

SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE

Stavebná fakulta

Evidenčné číslo: SvF-5343-67743

Tvorba digitálnych modelov terénu pomocou evolúcie plôch podľa strednej krivosti

Diplomová práca

Študijný program:	matematicko-počítačové modelovanie
Číslo študijného odboru:	1114
Názov študijného odboru:	9.1.9 aplikovaná matematika
Školiace pracovisko:	Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie
Vedúci záverečnej práce:	Ing. Zuzana Minarechová, PhD.
Konzultant záverečnej práce:	Prof. RNDr. Karol Mikula, DrSc.

Bratislava 2014

Bc. Michal Kollár

Čestné prehlásenie

Vyhlasujem, že som prácu vypracoval samostatne s použitím odbornej literatúry a s odbornou pomocou vedúceho práce.

V Bratislave, 22.5.2014

.....

PodĎakovanie

Chcel by som poĎakovať Ing. Zuzane Minarechovej, PhD. a prof. RNDr. Karolovi Mikulovi, DrSc. za cenné rady, vecné pripomienky a odborné konzultácie počas vypracovania tejto práce.

Tvorba digitálnych modelov terénu pomocou evolúcie plôch podľa strednej krivosti

Abstrakt

Práca sa zaoberá tvorbou digitálnych modelov terénu pomocou evolúcie plôch podľa strednej krivosti. Na riešenie je použitá diskretizácia Laplace-Beltramiho operátora metódou konečných objemov. Metóda je založená na aproximácii ľubovoľnej vstupnej plochy rôznymi druhmi trojuholníkových sietí a vytvorení slabej formulácie pre Laplace-Beltramiho operátor na tejto ploche. Lineárny systém rovníc pre hodnoty riešenia na konečných objemoch, ktorý je získaný numerickou aproximáciou slabej formulácie, je následne riešený iteračnou numerickou metódou v každom diskretnom časovom kroku. Numerické experimenty pozostávajú z teoretických – testovacích numerických experimentov, zameraných napr. na nájdenie minimálnej plochy a plochy s predpísanou krivosťou, a z praktických experimentov, zameraných na tvorbu digitálnych modelov terénu s použitím výsledkov merania metódy diaľkového prieskumu LiDAR.

Kľúčové slová: Laplace-Beltrami operátor, zovšeobecnená stredná krivosť, metóda konečných objemov, LiDAR.

Creation of digital terrain model using surface mean-curvature evolution

Abstract

The work discusses creating of the digital terrain models using surface evolution method. To that goal a discretization of the Laplace-Beltrami operator using the finite volume method has been done. The approach is based on an approximation of an arbitrary surface by different triangular meshes and deriving the weak formulation for the Laplace-Beltrami operator on the manifold. A system of linear equations obtained by the finite volume approximation of the weak formulation is solved in each discrete time step by an iterative solver. The numerical experiments consist of theoretical ones, where a minimal surface and a surface with a given mean curvature is of interest, and then practical ones, where aim is to create the digital terrain models obtained by using a remote sensing technology LiDAR.

Key words: Laplace-Beltrami operator, mean curvature, finite volume method, LiDAR.

Zoznam skratiek

DMP – Digitálny model povrchu

DMR – Digitálny model reliéfu

DMT – Digitálny model terénu

ECCO2 – Estimating the circulation and climate of the ocean, phase 2

EOC – Experimentálny rád konverencie

LiDAR – Light detection and ranging

Obr. – Obrázok

SOR – Successive over-relaxation

Tab. – Tabuľka

Obsah

1	Úvod	1
2	Evolúcia plôch podľa strednej krivosti.....	2
2.1	Diskretizácia Laplace-Beltramiho operátora metódou konečných objemov	2
2.1.1	Časová diskretizácia	2
2.1.2	Priestorová diskretizácia a definícia konečného objemu	3
2.2	Slabá formulácia úlohy na konečnom objeme	4
2.3	Odvozenie semi-implicitnej numerickej schémy.....	5
2.4	Zostavenie systému lineárnych rovníc	7
3	Testovacie numerické experimenty.....	10
3.1	Uzavretá plocha - Guľa	10
3.2	Ohraničená plocha – Hľadanie minimálnej plochy.....	13
3.3	Ohraničená plocha - ECCO2	15
4	Praktické numerické experimenty	20
4.1	Digitálne modely zemského povrchu	20
4.2	LiDAR	21
4.3	Numerický experiment – Kašova Lehôtka	22
4.3.1	Vstupné dáta.....	22
4.3.2	Výsledky	25
4.3.3	Krivostný detektor	26
4.3.4	Výsledky rozšíreného modelu	28
4.4	Numerický experiment – Centrum Miami.....	32
4.4.1	Vstupné dáta.....	32
4.4.2	Výsledky	34
5	Záver	36
	Literatúra	38
	Zoznam príloh.....	40

1 Úvod

Digitálne modely zemského povrchu majú v dnešnej dobe široké spektrum využiteľnosti. Využívajú sa pri územnom plánovaní, návrhu komplexnej infraštruktúry, projektovaní inžinierskych stavieb, geologických štúdiách, ale aj na vizualizačné účely. Spôsobov vytvorenia a rekonštrukcie takýchto modelov je viacero. V práci sa zaoberáme jedným konkrétnym spôsobom, a to tvorbou digitálnych modelov zemského povrchu pomocou evolúcie plôch podľa strednej krivosti. Cieľom je vytvoriť zo vstupných dát využiteľný digitálny model terénu, ktorý môže byť následne využitý pre rôzne, vyššie spomenuté účely. Práca čiastočne nadväzuje na práce [1] a [2], ktoré sa venujú filtrácií geodetických dát na povrchu Zeme pomocou nelineárnych difúzných rovníc.

Strednú krivosť plochy Ω v bode P vieme vyjadriť ako

$$H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2), \quad (1.1)$$

kde k_1 a k_2 reprezentujú hlavné krivosti plochy Ω v bode P .

2 Evolúcia plôch podľa strednej krivosti

Evolúciu plochy podľa zovšeobecnenej strednej krivosti vieme vyjadriť v tvare parabolickej parciálnej diferenciálnej rovnice [3]

$$\partial_t \mathbf{S}(t) = 2H\vec{N}, \quad (2.1)$$

alebo v tvare

$$\partial_t \mathbf{S}(t) = \Delta_s \mathbf{S}(t), \quad (2.2)$$

s počiatočnou podmienkou

$$\mathbf{S}(0) = \Omega^0, \quad (2.3)$$

kde $\Omega^0 \subset \mathbb{R}^3$ je ľubovoľná pravidelná a hladká plocha, predstavujúca zakrivený povrch. Čas t je z intervalu $t \in [0, T]$, $T \in \mathbb{R}$, \vec{N} predstavuje jednotkovú vonkajšiu normálu k ploche a Δ_s reprezentuje Laplace-Beltramiho operátor, predstavujúci zovšeobecnený Laplaceov operátor na zakrivenom povrchu.

Riešením tejto rovnice je vektorová funkcia $\mathbf{S}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} = \Omega^t$, kde funkcie $x(t), y(t), z(t)$ určujú tvar plochy Ω^t , $\Omega^t \subset \mathbb{R}^3$ v čase t . Rovnicu (2.3) riešime pre jednotlivé zložky vektorovej funkcie samostatne, keďže samotné zložky sú od seba nezávislé.

2.1 Diskretizácia Laplace-Beltramiho operátora metódou konečných objemov

Diferenciálnu rovnicu predstavujúcu vývoj plochy Ω^t (2.3) budeme riešiť metódou konečných objemov [4][5]. Určíme vhodnú časovú a priestorovú diskretizáciu, odvodíme slabú formuláciu úlohy na konečnom objeme a samotnú semi-implicitnú numerickú schému.

2.1.1 Časová diskretizácia

Časový interval $[0, T]$ rozdelíme na konečný počet M časových úsekov t_j , $j = 1, \dots, M$. Vzdialenosť dvoch po sebe idúcich časových úsekov vieme vyjadriť ako $\tau_j = t_j - t_{j-1}$, kde τ_j predstavuje časový krok a funkcia $\mathbf{S}(t_j)$ reprezentuje riešenie na j -tej časovej vrstve. Ľavú stranu

rovnice (2.3) $\partial_t \mathbf{S}(t)$ aproximujeme spätnou diferenciou a následne môžeme rovnicu prepísať do tvaru

$$\frac{\mathbf{S}(t_j) - \mathbf{S}(t_{j-1})}{\tau_j} = \Delta_s \mathbf{S}(t_j). \quad (2.4)$$

Pre vektorovú funkciu $\mathbf{S}(t)$ v čase t_j zavedieme označenie $\mathbf{S}(t_j) = \mathbf{S}^j$. Jej komponenty $x(t), y(t), z(t)$ v čase t_j označíme ako x^j, y^j, z^j a rovnicu (2.4) prepíšeme do tvaru

$$\frac{\mathbf{S}^j - \mathbf{S}^{j-1}}{\tau_j} = \Delta_s \mathbf{S}^j. \quad (2.5)$$

2.1.2 Priestorová diskretizácia a definícia konečného objemu

Výpočtovú oblasť Ω^t vieme aproximovať vhodne zvolenou trianguláciou, ktorej vrcholy predstavujú konečný počet N uzlových bodov

$$X_i = \mathbf{S}_i^j, \quad X_i \in \Omega^t, \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.6)$$

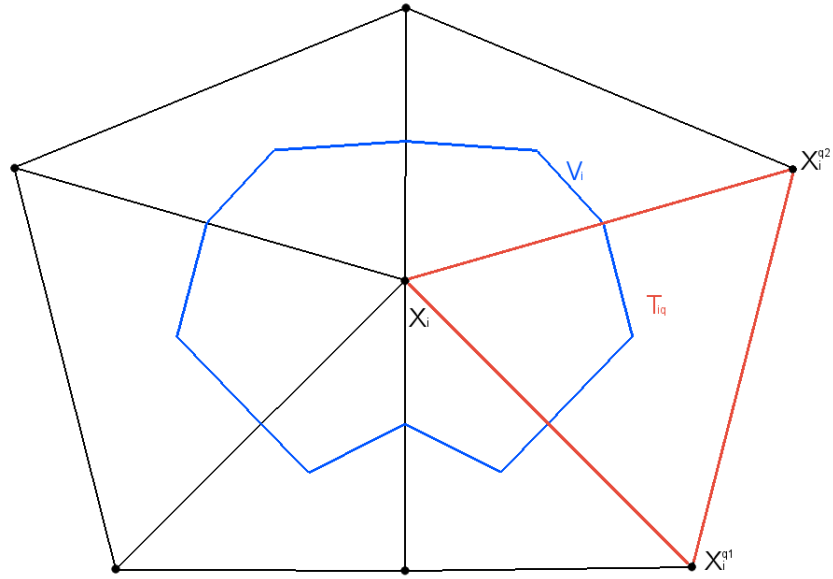
kde \mathbf{S}_i^j predstavuje riešenie v bode X_i .

Trojuholníky na zvolenej triangulácii s vrcholom v uzlovom bode $X_i, i = 1, \dots, N$, budeme označovať ako

$$T_{iq}, \quad q = 1, \dots, Q_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.7)$$

kde Q_i predstavuje počet trojuholníkov s vrcholom v uzlovom bode X_i . Zvyšné dva vrcholy trojuholníka T_{iq} označíme ako X_i^{q1} a X_i^{q2} . (Obr. 2.1)

V každom uzlovom bode triangulácie X_i zadefinujeme konečný objem V_i ako mnohouholník, pričom ťažiská trojuholníkov T_{iq} a stredy spojnic $X_i X_i^{q1}$ a $X_i X_i^{q2}$ budú tvoriť jeho vrcholy. (Obr. 2.1)



Obr. 2.1: Konečný objem V_i

2.2 Slabá formulácia úlohy na konečnom objeme

Rovnicu (2.2) zintegrujeme na konečnom objeme V_i

$$\int_{V_i} \partial_t \mathbf{S}(t) d\mathbf{x} = \int_{V_i} \Delta_s \mathbf{S}(t) d\mathbf{x}, \quad (2.8)$$

následne využitím Greenovej vety vieme pravú stranu vyjadriť v tvare

$$\int_{V_i} \partial_t \mathbf{S}(t) d\mathbf{x} = \int_{\partial V_i} \nabla_s \mathbf{S}(t) \cdot \vec{\eta}_i ds, \quad (2.9)$$

kde $\nabla_s \mathbf{S}(t) = [\nabla_s x(t), \nabla_s y(t), \nabla_s z(t)]$ predstavuje povrchový gradient zložiek vektorovej funkcie $\mathbf{S}(t)$ na danej ploche Ω^t a $\vec{\eta}_i$ reprezentuje vektor jednotkovej vonkajšej normály na hranicu konečného objemu V_i .

Integrál cez hranicu konečného objemu ∂V_i , môžeme vzhľadom na geometriu hranice prepísať do tvaru sumy cez jednotlivé časti hranice ∂V_i , čím dostávame slabú formuláciu úlohy na konečnom objeme V_i

$$\int_{V_i} \partial_t \mathbf{S}(t) d\mathbf{x} = \sum_{q=1}^{Q_i} \int_{\partial V_{iq}} \nabla_s \mathbf{S}(t) \cdot \vec{\eta}_{iq} ds, \quad (2.10)$$

kde $\vec{\eta}_{iq}, q = 1, \dots, Q_i$ reprezentuje vektor vonkajšej jednotkovej normály na časť hranice $\partial V_{iq}, q = 1, \dots, Q_i$. (Obr. 2.2b)

2.3 Odvodenie semi-implicitnej numerickej schémy

Na rovnicu (2.10) aplikujeme zvolenú časovú diskretizáciu a pri numerickej aproximácii ľavej strany rovnice na konečnom objeme V_i uvažujeme, že riešenie \mathbf{S}_i^j v uzlovom bode X_i je v j -tom časovom kroku konštantné

$$m(V_i^{j-1}) \frac{\mathbf{S}_i^j - \mathbf{S}_i^{j-1}}{\tau_j} = \sum_{q=1}^{Q_i} \int_{\partial V_{iq}^{j-1}} \nabla_s \mathbf{S}^j \cdot \vec{\eta}_{iq}^{j-1} ds, \quad (2.11)$$

kde $m(V_i^{j-1})$ predstavuje mieru množiny V_i^{j-1} , ktorá v tomto prípade reprezentuje obsah konečného objemu V_i z predchádzajúceho časového kroku $j - 1$. Samotná výpočtová oblasť Ω^t sa mení v závislosti od času, preto všetky parametre súvisiace s trianguláciou sú brané z predchádzajúceho časového kroku $j - 1$.

Povrchový gradient na pravej strane rovnice (2.11) je za predpokladu lineárnej reprezentácie riešenia \mathbf{S}^j na jednotlivých trojuholníkoch T_{iq} konečného objemu V_i rovný svojej strednej hodnote

$$\nabla_s \mathbf{S}^j \approx \frac{1}{m(T_{iq}^{j-1})} \int_{T_{iq}^{j-1}} \nabla_s \mathbf{S}^j d\mathbf{x}, \quad (2.12)$$

kde $m(T_{iq}^{j-1})$ predstavuje plochu trojuholníka T_{iq}^{j-1} . Aplikovaním Greenovej vety dostávame rovnicu v tvare

$$\nabla_s \mathbf{S}^j \approx \frac{1}{m(T_{iq}^{j-1})} \int_{\partial T_{iq}^{j-1}} \mathbf{S}^j \cdot \vec{n}_{iq}^{j-1} ds. \quad (2.13)$$

Vektor \vec{n}_{iq}^{j-1} reprezentuje vektor jednotkovej normály ku hrane trojuholníka T_{iq}^{j-1} . (Obr. 2.2b)

Pri lineárnej reprezentácii riešenia môžeme integrál cez hranicu trojuholníka vyjadriť ako sumu priemerov hodnôt na jednotlivých stranách trojuholníka T_{iq}^{j-1} . Reprezentáciu povrchového gradientu na danom trojuholníku označíme $P_{T_{iq}}^j$ a vyjadríme v tvare

$$P_{T_{iq}}^j = \frac{1}{m(T_{iq}^{j-1})} \left(\frac{S_i^j + S_{q1}^j}{2} d_{iq1}^{j-1} \vec{n}_{iq1}^{j-1} + \frac{S_i^j + S_{q2}^j}{2} d_{iq2}^{j-1} \vec{n}_{iq2}^{j-1} + \frac{S_{q1}^j + S_{q2}^j}{2} d_{q1q2}^{j-1} \vec{n}_{q1q2}^{j-1} \right). \quad (2.14)$$

Koeficienty d_{iq1}^{j-1} , d_{iq2}^{j-1} a d_{q1q2}^{j-1} predstavujú dĺžky spojnic bodov $X_i X_i^{q1}$, $X_i X_i^{q2}$ a $X_i^{q1} X_i^{q2}$ trojuholníka T_{iq}^{j-1} . Vektorové funkcie S_{q1}^j a S_{q2}^j reprezentujú riešenie v uzlových bodoch X_i^{q1} a X_i^{q2} a predstavujú lokálne označenie neznámych na trojuholníku T_{iq}^{j-1} (Obr. 2.2a).

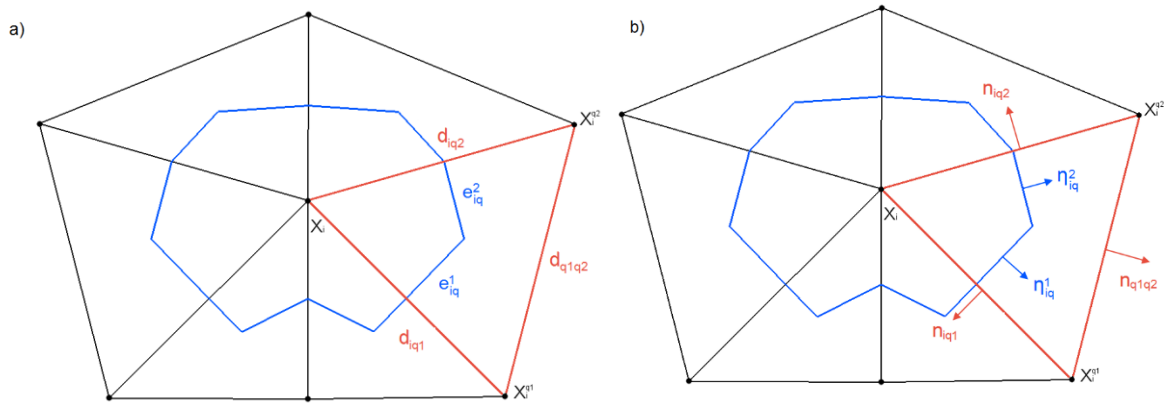
$P_{T_{iq}}^j$ je konštantný vektor, ktorý môžeme vyňať pred integrál a dostávame upravenú rovnicu (2.11) v tvare

$$m(V_i^{j-1}) \frac{S_i^j - S_i^{j-1}}{\tau_j} = \sum_{q=1}^{Q_i} P_{T_{iq}}^j \int_{\partial V_{iq}^{j-1}} \vec{\eta}_{iq}^{j-1} ds. \quad (2.15)$$

Integrál vonkajších jednotkových normál na hranice konečného objemu V_{iq}^{j-1} definovaných na trojuholníku T_{iq}^{j-1} cez jednotlivé hranice konečného objemu ∂V_{iq} môžeme vyjadriť v tvare

$$\int_{\partial V_{iq}^{j-1}} \vec{\eta}_{iq}^{j-1} ds = m(e_{iq}^{1,j-1}) \vec{\eta}_{iq}^{1,j-1} + m(e_{iq}^{2,j-1}) \vec{\eta}_{iq}^{2,j-1}, \quad (2.16)$$

kde $m(e_{iq}^{1,j-1})$ a $m(e_{iq}^{2,j-1})$ sú dĺžky hrán konečného objemu na trojuholníku T_{iq}^{j-1} (Obr. 2.2a) a $\vec{\eta}_{iq}^{1,j-1}$, $\vec{\eta}_{iq}^{2,j-1}$ vonkajšie jednotkové normály na tieto hrany. (Obr. 2.2b)



Obr. 2.2: a) strany d a e , b) vonkajšie jednotkové normály η a n

Následne môžeme rovnicu (16) napísať v tvare

$$m(V_i^{j-1}) \frac{\mathbf{S}_i^j - \mathbf{S}_i^{j-1}}{\tau_n} = \sum_{q=1}^{Q_i} \left[m(e_{iq}^{1,j-1}) \vec{\eta}_{iq}^{1,j-1} \cdot P_{T_{iq}}^j + m(e_{iq}^{2,j-1}) \vec{\eta}_{iq}^{2,j-1} \cdot P_{T_{iq}}^j \right]. \quad (2.17)$$

Po úprave rovnice (2.17) dostávame semi-implicitnú schému problému evolúcie plochy podľa zovšeobecnenej strednej krivosti (2.2) v tvare

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_i^j - \frac{\tau_j}{m(V_i^{j-1})} \sum_{q=1}^{Q_i} \left[m(e_{iq}^{1,j-1}) \vec{\eta}_{iq}^{1,j-1} \cdot P_{T_{iq}}^j \right. \\ \left. + m(e_{iq}^{2,j-1}) \vec{\eta}_{iq}^{2,j-1} \cdot P_{T_{iq}}^j \right] = \mathbf{S}_i^{j-1}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

2.4 Zostavenie systému lineárnych rovníc

Z geometrie konečného objemu V_i^{j-1} vyplýva, že

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{q1}^j &= \mathbf{S}_{Q_i2}^j \quad \text{pre } q = 1, \\ \mathbf{S}_{q1}^j &= \mathbf{S}_{(q-1)2}^j \quad \text{pre } q \neq 1, \end{aligned} \quad (2.19)$$

preto zavedieme globálne číslovanie neznámych v jednotných uzlových bodoch X_i trojuholníka T_{iq}^{j-1} v tvare

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{iq}^j &= \mathbf{S}_{q1}^j = \mathbf{S}_{Q_i2}^j \quad \text{pre } q = 1, \\ \mathbf{S}_{iq}^j &= \mathbf{S}_{q1}^j = \mathbf{S}_{(q-1)2}^j \quad \text{pre } q \neq 1. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Rovnice pre jednotlivé uzlové body $X_i, i = 1, \dots, N$ obsahujú $Q_i + 1$ globálnych neznámych $\mathbf{S}_i^j, \mathbf{S}_{i1}^j, \dots, \mathbf{S}_{iQ_i}^j$. Z rovnice (2.18) vyjmeme členy, ktoré stoja pri neznámych $\mathbf{S}_i^j, \mathbf{S}_{i1}^j, \dots, \mathbf{S}_{iQ_i}^j$ a označíme ich $a_{i0}^j, a_{i1}^j, \dots, a_{iQ_i}^j$. Tieto koeficienty tvoria nenulové prvky i -teho riadku matice \mathbf{A} .

Koeficienty $a_{i0}^j, a_{i1}^j, \dots, a_{iQ_i}^j$ ukladáme do i -teho riadku matice \mathbf{A} podľa globálneho číslovania uzlových bodov X_i , ktorým neznáme prislúchajú.

Vo všeobecnosti môžeme diagonálny člen a_{i0}^j vyjadriť ako

$$\begin{aligned}
 a_{i0}^j = 1 - \frac{\tau_j}{m(V_i^{j-1})} \sum_{q=1}^{Q_i} \frac{1}{m(T_{iq}^{j-1})} & \left[m \begin{pmatrix} e_{iq}^{1,j-1} \end{pmatrix} \vec{\eta}_{iq}^{1,j-1} \right. \\
 & \cdot (d_{iq1}^{j-1} \vec{n}_{iq1}^{j-1} + d_{iq2}^{j-1} \vec{n}_{iq2}^{j-1}) + m \begin{pmatrix} e_{iq}^{2,j-1} \end{pmatrix} \vec{\eta}_{iq}^{2,j-1} \\
 & \left. \cdot (d_{iq1}^{j-1} \vec{n}_{iq1}^{j-1} + d_{iq2}^{j-1} \vec{n}_{iq2}^{j-1}) \right]. \quad (2.21)
 \end{aligned}$$

Pri nediagonálnych členoch a_{iq} , $q \neq 0$, označíme

$$\begin{aligned}
 k &= q - 1, & \text{ak } q \neq 1, \\
 k &= Q_i - 1, & \text{ak } q = 1
 \end{aligned} \quad (2.22)$$

a následne môžeme vo všeobecnosti vyjadriť nediagonálne členy v tvare

$$\begin{aligned}
 a_{iq}^j = -\frac{\tau_j}{m(V_i^{j-1})} & \left(\frac{1}{m(T_{iq}^{j-1})} \left[m \begin{pmatrix} e_{iq}^{1,j-1} \end{pmatrix} \vec{\eta}_{iq}^{1,j-1} \right. \right. \\
 & \cdot (d_{iq1}^{j-1} \vec{n}_{iq1}^{j-1} + d_{q1q2}^{j-1} \vec{n}_{q1q2}^{j-1}) + m \begin{pmatrix} e_{iq}^{2,j-1} \end{pmatrix} \vec{\eta}_{iq}^{2,j-1} \\
 & \left. \cdot (d_{iq1}^{j-1} \vec{n}_{iq1}^{j-1} + d_{q1q2}^{j-1} \vec{n}_{q1q2}^{j-1}) \right] \right. \\
 & + \frac{1}{m(T_{ik}^{j-1})} \left[m \begin{pmatrix} e_{ik}^{1,j-1} \end{pmatrix} \vec{\eta}_{ik}^{1,j-1} \right. \\
 & \cdot (d_{ik1}^{j-1} \vec{n}_{ik1}^{j-1} + d_{k1k2}^{j-1} \vec{n}_{k1k2}^{j-1}) + m \begin{pmatrix} e_{ik}^{2,j-1} \end{pmatrix} \vec{\eta}_{ik}^{2,j-1} \\
 & \left. \left. \cdot (d_{ik1}^{j-1} \vec{n}_{ik1}^{j-1} + d_{k1k2}^{j-1} \vec{n}_{k1k2}^{j-1}) \right] \right), \quad (2.23)
 \end{aligned}$$

Samotné koeficienty a_{iq}^j sú závislé od časového kroku τ_j a od vlastnosti triangulácie z predchádzajúceho časového kroku. Keďže chceme lineárne systémy riešiť SOR algoritmom, matica \mathbf{A} musí byť diagonálne dominantná, čiže musí platiť

$$|a_{i0}^j| \geq \sum_{i \neq l} |a_{il}^j|, \quad q \neq 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.24)$$

Experimentálne bolo určené, že pri voľbe

$$\tau_j = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N m(V_i^{j-1}) \quad (2.25)$$

je podmienka diagonálnej dominantnosti splnená a SOR metóda konverguje. Plochy konečných objemov $m(V_i^{j-1})$ sa v čase menia, preto aj samotný krok je potrebné vypočítať po každej časovej iterácii.

Pravá strana systému je daná vektorom riešenia \mathbf{S}_i^{j-1} z predchádzajúceho časového kroku. Systém lineárnych rovníc môžeme zapísať v tvare

$$\mathbf{A} \mathbf{S}^j = \mathbf{S}^{j-1}, \quad (2.26)$$

alebo v tvare systémov lineárnych rovníc pre jednotlivé komponenty vektorovej funkcie \mathbf{S}^j

$$\mathbf{A} x^j = x^{j-1},$$

$$\mathbf{A} y^j = y^{j-1},$$

$$\mathbf{A} z^j = z^{j-1}, \quad (2.27)$$

ktoré riešime pre každé j , $j = 1, \dots, M$. Pre dostatočne veľké M nastane rovnovážny stav, v ktorom bude obsah a zovšeobecnená stredná krivosť plochy minimálna.

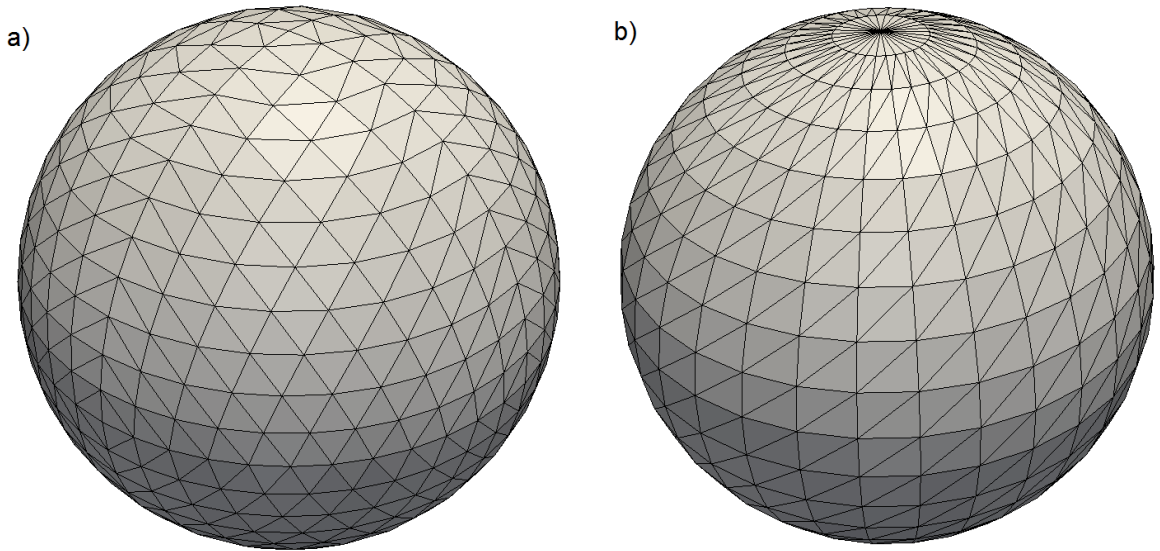
3 Testovacie numerické experimenty

Testovacie numerické experimenty slúžia na overenie správnosti odvodenej semi-implicitnej schémy a určenie rádu presnosti metódy. Na testovanie boli vybrané prípady evolúcie uzavretej guľovej plochy a dvoch ohraničených plôch. Výsledky boli vizualizované využitím softvéru Surfer [6] a Paraview [7]. Boli implementované dva programy v jazyku C++, z ktorých prvý vytváral triangulácie plôch a druhý riešil samotnú evolúciu (Príloha č.3). Ako ω parameter v SOR algoritme bola pri všetkých testovacích experimentoch použitá hodnota $\omega = 1.25$.

3.1 Uzavretá plocha - Guľa

Pri tomto experimente sa, okrem overenia správnosti schémy a presnosti metódy, bude testovať aj vplyv priestorovej diskretizácie na samotnú evolúciu plochy. Keďže vyvíjaná plocha je uzavretá, nie je potrebné definovať okrajové podmienky. Na vyjadrenie vplyvu priestorovej diskretizácie boli použité dve rôzne triangulácie plochy Ω^0 .

Výpočtová oblasť Ω^0 v oboch prípadoch predstavuje jednotkovú guľovú plochu, diskretizovanú sieťou trojuholníkov. V prvom prípade bola triangulácia zvolená tak, aby jednotlivé trojuholníky mali približne rovnaký obsah $m(T_{iq})$. Takto zvolenú trianguláciu budeme označovať ako pravidelnú trojuholníkovú sieť Ω_p^0 . Samotná pravidelná triangulácia vznikla viacnásobným delením osemstenu. (Obr. 3.1a). Druhú trianguláciu budeme označovať ako nepravidelnú trojuholníkovú sieť Ω_n^0 . Vrcholy trojuholníkov ležia v takto zvolenej triangulácii na priesečníkoch poludníkov a rovnobežiek jednotkovej gule. (Obr. 3.1b)



Obr. 3.1: a) Pravidelná triangulácia Ω_p^0 b) Nepravidelná triangulácia Ω_n^0

Presnosť metódy budeme určovať z rozdielu nami získaného numerického riešenia a analytického riešenia gule s meniacim sa polomerom v čase, definovaného v tvare

$$\mathbf{S}_a(t) = \sqrt{(\mathbf{S}(0)^2 - 4t)}. \quad (3.1)$$

Chybu err budeme rátať ako L_2 normu v tvare

$$err_N^M = \sqrt{\sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N (|\mathbf{S}_a(j\tau_j)| - |\mathbf{S}_i^j|)^2 m(V_i)\tau_j}. \quad (3.2)$$

Evolúcia oboch plôch Ω_p^0 a Ω_n^0 bola časovo ohraničená intervalom $[0, T]$, $T = 0.2$ s počiatočnou podmienkou $|\mathbf{S}(0)| = 1$. Experimentálny rád konvergenzie metódy (EOC) určíme zo vzťahu

$$EOC = \log_2 \frac{err_h^T}{err_{h/2}^{4T}} \quad (3.3)$$

Pri počítaní chyby err_h^T bola voľba časového kroku $\tau \sim h^2$, kde h reprezentuje dĺžku hrany trojuholníka. Chyba $err_{h/2}^{4T}$ predstavuje chybu pri dvakrát jemnejšej priestorovej a štyrikrát jemnejšej časovej diskretizácie, čo odpovedá vzťahu $\tau \sim h^2$.

Počet X_i	Časový krok τ	Chyba err	EOC	Čas výpočtu
18	0.04	0.07121607		0.019 s
66	0.01	0.01854091	1.94149	0.100 s
258	0.0025	0.00466837	1.98972	1.875 s
1026	0.000625	0.00116351	2.00444	69.502 s

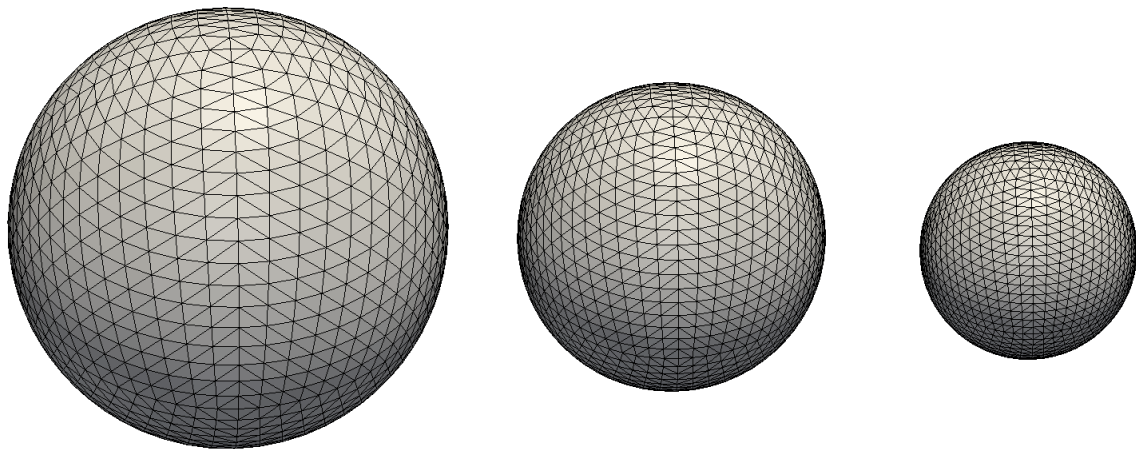
Tab. 3.1 : Chyby, odhady rádu a výpočtové časy pre Ω_p^0

Počet X_i	Časový krok τ	Chyba err	EOC	Čas výpočtu
26	0.04	0.07056166		0.024 s
114	0.01	0.01794094	1.97563	0.176 s
482	0.0025	0.00448928	1.9987	8.351 s
1986	0.000625	0.00107836	2.05765	1425.663 s

Tab. 3.2 : Chyby, odhady rádu a výpočtové časy pre Ω_n^0

Z tab. 3.1. a 3.2. vyplýva, že metóda je druhého radu presnosti. Rozdielnosť triangulácií plôch sa prejavila na výpočtovom čase. V tab. 3.2 vidíme, že výpočtový čas pri 1986 uzlových bodoch bol až 23 min. Dôvodom bola dlhšia konvergencia SOR metódy v každom časovom kroku spôsobená zle navrhnutou trianguláciou plochy a singularitami v oblasti pólov.

Obr. 3.2 znázorňuje evolúciu plochy Ω_p^0 , $N = 1430$, $\tau_1 = 0.008671$, $\tau_{44} = 0.001976$. Prvý stav predstavuje počiatočnú podmienku $|S(0)| = 1$, druhý a tretí stav predstavujú tvar plochy Ω_p^t v 20 a 40 časovom kroku.



Obr. 3.2: Znázornenie evolúcie plochy Ω_p^0

3.2 Ohraničená plocha – Hľadanie minimálnej plochy

Definujme obsah plochy Ω^t ako $m(\Omega^t) = \sum_{i=1}^G m(T_i^j)$, kde G predstavuje počet trojuholníkov triangulácie. Zo vzťahu vyplýva, že obsah plochy môžeme vyjadriť ako súčet plôch jednotlivých trojuholníkov tvoriacich trianguláciu. Úlohu evolúcie plochy môžeme označiť aj ako úlohu hľadania minimálnej plochy Ω_{min} , ktorá vznikne evolúciou plochy Ω^0 . Minimálnu plochu môžeme definovať ako plochu, ktorej stredná krivosť je všade nulová. Takýto stav vieme dosiahnuť v čase t , ak platí, že rozdiel $m(\Omega^{t-1}) - m(\Omega^t) \approx 0$. Ak platí tento vzťah, predpokladáme, že stredná krivosť je vo všetkých miestach plochy nulová, keďže v samotnom procese evolúcie plochy podľa strednej krivosti nenastala v dvoch po sebe idúcich časových krokoch žiadna zmena tvaru vyvíjanej plochy. V takom prípade platí, že $\Omega_{min} = \Omega^t$ pre t spĺňajúce podmienku.

Výpočtovú plochu Ω_M^0 reprezentuje rovina $[x, y, 0]$ kde $x, y = (0.1, 0.2, \dots, 1.9)$, ohraničená hranicou $\Gamma = \Gamma_w \cup \Gamma_E \cup \Gamma_N \cup \Gamma_S$ kde

$$\Gamma_S = (x, 0, 0), \quad x = (0.1, 0.2, \dots, 1.9),$$

$$\Gamma_N = (x, 2, 0), \quad x = (0.1, 0.2, \dots, 1.9),$$

$$\Gamma_w = (2, y, y^2 - 2y), \quad y = (0, 0.1, \dots, 2),$$

$$\Gamma_E = (0, y, y^2 - 2y), \quad y = (0, 0.1, \dots, 2). \quad (3.4)$$

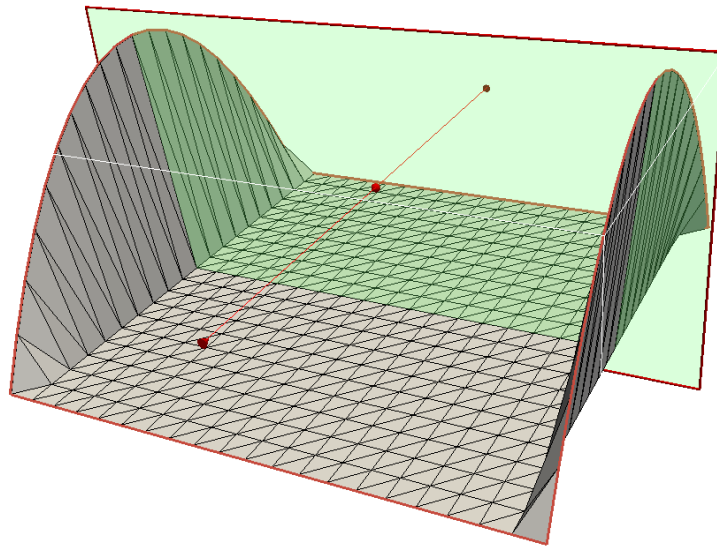
Na Obr. 3.3 je znázornená triangulácia a hranica Γ plochy Ω_M^0 . Počet uzlových bodov modelu $N = 441$ a počet trojuholníkov $G = 800$.

Hranica Γ reprezentuje Dirichletovu okrajovú podmienku. Uzlové body X_i , ktoré ležia na hranici Γ budú počas výpočtu zafixované a pre riešenia v týchto bodoch platí $\mathbf{S}_i^j = \mathbf{S}_i^0$ pre všetky časové kroky j . Počiatočná podmienka $\mathbf{S}^0 = \Omega_M^0$.

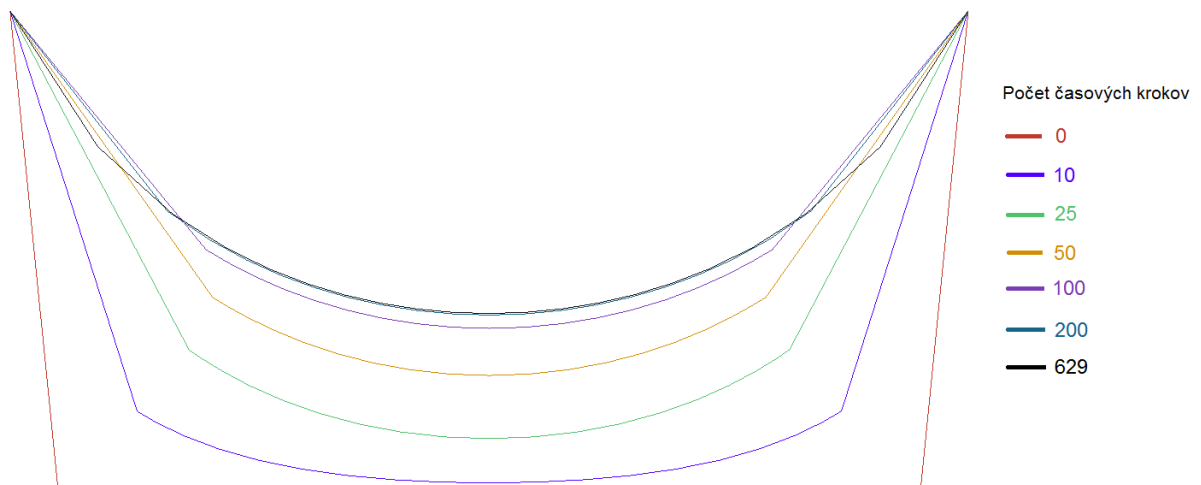
Samotný proces evolúcie bol z dôvodu efektivity programu ukončený, keď $|\tau_j - \tau_{j-1}| < 1.10^{-8}$, resp. keď $\left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N m(V_i^j) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N m(V_i^{j-1}) \right| < 1.10^{-8}$.

Pri takto zvolenej podmienke bol čas predstavujúci dosiahnutie minimálnej plochy $T = 7.50806$. Počet časových krokov na dosiahnutie tohto stavu bol $M = 629$.

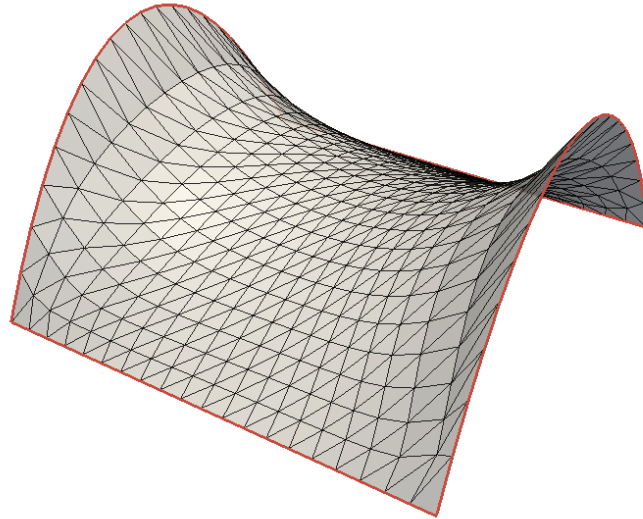
Na grafe (Obr. 3.4) sú znázornené profily rezov plochy Ω_M^t s rovinou (Obr. 3.3) prechádzajúcou cez stred plochy Ω_M^t po rôznych časových krokoch. Obr. 3.5 zobrazuje tvar minimálnej plochy po 629 časových krokoch.



Obr. 3.3: Triangulácia, hranica Γ plochy Ω_M^0 a prierezová rovina



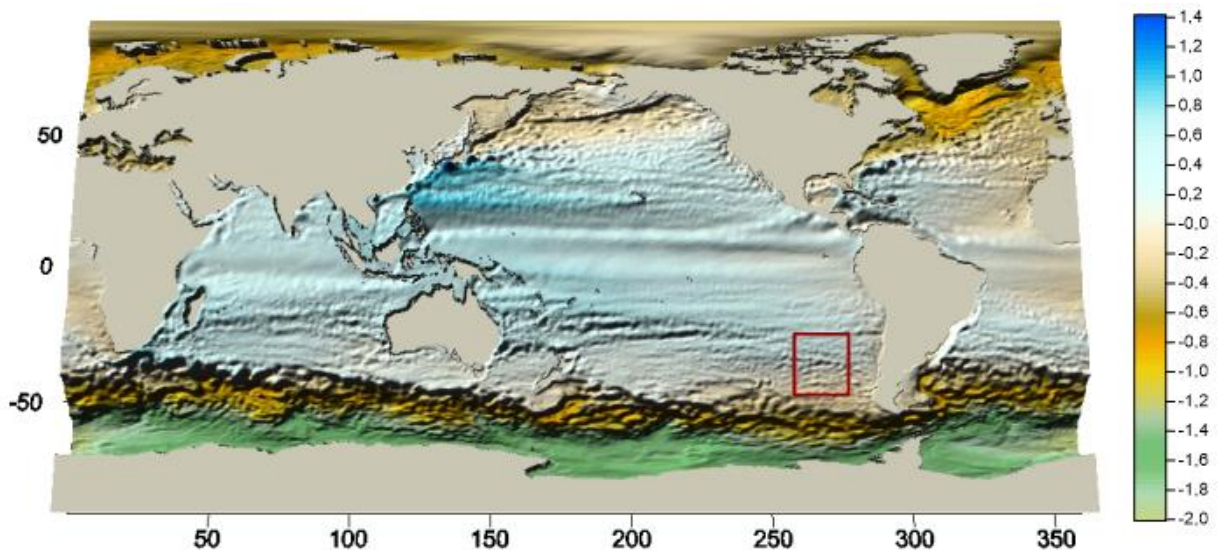
Obr. 3.4: Profily plochy Ω_M^t po rôznych časových krokoch



Obr. 3.5: Tvar minimálnej plochy $\Omega_{min} = \Omega_M^{629}$

3.3 Ohraničená plocha - ECCO2

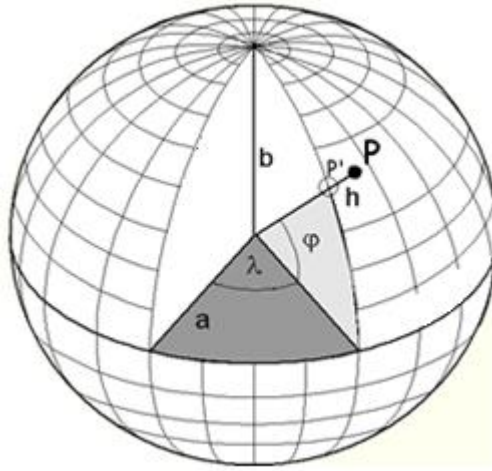
Výpočtovú oblasť experimentu tvorí ohraničená zvlnená plocha Ω_E^0 , predstavujúca časť hladiny oceánu. Súradnice uzlových bodov boli získané z modelu ECCO2 (Estimating the Circulation and Climate of the Ocean, Phase 2) [8], ktorý poskytuje priebežne aktualizovaný tvar oceánov, ktorý umožňuje skúmať procesy vo vnútri oceánu, napr. prúdenie morských prúdov, presuny tepla, uhlíka, ale aj sledovanie stavu oceánov v polárnych oblastiach. Ohraničenie plochy Γ je definované štvoruholníkom s hranicami 50° j. š., 30° j. š., 75° z. d. a 95° z. d. (Obr. 3.6)



Obr. 3.6: Hranice výpočtovej oblasti Ω_E^0

Pri tomto experimente budeme pracovať v sférickej súradnicovej sústave ϕ, λ, r , kde ϕ predstavuje sférickú šírku, λ sférickú dĺžku a $r = R + h$, kde R je polomer sféry a h reprezentuje výšku nad sférou (Obr. 3.7). Na transformáciu priestorových súradníc X, Y, Z do sférickej súradnicovej sústavy boli použité vzťahy

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}, \\ \lambda &= \text{ArcTg}\left(\frac{Y}{X}\right), \\ \phi &= \text{ArcSin}\left(\frac{Z}{r}\right). \end{aligned} \quad (3.5)$$

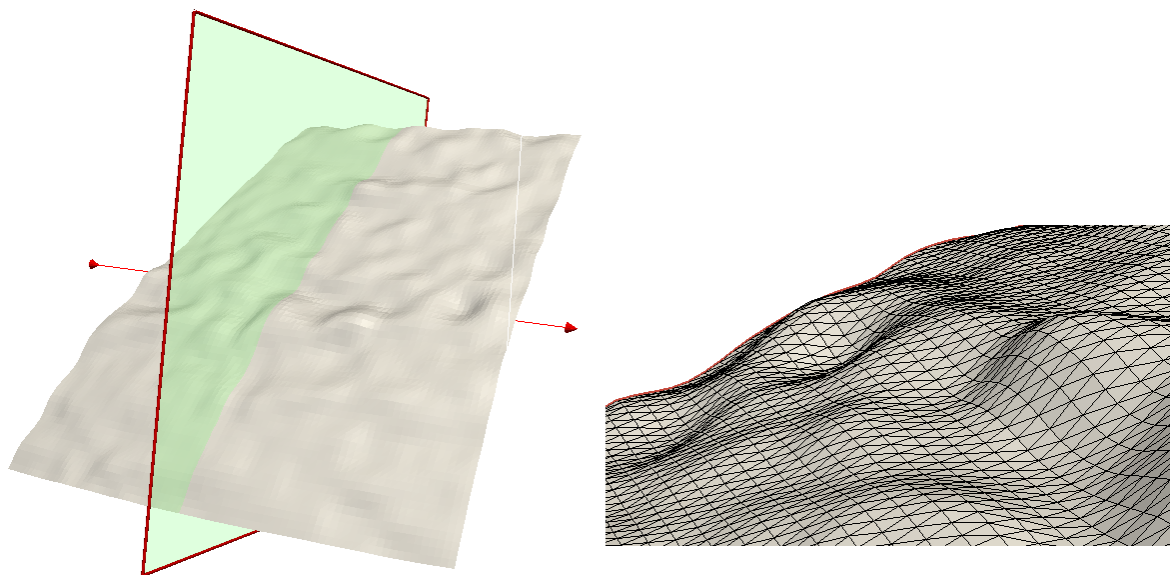


Obr. 3.7: Sférická súradnicová sústava [16]

Cieľom experimentu bolo vyhladenie vstupnej zvlnenej plochy do tvaru plochy s nulovou strednou krivosťou. Pri experimente boli použité 3 typy Dirichletových okrajových podmienok. Skúmaný bol aj vplyv týchto podmienok na výsledný tvar plochy Ω_E^0 .

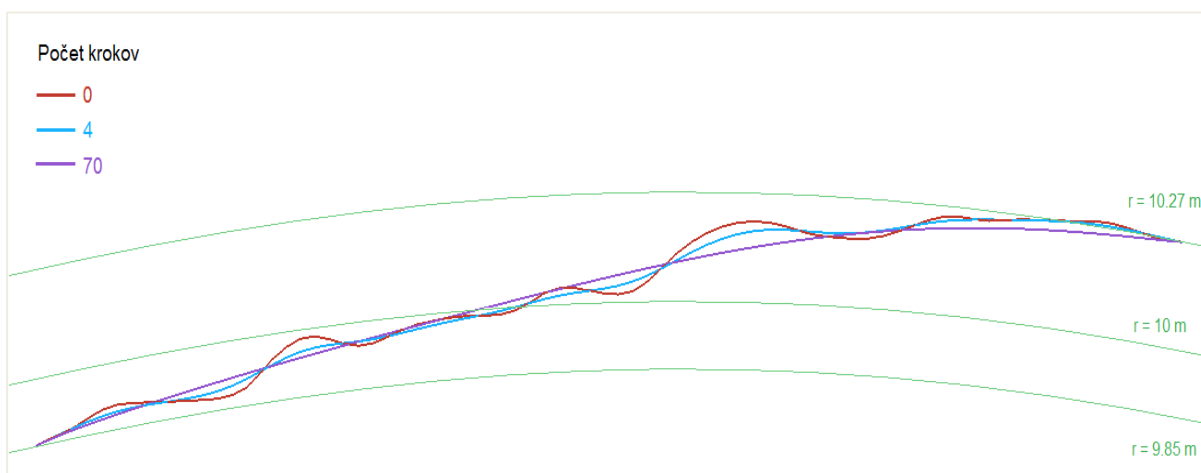
Prvý typ okrajových podmienok predstavuje podmienku pre všetky $X_i \in \Gamma$ v tvare $\mathbf{S}_i^t = \mathbf{S}_i^0$, teda súradnice uzlových bodov na hranici budú počas výpočtu fixované. Pri druhom type boli fixované iba ϕ, λ súradnice bodov $X_i \in \Gamma$, teda samotná hranica mala povolené sa vyvíjať v radiálnom smere. Tretí typ predstavuje podmienku $\mathbf{S}_i^t = (\phi, \lambda, r_f)$, teda podmienku pri ktorej boli body $X_i \in \Gamma$ zafixované na guli s polomerom r_f .

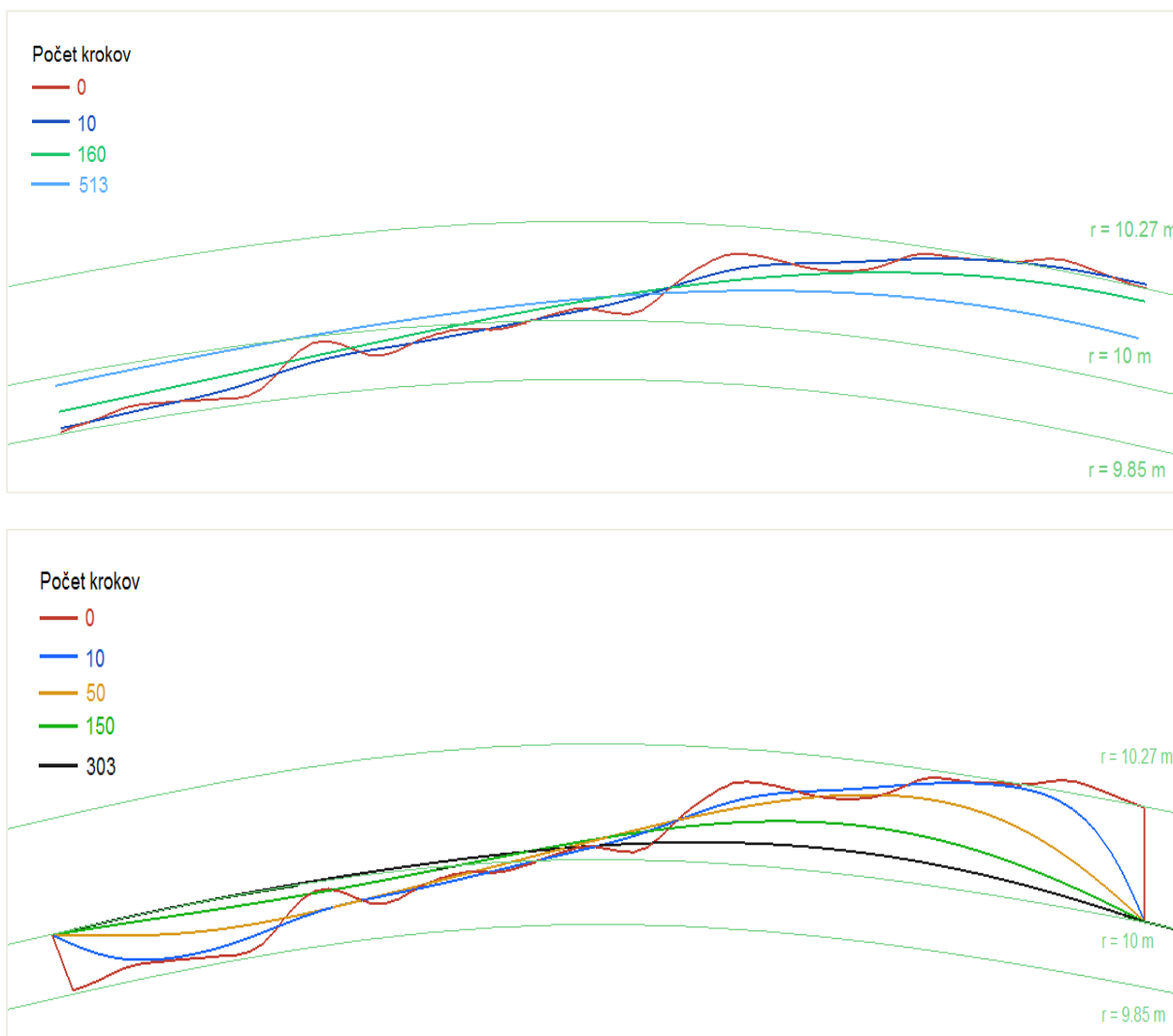
Hrúbka siete bola zvolená s delením $0.25^\circ \times 0.25^\circ$. Počet uzlových bodov $N = 6400$ a počet trojuholníkov triangulácie je rovný 12 482. Pre lepšiu vizualizáciu dát bol zvolený polomer $r_f = 10m$. Na Obr. 3.8 je zobrazený tvar a detail príslušnej triangulácie plochy.



Obr. 3.8: Tvar, prierezová plocha a detail triangulácie plochy Ω_E^0

Na Obr. 3.9 sú zobrazené riešenia v profiloch plochy (Obr. 3.8) po rôznych časových krokoch pri všetkých troch typoch okrajových podmienok. Ako podmienka ukončenia procesu evolúcie bola tak isto ako v predchádzajúcom experimente zvolená podmienka $|\tau_j - \tau_{j-1}| < 1.10^{-8}$.





Obr. 3.9: Riešenia v profiloch, pre tri typy okrajových podmienok

Pri použití prvého typu okrajových podmienok plocha dosiahla rovnovážny stav po 70 časových krokoch. Takto zvolená podmienka je vhodná vtedy, keď potrebujeme vyhladiť nerovnosti plochy, pričom chceme zachovať jej hranice.

Pri druhom type okrajovej podmienky, ktorá predstavuje voľnosť hranice v radiálnom smere, nastal rovnovážny stav po 513 časových krokoch. Na Obr. 3.9 vidíme, že približný tvar, ktorý bol pri prvom type okrajových podmienok dosiahnutý po 70 časových krokoch, bol v prípade voľnosti hranice dosiahnutý už po 10 časových krokoch. Radiálna voľnosť na hranici je využiteľná vtedy, keď chceme zhladiť plochu a netrváme na zachovaní jej hraníc.

Pri treťom type okrajových podmienok je našim cieľom dosiahnuť plochu s predpísanou krivosťou. Chceme, aby platilo, že $|S^j| \approx r$, teda aby sa plocha Ω_E^0 vyvinula do tvaru guľového výseku so strednou krivosťou $\frac{1}{r}$. Po 303 časových krokoch bola splnená podmienka $|\tau_j - \tau_{j-1}| < 10^{-8}$, avšak časť plochy ešte nespĺňala podmienku $|S^{303}| \approx r$, čo bolo spôsobené zle zvolenou ukončovacou podmienkou. Ak by sme však nechali vývoj prebiehať dlhšie, tento stav by bol dosiahnutý. Takéto okrajové podmienky sú vhodné vtedy, keď potrebujeme hranicu posunúť v radiálnom smere a zafixovať na vopred zadaný tvar.

4 Praktické numerické experimenty

Pri praktických numerických experimentoch boli využité poznatky získané z testovacích experimentov. Kapitola je rozdelená na teoretický úvod k experimentom a na samotné dva hlavné numerické experimenty. Na riešenie boli využité už spomínané vytvorené programy v jazyku C++ (Príloha č. 3). Výsledky boli podobne ako v prípade testovacích experimentoch vizualizované pomocou softvéru Surfer [6] a Paraview [7].

4.1 Digitálne modely zemského povrchu

V dnešnej dobe sa v rámci procesu automatizácie projekčnej činnosti využívajú ako formy projekčných podkladov digitálne modely zemského povrchu. Digitálny model zemského povrchu predstavuje štruktúrovaný súbor dát v tvare priestorových súradníc (ϕ, λ, r) . Podľa rôzneho poňatia výšky h v modeli, môžeme tieto digitálne modely rozdeliť na [9][10]:

1. DMP – Digitálny model povrchu

Predstavuje vrchnú časť povrchu, vrátane vegetácie, budov, ciest a iných technických prvkov krajiny. Výška h vyjadruje nielen zemský povrch ale aj povrch všetkých objektov na ňom. Takýto model vznikne vyhodnotením leteckých snímok, alebo iných ortofotosnímkov povrchu. Samotné dáta bývajú zväčša vo forme neštruktúrovaného mračna bodov.

2. DMR – Digitálny model reliéfu

Predstavuje množinu polohových údajov charakterizujúcich geometrické vlastnosti reliéfu. Vylučuje všetky objekty na zemskom povrchu vrátane vegetácie. Priestorová reprezentácia je, na rozdiel od DMP, pravidelná sieť. Takéto modely sa využívajú hlavne v environmentálnych aplikáciách, kde sa kladie dôraz na hladký priebeh zemského povrchu. Pri projekčnej činnosti sa kladie väčší dôraz na presnosť a detailnosť, preto sa využíva model DMR v kombinácii s technickými prvkami terénu. Takto upravený model označujeme DMT.

3. DMT – Digitálny model terénu

V technickej praxi je potrebné vytvárať modely, v ktorých bude odstránený iba určitý technický prvok reliéfu alebo vegetácie. Dáta modelu predstavujú spracované dáta z DMP umiestnené na pravidelnej sieti. V niektorých prípadoch sú modely DMT a DMR brané ako

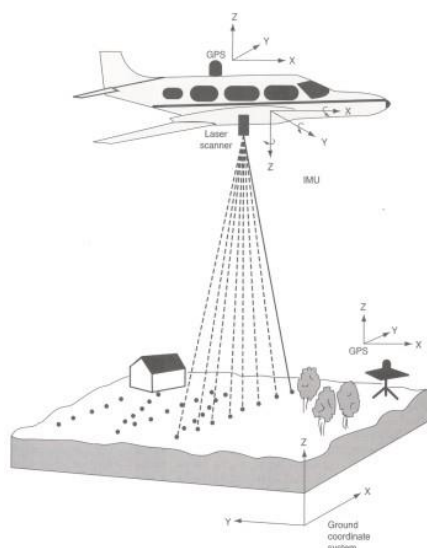
totožné modely. V rámci tejto práce ich budeme rozlišovať, pričom model DMT bude predstavovať model, v ktorom boli zachované určité technické prvky z DMP.

4.2 LiDAR

LiDAR (Light Detection And Ranging)[11][12] je skratka pre optickú technológiu, ktorá využíva pulzné laserové svetlo na meranie vzdialenosti medzi objektom a zariadením. Technológia využíva ultrafialové, viditeľné a blízko infračervené spektrum vlnových dĺžok svetla na vytváranie obrazu objektov. Samotný laserový lúč umožňuje mapovanie povrchu s vysokou rozlišovacou schopnosťou, ktorá patrí k hlavným výhodám tejto technológie.

Jedna z možností získavania dát je využitie leteckých LiDARov (Obr.4.1), ktoré sa využívajú pri modelovaní reliéfu pre inžinierske stavby. Pri tomto spôsobe získavania dát vysiela zariadenie umiestené v lietadle rýchle impulzy laserového svetla k povrchu objektov. Senzor zariadenia zaznamenáva čas návratu každého impulzu, pomocou ktorého určuje vzdialenosť od objektu. Pre dosiahnutie požadovanej presnosti je potrebné údaje z LIDARu doplniť údajmi o výške senzora, jeho polohe a orientácii.

Dosiahnutá vertikálna presnosť pri využití tejto technológie je $\pm 15\text{ cm}$. Získané dáta sa využívajú aj v kombinácii s leteckými ortofotosnímkami, ktoré predstavujú súbor spektrálnych intenzít povrchu. Takto upravené dáta sa využívajú na segmentáciu a fotointerpretáciu vegetácie a technických prvkov.



Obr. 4.1: Princíp získavania dát s využitím leteckého LiDARu

4.3 Numerický experiment – Kašova Lehôtka

Výpočtovú oblasť numerického experimentu Ω_L^0 reprezentuje DMP model získaný pomocou technológie LiDAR. Cieľom experimentu je vytvorenie využiteľného DMT, v ktorej bude do istej miery zachovaná cestná štruktúra. Takto vytvorený DMT môže slúžiť ako podklad pre štúdiu a neskoršiu projekciu infraštruktúry v tejto oblasti.

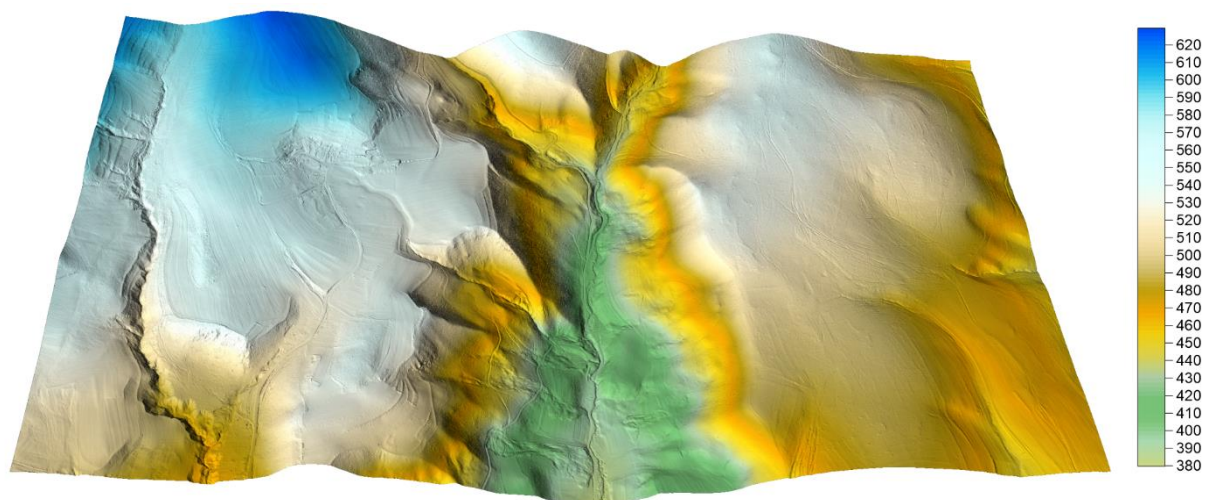
4.3.1 Vstupné dáta

Vstupný model pre experiment predstavoval DMP spolu s informáciou o farebnej intenzite ortofotosnímky vytvorený technológiou LiDAR reprezentujúci oblasť okolia dediny Kašova Lehôtka. (Obr. 4.2)



Obr. 4.2: Satelitná snímka oblasti dostupných dát

Dáta boli umiestnené na nepravidelnej sieti. Z prvého testovacieho experimentu však vyplýva, že výpočtový čas úlohy (2.2) pri nepravidelnej sieti je značne vyšší ako pri použití pravidelnej siete. Preto boli dáta interpolované do mriežky predstavujúcej $0.5 \times 0.5 \text{ m}$. Keďže pôvodné dáta boli na dostatočnej hustej sieti, môžeme vplyv interpolácie na tvar povrchu zanedbať. Takto vznikol DMP na pravidelnej sieti reprezentovaný 15 008 001 bodmi. (Obr. 4.3)

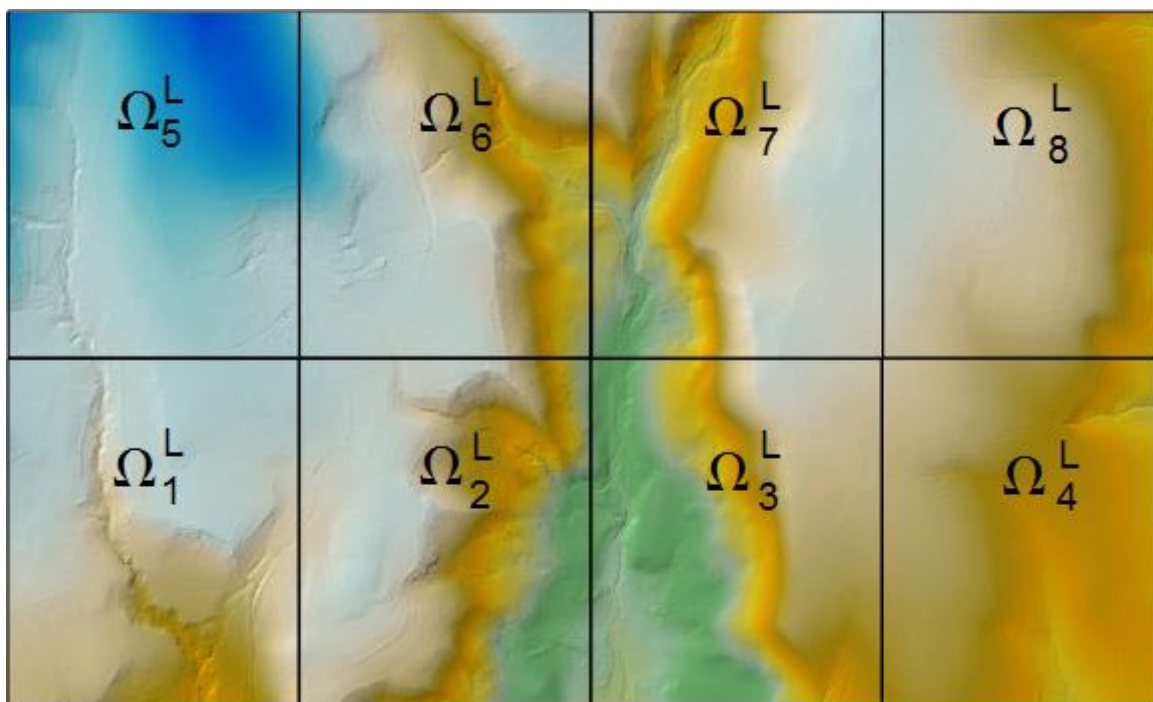


Obr. 4.3: DMP s čiastočne odstránenou vegetáciou na pravidelnej sieti

Z analýzy DMP sa zistilo, že v samotnom modeli bola už v niektorých oblastiach odstránená vegetácia, avšak stále sa v týchto oblastiach vyskytovali jej fragmenty v podobe šumu.

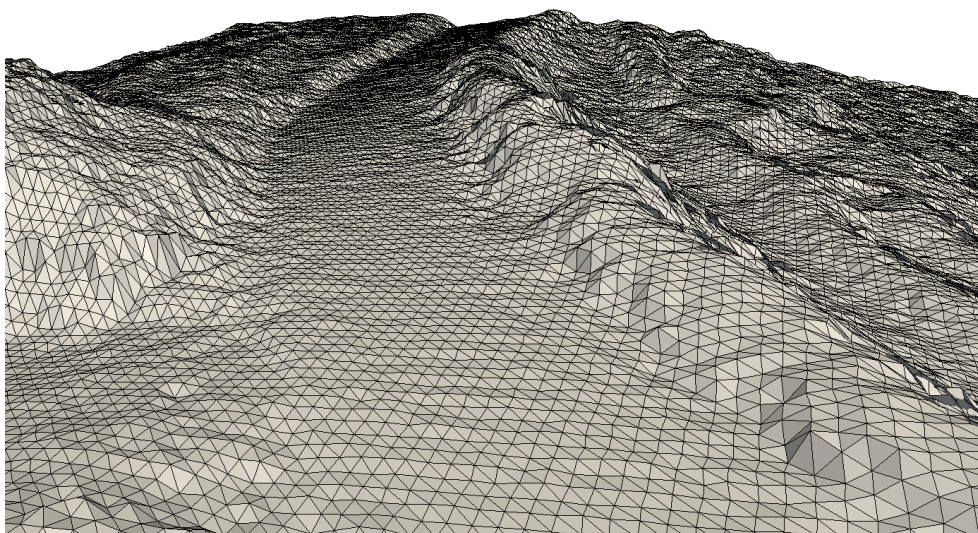
Cieľom experimentu bolo odstránenie týchto fragmentov a vytvorenie DMT, pričom sme chceli, aby vo výslednom modeli boli zachované technické prvky, konkrétne cesty.

Ak by sme chceli riešiť evolúciu tejto plochy danej 15mil. uzlovými bodmi, nároky na operačnú pamäť by presahovali hodnoty 53.6 GB. Pre vysokú náročnosť na operačnú pamäť bol model rozdelený na 8 častí Ω_i^L $i = 1, 2, 3 \dots 8$. (Obr. 4.4)



Obr. 4.4: Výpočtové oblasti Ω_i^L .

Každú z týchto plôch reprezentovalo 1 877 751 uzlových bodov X_i a 3 750 000 trojuholníkov. Detail triangulácie na ploche Ω_1^L je vizualizovaný na (Obr. 4.5)



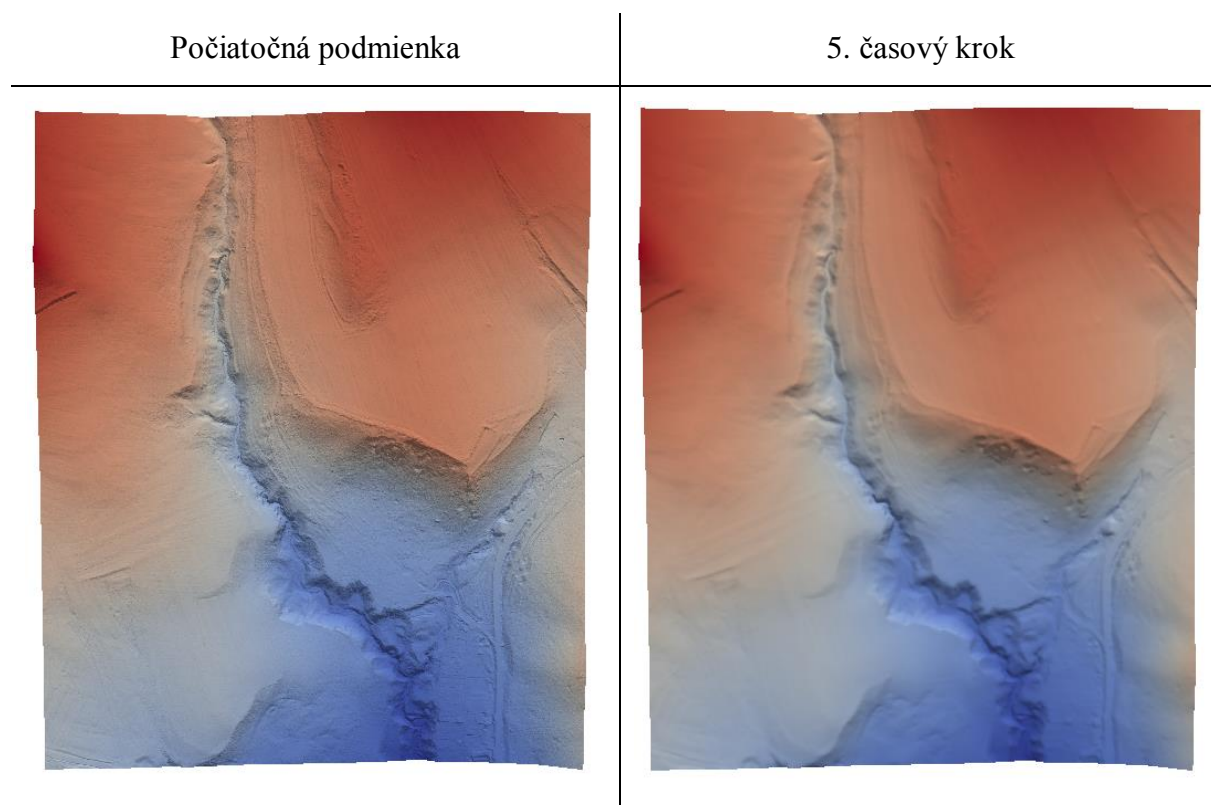
Obr. 4.5: Detail triangulácie

Jednotlivé plochy Ω_i^L predstavovali počiatočnú podmienku Ω^0 . Okrajová podmienka úlohy bola Dirichletova okrajová podmienka v tvare $\mathbf{S}_i^t = \mathbf{S}_i^0$, pre $X_i \in \Gamma$. Úloha bola riešená pre 5 časových krokov, pričom τ_j bolo určené pre každú plochu zo vzťahu (2.25).

4.3.2 Výsledky

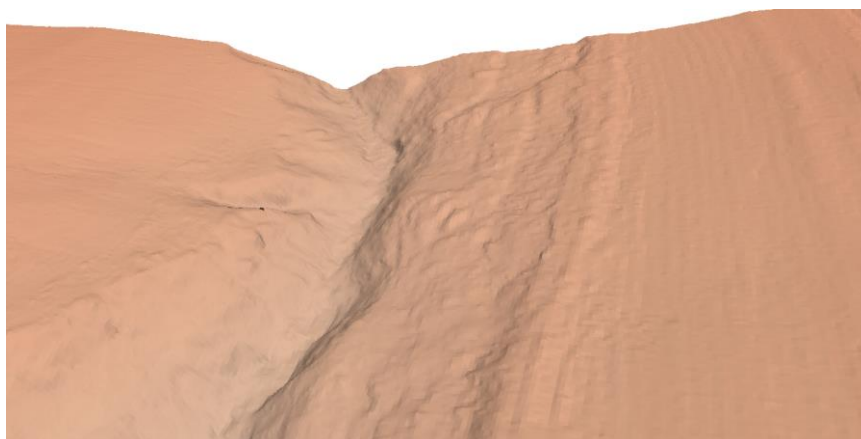
Ako parameter ω v implementovanom SOR algoritme bola použitá hodnota $\omega = 1.3$. Hodnota bola určená experimentálne tak, že sme sa snažili minimalizovať počet iterácií SOR algoritmu. Priemerne po 42 iteráciách SOR metódy bolo získané riešenie pri tolerancii 1.10^{-4} . Výpočtový čas programu bol priemerne 420s.

V tab. 4.1 je zobrazený výsledok evolúcie plochy Ω_1^L po 5 časových krokoch a tvar počiatočnej podmienky. Výsledky aj s počiatočnými podmienkami pre ostatné plochy $\Omega_i^L, i = 2, 3 \dots 8$ sú zobrazené v prílohe č.1. Tab. 4.2 reprezentuje detail zo severnej časti plochy Ω_1^L v počiatočnom stave a po 5 časových krokoch.



Tab. 4.1: Počiatočná podmienka a stav po 5 časových krokoch evolúcie plochy Ω_1^L

Počiatočná podmienka



5. časový krok



Tab. 4.2: Detail severnej časti plochy Ω_1^L v počiatočnom stave a v stave po 5 časových krokoch

Na vizualizáciách výsledkov uvedených v tab.4.1, tab. 4.2 a v prílohe č.1 vidíme, že väčšina fragmentov vegetácie a budov bola po 5. časovom kroku odstránená. Fragmenty vegetácie boli zhladené už po 2. časovom kroku, pričom po zvyšných 3 časových krokoch sa zhladila aj väčšina ostatných fragmentov. Podmienka zachovania cestných štruktúr bola splnená, avšak hranice týchto štruktúr boli v niektorých miestach tiež zhladené. Možnosťou ako zabrániť tomuto zhladzovaniu je rozšírenie modelu o krivostný detektor.

4.3.3 Krivostný detektor

Cieľom rozšírenia je vytvorenie upraveného modelu, v ktorom by rýchlosť evolúcie plochy podľa strednej krivosti v určitom bode plochy závisela od samotnej strednej krivosti v danom bode. Keďže chceme zachovať hranice cestných štruktúr potrebujeme, aby sa body, ktoré tieto hranice

tvoria (body s relatívne vyššou strednou krivosťou ako body tvoriace drobné fragmenty) nevychádzajú, resp. aby sa vyvíjali pomalšie.

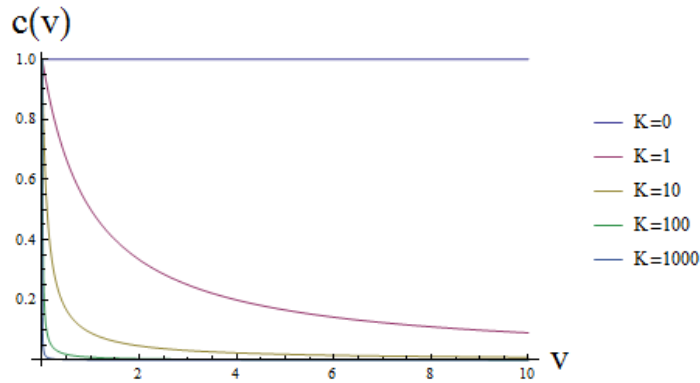
Pre rozšírený model budeme riešiť upravenú rovnicu (2.2) v tvare

$$\partial_t \mathbf{S}(t) = c(v) \Delta_s \mathbf{S}(t), \quad (4.1)$$

kde funkcia $c(v)$ predstavuje krivosťný detektor, ktorý kontroluje rýchlosť evolúcie plochy. Funkcia je závislá od absolútnej hodnoty Laplace-Beltramiho operátora vektorovej funkcie $\bar{\mathbf{S}}(t)$ a má tvar

$$c(v) = \frac{1}{1+Kv}, \quad K \geq 0, \quad v = |\Delta_s \bar{\mathbf{S}}(t)|^2 \quad (4.2)$$

Riešenie $\bar{\mathbf{S}}(t)$ reprezentuje riešenie úlohy (2.2) za časový krok τ spĺňajúci podmienku (2.25). Parameter K kontroluje citlivosť detektora na vysoké hodnoty strednej krivosti a určuje sa experimentálne.



Obr. 4.6: Tvar funkcie $g(v)$ v závislosti od parametra K

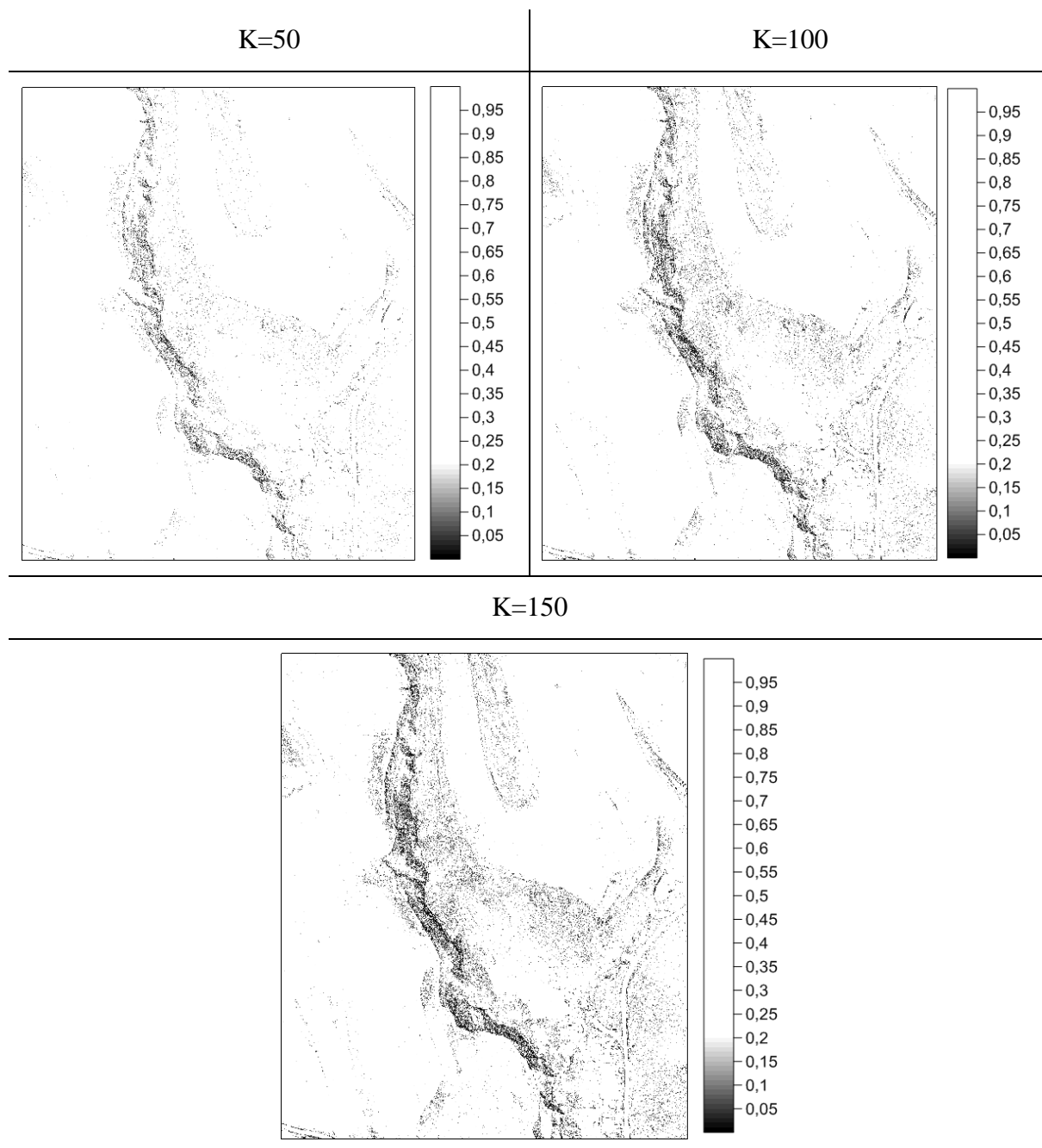
Na odvodenie výslednej výpočtovej numerickej schémy rozšíreného modelu použijeme analogicky postup uvedený v 2. kapitole a dostávame schému v tvare

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_i^j - \frac{\tau_j}{m(V_i^{j-1})} c(|\Delta_s \bar{\mathbf{S}}(t)|^2) \sum_{q=1}^{Q_i} \left[m(e_{iq}^{1,j-1}) \vec{\eta}_{iq}^{1,j-1} \cdot \mathbf{P}_{T_{iq}}^j \right. \\ \left. + m(e_{iq}^{1,j-1}) \vec{\eta}_{iq}^{1,j-1} \cdot \mathbf{P}_{T_{iq}}^j \right] = \mathbf{S}_i^{j-1}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Následne zostavíme systém lineárnych rovníc, ktorý riešime pomocou SOR metódy pri podmienke (2.25).

4.3.4 Výsledky rozšíreného modelu

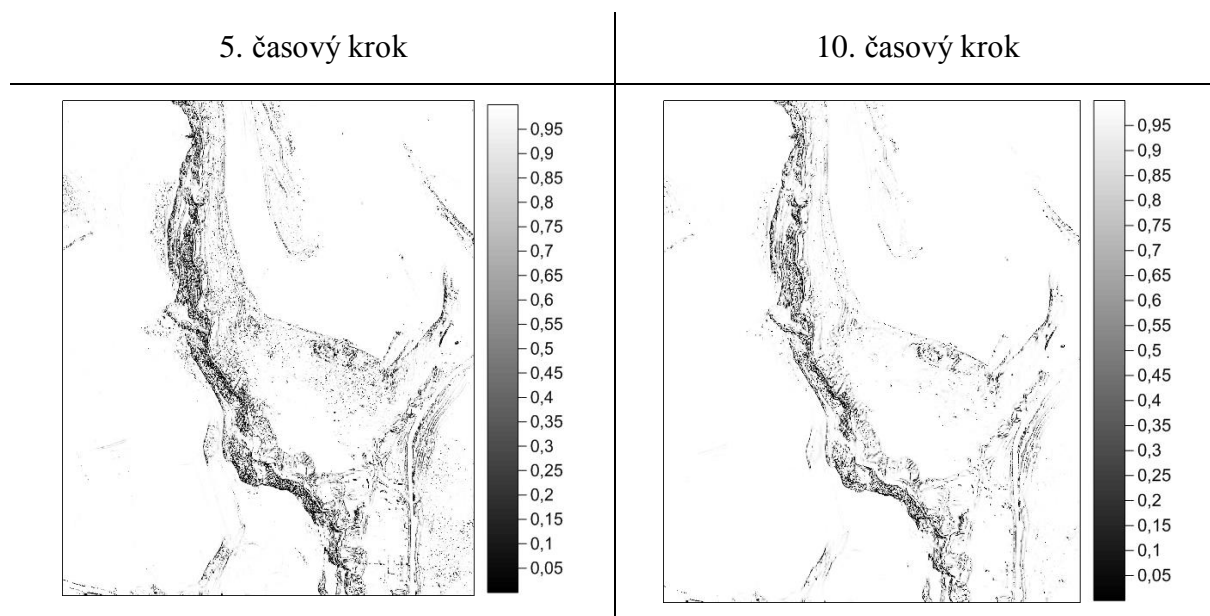
Prvým krokom bolo určenie vhodnej citlivostnej konštanty K . Parametre SOR algoritmu boli zvolené tak ako v predchádzajúcom experimente. V tab 4.3 sú vizualizované hodnoty funkcie $c(v)$ vo všetkých bodoch plochy Ω_1^L pre rôzne hodnoty K . Potrebujeme dosiahnuť, aby hodnoty funkcie $c(v)$ v bodoch tvoriacich hranicu cesty (pravý dolný sektor) boli čo najnižšie.



Tab. 4.3: Hodnoty funkcie $c(v)$ v bodov plochy Ω_1^L pre rôzne hodnoty parametra K

Na vizualizáciách v tab. 4.3 je vidieť, že už pri voľbe $K = 100$ sú hodnoty funkcie $c(v)$ v hraničných bodoch cesty v rozmedzí $0 < c(v) < 0.2$. Vidíme však, že aj v bodoch, ktoré tvoria

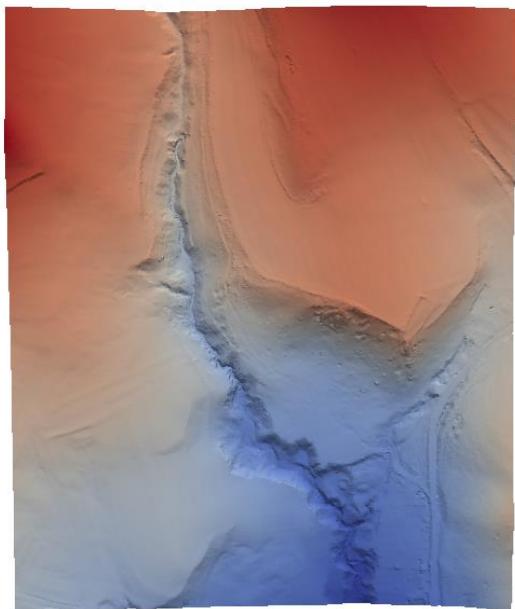
fragmenty, sú v dôsledku vysokej strednej krivosti v týchto bodoch hodnoty funkcie $c(v)$ tiež nízke. Tieto body však netvoria súvisle hranice, ale predstavujú šum, ktorý sa v každom ďalšom kroku redukuje. V tab. 4.4, v ktorej sú vizualizované hodnoty funkcie $c(v)$ pri voľbe $K = 100$ v 5 a 10 časovom kroku, vidíme, že sa tento šum redukuje a zachovávajú sa iba hrany väčších útvarov.



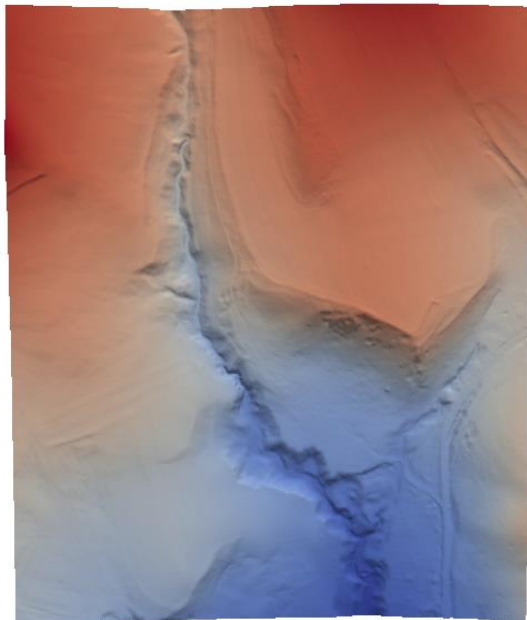
Tab. 4.4: Hodnoty funkcie $c(v)$ v bodov plochy Ω_1^L pri $K = 100$ po 5. a 10. časovom kroku

V tab. 4.5 sú uvedené už samotné výsledky experimentu vývoja plochy Ω_1^L pri $K = 100$ po 5. a po 10. časovom kroku spolu s detailmi úseku cesty. Pre porovnanie sú vizualizované spolu s výsledkami nerozšíreného modelu. Zvyšné výsledky pre plochy $\Omega_i^L, i = 2, 3 \dots 8$ sú zobrazené v prílohe č.2. Výpočtový čas programu bol priemerne 700s.

5. časový krok - rozšířený model



5. časový krok - pôvodný model

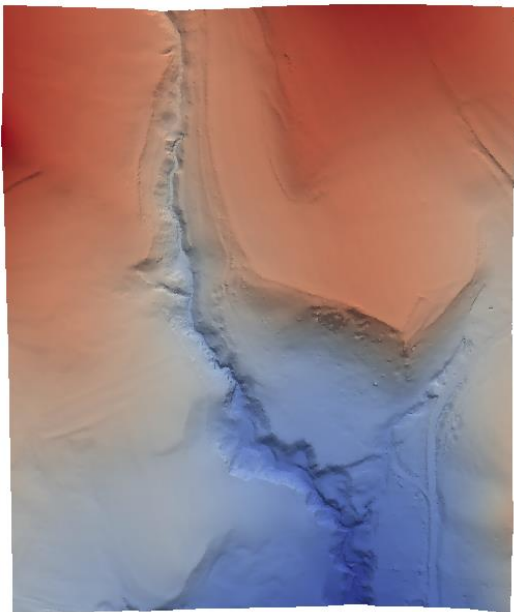
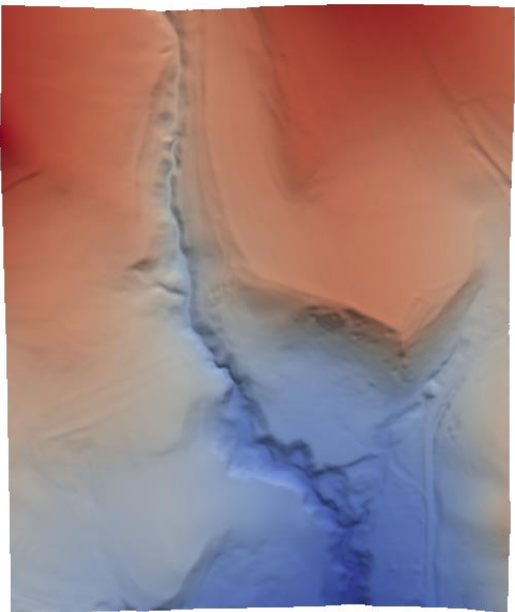




Detail cesty - rozšířený model



Detail cesty - pôvodný model



10.časový krok - rozšírený model	10. časový krok - pôvodný model
	
Detail cesty - rozšírený model	Detail cesty - pôvodný model
	

Tab. 4.5: Výsledky experimentu rozšíreného modelu po 5. a 10. časovom kroku

Z tab. 4.5 vidíme, že hranice cesty boli na rozdiel od pôvodného modelu zachované a len slabo zhladené. Po 5 časovom kroku však vidíme, že v rozšírenom modeli sa po stranách cesty nachádzali fragmenty, ktoré však po 10. časovom kroku boli z väčšej časti zredukované.

Cieľ bol splnený a dostávame využiteľný DMT, ktorý spĺňa podmienku zachovania cestných štruktúr.

4.4 Numerický experiment – Centrum Miami

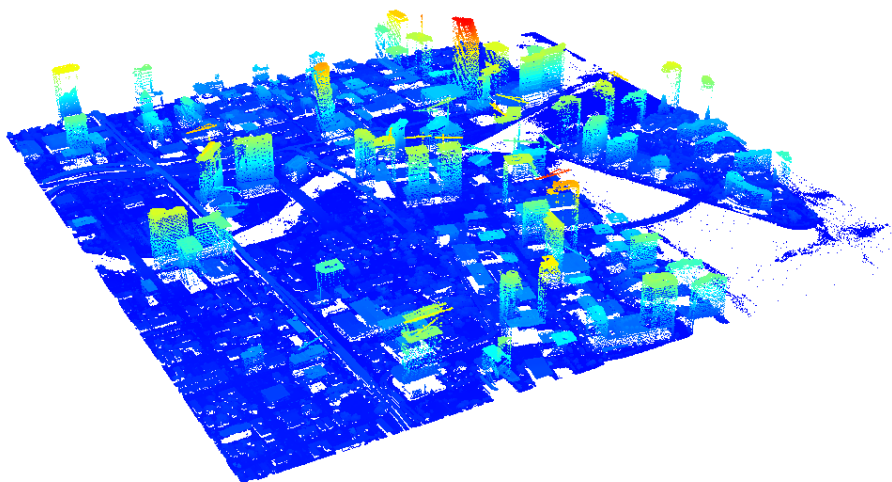
V predchádzajúcom numerickom experimente reprezentujúcom okolie dediny Kašova Lehôtka boli vstupné dáta už čiastočne upravené, teda v samotnom modeli sa v niektorých miestach vyskytovali iba stopy po vegetácii a budovách, ktoré sme sa snažili odstrániť. V tomto experimente nám ako vstupné dáta budú slúžiť neupravené dáta získané pomocou technológie LiDAR z oblasti centra Miami. (Obr. 4.7)



Obr. 4.7: Satelitná snímka oblasti dostupných dát

4.4.1 Vstupné dáta

Dáta sú voľne dostupné na stránke Florida International University [13]. Samotné dáta boli merané v rokoch 2007-2008. Na obr. 4.8 sú vizualizované vstupné dáta na pôvodnej nepravidelnej sieti. Na vizualizáciu bol použitý program lasview, ktorý obsahuje balík LAAStools [14].



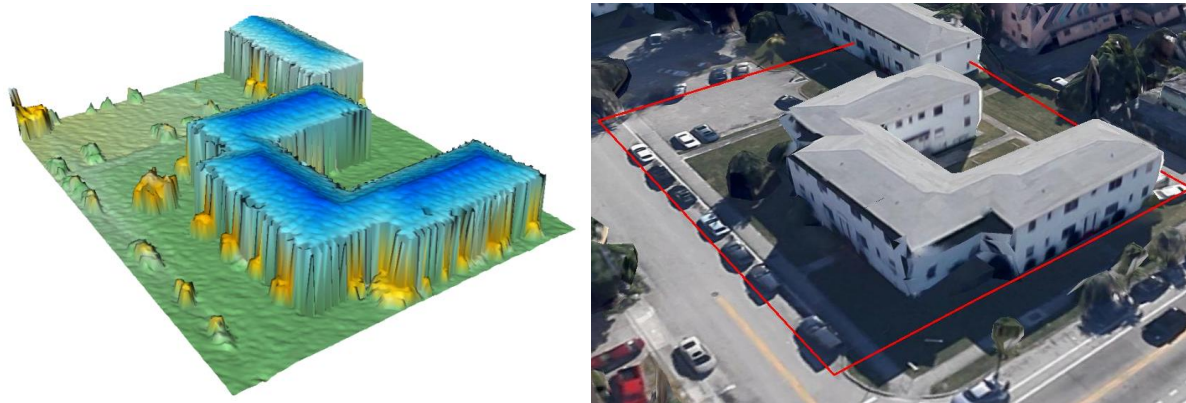
Obr. 4.8 Vizualizácia vstupných dát

Dáta sme interpolovali do pravidelnej siete predstavujúcej $0.3048 \times 0.3048 \text{ m}$. Keďže pôvodne dáta boli na dostatočne hustej sieti, aj pri tomto experimente môžeme vplyv interpolácie na tvar povrchu zanedbať. Interpoláciou sme vytvorili DMP reprezentovaný 25 010 001 bodmi. (Obr. 4.9)



Obr. 4.9 Vizualizácia interpolovaných vstupných dát na pravidelnej sieti

Vzhľadom na veľkosť vstupných dát a veľkú členitosť povrchu si zo vstupných dát na testovacie účely vyberieme malú časť a označíme ju Ω^M . Táto časť je zobrazená na obr. 4.10, pre porovnanie aj so satelitnou snímkou a modelom z aplikácie Google Earth [15].

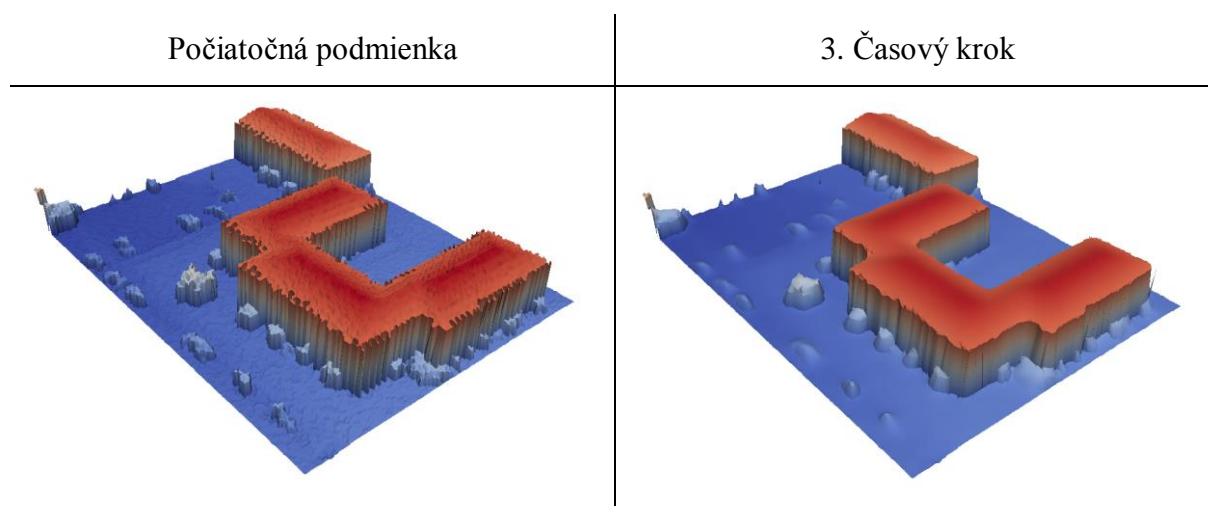


Obr. 4.10: Vizualizácie plochy Ω^M a prislúchajúcej satelitnej snímky.

Plocha je tvorená 30 351 bodmi. Na vizualizácii vidíme, že povrch je značne zašumený a vyskytujú sa tu dva technické prvky: autá a budovy spolu s vegetáciou. Cieľom je odstránenie technických prvkov okrem budov, šumu a vegetácie.

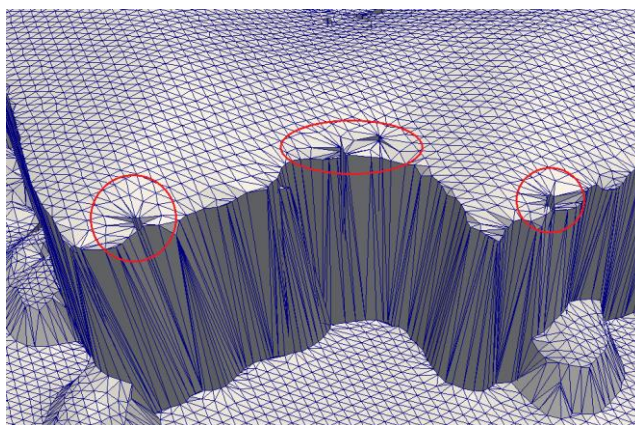
4.4.2 Výsledky

Na prvotný výpočet experimentu sme použili základný nerozšírený model (2.2). Pri výpočte sme postupovali tak ako v prípade predchádzajúceho experimentu. Parameter ω SOR metódy bol zvolený ako $\omega = 1.39$. V tab. 4.6 je zobrazená počiatočná podmienka a riešenie po 3. časovom kroku plochy Ω^M .



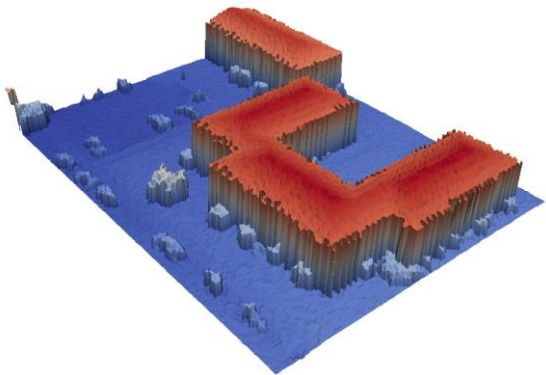
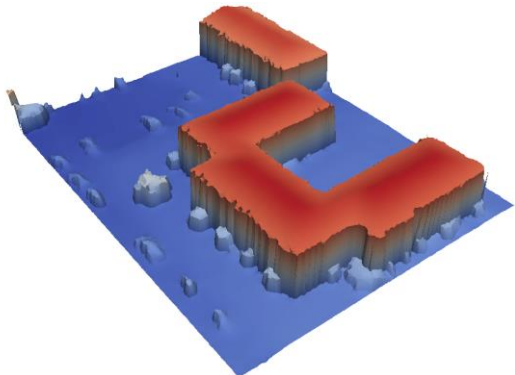
Tab. 4.6: Počiatočná podmienka a riešenie po 3. časovom kroku

Pri výpočte nastal v dôsledku deformácie siete na hranách budov problém s konvergenciou SOR metódy po 3. časovom kroku. Príklady deformácií sú na obr. 4.11. Na výsledku však vidíme, že po 3. časovom kroku bol odstránený šum a zahladené hrany budov, áut a vegetácie.



Obr. 4.11: Príklady deformácie siete výpočtovej oblasti

Požadovaný cieľ nebol splnený preto pre ďalší výpočet použijeme rozšírený model (4.1). Pre citlivostný koeficient K použijeme hodnotu $K = 10$ získanú rovnakým experimentálnym prístupom ako v predchádzajúcom experimente. V tab. 4.7 je zobrazená počiatočná podmienka a výsledok po 4. časovom kroku plochy Ω^M .

Počiatočná podmienka	4. Časový krok
	

Tab. 4.7. Počiatočná podmienka a riešenie po 4. časovom kroku

Pri rozšírenom modeli nastal rovnaký problém s konvergenciou SOR metódy po 4. časovom kroku. Avšak z výsledkov vidíme, že po 4. časových krokoch sme odstránili šum, pričom hrany technických prvkov a vegetácie ostali zachované. Aj keď nebola splnená podmienka na DMT, podarilo sa nám v oboch prípadoch odstrániť šum. Takto navrhnutá metóda vzhľadom na výsledky nie je vhodná na rekonštrukciu DMP, ktorý je veľmi členitý, resp. nachádzajú sa v ňom veľké výškové skoky. Riešením problému s deformáciou siete môže byť rozšírenie modelu o redistribúciu bodov počas evolúcie plochy.

5 Záver

Predložená práca sa zaoberala vývojom plôch podľa strednej krivosti s aplikáciou v oblasti tvorby digitálnych modelov terénu. Pre vývoj plochy v smere strednej krivosti sme definovali parabolickú diferenciálnu rovnicu, ktorá vyjadrovala tento pohyb. Následne sme odvodili diskretizáciu Laplace-Beltramiho operátora metódou konečných objemov, ktorú sme využili v úlohe evolúcie plochy podľa jej strednej krivosti a semi-implicitnú numerickú schému pre riešenie tejto úlohy.

V rámci práce boli vytvorené dva programy v jazyku C++. Prvý vytváral rôzne triangulácie uzavretej guľovej plochy a pravidelnú trianguláciu na vstupných dátach umiestnených na štvorcovej sieti. Druhý slúžil na výpočet samotnej evolúcie plochy podľa strednej krivosti. Keďže bolo potrebné pracovať s veľkým množstvom dát, musel byť program maximálne pamäťovo optimalizovaný. Pri dostupnej pamäti 7,8 GB bol program schopný počítať evolúciu plochy tvorenej až 2mil. bodov.

Správnosť numerickej schémy sme najskôr overovali testovacím experimentom pre vývoj neohraničenej guľovej plochy. Pri tomto experimente sme určovali experimentálny rád konverencie a vplyv nerovnomernej triangulácie na samotnú metódu. Ukázali sme, že pri väzbe $\tau \sim h^2$ je metóda druhého rádu, a že vplyv nerovnomernej triangulácie mal za následok pri poslednom zjemnení až 20-násobný nárast výpočtového času oproti rovnakému experimentu s rovnomernou trianguláciou. Tento nárast bol spôsobený dlhšou konvergenciou SOR algoritmu použitého na riešenie sústavy rovníc. Druhý testovací experiment sme aplikovali na ohraničenú plochu s cieľom nájsť minimálnu plochu, t.j. výpočtovú oblasť tvorila ohraničená štvorcová plocha s predpísanou Dirichletovou okrajovou podmienkou na hranici, ktorá na dvoch stranách výpočtovej oblasti predstavovala priebeh prevrátenej paraboly. Pre takto definovanú úlohu sme určili podmienku, pri ktorej môžeme plochu označiť za minimálnu. Pri treťom testovacom experimente sme využili reálne dáta predstavujúce výšky hladiny oceánov. Cieľom experimentu bolo otestovať vplyv rôznych typov Dirichletových okrajových podmienok na vývoj plochy a určiť ktoré sú, pre rôzne požiadavky na vývoj plochy, najvhodnejšie.

Pri praktických numerických experimentoch sme najskôr definovali pojmy vzťahujúce sa na digitálny model zemského povrchu a predstavili technológiu LiDAR, ktorá bola využitá pri vytváraní DMP reprezentujúceho vstupné dáta experimentu. Cieľom prvého numerického

experimentu bolo odstrániť fragmenty vegetácie, budov a iných technických prvkov s výnimkou ciest a vytvorenie digitálneho modelu terénu. V prípade základného modelu bola väčšina fragmentov vegetácie odstránená už po 3. až 5. časovom kroku. Podmienka na zachovanie cestných štruktúr bola čiastočne splnená, avšak hrany týchto štruktúr boli nepožadovane zhladené. Preto sme model rozšírili o krivostný detektor. Problém na hranách ciest bol odstránený a po 10 časových krokoch sme dostali využiteľný DMT. Model by bolo možné ešte viac optimalizovať optimalizovaním citlivostného koeficientu K .

Pri druhom numerickom experimente bola snaha o vytvorenie DMT z dostupných dát meraných technológiou LiDAR v oblasti centra Miami. Z výpočtovej oblasti bola vybraná na testovacie účely malá oblasť, na ktorej sa nachádzali technické prvky (autá a budovy) a vegetácia. Samotná testovacia výpočtová oblasť bola aj značne zašumená. Experiment sme riešili využitím základného aj rozšíreného modelu. V oboch prípadoch nastal problém konverencie SOR algoritmu, ktorý bol spôsobený deformáciou triangulácie výpočtovej oblasti. Podarilo sa, ale aspoň v prvom prípade, odstrániť šum a čiastočne zhladiť technické prvky a vegetáciu, v druhom prípade sa tiež podarilo odstrániť šum pričom sme zachovali hrany technických prvkov a prvkov vegetácie. Riešením problému s deformáciou siete počas evolúcie plochy môže byť rozšírenie modelu o redistribúciu uzlových bodov po každom časovom kroku.

Literatúra

- [1] ČUNDERLÍK, R. -- MIKULA, K. -- TUNEGA, M. Data filtering on the Earth's surface using linear and nonlinear diffusion equations (abstract). In Recent developments in geodetic theory (Session G1.1) : EGU General Assembly 2011.Vienna, Austria, 3.-8.4.2011. 2011.
- [2] TUNEGA, M. -- ČUNDERLÍK, R. -- MIKULA, K. Filtrácia geodetických dát na povrchu Zeme pomocou nelineárnych difúzných rovníc. In MAGIA 2009 : Mathematics, geometry and their applications. Conference Proceedings. Bratislava: STU v Bratislave SvF, 2009, s. 21--35. ISBN 978-80-227-3207-9.
- [3] DECKELNICK, K. -- DZIUK, G. -- ELLIOTT, C M. Computation of geometric partial differential equations and mean curvature flow. Acta Numerica Vol. 14. s. 139--232. ISSN 0962-4929.
- [4] EYMARD, R. -- GALLOUËT, T. -- HERBIN, R. -- LATCHÉ, J. Analysis tools for finite volume schemes. Acta Mathematica Universitatis Comenianae Vol. 76, No. 1. s. 111--136. ISSN 0862-9544.
- [5] G. Dziuk, C.M.Elliott, Surface finite elements for parabolic equations, Journal of Computational Mathematics, Vol. 25, No. 4 (2007) pp. 385-407
- [6] Surfer 11, <http://www.goldensoftware.com/>
- [7] Paraview 4.0.1, <http://www.paraview.org/>
- [8] ECCO2, <http://ecco2.jpl.nasa.gov/>
- [9] K. Čuláková, M. Ofúkaný, Presnosť digitálneho modelu reliéfu územia PVOD Kočín. In: Pozemkové úpravy v podmienkach EÚ, Pedagogické listy 10/2003, KMPÚ Stavebná fakulta STU Bratislava 2003
- [10] T. Bucha, M. Juriš, J. Vladovič, ODVODENIE 3-D MODELU POVRCHU KORÚN LESNÉHO PORASTU A DETEKCIA KORÚN STROMOV Z LETECKÝCH SNÍMOK S VYSOKÝM ROZLIŠENÍM, Národné lesnícke centrum - Lesnícky výskumný ústav Zvolen 2012
- [11] LiDAR, <http://oceanservice.noaa.gov/facts/lidar.html>
- [12] Z. Kmeťová, LiDAR a možnosti jeho využitia, Národné lesnícke centrum – Ústav lesných zdrojov a informatiky, Zvolen
- [13] <http://fldem.ihrc.fiu.edu/fldemlidar20120119/Default.aspx>

- [14] <http://rapidlasso.com/lastools/>
- [15] <http://www.google.com/intl/sk/earth/>
- [16] Hefty, J. - Husár, L. Družicová geodézia - globálny polohový systém. Bratislava: STU, 2003.
186 s. ISBN 80-227-1823-8

Zoznam príloh

Príloha č. 1 : Výsledky pre vývoj plôch $\Omega_i^L, i = 2, 3 \dots 8$ po 5 časových krokoch spolu s počiatočnou podmienkou.

Príloha č. 2 : Výsledky pre vývoj plôch $\Omega_i^L, i = 2, 3 \dots 8$ po 5 časových krokoch spolu s počiatočnou podmienkou pre rozšírený model.

Príloha č. 3 : CD s vytvorenými programami v jazyku C++.