnaký, čo nám dovoľuje vyriešiť túto sústavu rovníc.

3.4 Numerické experimenty

Rád konvergencie numerickej metódy riešenia Laplaceovej rovnice s Dirichletovými okrajovými podmienkami overíme na príklade, keď je riešením Laplaceovej rovnice funkcia $T(x, y) = -\ln(\sqrt{x^2 + y^2})$. Výpočtová oblasť bude kruhový výsek, ktorého spodnou hranicou je krivka $(\sin(p)(1 - 0.01 \sin(16p)), \sin(p)(1 - 0.01 \cos(16p)))$, $p \in (0, \pi/2)$ a hornou hranicou je štvrtkružnica. Výpočtová oblasť pre najhustejšiu sieť je diskretizovaná metódou, ktorá je prezentovaná v prvej kapitole, až na ten rozdiel, že aj okrajové objemy budú mať približne rovnaký obsah, ako vnútorné objemy. Menej hustá sieť je vytvorená tak, že z hustejšej siete je odstránený každý druhý bod v oboch smeroch. Keby boli okrajové konečné objemy najhustejšej siete polovičnej veľkosti, pri odstraňovaní každého druhého bodu by sa polovičný pomer nezachoval. Takéto siete sa vytvárajú len na účely testovania rádu metódy, na praktické výpočty budú uvažované siete s polovičnými konečnými objemami v okolí hranice so zadanými Dirichletovými okrajovými podmienkami. Chyba metódy sa dá zapísat vzťahom

$$(3.34) \quad E_h = C h^\alpha,$$

kde C je konštanta vychádzajúca z vlastností siete a numerickej metódy, h je maximálna vzdialenosť susedných reprezentačných bodov a α je rád metódy. Potom sa rád metódy vypočíta vzťahom

$$(3.35) \quad \alpha = \log_{h_1/h_2} \left(\frac{E_{h_1}}{E_{h_2}} \right).$$

h_{max}	$\ e_{h_{max}}\ $	EOC
0.583761	0.00365633	
0.343303	0.00154455	1.6232
0.184575	0.000497954	1.82414
0.0954733	0.000141749	1.906
0.0485238	3.80067×10^{-5}	1.9449

Table 3.1: Rád konvergencie pre Dirichletove okrajové podmienky

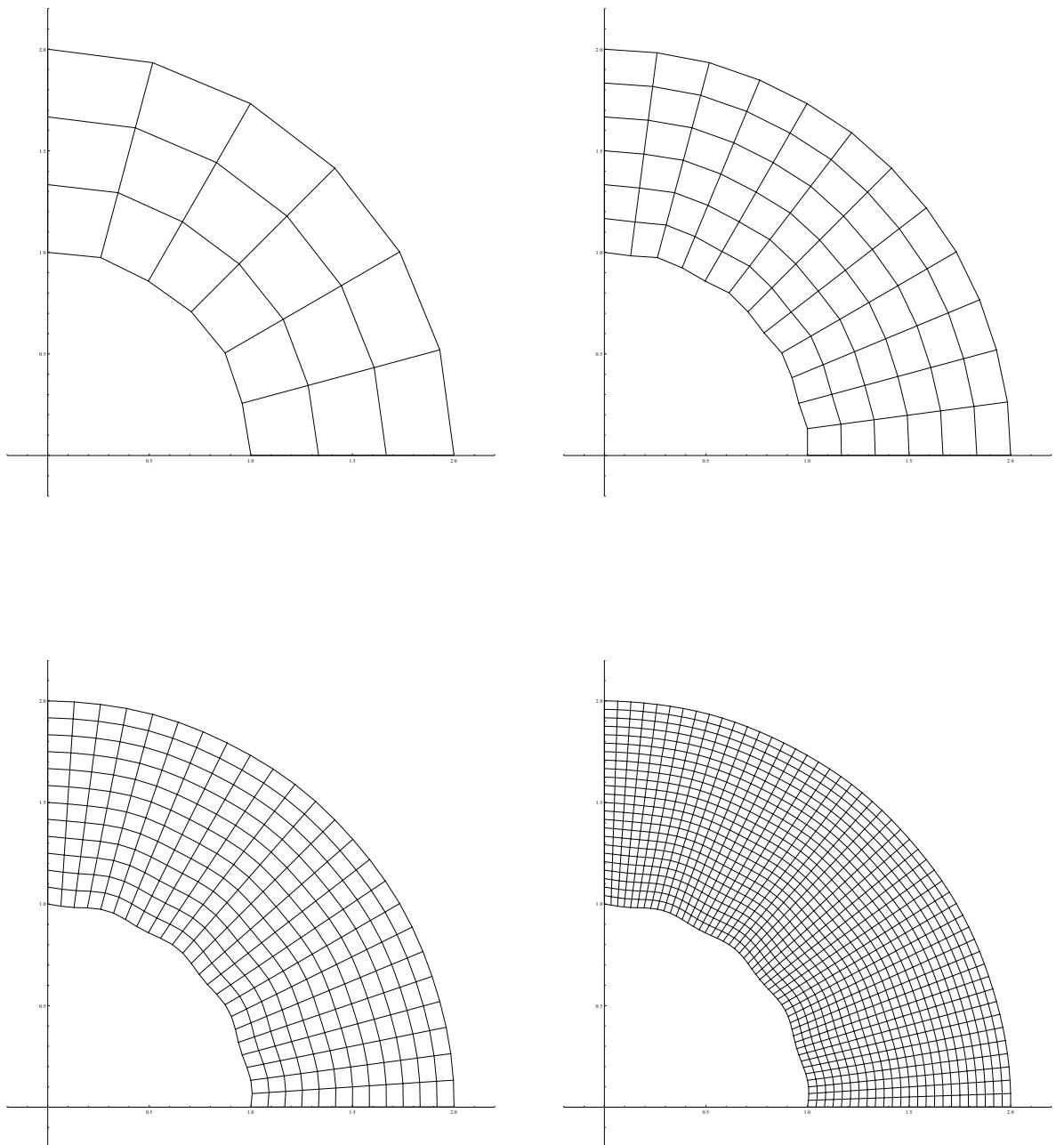
h_{max}	$\ e_{h_{max}}\ $	EOC
0.583761	0.00365633	
0.343303	0.00154455	1.6232
0.184575	0.000497954	1.82414
0.0954733	0.000141749	1.906
0.0485238	3.80067×10^{-5}	1.9449
0.024513	9.86559×10^{-6}	1.97511

Table 3.2: Rád konvergencie pre Neumannove okrajove podmienky v smere normály

Keby bola každá sieť vytváraná samostatne, ovplyvnilo by to hodnotu C , čo by sa prejavilo na ráde metódy počítaného vzťahom (3.35). Pre výpočet chyby sa použije numerická L_2 norma. Z tabuľky 3.1 vyplýva, že metóda je druhého rádu.

Pre overenie rádu konvergencie metódy riešenia Laplaceovej rovnice s Neumannovými okrajovými podmienkami v normálovom smere a v ľubovoľnom smere použijeme rovnaké presné riešenie na rovnakej sieti ako v predchádzajúcom prípade. Neumannova okrajová podmienka je na spodnej hranici oblasti. Šikmá derivácia je daná na spodnej hranici v normálovom smere otočenom o $\pi/8$ proti smeru hodinových ručičiek. Z tabuľky (3.2) vyplýva, že metóda s Neumannovými okrajovými podmiekami je druhého rádu a z tabuľky 3.3 vyplýva, že metóda s šikmou deriváciou je prvého rádu.

V poslednom experimente ukážeme, že metóda odvodená pre deriváciu v šikmom smere funguje, aj keď sa smery, v ktorých je zadaná derivácia, križujú. Vektor $v(x)$ je v



obr. 3.2: Rôzne husté siete použité pri výpočte rádu konvergencie

h_{max}	$\ e_{h_{max}}\ $	EOC
0.583761	0.0270094	
0.343303	0.0156229	1.03121
0.184575	0.00791816	1.09511
0.0954733	0.0038136	1.10827
0.0485238	0.00186823	1.05436
0.024513	0.000926264	1.02744

Tabuľka 3.3: Rád konvergencie pre deriváciu danú v normálom smere otočenom o $\pi/8$

h_{max}	$\ e_{h_{max}}\ $	EOC
0.583761	0.0268217	
0.343303	0.019441	0.60622
0.184575	0.00705683	1.63303
0.0954733	0.0036628	0.994777
0.0485238	0.00183307	1.02282
0.024513	0.000874991	1.08301

Tabuľka 3.4: Rád konvergencie pre deriváciu danú v normálom smere otočenom o funkciu sínusu

tomto prípade otočený o uhol, ktorý sa vypočíta ako $\sin(p*512)/3$, kde $p = \arcsin(x_1)$.

V tabuľke 3.4 vidno, že aj pre tento prípad metóda konverguje.

Kapitola 4

Tvorba siete v 3D

4.1 Vývoj plochy závislý od krivosti a vonkajšej sily

Uvažujeme, že máme výpočtovú oblasť, ktorej dolnou hranicou je časť topografie Zeme a horná hranica je časť gule v určitej výške H nad topografiou Zeme. Túto výpočtovú oblasť diskretizujeme a vytvoríme sieť skladajúcu sa z konvexných šeststenov.

Uvažujeme plochu S , ktorá reprezentuje časť topografie Zeme. Ďalej uvažujeme, že máme danú hornú hranicu oblasti, ktorou je časť gule. Sieť vytvoríme postupným vývojom plochy S podľa krivosti a konštantnej sily f , čím docielime, že výsledná plocha nadobudne približne tvar časti gule s polomerom $1/f$. Ako f zvolíme $1/R$, kde R je polomer Zeme. Takýto vývoj spôsobí, že plocha nadobudne približne tvar časti gule, ale jej polomer nebude H . Túto plochu budeme musieť ešte preškálovať, aby plocha v konečnom čase vývoja mala polomer H a plocha v čase 0 bola nezmenená. Body siete budú tvorené bodmi preškálovanej plochy v jednotlivých časových krokoch vývoja.

Všeobecná rovnica pre vývoj plochy podľa krivosti

$$(4.1) \quad \partial_t \mathbf{r} = \varepsilon k \mathbf{N} + f \mathbf{N}.$$

Neznáma \mathbf{r} je pozičný vektor vyvýhajúcej sa plochy S , ktorá je daná predpisom $S = \{r(u, v, t), u \in (0, 1), v \in (0, 1), t \in (0, t_{end})\}$, a \mathbf{N} je normála na ňu v bode \mathbf{r} . f je sila pôsobiaca v smere normály. $k \mathbf{N}$ vypočítame ako $2k \mathbf{N} = \Delta_s \mathbf{r}$. ε je parame-

ter určujúci, ako rýchlo sa plocha vyrovna. Δ_s je Laplace-Beltramiho operátor, čo je Laplaceov operátor na ploche. Rovnicu budeme riešiť metódou konečných objemov. Od okrajových bodov chceme, aby sa v konečnom čase t_{end} dostali do vzdialnosti R od stredu Zeme, teda máme okrajové podmienky $r(0, v, t) = r(0, v, 0) + \frac{r(0, v, 0)}{|r(0, v, 0)|}(R - |r(0, v, 0)|)\frac{t}{t_{end}}, v \in (0, 1)$, $r(1, v, t) = r(1, v, 0) + \frac{r(1, v, 0)}{|r(1, v, 0)|}(R - |r(1, v, 0)|)\frac{t}{t_{end}}, v \in (0, 1)$, $r(u, 0, t) = r(u, 0, 0) + \frac{r(u, 0, 0)}{|r(u, 0, 0)|}(R - |r(u, 0, 0)|)\frac{t}{t_{end}}, u \in (0, 1)$ a $r(u, 1, t) = r(u, 1, 0) + \frac{r(u, 1, 0)}{|r(u, 1, 0)|}(R - |r(u, 1, 0)|)\frac{t}{t_{end}}, u \in (0, 1)$ pre všetky t .

4.2 Odvodenie tangenciálnej rýchlosťi

Ako v prípade krivky v 2D, je aj pre plochu v 3D dôležité riadiť rozdelenie bodov. Aj tu sa nám môže stať, že sa plocha zauzlí, alebo na nej budú vznikať body singularity. Jedným zo spôsobov udržiavania rovnomerného rozdelenia je zachovávanie rovnako veľkých konečných objemov. V našom prípade je však dôležitejšie zachovať rovnomerné rozdelenie bodov na jednotlivých krivkách (rovnobežkách a poludníkoch). To docielime pridaním pohybu plochy v smere $\alpha^i T^i$ a $\alpha^j T^j$, kde T^i je tangenta k i -tej rovnobežke, prechádzajúcej bodom \mathbf{r}_{ij} a T^j je tangenta k j -temu poludníku prechádzajúcemu bodom \mathbf{r}_{ij} .

V ďalšom texte budeme počítať α^Γ vzhľadom na jednotlivé krivky, ktoré nám tvoria plochu, ako je to uvedené v práci [9, 10, 11], s rozdelením pohybu aj do tangenciálneho smeru. Výpočet bude rovnaký ako pre krivku v 2D, ale pre prípad krivky Γ v 3D, ktorej α^Γ chceme počítať, si pohyb v smere normály podľa krivosti a sily f rozdelíme do troch smerov. Do smeru \mathbf{N}_1^Γ , čo je smer normály k ploche premietnutý do normálovej plochy krivky. Do smeru \mathbf{N}_2^Γ , ktorý je kolmý na \mathbf{N}_1^Γ a leží v normálovej ploche krivky. A do smeru \mathbf{T}^Γ , čo je tangenta ku krivke. Teda krivka sa bude pohybovať podľa rovnice

$$(4.2) \quad \partial_t \mathbf{r} = U^\Gamma \mathbf{N}_1^\Gamma + V^\Gamma \mathbf{N}_2^\Gamma + \tilde{\alpha}^\Gamma \mathbf{T}^\Gamma + \alpha^\Gamma \mathbf{T}^\Gamma,$$

kde \mathbf{r} je pozičný vektor krivky Γ a nie plochy Ω . Ďalej α^Γ je rýchlosť pohybu v smere tangenty, ktorý nám bude zabezpečovať rovnomernú redistribúciu bodov na krivke a

U^Γ, V^Γ a $\tilde{\alpha}^\Gamma$ sa vypočíta ako

$$\begin{aligned} U^\Gamma &= (\varepsilon k \mathbf{N} + f \mathbf{N}) \cdot \mathbf{N}_1^\Gamma \\ V^\Gamma &= (\varepsilon k \mathbf{N} + f \mathbf{N}) \cdot \mathbf{N}_2^\Gamma \\ (4.3) \quad \tilde{\alpha}^\Gamma &= (\varepsilon k \mathbf{N} + f \mathbf{N}) \cdot \mathbf{T}^\Gamma \end{aligned}$$

Pre časový vývoj g^Γ , ktoré je určené ako $g^\Gamma = |\mathbf{r}_{u^\Gamma}| = \sqrt{(\frac{dr_1}{du^\Gamma})^2 + (\frac{dr_2}{du^\Gamma})^2 + (\frac{dr_3}{du^\Gamma})^2}$, môžme napísat

$$(4.4) \quad g_t^\Gamma = |\mathbf{r}_{u^\Gamma}|_t = \frac{\mathbf{r}_{u^\Gamma}}{|\mathbf{r}_{u^\Gamma}|} \cdot (\mathbf{r}_{u^\Gamma})_t,$$

kde u^Γ je parametrizácia na krivke Γ . Pre väčšiu prehľadnosť textu budeme d'alej parametrizáciu u^Γ označovať len ako u . Ďalej budeme Λ^Γ označovať súčet α^Γ a $\tilde{\alpha}^\Gamma$, t.j. $\Lambda^\Gamma = \alpha^\Gamma + \tilde{\alpha}^\Gamma$. Môžeme napísat

$$(4.5) \quad (\mathbf{r}_u)_t = (\mathbf{r}_t)_u = (U^\Gamma \mathbf{N}_1^\Gamma + V^\Gamma \mathbf{N}_2^\Gamma + \Lambda^\Gamma \mathbf{T}^\Gamma)_u = g^\Gamma (U^\Gamma \mathbf{N}_1^\Gamma + V^\Gamma \mathbf{N}_2^\Gamma + \Lambda^\Gamma \mathbf{T})_s$$

Z rovnice (2.8) a z rovnice (4.5) si môžme rovniciu (4.4) napísat' ako

$$(4.6) \quad g_t^\Gamma = g^\Gamma \mathbf{T}^\Gamma \cdot (U^\Gamma \mathbf{N}_1^\Gamma + V^\Gamma \mathbf{N}_2^\Gamma + \Lambda^\Gamma \mathbf{T})_s.$$

Kedže sú \mathbf{N}_1^Γ a \mathbf{T}^Γ navzájom kolmé, platí

$$(4.7) \quad 0 = (\mathbf{T}^\Gamma \cdot \mathbf{N}_1^\Gamma)_s = \mathbf{T}_s^\Gamma \cdot \mathbf{N}_1^\Gamma + \mathbf{T}^\Gamma \cdot (\mathbf{N}_1^\Gamma)_s.$$

Z čoho vyplýva, že

$$(4.8) \quad \mathbf{T}^\Gamma \cdot (\mathbf{N}_1^\Gamma)_s = -\mathbf{T}_s^\Gamma \cdot \mathbf{N}_1^\Gamma$$

Podľa Frenetovho vzorca platí

$$(4.9) \quad -\mathbf{T}_s^\Gamma \cdot \mathbf{N}_1^\Gamma = -\mathbf{N}_1^\Gamma \cdot (k_1^\Gamma \mathbf{N}_1^\Gamma + k_2^\Gamma \mathbf{N}_2^\Gamma) = -\mathbf{N}_1^\Gamma \cdot (k_1^\Gamma \mathbf{N}_1^\Gamma + k_2^\Gamma \mathbf{N}_2^\Gamma) = -k_1^\Gamma,$$

kde k_1^Γ je projekcia $k^\Gamma \mathbf{N}^\Gamma$ do \mathbf{N}_1^Γ a k_2^Γ je projekcia $k^\Gamma \mathbf{N}^\Gamma$ do \mathbf{N}_2^Γ . Analogicky platí

$$(4.10) \quad -\mathbf{T}_s^\Gamma \cdot \mathbf{N}_2^\Gamma = -k_2^\Gamma.$$

Vďaka tomu môžme rovnicu (4.6) prepísať na tvar

$$\begin{aligned}
g_t^\Gamma &= g^\Gamma \mathbf{T}^\Gamma \cdot (U_s^\Gamma \mathbf{N}_1^\Gamma + U^\Gamma(\mathbf{N}_1^\Gamma)_s + V_s^\Gamma \mathbf{N}_2^\Gamma + V^\Gamma(\mathbf{N}_2^\Gamma)_s + \Lambda_s^\Gamma \mathbf{T}^\Gamma + \Lambda^\Gamma(\mathbf{T}^\Gamma)_s) \\
&= g^\Gamma \mathbf{T}^\Gamma \cdot U_s^\Gamma \mathbf{N}_1^\Gamma + g^\Gamma \mathbf{T}^\Gamma \cdot U^\Gamma(\mathbf{N}_1^\Gamma)_s + g^\Gamma \mathbf{T}^\Gamma \cdot V^\Gamma(\mathbf{N}_2^\Gamma)_s \\
&\quad + g^\Gamma \mathbf{T}^\Gamma \cdot \Lambda_s^\Gamma \mathbf{T}^\Gamma + g^\Gamma \mathbf{T}^\Gamma \cdot \Lambda^\Gamma(\mathbf{T}^\Gamma)_s \\
&= g^\Gamma \mathbf{T}^\Gamma \cdot U^\Gamma(\mathbf{N}_1^\Gamma)_s + g^\Gamma \mathbf{T}^\Gamma \cdot V^\Gamma(\mathbf{N}_2^\Gamma)_s + g^\Gamma \Lambda_s^\Gamma \\
(4.11) \quad &= -g^\Gamma U^\Gamma k_1^\Gamma - g^\Gamma V^\Gamma k_2^\Gamma + g^\Gamma \Lambda_s^\Gamma
\end{aligned}$$

Zintegrovaním rovnice dostaneme

$$\begin{aligned}
\int_{S^1} g_t^\Gamma du &= \int_{S^1} -g^\Gamma (U^\Gamma k_1^\Gamma + V^\Gamma k_2^\Gamma) du + \int_{S^1} -g^\Gamma \Lambda_s^\Gamma du \\
(4.12) \quad \frac{1}{dt} \int_\Gamma ds &= \int_\Gamma -(U^\Gamma k_1^\Gamma + V^\Gamma k_2^\Gamma) ds + \Lambda^\Gamma(1) - \Lambda^\Gamma(0).
\end{aligned}$$

Ked'že krivka sa na svojich okrajoch nehýbe v smere tangenty, platí $\Lambda^\Gamma(0) = \Lambda^\Gamma(1) = 0$.

Z čoho vyplýva

$$(4.13) \quad L_t^\Gamma = \int_{S^1} -(U^\Gamma k_1^\Gamma + V^\Gamma k_2^\Gamma) du.$$

Označme

$$(4.14) \quad L^\Gamma = \int_0^1 g^\Gamma du.$$

Pre zmenu $\frac{g^\Gamma}{L^\Gamma}$ v čase platí

$$\begin{aligned}
\left(\frac{g^\Gamma}{L^\Gamma}\right)_t &= \frac{g_t^\Gamma L^\Gamma - g^\Gamma L_t^\Gamma}{L^{\Gamma 2}} \\
&= \frac{(-g^\Gamma U^\Gamma k_1^\Gamma - g^\Gamma V^\Gamma k_2^\Gamma + g^\Gamma \Lambda_s^\Gamma) L^\Gamma + g^\Gamma L^\Gamma \langle U^\Gamma k_1^\Gamma + V^\Gamma k_2^\Gamma \rangle_\Gamma}{L^{\Gamma 2}} \\
(4.15) \quad &= \frac{g^\Gamma}{L^\Gamma} (\Lambda_s^\Gamma - (U^\Gamma k_1^\Gamma + V^\Gamma k_2^\Gamma) + \langle U^\Gamma k_1^\Gamma + V^\Gamma k_2^\Gamma \rangle_\Gamma),
\end{aligned}$$

kde $\langle U^\Gamma k_1^\Gamma + V^\Gamma k_2^\Gamma \rangle_\Gamma = \frac{1}{L^\Gamma} \int_\Gamma -(U^\Gamma k_1^\Gamma + V^\Gamma k_2^\Gamma) ds$. Ked' bude $(\frac{g^\Gamma}{L^\Gamma})_t = 0$, tak sa s meniacim časom nebude meniť rozloženie bodov na krivke a bude $\Lambda_s^\Gamma = (U^\Gamma k_1^\Gamma + V^\Gamma k_2^\Gamma) + \langle U^\Gamma k_1^\Gamma + V^\Gamma k_2^\Gamma \rangle_\Gamma$.

Aj v 3D prípade si odvodíme tangenciálnu redistribúciu, ktorá pôjde k predpísanej hustote dĺžky krivky v^Γ . Zvolíme

$$(4.16) \quad \left(\frac{g^\Gamma}{L^\Gamma}\right)_t = \omega\left(\frac{v^\Gamma}{L^\Gamma} - \frac{g^\Gamma}{L^\Gamma}\right),$$

čo znamená, že g^Γ pôjde k v^Γ . Rovnicu (4.15) môžeme prepísať

$$(4.17) \quad \alpha_s^\Gamma = -\tilde{\alpha}_s^\Gamma - (U^\Gamma k_1^\Gamma + V^\Gamma k_2^\Gamma) + \langle U^\Gamma k_1^\Gamma + V^\Gamma k_2^\Gamma \rangle_\Gamma + \omega\left(\frac{v^\Gamma}{g^\Gamma} - 1\right).$$

Ked'že g^Γ bude konvergovať k v^Γ v nekonečne a pre všetky g^Γ platí rovnica (4.14), musíme zvoliť v^Γ , pre ktoré platí

$$(4.18) \quad \int_0^1 v^\Gamma du = L^\Gamma,$$

Označme v'^Γ funkciu relatívnej hustoty dĺžky, ktorá nespĺňa vzťah (4.18) a označme

$$(4.19) \quad L_2 = \int_0^1 v'^\Gamma du,$$

potom môžeme funkciu relatívnej hustoty v'^Γ upraviť na funkciu hustoty dĺžky, aby splíňala vzťah (4.18) transformáciou

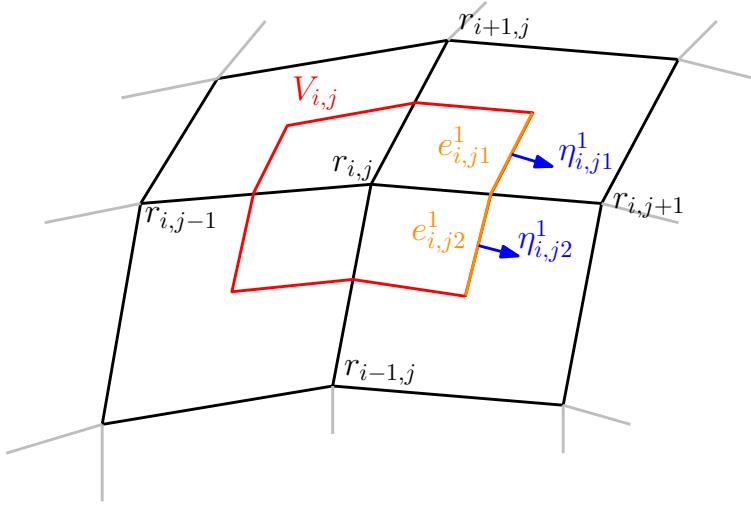
$$v = \frac{v'^\Gamma}{L_2^\Gamma} L^\Gamma$$

$$(4.20) \quad \alpha_s^\Gamma = -\tilde{\alpha}_s^\Gamma - (U^\Gamma k_1^\Gamma + V^\Gamma k_2^\Gamma) + \langle U^\Gamma k_1^\Gamma + V^\Gamma k_2^\Gamma \rangle_\Gamma + \omega\left(\frac{\frac{v'^\Gamma}{L_2^\Gamma} L^\Gamma}{g^\Gamma} - 1\right).$$

Pridaním pohybu v smere tangenty kriviek, prechádzajúcich bodmi, bude mať výsledná rovnica pre pohyb plochy S tvar

$$(4.21) \quad \partial_t \mathbf{r} = \varepsilon k \mathbf{N} + f \mathbf{N} + \langle \alpha^\Gamma \mathbf{T}^\Gamma \rangle,$$

kde $\langle \alpha^\Gamma \mathbf{T}^\Gamma \rangle$ je priemer všetkých $\alpha^\Gamma \mathbf{T}^\Gamma$. V spojitom modeli dávajú rovnice (4.21) a (4.1) rovnaký obraz vyvíjajúcej plochy.



Obr. 4.1: Konečný objem

4.3 Numerická approximácia

Plocha sa bude skladať z n_i rovnobežiek a n_j poludníkov. Bod, kde sa pretína i -ta rovnobežka a j -ty poludník, bude bod \mathbf{r}_{ij} . Plochu si rozdelíme na konečný počet konečných objemov. Objem V_{ij} bude patriť bodu \mathbf{r}_{ij} . Označme si \mathbf{r}_{ij}^q susedné body k \mathbf{r}_{ij} . Konečný objem V_{ij} je priestorový plošný útvar s vrcholmi v ťažiskách úsečiek $\mathbf{r}_{ij}\mathbf{r}_{ij}^q$ a v ťažiskach štvorstenov prislúchajúcich k tomu istému bodu. e_{ij}^q označíme časť hranice konečného objemu V_{ij} medzi bodom \mathbf{r}_{ij} a bodom \mathbf{r}_{ij}^q . $\vec{\eta}_{ij}^q$ si označíme vonkajšiu normálku k časti hranice e_{ij}^q . Pre lepšie pochopenie vid' obr. (4.3).

Zintegrovaním rovnice 4.21 na konečnom objeme V_{ij} dostaneme slabú formuláciu.

$$(4.22) \quad \int_{V_{ij}} \partial_t \mathbf{r} dx = 2 \int_{V_{ij}} \Delta_s \mathbf{r} dx + \int_{V_{ij}} f \mathbf{N} dx + \int_{V_{ij}} \langle \alpha^\Gamma \mathbf{T}^\Gamma \rangle dx.$$

Vďaka Greenovej vete môžme rovnicu prepísat na tvar

$$(4.23) \quad \int_{V_i} \partial_t \mathbf{r} dx = 2 \int_{\partial V_i} \nabla_s \mathbf{r} \cdot \vec{\eta}_{ij} ds + \int_{V_{ij}} f \mathbf{N} dx + \int_{V_{ij}} \langle \alpha^\Gamma \mathbf{T}^\Gamma \rangle dx,$$

kde $\vec{\eta}_{ij}$ je vonkajšia normálka k hranici konečného objemu V_{ij} . Z tvaru konečného objemu V_{ij} vyplýva, že prvý člen pravej strany rovnice (4.23) môžeme prepísat na

$$(4.24) \quad \int_{\partial V_i} \nabla_s \mathbf{r} \cdot \vec{\eta}_{ij} ds = \int_{\partial V_{ij}} \sum_{q=1}^{Q_{ij}} \nabla_s \mathbf{r} \cdot \vec{\eta}_{ij}^q ds = \sum_{q=1}^{Q_{ij}} \int_{\partial V_{ij}} \nabla_s \mathbf{r} \cdot \vec{\eta}_{ij}^q ds,$$

kde Q_{ij} je počet susedných bodov k \mathbf{r}_{ij} . Rovnicu si ďalej možeme prepísať na

$$(4.25) \quad \sum_{q=1}^{Q_{ij}} \int_{\partial V_{ij}} \nabla_s \mathbf{r} \cdot \bar{\eta}_{ij}^q ds = \sum_{q=1}^{Q_{ij}} \int_{\partial V_{ij}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \bar{\eta}_{ij}^q} ds.$$

Na hranici ∂V_{ij}^q budeme predpokladať konštantnú parciálnu deriváciu \mathbf{r}_{ij} podľa normály η_{ij}^q . Hranica je medzi bodom \mathbf{r}_{ij} a jeho susedom v strede zalomená, preto budú na hranici dve rôzne hodnoty derivácie v smere normály. Vypočítame ich ako

$$(4.26) \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \bar{\eta}_{ij*}^q} = \frac{1}{\beta_{ij*}^q} \frac{\mathbf{r}_{ij}^q - \mathbf{r}_{ij}}{h_{ij}^q} - \frac{\alpha_{ij*}^q}{\beta_{ij*}^q} \frac{\mathbf{r}_{ij*}^{q2} - \mathbf{r}_{ij*}^{q1}}{m(e_{ij*}^q)},$$

kde $*$ je 1 alebo 2 podľa toho, o ktorú časť hranice e_{ij}^q ide. h_{ij}^q je vzdialenosť medzi bodom \mathbf{r}_{ij} a jeho q -tym susedom. β_{ij*}^q sa vypočíta ako normála k hranici e_{ij*}^q premietnutá do jednotkového vektora spájajúceho \mathbf{r}_{ij} a \mathbf{r}_{ij}^q , a α_{ij*}^q je tangenta premietnutá do toho istého vektora. Normála sa vypočíta ako vektor kolmý na tangentu a ležiaci v rovine, v ktorej ležia body \mathbf{r}_{ij} , \mathbf{r}_{ij*}^{q2} z \mathbf{r}_{ij*}^{q1} . To nám dovolí prepísať rovnicu (4.25) na tvar

$$(4.27) \quad \sum_{q=1}^{Q_{ij}} \int_{\partial V_{ij}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \bar{\eta}_{ij}^q} ds = \sum_{q=1}^{Q_{ij}} \left(\frac{m(e_{ij1}^q)}{\beta_{ij1}^q} \frac{\mathbf{r}_{ij}^q - \mathbf{r}_{ij}}{h_{ij}^q} - \frac{\alpha_{ij1}^q}{\beta_{ij1}^q} (\mathbf{r}_{ij1}^{q2} - \mathbf{r}_{ij1}^{q1}) + \frac{m(e_{ij2}^q)}{\beta_{ij2}^q} \frac{\mathbf{r}_{ij}^q - \mathbf{r}_{ij}}{h_{ij}^q} - \frac{\alpha_{ij2}^q}{\beta_{ij2}^q} (\mathbf{r}_{ij2}^{q2} - \mathbf{r}_{ij2}^{q1}) \right),$$

kde $m(e_{ij*}^q)$ je miera hrany e_{ij*}^q , teda jej dĺžka. A keďže \mathbf{r}_{ij*}^{q2} je vrchol konečného objemu, ktorý sa vypočíta ako priemer štyroch susedov a \mathbf{r}_{ij*}^{q1} je vrchol, ktorý sa vypočíta ako priemer dvoch susedov, možno rovnicu prepísať do tvaru

$$(4.28) \quad \begin{aligned} \sum_{q=1}^{Q_{ij}} \int_{\partial V_{ij}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \bar{\eta}_{ij}^q} ds &= \sum_{q=1}^{Q_{ij}} \left(\frac{m(e_{ij1}^q)}{\beta_{ij1}^q} \frac{\mathbf{r}_{ij}^q - \mathbf{r}_{ij}}{h_{ij}^q} - \frac{\alpha_{ij1}^q}{\beta_{ij1}^q} \left(\frac{1}{4} \mathbf{r}_{ij11}^{q2} + \frac{1}{4} \mathbf{r}_{ij12}^{q2} + \frac{1}{4} \mathbf{r}_{ij13}^{q2} + \frac{1}{4} \mathbf{r}_{ij14}^{q2} - \frac{1}{2} \mathbf{r}_{ij11}^{q1} - \frac{1}{2} \mathbf{r}_{ij12}^{q1} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{m(e_{ij2}^q)}{\beta_{ij2}^q} \frac{\mathbf{r}_{ij}^q - \mathbf{r}_{ij}}{h_{ij}^q} - \frac{\alpha_{ij2}^q}{\beta_{ij2}^q} \left(\frac{1}{4} \mathbf{r}_{ij21}^{q2} + \frac{1}{4} \mathbf{r}_{ij22}^{q2} + \frac{1}{4} \mathbf{r}_{ij23}^{q2} + \frac{1}{4} \mathbf{r}_{ij24}^{q2} - \frac{1}{2} \mathbf{r}_{ij21}^{q1} - \frac{1}{2} \mathbf{r}_{ij22}^{q1} \right) \right) \end{aligned}$$

Na celom objeme V_{ij} budeme predpokladať konštantnú hodnotu $f \mathbf{N}_{ij}$. Vďaka tomu môžeme prepísať druhý člen pravej strany na tvar

$$(4.29) \quad \int_{V_{ij}} f \mathbf{N} dx = m(V_{ij}) f \mathbf{N}_{ij},$$

kde $m(V_{ij})$ je miera objemu V_{ij} . Aj α^Γ a \mathbf{T}^Γ predpokladáme na celom objeme V_{ij} konštantné, čo nám dovoľuje prepísať

$$(4.30) \quad \int_{V_{ij}} \langle \alpha^\Gamma \mathbf{T}^\Gamma \rangle dx = m(V_{ij}) \langle \alpha^\Gamma \mathbf{T}^\Gamma \rangle = \frac{m(V_{ij})}{|M|} \sum_{\Gamma \in M} \alpha_{ij}^\Gamma \frac{\mathbf{r}_{ij}^{\Gamma E} - \mathbf{r}_{ij}^{\Gamma W}}{h_{ij+1} + h_{ij}},$$

kde $\mathbf{r}_{ij}^{\Gamma W}$ je predchádzajúci bod na krivke Γ a $\mathbf{r}_{ij}^{\Gamma E}$ je nasledujúci bod. Potom M si označíme ako množinu všetkých kriviek prechádzajúcich bodom \mathbf{r}_{ij} a $|M|$ je počet kriviek prechádzajúcich bodom. Ďalej $\partial \mathbf{r}_{ij}$ approximujeme spätnou diferenciou a budeme predpokladať konštantnú hodnotu \mathbf{r}_{ij} na konečnom objeme V_{ij} , vďaka čomu môžeme ľavú stranu rovnice prepísať na tvar

$$(4.31) \quad \int_{V_{ij}} \partial_t \mathbf{r} dx = m(V_{ij}) \left(\frac{\mathbf{r}_{ij}^{m+1} - \mathbf{r}_{ij}^m}{\Delta t} \right).$$

Využitím rovníc (4.27), (4.29), (4.30) a (4.31), pričom výpočty (4.27) a (4.29) budú v čase $m+1$, dostaneme

$$(4.32) \quad m(V_{ij}) \left(\frac{\mathbf{r}_{ij}^{m+1} - \mathbf{r}_{ij}^m}{\Delta t} \right) = 2 \sum_{q=1}^{Q_{ij}} \left(\frac{m(e_{ij1}^q)}{\beta_{ij1}^q} \frac{\mathbf{r}_{ij}^q - \mathbf{r}_{ij}}{h_{ij}^q} \right. \\ \left. - \frac{\alpha_{ij1}^q}{\beta_{ij1}^q} \left(\frac{1}{4} \mathbf{r}_{ij11}^{q2} + \frac{1}{4} \mathbf{r}_{ij12}^{q2} + \frac{1}{4} \mathbf{r}_{ij13}^{q2} + \frac{1}{4} \mathbf{r}_{ij14}^{q2} - \frac{1}{2} \mathbf{r}_{ij11}^{q1} - \frac{1}{2} \mathbf{r}_{ij12}^{q1} \right) \right. \\ \left. + \frac{m(e_{ij*}^q)}{\beta_{ij*}^q} \frac{\mathbf{r}_{ij}^q - \mathbf{r}_{ij}}{h_{ij}^q} \right)$$

$$(4.33) \quad - \frac{\alpha_{ij*}^q}{\beta_{ij*}^q} \left(\frac{1}{4} \mathbf{r}_{ij21}^{q2} + \frac{1}{4} \mathbf{r}_{ij22}^{q2} + \frac{1}{4} \mathbf{r}_{ij23}^{q2} + \frac{1}{4} \mathbf{r}_{ij24}^{q2} - \frac{1}{2} \mathbf{r}_{ij21}^{q1} - \frac{1}{2} \mathbf{r}_{ij22}^{q1} \right)$$

$$(4.34) \quad + m(V_{ij}) f \mathbf{N}_{ij} + \frac{m(V_{ij})}{|M|} \sum_{\Gamma \in M} \alpha_{ij}^\Gamma \frac{\mathbf{r}_{ij}^{\Gamma E m+1} - \mathbf{r}_{ij}^{\Gamma W m+1}}{h_{ij+1} + h_{ij}}.$$

Prepisáním rovnice dostaneme systém $n_i \times n_j$ rovníc s $n_i \times n_j$ neznámymi \mathbf{r}_{ij} , $i = 1, \dots, n_i$, $j = 1, \dots, n_j$.

Zo vzťahu (4.20) approximáciou α_s^Γ a $\tilde{\alpha}_s^\Gamma$ dostaneme

$$(4.35) \quad \frac{\alpha_{ij}^\Gamma - \alpha_{ij-1}^\Gamma}{h_{ij}} = - \frac{\tilde{\alpha}_{ij}^\Gamma - \tilde{\alpha}_{ij-1}^\Gamma}{h_{ij}} + (U_{ij-1/2}^\Gamma k_{1ij-1/2}^\Gamma \\ + V_{ij-1/2}^\Gamma k_{2ij-1/2}^\Gamma) - \langle U^\Gamma k_1^\Gamma + V^\Gamma k_1^\Gamma \rangle_\Gamma + \omega \left(\frac{\frac{v' \Gamma}{L_2^\Gamma} L^\Gamma}{g^\Gamma} - 1 \right),$$

kde α_{ij-1} a $\tilde{\alpha}_{ij-1}$ sú hodnoty pre predchádzajúci bod krivky Γ a h_{ij} je vzdialosť medzi bodom \mathbf{r}_{ij} a predchádzajúcim bodom krivky. Vo vzťahu (4.35)

$$(4.36) \quad \langle U^\Gamma k_1^\Gamma + V^\Gamma k_1^\Gamma \rangle_\Gamma = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^{n_i} h_{il} (U_{il-1/2}^\Gamma k_{1il-1/2}^\Gamma + V_{il-1/2}^\Gamma k_{1il-1/2}^\Gamma),$$

$$(4.37) \quad L^\Gamma = \sum_{l=1}^{n_i} h_{il}.$$

Zo vzťahov (4.35), (4.36) a (4.37) dostaneme

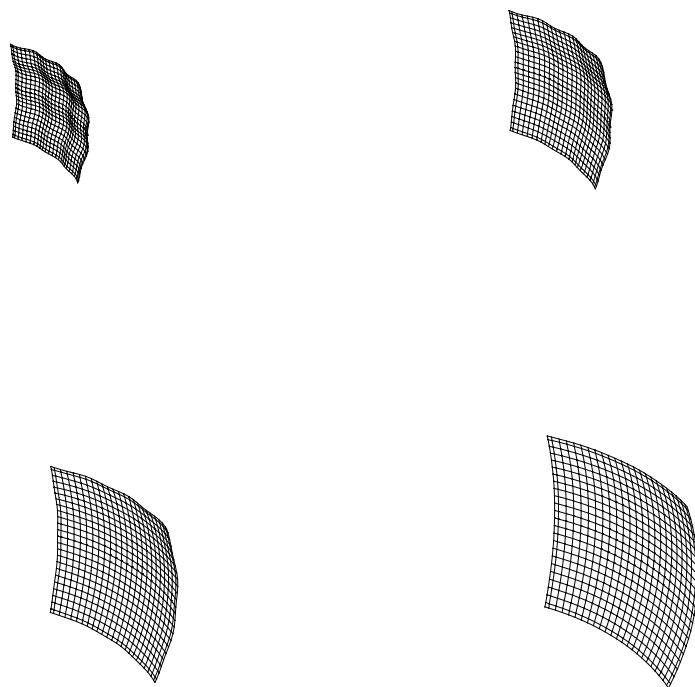
$$(4.38) \quad \begin{aligned} \alpha_{ij}^\Gamma &= \alpha_{ij-1}^\Gamma - \tilde{\alpha}_{ij-1}^\Gamma - h_{ij} (U_{ij-1/2}^\Gamma k_{1ij-1/2}^\Gamma + V_{ij-1/2}^\Gamma k_{2ij-1/2}^\Gamma) \\ &+ h_{ij} \sum_{l=1}^{n_i} h_{il} (U_{il-1/2}^\Gamma k_{1il-1/2}^\Gamma + V_{il-1/2}^\Gamma k_{1il-1/2}^\Gamma) + \omega \left(\frac{(v')_{ij}^m \sum_{l=1}^{n_i} h_{il}}{\sum_{j=1}^n (v')_{il}^m} - h_{ij} \right), \end{aligned}$$

Výsledný systém (4.31) riešime pomocou LU rozkladu.

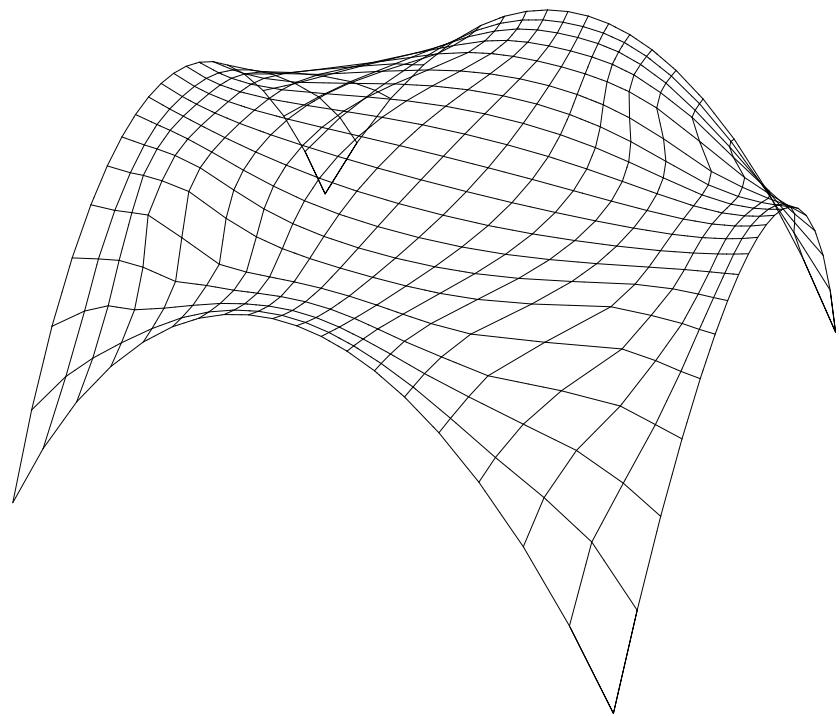
4.4 Numerické experimenty

Na obrázku 4.2 je vyvýhajúca sa perturbovaná guľa s polovičnými okrajovými konečnými objemami v rôznych časových intervaloch. Body výslednej siete budú tvoriť body plochy vo všetkých časových intervaloch.

Na obrázku 4.3 je vidieť plochu, v konečnom čase, vyvýhajúcu sa podľa krivosti a redistribuovanú podľa krivosti na jednotlivých krivkách. Okrajové krivky začiatočnej plochy boli paraboly a body v strede ležali v jednej rovine $z=0$.



Obr. 4.2: Pertrubovaná guľa vyvýjajúca sa podľa krivosti s polovičnými okrajovými objemami



Obr. 4.3: Plocha s redistribuovanými bodmi podľa krivosti na jednotlivých krivkách

Kapitola 5

Diskretizácia okrajových úloh v 3D

5.1 Riešenie Laplaceovej rovnice s Dirichletovými okrajovými podmienkami

Uvažujeme Laplaceovu rovnicu na trojrozmernej oblasti Ω s Dirichletovými okrajovými podmienkami.

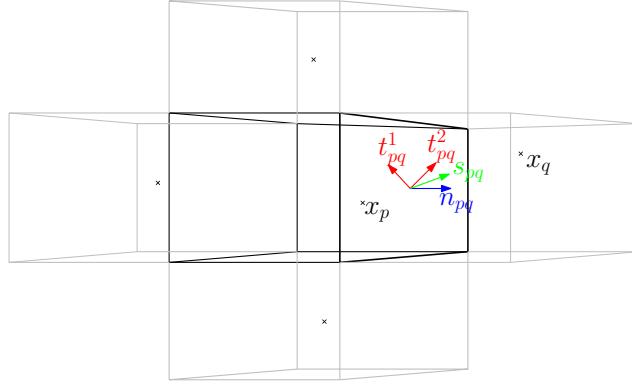
$$(5.1) \quad \Delta T = 0,$$

$$(5.2) \quad T(x) = T_{Dir}, \quad x \in \partial\Omega.$$

Pri trojrozmernej úlohe budeme postupovať podobne ako pri dvojrozmernej. Oblast Ω rozdelíme na konečný počet nepravidelných šeststenov (konečných objemov) tak, aby každý konečný objem, ktorý nie je na hranici, mal šiestich susedov, s ktorými má spoločnú stenu. Množinu týchto susedov nazveme $N(p)$. Každý objem bude mať aj dvanásť susedov, s ktorými má spoločnú hranu a osem susedov, s ktorými má spoločný vrchol. Pre okrajové konečné objemy bude hodnota predpísaná Dirichletovou okrajovou podmienkou. Označme množinu konečných objemov, v ktorých je hodnota T neznáma, ako P .

Zintegrovaním rovnice (5.1) na konečnom objeme $p \in P$ dostaneme

$$(5.3) \quad \int_p \Delta T dx = 0.$$



Obr. 5.1: Konečný objem

Použitím Greenovej vety dostaneme

$$(5.4) \quad \int_{\partial p} \nabla T \cdot \mathbf{n} d\tau = 0.$$

Ked' budeme uvažovať, že konečný objem p má susedné objemy $q \in N(p)$, pričom e_{pq} je hranica medzi objemami p a q , môžeme rovnicu (5.4) prepísať na tvar

$$(5.5) \quad \sum_{q \in N(p)} \int_{e_{pq}} \nabla T \cdot \mathbf{n} d\tau = 0.$$

Oblast Ω zdiskretizujeme tak, že každému konečnému objemu $p \in P$ priradíme reprezentačný bod $x_p = (x_{1p}, x_{2p}, x_{3p})$ ako ťažisko konečného objemu p . V bode x_p budeme uvažovať neznámu hodnotu T_p . Okrajovým konečným objemom priradíme reprezentačný bod do stredu hranice konečného objemu, ktorá leží na hranici oblasti Ω .

Jednotkový vektor \mathbf{s}_{pq} smerujúci do susedného bodu x_q z bodu x_p je daný vzťahom

$$(5.6) \quad \mathbf{s}_{pq} = \frac{x_q - x_p}{|x_q - x_p|}.$$

Ked'že hranice konečného objemu sú v tomto prípade plochy, tak bude mať hrana dve tangenty. Tangenta \mathbf{t}_{pq}^1 k hranici medzi objemami p a q je daná vzťahom

$$(5.7) \quad \mathbf{t}_{pq}^1 = \frac{x_{pq}^2 - x_{pq}^1}{|x_{pq}^2 - x_{pq}^1|},$$

kde x_{pq}^1 a x_{pq}^2 sú súradnice vrcholov hranice e_{pq} , ktorých spojnica tvorí diagonálu. Tangenta \mathbf{t}_{pq}^2 sa vypočíta rovnako pomocou ostatných dvoch vrcholov hranice e_{pq}

$$(5.8) \quad \mathbf{t}_{pq}^2 = \frac{x_{pq}^4 - x_{pq}^3}{|x_{pq}^4 - x_{pq}^3|},$$

Pre normálu k hranici objemu platí

$$(5.9) \quad \mathbf{n}_{pq} = \mathbf{t}_{pq}^1 \times \mathbf{t}_{pq}^2,$$

pričom normála sa skonštruuje tak, aby išlo o vonkajšiu normálu k objemu p .

Ked'že vektor \mathbf{s}_{pq} môžeme rozložiť do troch vektorov \mathbf{n}_{pq} , \mathbf{t}_{pq}^1 a \mathbf{t}_{pq}^2 [7], platí

$$(5.10) \quad \nabla T \cdot \mathbf{s}_{pq} = \nabla T \cdot (\beta_{pq} \mathbf{n}_{pq} + \alpha_{pq}^1 \mathbf{t}_{pq}^1 + \alpha_{pq}^2 \mathbf{t}_{pq}^2) = \beta_{pq} \nabla T \cdot \mathbf{n}_{pq} + \alpha_{pq}^1 \nabla T \cdot \mathbf{t}_{pq}^1 + \alpha_{pq}^2 \nabla T \cdot \mathbf{t}_{pq}^2,$$

kde hodnoty β_{pq}^1 , α_{pq}^1 a α_{pq}^2 sa dajú vypočítať riešením sústavy rovníc

$$(5.11) \quad \mathbf{s}_{pq} = \beta_{pq} \mathbf{n}_{pq} + \alpha_{pq}^1 \mathbf{t}_{pq}^1 + \alpha_{pq}^2 \mathbf{t}_{pq}^2.$$

Ked'že v rovnici vystupujú vektory, ide o tri rovnice s troma neznámymi.

Z toho vyplýva, že pre deriváciu v smere normály platí

$$(5.12) \quad \nabla T \cdot \mathbf{n}_{pq} = \frac{1}{\beta_{pq}} (\nabla T \cdot \mathbf{s}_{pq} - \alpha_{pq}^1 \nabla T \cdot \mathbf{t}_{pq}^1 - \alpha_{pq}^2 \nabla T \cdot \mathbf{t}_{pq}^2).$$

Rovnicu (5.12) aproximujeme vzťahom

$$(5.13) \quad \frac{1}{\beta_{pq}} (\nabla T \cdot \mathbf{s}_{pq} - \alpha_{pq}^1 \nabla T \cdot \mathbf{t}_{pq}^1 - \alpha_{pq}^2 \nabla T \cdot \mathbf{t}_{pq}^2) \approx \frac{1}{\beta_{pq}} \frac{T_q - T_p}{d_{pq}} - \frac{\alpha_{pq}^1}{\beta_{pq}} \frac{T_{pq}^2 - T_{pq}^1}{m(T_{pq}^2 - T_{pq}^1)} - \frac{\alpha_{pq}^2}{\beta_{pq}} \frac{T_{pq}^4 - T_{pq}^3}{m(T_{pq}^4 - T_{pq}^3)},$$

kde T_{pq}^1 , T_{pq}^2 , T_{pq}^3 , T_{pq}^4 sú hodnoty v bodoch x_{pq}^1 , x_{pq}^2 , x_{pq}^3 , x_{pq}^4 a d_{pq} je vzdialenosť medzi bodmi x_q a x_p .

Využitím rovnice (5.13) môžeme rovnicu (5.5) prepísat na tvar

$$(5.14) \quad \sum_{q \in N(p)} \left(m(e_{pq}) \left(\frac{1}{\beta_{pq}} \frac{T_q - T_p}{d_{pq}} - \frac{\alpha_{pq}^1}{\beta_{pq}} \frac{T_{pq}^2 - T_{pq}^1}{m(T_{pq}^2 - T_{pq}^1)} - \frac{\alpha_{pq}^2}{\beta_{pq}} \frac{T_{pq}^4 - T_{pq}^3}{m(T_{pq}^4 - T_{pq}^3)} \right) \right) = 0,$$

kde T_p je neznáma hodnota v konečnom objeme p a $m(e_{pq})$ je veľkosť hranice e_{pq} . V prípade vnútorných konečných objemov je T_{pq} neznáma hodnota v susedných konečných objemoch. V prípade konečných objemov, ktoré susedia s objemami na hranici výpočtovej

oblasti Ω , je hodnota T_{pq} na hraničnom objeme daná Dirichletovou okrajovou podmienkou (5.2).

Hodnoty T_{pq}^1 , T_{pq}^2 , T_{pq}^3 a T_{pq}^4 vyjadrime pomocou trilineárnej interpolácie.

$$(5.15) \quad T_{pq}^l = T(x_{pq}^l) = a + bx_{1pq}^l + cx_{2pq}^l + dx_{3pq}^l + ex_{1pq}^l x_{2pq}^l + fx_{1pq}^l x_{3pq}^l + gx_{2pq}^l x_{3pq}^l + hx_{1pq}^l x_{2pq}^l x_{3pq}^l, l = 1, 2.$$

Koeficienty a, b, c, d, e, f, g, h sa dajú vyjadriť pomocou neznámych hodnôt v konečných objemoch, na ktorých hranici leží bod T_{pq}^l

$$(5.16) \quad T_{pq}^l = T(x_{pq}^l) = k_{pq1}^l T_{pq1}^l + k_{pq2}^l T_{pq2}^l + k_{pq3}^l T_{pq3}^l + k_{pq4}^l T_{pq4}^l + k_{pq5}^l T_{pq5}^l + k_{pq6}^l T_{pq6}^l + k_{pq7}^l T_{pq7}^l + k_{pq8}^l T_{pq8}^l,$$

kde koeficienty k sa dajú vypočítať riešením sústavy 8 rovníc (5.15), kde súradnice sú súradnice neznámych T_{pq*}^l a hodnota T je 1 pre neznámu, pred ktorou sa nachádza koeficient k a 0 pre ostatné neznáme.

Rovnicu (5.14) môžeme pomocou (5.16) prepísat do tvaru, kde T_{pq}^1 , T_{pq}^2 , T_{pq}^3 a T_{pq}^4 sa vyjadria pomocou vzťahu (5.16).

Rovnica (5.14) platí pre každý konečný objem $p \in P$ s neznáomou hodnotou T_p . Z toho vyplýva, že máme toľko rovníc, kolko máme neznámych. Z týchto rovníc vytvoríme sústavu, ktorú následne riešime.

5.2 Riešenie Laplaceovej rovnice s Neumannovými okrajovými podmienkami v normálovom smere

Uvažujeme Laplaceovu rovnicu na oblasti Ω s Neumannovými okrajovými podmienkami danými na časti hranice Γ a Dirichletovými okrajovými podmienkami danými na zvyšku hranice $\partial\Omega - \Gamma$. T.j. máme danú rovnicu (5.1) a okrajové podmienky

$$(5.17) \quad \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}}(x) = g(x), x \in \Gamma.$$

$$(5.18) \quad T(x) = T_{Dir}(x), x \in \partial\Omega - \Gamma$$

Postup bude skoro rovnaký ako v prípade dvojrozmerného riešenia. Oblast Ω rozdelíme na konečný počet šeststenov (konečných objemov), viď predchádzajúcu kapitolu. Pre konečné objemy, ktorých časť hranice leží na $\partial\Omega - \Gamma$, je daná hodnota T pomocou Dirichletových okrajových podmienok. Označme množinu konečných objemov s neznámou hodnotou T ako P .

Pre konečne objemy P budeme pokračovať ako v predchádzajúcej kapitole, až po rovnicu (5.14). Tu si však treba uvedomiť rozdiel, že v prípade okrajových konečných objemov, na ktorých nie je predpísaná Dirichletova okrajová podmienka sa bod $x_p = (x_{1p}, x_{2p}, x_{3p})$ vypočíta ako ťažisko konečného objemu p a nie ako stred hranice.

V rovnici (5.14) pre objemy p , nachádzajúce sa na okraji oblasti Ω , vystupujú neznáme susedné hodnoty T_q , ktoré nie sú definované. Tohto problému sa zbavíme pridaním nových neznámych v smere normály \mathbf{n}_{pq} vo vzdialosti od hranice e_{pq} , ktorá je rovná vzdialosti e_{pq} od x_p . Teda bod x_q , v ktorom uvažujeme novú neznámu T_q sa vypočíta ako

$$(5.19) \quad x_q = x_p + 2|x_p, e_{pq}| \mathbf{n}_{pq},$$

kde $|x_p, e_{pq}|$ je vzdialosť x_p od e_{pq} . Označme množinu všetkých novo pridaných neznámych a ich súradníc ako N . Tým sme každému hraničnému objemu z množiny P pridali susednú neznámu, s ktorou susedí s hranicou. Vždy, keď sme pridali suseda T_q cez hranu e_{pq} , pridali sme suseda aj ďalším konečným objemom, ktoré majú vrchol vo vrchole e_{pq} .

Objemy p , nachádzajúce sa na okraji oblasti Ω , so susedným objemom s predpísanou Dirichletovou okrajovou podmienkou majú stále jedného alebo aj viacerých neexistujúcich susedov, susediacich cez vrchol. Tohto suseda pridáme do najbližšieho bodu k vrcholu, cez ktorý má susediť, kde je predpísaná Dirichletova okrajová podmienka. Bude to sused s predpísanou Dirichletovou okrajovou podmienkou.

Pridaním $|N|$ neznámych sme spôsobili, že máme viac neznámych ako rovníc. Tento problém nám pomôže vyriešiť rovnica (5.17). Pre každú novo pridanú neznámu T_p ,

pridáme rovnicu

$$(5.20) \quad \frac{T_p - T_q}{d_{pq}} = g\left(\frac{x_p + x_q}{2}\right), p \in N$$

Vďaka pridaniu týchto rovníc je počet neznámych a počet rovníc rovnaký, čo nám dovoľuje vyriešiť túto sústavu rovníc.

5.3 Riešenie Laplaceovej rovnice s predpísanou deriváciou v šikmom smere

Uvažujeme Laplaceovu rovnicu (5.1) na oblasti Ω s danou kladnou deriváciou v ľubovoľnom smere v , smerujúcim von s oblasti Ω , na časti hranici Γ a Dirichletovými okrajovými podmienkami (5.18) na zvyšku hranice, t.j.

$$(5.21) \quad v \cdot \nabla T = g(x), x \in \Gamma$$

Pri delení oblasti na podmnožiny budeme postupovať ako v predchádzajúcej kapitole, až kým nedôjdeme do časti, kde pridávame neznáme. V tejto časti okrem toho, že pridáme neznáme hodnoty, pridáme k nim celé konečné objemy. Pridané konečné objemy budú štvorsteny s jednou stenou spájajúcou nový konečný objem s konečným objemom p . Ďalšie štyri steny, budú predĺžením stien konečného objemu p , ktoré majú spoločnú hranu s novo pridanou stenou a budú rovnako dlhé ako steny, ktorých predĺžením sú. Posledná stena je už jednoznačne určená predchádzajúcimi hranami. Množinu novo pridaných konečných objemov označíme N .

Rovnicu (5.21) budeme chápať ako rovnicu advekcie, pozri tiež [6], a zintegrujeme ju na konečnom objeme $p \in N$

$$(5.22) \quad \int_p v \cdot \nabla T dx = \int_p g dx.$$

Ked'že platí

$$(5.23) \quad v \cdot \nabla T = \nabla \cdot (vT) - T \nabla \cdot v,$$

môžeme rovnicu (5.22) prepísať do tvaru

$$(5.24) \quad \int_p \nabla \cdot (vT) dx - \int_p T \nabla \cdot v dx = \int_p g dx.$$

Ked'že považujeme hodnotu T za konštantnú na konečnom objeme, môžeme T v druhom integráli vyňať pred integrál

$$(5.25) \quad \int_p \nabla \cdot (vT) dx - T_p \int_p \nabla \cdot v dx = \int_p g dx.$$

Použitím Greenovej vety môžeme rovnicu prepísať do tvaru

$$(5.26) \quad \int_{\partial p} T v \cdot \mathbf{n} ds - T_p \int_{\partial p} v \cdot \mathbf{n} ds = \int_p g dx.$$

Predpokladajme g konštantné na objeme a T konštantné na hraniciach a ked'že konečný objem má hranice e_{pq} , môžeme rovnicu prepísať do tvaru

$$(5.27) \quad \sum_{q \in N(p)} T_{pq} \int_{e_{pq}} v \cdot \mathbf{n} ds - T_p \sum_{q \in N(p)} \int_{e_{pq}} v \cdot \mathbf{n} ds = |p|g,$$

kde T_{pq} je hodnota na hranici e_{pq} .

Tu sa využije metóda up-wind. Označme tok

$$(5.28) \quad v_{pq} = \int_{e_{pq}} v \cdot \mathbf{n} ds.$$

V prípade, že $v_{pq} > 0$ ide o tok z oblasti, takzvaný outflow, a $T_{pq} = T_p$. V prípade, že $v_{pq} < 0$ ide o tok do oblasti, takzvaný inflow, a $T_{pq} = T_q$. Označme $N^{out}(p)$ susedov, pre ktorých platí $v_{pq} > 0$ a $N^{in}(p)$ susedov, pre ktorých platí $v_{pq} < 0$. Potom môžeme rovnicu (5.27) prepísať do tvaru

$$(5.29) \quad \sum_{q \in N^{in}(p)} T_q v_{pq} ds - \sum_{q \in N^{in}(p)} T_p v_{pq} + \sum_{q \in N^{out}(p)} T_p v_{pq} - \sum_{q \in N^{out}(p)} T_p v_{pq} = |p|g.$$

Po úprave tejto rovnice dostaneme rovnicu

$$(5.30) \quad \sum_{q \in N^{in}(p)} v_{pq} (T_q - T_p) = |p|g,$$

kde

$$(5.31) \quad v_{pq} = m(e_{pq})(v \cdot \mathbf{n}_{pq}).$$

Ked'že sme poslednú hranu konečného objemu $p \in N$ vytvorili tak, aby vektor v vychádzal von z oblasti, vo výslednej rovnici tento neexistujúci sused nebude vystupovať.

Vďaka pridaniu týchto rovníc je počet neznámych a počet rovníc rovnaký, čo nám dovoľuje vyriešiť túto sústavu rovníc.

5.4 Numerické experimenty

Rád konvergencie numerickej metódy riešenia Laplaceovej rovnice s Dirichletovými okrajovými podmienkami overíme na príklade, keď je riešením Laplaceovej rovnice funkcia $T(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. Výpočtová oblasť bude guľový výsek, ktorého spodnou hranicou je časť perturbovanej guľe. Ako aj v 2D prípade, je výpočtová oblasť pre najhustejšiu sieť diskretizovaná metódou, ktorá je prezentovaná v štvrtej kapitole, až na ten rozdiel, že aj okrajové objemy budú mať približne rovnaký obsah ako vnútorné objemy. Menej hustá sieť je vytvorená tak, že z hustejšej siete je odstránený každý druhý bod v oboch smeroch. Pre výpočet chyby sa použije numerická L_2 norma. Z tabuľky 5.1 vyplýva, že metóda je druhého rádu.

Pre overenie rádu konvergencie metódy riešenia Laplaceovej rovnice s Neumannovými okrajovými podmienkami v normálovom smere a v ľubovoľnom smere použijeme rovnaké presné riešenie na rovnejší sieti ako v predchádzajúcom prípade. Neumannova okrajová podmienka je na spodnej hranici oblasti. Šikmá derivácia je daná na spodnej hranici v normálovom smere otočenom o $\pi/8$ okolo osi z proti smeru hodinových ručičiek. Z tabuľky 5.2 vyplýva, že metóda s Neumannovými okrajovými podmiekami je druhého rádu a z tabuľky 5.3 vyplýva, že metóda s šikmou deriváciou je prvého rádu.

h_{max}	$\ e_{h_{max}}\ $	EOC
0.578954	0.0017540	
0.339609	0.0012600	0.62104
0.182114	0.0005507	1.32805
0.094100	0.0001802	1.69178

Tabuľka 5.1: Rád konvergencie pre Dirichletove okrajové podmienky

h_{max}	$\ e_{h_{max}}\ $	EOC
0.578954	0.0168434	
0.339609	0.00332872	3.03954
0.182114	0.00075666	2.37725
0.094100	0.00017918	2.18172

Tabuľka 5.2: Rád konvergencie pre Neumannove okrajové podmienky

h_{max}	$\ e_{h_{max}}\ $	EOC
0.578954	0.02486	
0.339609	0.0103976	1.63307
0.182114	0.0044046	1.3783
0.094100	0.00181325	1.34422

Tabuľka 5.3: Rád konvergencie pre šikmú deriváciu

Kapitola 6

Záver

V práci je prezentovaná numerická metóda na riešenie Laplaceovej rovnice s okrajovými podmienkami. Prvá časť sa venuje diskretizácii výpočtovej oblasti nad topografiou Zeme. Sieť sa vytvára vývojom plochy (krivky) s využitím redistribúcie. V práci je odvodený nový model redistribúcie bodov. V druhej časti je odvodená metóda konečných objemov na nerovnomerných sieťach, kde sa využíva rozdelenie derivácie v smere normály na deriváciu v smere tangenty a deriváciu v smere vektora, ktorý spája reprezentačné body konečných objemov. Šikmá derivácia sa rieši ako rovnica advekcie na okrajovej oblasti s využitím up-wind metódy. Pre všetky metódy sú prezentované numerické experimenty, ktoré ukazujú, že metódy pre Dirichletove okrajové podmienky a Neumannove okrajové podmienky sú druhého rádu a metóda pre úlohu so šikmou deriváciou je prvého rádu.

Kapitola 7

Literatúra

- [1] T.Y. Hou, J. Lowengrub, M. Shelley, *Removing the stiffness from interfacial flows and surface tension*, J. Comput. Phys., 114 (1994), pp. 312-338.
- [2] M. Kimura, *Numerical analysis for moving boundary problems using the boundary tracking method*, Japan J. Indust. Appl. Math., 14 (1997), pp. 373-398.
- [3] K. Mikula, D. Ševčovič, *Evolution of plane curves driven by a nonlinear function of curvature and anisotropy*, SIAM J. Appl. Math., 61 (2001), pp. 1473-1501.
- [4] K. Mikula, D. Ševčovič, *A direct method for solving an anisotropic mean curvature flow of planar curve with an external force*, Mathematical Methods in Applied Sciences, 27(13) (2004) pp. 1545-1565.
- [5] K. Mikula, D. Ševčovič, M.Balažovjech, *A simple, fast and stabilized flowing finite volume method for solving general curve evolution equations*, Communications in Computational Physics, Vol. 7, No. 1 (2010) pp. 195-211
- [6] M. Macák, *Numerické metódy v geodézii*, PhD práca, Svf STU Bratislava, Pracovná verzia
- [7] M. Macák, K. Mikula, Z. Minarechová, *Solving the oblique derivative boundary-value problem by the finite volume method*, ALGORITMY 2012, 19th Conference on

Scientific Computing, Podbanske, Slovakia, September 9-14, 2012, Proceedings of contributed papers and posters (Eds. A.Handlovicova, Z.Minarechova, D.Sevcovic), ISBN 978-80-227-3742-5, Publishing House of STU, 2012, pp. 75-84

- [8] Karol Mikula, Mariana Remešíková, Peter Sarkoci, Daniel Ševčovič, *Surface evolution with tangential redistribution of points*, submitted.
- [9] K. Mikula, J. Urbán, *3D curve evolution algorithm with tangential redistribution for a fully automatic finding of an ideal camera path in virtual colonoscopy*, Lecture Notes in Computer Science 6667, Springer, 2011
- [10] M. Huska, M. Medla, K. Mikula, P. Novysedlak, M. Remesikova, *A new form-finding method based on mean curvature flow of surfaces*, ALGORITMY 2012, 19th Conference on Scientific Computing, Podbanske, Slovakia, September 9-14, 2012, Proceedings of contributed papers and posters (Eds. A.Handlovicova, Z.Minarechova, D.Sevcovic), ISBN 978-80-227-3742-5, Publishing House of STU, 2012, pp. 120-131
- [11] M. Medla, *Tvorba "optimálnych" logicky štvoruholníkových sietí v 2D a 3D oblastiach nad topografiou Zeme*, Bakalárská práca, Svf STU Bratislava