

SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE
STAVEBNÁ FAKULTA

Evidenčné číslo: SvF-5343-67660

ALGORITMY EXTRAKCIE RÝCHLOSTÉHO
POL'A Z POSTUPNOSTI OBRAZOV
DIPLOMOVÁ PRÁCA

Štúdijný program: Matematicko-počítačové modelovanie
Číslo študijného odboru: 1114
Názov študijného odboru: Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko: Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie (SvF)
Vedúci diplomovej práce: Peter Sarkoci Ph.D.

Bratislava 2014

Bc. Viera Kleinová

Pod'akovanie

Touto cestou by som chcela pod'akovať Petrovi Sarkocimu, Ph.D. za cenné pripomienky a odborné konzultácie počas vypracovania tejto práce. V neposlednom rade chcem vyjadriť svoju úprimnú vďaku rodičom, ktorí ma viedli k úcte ku vzdelanosti.

Čestné prehlásenie

Vyhlasujem, že diplomovú prácu "Algoritmy extrakcie rýchlostého poľa z postupnosti obrazov" som vypracovala samostatne na základe použitej literatúry a s odbornou pomocou vedúceho práce.

Vlastnoručný podpis

Abstrakt

Úloha extrakcie rýchlostného poľa z videa spočíva v čo najvernejšej rekonštrukcii zadanej postupnosti obrazov v tvare pushforwardu aktuálneho obrazu pozdĺž neznámeho, hľadaného rýchlostného poľa. Problém je vo všeobecnosti zle definovaný - jednak hľadaných rýchlostných polí existuje vo všeobecnosti viac a ani to nezaručuje, že sa postupnosť dá zrekonštruovať dokonale. To vyžaduje voľbu vhodnej regularizácie. Naša práca sa zameria na také algoritmy v ktorých sa regularizačná podmienka odvodzuje od predpokladu o štatistickej povahe chyby v hľadanom toku.

Kľúčové slová: Optický tok, Stochastická diferenciálna rovnica, Spojitá deformácia

Abstract

Extraction of the velocity field from a video is a problem in which one asks for the best reconstruction of the datum in the form of a pushforward of the initial video frame along the flow of a suitable vector field. The problem is generally ill-posed. On one hand the vector field may not exist at all, on the other hand, there can be more vector fields that solve the problem equally well. Hence a regularization has to be employed. We discuss to such regularizations one of which is based on considerations of some inherent uncertainties within the representation of the flow.

Keywords: Optical flow, Stochastic differential equation, Continuous deformation

MSC-2010: 60H10 34F05 35Q84

Obsah

1	Úvod	1
2	Základné pojmy	2
2.1	Základé pojmy	2
2.2	Optický tok vo videu	4
2.3	Metódy regularizácie problému	6
2.3.1	Metóda Horna a Schuncka	6
2.3.2	Metóda Lucasa a Kanadeho	7
2.3.3	Metóda Mémina a Corpettiho	7
2.4	Základné pojmy v počítačovom videní	7
2.5	Základné pojmy stochastického kalkulu	8
2.6	Eulerova schéma numerického riešenia SDE	9
3	Metóda Lucasa a Kanadeho	10
4	Metóda Mémina a Corpettiho	12
4.1	Izotropický model	13
4.2	Anizotropický model	13
5	Numerické aproximácie	14
5.1	Časová diskretizácia	14
5.2	Priestorová diskretizácia	14
5.3	Konvolúcia	14
6	Numerické experimenty	15
6.1	Posun štvorcov	15
6.2	Pohyb vetvičky	15
6.3	Slniečko na rukavičke	16
7	Appendix A	21

8	Appendix B	22
8.1	Izotropický model	22
8.2	Anizotropický model	24

1 Úvod

Využitie optického toku je v dnešnej dobe veľmi široké. V medicíne sa sledujú bunky a pomocou extrakcie optického toku sa simuluje ich predpokladaný vývoj. Optický tok sa tiež používa pri automatickom sledovaní a analýze premávky na križovatke. Na základe sledovania unášaných zrníčok prachu sa dá pomocou optického toku zrekonštruovať prúdenie tekutín. V našej práci sa budeme zaoberať extrakciou optického toku v podobných prípadoch.

2 Základné pojmy

V tejto kapitole charakterizujeme všeobecné pojmy, ktoré budeme neko používať. Poskytneme aj stručný prehľad problematiky optického toku.

2.1 Základé pojmy

Pojem *obrázok* môžeme chápať ako priemet reálneho sveta na sietnicu oka. Matematický model obrázka predstavuje funkcia dvoch reálnych premenných $f: O \rightarrow \mathbb{R}^n$, kde dvojrozmerný interval $O \subseteq \mathbb{R}^2$ predstavuje obdĺžnikovú oblasť v rovine a číslo n určuje o koľko-kanálový obrázok sa jedná. Hodnotu funkcie f v danom bode nazývame *intenzitou obrázka*. Príkladom jednakanálového obrázka sú šedotónové obrázky, príkladom trojkanálového obrázka sú RGB-kódované farebné obrázky. V tejto práci sa obmedzíme na jedno-kanálové šedotónové obrázky, a v teoretickej časti práce budeme pre jednoduchosť uvažovať $O = \mathbb{R}^2$, takže obrázok budeme chápať ako zobrazenie $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Pod pojmom *deformácia* vo všeobecnosti chápeme zmenu štruktúry. Pre nás bude špeciálne dôležitý pojem *deformácie roviny*, ktorý je motivovaný geometrickou predstavou nat'ahovania a stláčania pružného rovinného materiálu. Pri takomto posúvaní častí roviny sa premiestňujú jednotlivé jej body na nové pozície. Tento aspekt deformácie je plne popísaný zobrazením $d: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, ktoré pôvodným pozíciám bodov, pred deformáciou, priradí nové pozície, po deformácii.

Uvažujme situáciu, že popri deformácii d je v rovine deformovaný aj obrázok f . Zamyslime sa nad tým ako čo najprirodzenejšie chápať *deformáciu obrázka*. Chceme, aby novým polohám bodov, po deformácii, boli priradené rovnaké intenzity obrázka, aké sú priradené bodom pred deformáciou. Takýto pohľad na vec zodpovedá intuitívnej predstave obrázka nakresleného na pružnom rovinnom materiáli. Hľadáme teda nový obrázok $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, pre ktorý platí $g(\mathbf{x}') = f(\mathbf{x})$, kde \mathbf{x}' je nová poloha bodu a \mathbf{x} jeho pôvodná poloha. Teraz ideme hľadať hodnotu g v bode \mathbf{x}' . Pomocou deformácie v opačnom smere zistíme jeho vzor \mathbf{x} . Pri deformácii v opačnom smere, takzvanej inverzii, môžu nastať problémy. Ak by nastala situácia, že jeden obraz \mathbf{x}' má viacero rôznych vzorov napríklad \mathbf{x}_1 a \mathbf{x}_2 , ktorých hodnoty intenzít môžu byť vo všeobecnosti rôzne, potom pri inverzii nevieme rozhodnúť, či intenzita deformovaného obrázka v bode \mathbf{x}' je rovná hodnote intenzity pôvodného obrázka v bode \mathbf{x}_1 alebo \mathbf{x}_2 . Takýto problém môže nastať ak zobrazenie d nieje injektívnym zobrazením. Taktiež môže nastať situácia, že niektoré body nemajú v d vzor. Takýmto

bodom tiež nevieme priradiť inverziu. Toto sa stane práve vtedy, keď d nieje surjektívnym zobrazením. Aby sme sa takýmto problémom vyhli uvažujeme, že zobrazenie d je bijektívnym zobrazením. Teraz môžeme tvrdiť že k zobrazeniu d existuje inverzné zobrazenie $d^{-1}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Keď zistíme prislúchajúcu polohu \mathbf{x} k \mathbf{x}' potom môžeme pomocou funkcie f priradiť \mathbf{x}' rovnakú reálnu hodnotu aká je priradená prislúchajúcemu \mathbf{x} tak, že platí $g(\mathbf{x}') = f(d^{-1}(\mathbf{x}'))$. To je ekvivalentné tvrdeniu, že $g = f \circ d^{-1}$ a takému zobrazeniu hovoríme *pushforward* f pozdĺž d a označujeme ho $d_* f$. Alternatívne ho môžeme definovať ako také zobrazenie g , pre ktoré diagram

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{d} & \mathbb{R}^2 \\ & \searrow f & \downarrow g \\ & & \mathbb{R} \end{array}$$

komutuje.

V tejto práci nás hlavne zaujíma *video*. Budeme ho modelovať pomocou zobrazenia $m: \mathbb{R}^2 \times T \rightarrow \mathbb{R}$, kde T predstavuje množinu časových okamihov a štandardne uvažujeme $T = \mathbb{R}_0^+$. Jednoducho povedané zaoberáme sa sekvenciou obrázkov, čiže zmenou obrázka v čase. Pre každý časový okamih $t \in T$ definujeme

$$m^t: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: \mathbf{x} \mapsto m(\mathbf{x}, t)$$

kde m^t je vlastne rez videom m v čase t . Inak povedané m_t je snímok videa m .

Uvažujme plynulo sa meniacu deformáciu ako zobrazenie $h: \mathbb{R}^2 \times T \rightarrow \mathbb{R}^2$. Poznamenajme, že takéto zobrazenie h , ak je spojité, je špeciálnym prípadom homotópie v rovine a v rámci tejto práce mu preto budeme hovoriť jednoducho *homotópia*. Podobne ako pri videu, tak aj pri homotópii h pre každý časový okamih $t \in T$ definujeme

$$h^t: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: \mathbf{x} \mapsto h(\mathbf{x}, t)$$

kde h^t je rez homotópie h v čase t . Je zrejmé, že $h_*^t m^0$ pre plynulo sa meniaci parameter t tvorí video. Ak je toto video totožné s videom m , čiže ak platí

$$m^t = h_*^t m^0 \tag{1}$$

pre všetky $t \in T$, tak hovoríme, že homotópia h je s videom *opticky konzistentná*.

V špeciálnych prípadoch, keď je homotópia h navyše aj hladká v čase, tak je jej štruktúra v každom okamihu popísaná *rýchlostným polom*

$$v^t: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: \mathbf{x} \mapsto \partial_t h(\mathbf{x}, t)$$

Toto rýchlostné pole v si môžeme predstaviť aj tak, že si zafixujeme ľubovoľný bod v rovine a sledujeme jeho pohyb v rámci homotópie. V každom časovom okamihu rýchlostné pole v určuje smer a rýchlosť pohybu zvoleného bodu v čase t .

Optický tok vo videu je vektorové pole, ktoré popisuje takú homotópiu, ktorá je s ním opticky konzistentná. Ako vyzerá podmienka konzistencie (1) v reči vektorového poľa rýchlostí?

Majme dané video m a homotópiu h , ktorá je s ním opticky konzistentná, z toho vyplýva, že platí rovnica (1). Po zderivovaní rovnice (1) podľa času dostaneme pre každé $t \in T$, vzt'ah

$$\partial_t m^t + \nabla m^t \cdot v^t = 0 \tag{2}$$

Keďže vzt'ah (2) platí pre všetky časové okamihy $t \in T$ môžeme ho zapísať v kompaktnom tvare

$$\partial_t m + v \cdot \nabla m = 0 \tag{3}$$

Rovnica (3) predstavuje podmienku optickej konzistencie v diferenciálnom tvare a v literatúre sa uvádza pod názvom *gradientné obmedzenie*.

2.2 Optický tok vo videu

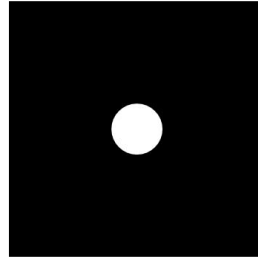
Úloha o optickom toku znie takto: v zadanom videu nájsť postupnosť rýchlostých polí, tak aby boli v každom časovom okamihu s videom opticky konzistentné. Riešenie sa nezdá byť na prvý pohľad komplikované, ale opak je pravdou. Môžu nastať rôzne situácie, ktoré by skomplikovali riešenie úlohy, napríklad tok nemusí vôbec existovať, alebo naopak môže existovať príliš veľa tokov.

Predstavme si situáciu, kedy video je na začiatku celé čierne a postupom času sa v ňom objaví biely kruh. To znamená, že snímok m^0 v čase $t = 0$ je celý čierny a napríklad snímok m^1 v čase $t = 1$ je celý čierny a v strede je biely kruh. Snímky takéhoto videa môžete vidieť na Obr.1 a Obr.2. Matematicky takéto video môžeme zapísať v tvare

$$m(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} 1 & \text{ak } \|\mathbf{x}\|_2 < t, \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$



Obr. 1: Snímok m^0 .



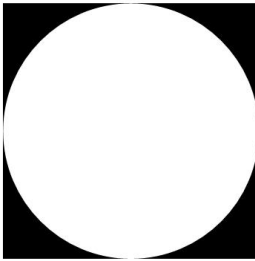
Obr. 2: Snímok m^1 .

Žiaľ neexistuje také h^1 , ktoré by plynulo zdeformovalo čistý čierny snímok m^0 na snímok m^1 s bielym kruhom, lebo deformáciou sice pridáme bodom nové polohy, ale hodnoty intenzít sa nemenia a spojitým deformovaním čisto čiernych bodov vzniknú opäť len čierne body. Preto h^1 nieje v tejto situácii spojitým zobrazením a teda neexistuje tok.

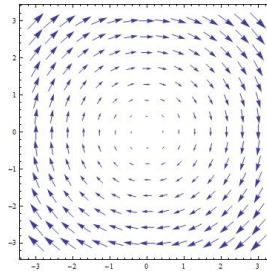
Taktiež môže nastať situácia, kedy existuje viac opticky konzistentných tokov. Pod takouto situáciou si môžeme predstaviť video, v ktorom je biely kruh na čiernom pozadí. Každý snímok m^t , pre všetky $t \in T$, takéhoto videa vyzerá rovnako, ako je to znázornené na Obr.3. Matematický zápis takéhoto videa je veľmi jednoduchý

$$m(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} 1 & \text{ak } \|\mathbf{x}\|_2 < 1, \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$

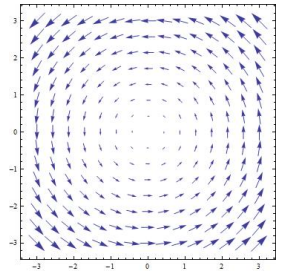
Pozorovateľovi sa zdá, že kruh stojí, ale nemusí to tak byť. Kruh sa môže točiť do prava a jeho tok môžeme popísať rýchlostným poľom v tvare $v(x_1, x_2) = (x_2, -x_1)$ a znázorniť pomocou Obr.4. Taktiež sa kruh môže točiť do ľava a jeho tok môžeme taktiež popísať pomocou rýchlostného poľa v tvare $v(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$ a znázorniť pomocou Obr.5.



Obr. 3: Video, v každom časovom okamihu.



Obr. 4: Tok kruhu točiaceho sa vpravo.



Obr. 5: Tok kruhu točiaceho sa vľavo.

Matematický problém je dobre položeným problémom (anglicky: *well-posed problem*), ak spĺňa vlastnosti definované Jacques Hadamardom:

- riešenie existuje
- riešenie je jediným riešením
- správanie riešenia sa mení s počiatočnými podmienkami

Problém, ktorý nespĺňa tieto vlastnosti nazývame zle položeným problémom (anglicky *ill-posed problem*). Z vyššie uvedených komplikácií riešenia úlohy vyplýva, že náš problém je *ill-posed problem* a je potrebné ho regularizovať.

2.3 Metódy regularizácie problému

Hlavnou myšlienkou regularizácie je zbavenie sa nejednoznačností a zlepšenie stability riešenia. Za veľmi jednoduchú formu regularizácie možno považovať metódu najmenších štvorcov. Takúto regularizáciu používa metóda Horna a Schuncka, metóda Lucasa a Kanadeho a tiež metóda Mémina a Corpettiho.

2.3.1 Metóda Horna a Schuncka

Metóda Horna a Schuncka [1] patrí medzi globálne diferenciálne metódy. Rýchlostné vektorové pole sa vypočíta v tvare

$$v = \arg \min_v \int_{\mathbb{R}^2} ((\partial_t m + v \cdot \nabla m) + \alpha^2(\nabla^2 v_1^2 + \nabla^2 v_2^2))$$

kde v_1 a v_2 sú jednotlivé zložky vektorového poľa v a $\alpha > 0$ je regularizačná konštanta.

Výhody metódy:

- hladký tok
- berie do úvahy globálne informácie v tvare $(\nabla^2 v_1^2 + \nabla^2 v_2^2)$

Nevýhody metódy:

- iteratívne metódy riešenia sú pomalé
- metóda preferuje neostré hrany

2.3.2 Metóda Lucasa a Kanadeho

Metóda Lucasa a Kanadeho patrí medzi lokálne diferenciálne metódy. Metóda je veľmi podobná metóde Horn-Schunck. Predpokladom metódy je, že rýchlostné pole v je v okolí bodu \mathbf{x} konštantné. Cieľom metódy je získať rýchlostné vektorové pole v tvare

$$v = \arg \min_v \int_{\mathbb{R}^2} g_\sigma(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \cdot (\partial_t m + v \cdot \nabla m)^2(\mathbf{x}') d\mathbf{x}'$$

kde g_σ je Gaussovské jadro s disperziou σ a stredom v bode \mathbf{x} .

Výhody metódy:

- jednoduchý a rýchly výpočet
- presné časové derivácie

Nevýhody metódy:

- vznikajú chyby na hraniciach

2.3.3 Metóda Mémina a Corpettiho

Metóda Mémina a Corpettiho vychádza z metódy Lucasa a Kanadeho. Hlavným rozdielom metód je, že metóda Mémina a Corpettiho predpokladá, že vektorové pole v so sebou nesie istú vnútornú neistotu. Toto sa prejaví tým, že regularizovaný model je tvaru

$$v = \arg \min_v \int_{\mathbb{R}^2} g_\sigma(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \cdot g_\Sigma(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \cdot (\partial_t m + v \cdot \nabla m + \mathcal{F}(m))$$

kde $\mathcal{F}(m)$ predstavuje príspevok v dôsledku nejasej informácie o hodnote v a g_Σ je dodatočné konvolučné jadro reprezentujúce túto neistotu.

2.4 Základné pojmy v počítačovom videní

Pri digitalizácii obrázka nastáva prechod zo spojitých funkcií $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ k diskretným funkciám $F: L \rightarrow \mathbb{R}$, kde $L = \mathbb{Z}_k \times \mathbb{Z}_l$ predstavuje diskretnú dvojrozmernú mriežku, kde $k, l \in \mathbb{N}$. Pomocou digitalizácie obrázka môžeme previesť grafické informácie do digitálneho tvaru. Digitalizované obrázky sú definované v L a nadobúdajú hodnoty len z diskretných množín intenzít.

Pixel je najmenšia jednotka digitálnej grafiky. Jeden pixel predstavuje jeden bod obrázka, ktorý je zadaný súradnicami a hodnotou funkcie intenzity F .

V práci sa venujeme videu, a preto je na mieste aj otázka jeho diskretizácie. Táto otázka je už z časti vyriešená, stačí ak množinu časov T nahradíme diskrétnou postupnosťou prirodzených čísiel \mathbb{N} . Pre potreby výpočtu optického toku nieje dôležité video ako také, ale sú dôležité jeho dva časové rezy v dvoch bezprostredne po sebe nasledujúcich okamihoch t a $t + 1$. Preto si môžeme dovoliť hovoriť o predchádzajúcom snímku, v čase t , ktorého funkciu intenzity budeme ďalej označovať F a nasledujúcom snímku, v čase $t + 1$, ktorého funkciu intenzity budeme označovať G . Rýchlostné pole V , ktoré pre takto zadané snímky hľadáme je tiež definované na množine L a nadobúda hodnoty z \mathbb{R}^2 .

2.5 Základné pojmy stochastického kalkulu

V tejto podkapitole si iba stručne spomenieme základné pojmy stochastického kalkulu.

Pravdepodobnostným priestorom nazveme usporiadanú trojicu (Ω, \mathcal{A}, P) , kde Ω je množina všetkých možných elementárnych javov, \mathcal{A} je σ -algebra na množine Ω a P pravdepodobnostná miera. Zobrazenie $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ je *náhodná premenná* na pravdepodobnostnom priestore (Ω, \mathcal{A}, P) , ak pre každé $t \in T$ platí $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) < t\} \in \mathcal{A}$.

Stochastický proces [6] na pravdepodobnostnom priestore (Ω, \mathcal{A}, P) s množinou časov T je zobrazenie $U: \Omega \times T \rightarrow \mathbb{R}$ také, že pre každé $t \in T$ je zobrazenie $U_t: \Omega \rightarrow \mathbb{R}: \omega \mapsto U(\omega, t)$ náhodná premenná.

Zobrazeniu U_t sa hovorí *náhodná premenná procesu U v čase t* .

Prírastok stochastického procesu U na intervale $[t, u]$ je náhodná premenná $U_u - U_t$ (čiže rozdiel medzi hodnotou, ktorú proces nadobúda v čase t a hodnotou, ktorú nadobúda v čase u).

Brownov pohyb je stochastický proces $B: \Omega \times T \rightarrow \mathbb{R}$ s vlastnosťami:

1. $P[B_0 = 0] = 1$
2. pre každé $t, u \in T$, kde $t < u$ a platí $(B_u - B_t) \sim N(0, u - t)$
3. pre každé $s, t, u \in T$, kde $s < t < u$ a platí $B_s \perp (B_u - B_t)$

Stochastické diferenciálne rovnice (ďalej len SDE) vznikajú vnesením takzvaného *šumu*, stochastického vplyvu, do obyčajných diferenciálnych rovníc. Šum je stochastický proces $S: \Omega \times T \rightarrow \mathbb{R}$, ktorý má nasledovné tri vlastnosti:

1. $E[S_t] = 0$ pre každé $t \in T$
2. $S_t \perp S_u$ pre $t \neq s$
3. proces S je *stacionárny*. To znamená, že pre každé $n \in \mathbb{N}$, pre každé $t \in T$ a pre každé $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$ je $(S_{t_1}, S_{t_2}, \dots, S_{t_n}) \sim (S_{t_1+t}, S_{t_2+t}, \dots, S_{t_n+t})$

Nech $S: \Omega \times T \rightarrow \mathbb{R}$ je stochastický proces. *Stochastická diferenciálna rovnica* riadená procesom S je rovnica o neznámom stochastickom procese $X: \Omega \times T \rightarrow \mathbb{R}$ tvaru

$$\frac{dX_t}{dt} = \mu(X_t, t) + \sigma(X_t, t)S_t \quad (4)$$

kde $\mu: \mathbb{R} \times T \rightarrow \mathbb{R}$ sa nazýva *deterministickým členom* a $\sigma: \mathbb{R} \times T \rightarrow \mathbb{R}$ *stochastickým členom* SDE.

O stochastickom procese $I: \Omega \times T \rightarrow \mathbb{R}$ hovoríme, že je *Itôovský* ak sa dá vyjadriť ako súčet Riemannovho integrálu a Itôovho integrálu v tvare

$$I_t = I_0 + \int_0^t d(B_s, s)ds + \int_0^t v(B_s, s)dB_s$$

kde B je Brownov pohyb a $d, v: \mathbb{R} \times T \rightarrow \mathbb{R}$. Funkciu d nazývame *driftom* a funkciu v *volatilitou*

2.6 Eulerova schéma numerického riešenia SDE

Švajčiarsky matematik a fyzik Leonhard Paul Euler publikoval v roku 1768 aproximačnú schému na riešenie obyčajných diferenciálnych rovníc. Túto schému modifikoval v roku 1950 Maruyama tak, že umožňovala riešiť SDE. Preto sa Eulerovej schéme hovorí aj Euler-Maruyamova aproximácia [2] [4]. Numerické metódy riešenia SDE spočívajú v nahradení skutočného riešenia $X: \Omega \times T \rightarrow \mathbb{R}$ stochastickým procesom $Y: \Omega \times T \rightarrow \mathbb{R}$.

Eulerova schéma je najjednoduchšou explicitnou metódou riešenia SDE. V praxi sa využíva málo, ale slúži ako základ pre konštrukciu zložitejších schém. Presný tvar Eulerovej schémy pre SDE v tvare (4) je:

$$Y_{n+1} = Y_n + \mu(Y_n, \tau_n)\Delta\tau_n + \sigma(Y_n, \tau_n)\Delta B_n$$

kde $\Delta\tau_n = \tau_{n+1} - \tau_n$ je dĺžka n -tého časového kroku a $\Delta B_n = B_{\tau_{n+1}} - B_{\tau_n}$ je prírastok Brownovho procesu B v n -tom časovom kroku. Náhodná premenná ΔB_n má rozdelenie $N(0, \Delta\tau_n)$.

3 Metóda Lucasa a Kanadeho

Bruce D. Lucas a Takeo Kanade [3] vyvinuli jednu z najpoužívanějších diferenciálnych metód na odhad optického toku.

Ako sme už spomínali rovnica (3) je ill-posed problém, to znamená, že rýchlostné pole v vo všeobecnosti neexistuje alebo vykazuje vysokú priestorovú variabilitu. Keďže riešenie rovnice (3) neexistuje snažíme sa nájsť čo najbližšie riešenie. Hľadáme také rýchlostné pole v , pre ktoré by výraz $\partial_t m + v \cdot \nabla m$ bol čo najbližšie k 0. Takáto situácia nastane práve vtedy, keď $(\partial_t m + v \cdot \nabla m)^2$ bude nadobúdať pre v minimum. V takomto prípade rýchlostné pole v vypočítame nasledovne

$$v = \arg \min_v (\partial_t m + v \cdot \nabla m)^2 \quad (5)$$

Rovnica (5) je riešiteľná a v nájdeme vždy. Žiaľ pole, ktoré rieši problém (5) zvyčajne vykazuje vysokú priestorovú variabilitu, to znamená, že jeho zmeny sú veľké aj v rámci malých častí roviny. Takéto riešenie však nieje prijateľným riešením a preto vyžaduje regularizáciu.

Najjednoduchším obmedzením, ktoré môžeme klásť na rýchlostné pole v je, aby bolo čo najkonštantnejšie. Lenže ani toto obmedzenie nieje najlepšou voľbou, lebo v sa skoro vôbec nemení a všetky body obrázku by sa pohybovali približne rovnakým smerom a rýchlosťou.

Lucas a Kanade hľadajú také rýchlostné pole v , aby bolo čo najkonštantnejšie aspoň v malých okoliach bodov. Metóda je navrhnutá tak, aby prechádzala body v blízkom okolí bodu \mathbf{x} a počítala vážený priemer, pričom sa predpokladá, že hodnoty váh klesajú so zväčšujúcou sa vzdialenosťou. Štandardná voľba predstavuje Gaussovo konvolučné jadro. Rýchlostné vektorové pole v bode \mathbf{x} sa vypočíta v tvare:

$$v = \arg \min_v \int_{\mathbb{R}^2} g_\sigma(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \cdot (\partial_t m + v \cdot \nabla m)^2(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \quad (6)$$

kde $(\mathbf{x}' - \mathbf{x})$ je posun stredu Gausovského jadra do bodu \mathbf{x} a g_σ je Gaussovské jadro s disperziou σ dané vzt'ahom

$$g_\sigma(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi\sigma} \exp \frac{-(\mathbf{x}' - \mathbf{x})}{2\sigma^2}$$

Vektor v , ktorý rieši minimalizačnú úlohu (6) môžeme získať riešením sústavy

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_i \\ B_j \end{pmatrix}$$

kde

$$A_{i,j} = \int_{\mathbb{R}^2} g_{\sigma}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \cdot \partial_{x_i} m(\mathbf{x}', t) \partial_{x_j} m(\mathbf{x}', t) d\mathbf{x}'$$

a

$$B_i = \int_{\mathbb{R}^2} g_{\sigma}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \cdot \partial_{x_i} m(\mathbf{x}', t) \partial_t m(\mathbf{x}', t) d\mathbf{x}'$$

pre $i, j = 1, 2$. Odvodenie tohoto tvrdenia môžete nájsť v Appendixe A.

4 Metóda Mémina a Corpettiho

Metóda Mémina a Corpettiho je modifikovanou metódou Lucasa a Kanadeho. Mémin a Corpetti [5] zavádzajú do problematiky SDE. K rovnici gradientného obmedzenia (3) pridajú stochastický člen $\mathcal{F}(m)$. Tento člen závisí od toho, či sa jedná o izotropický alebo anizotropický model. Rýchlostné pole počítame nasledovne:

$$v = \arg \min_v \int_{\mathbb{R}^2} g_\sigma(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \cdot g_\Sigma(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \cdot (\partial_t m + v \cdot \nabla m + \mathcal{F}(m))^2 \quad (7)$$

kde odhad rozptylu je daný vzt'ahom

$$\sigma_\eta(X_t) = \sqrt{\frac{\mathbb{E}(m(X_t, t) - m(X_{t-1}, t-1))^2}{\mathbb{E}(\|\nabla m(X_t, t)\|^2)}}$$

Pre túto metódu uvažujeme SDE ako stochastickú funkciu jasu, pre ktorú platí:

$$dX_t = v(X_t, t)dt + \Sigma(t, X_t)dB_t \quad (8)$$

kde B je viacdimenzionálny Brownov pohyb, Σ je kovariančná matica a pre dX_t platí $dX_t = X_t - X_{t-1}$.

Uvažujeme Itôovu lemmu v 2D v tvare:

$$df(X_t, t) = \frac{\partial m}{\partial t} dt + \sum_{i=(1,2)} \frac{\partial m(X_t, t)}{\partial x_i} dX_t^i + \frac{1}{2} \sum_{(i,j)=(1,2) \times (1,2)} \frac{\partial^2 m(X_t, t)}{\partial x_i \partial x_j} d\langle X_t^i, X_t^j \rangle \quad (9)$$

kde člen $\langle X_t^i, X_t^j \rangle$ označuje kvadratickú variáciu X^i a X^j , ktorá je daná nasledovnými pravidlami:

- $\langle B^i, B^j \rangle = \delta_{ij}t$
 - $\delta_{ij} = 1$ if $i = j$
 - $\delta_{ij} = 0$ otherwise
- $\langle h(t), B^i \rangle = \langle B^j, h(t) \rangle = 0$
- $\langle h(t), h(t) \rangle = 0$

kde $h(t)$ je deterministická funkcia. Rozlišujeme dva modely izotropický a anizotropický.

4.1 Izotropický model

V izotropickom modeli uvažujeme rozptyl ako zobrazenie $\sigma(X_t, t): \mathbb{R}^2 \times T \rightarrow \mathbb{R}$ a pre kovariančnú maticu platí:

$$\Sigma(t, X_t)dB_t = \text{diag}(\sigma(X_t, t)) \otimes \mathbb{I}_2 dB_t \quad (10)$$

kde \mathbb{I}_2 je (2×2) identická matica a \otimes predstavuje Kroneckerov súčin. Aplikovaním Itôovej formuly na izotropický model dostaneme zmenu jasú definovanú ako:

$$dm(X_t, t) = \left(\frac{\partial m}{\partial t} + \nabla m \cdot v + \frac{1}{2} \sigma^2 \Delta m \right) dt + \sigma \nabla m \cdot dB_t \quad (11)$$

Odvodenie pre získanie zmeny jasú v tvare (11) môžete nájsť v Appendixe B.

4.2 Anizotropický model

Anizotropický model môžeme použiť na základe neistôt pozdĺž normály s rozptylom σ_η a tangenciály s rozptylom σ_τ . Pre kovariančnú maticu platí:

$$\Sigma(t, X_t)dB_t = \text{diag}(\sigma_\eta(X_t, t)) \otimes \eta dB_t^\eta + \text{diag}(\sigma_\tau(X_t, t)) \otimes \tau dB_t^\tau \quad (12)$$

kde vektory $\eta = \frac{1}{|\nabla m|} \begin{pmatrix} \partial_{x_1} m \\ \partial_{x_2} m \end{pmatrix}$ a $\tau = \frac{1}{|\nabla m|} \begin{pmatrix} -\partial_{x_2} m \\ \partial_{x_1} m \end{pmatrix}$ predstavujú normálu a tangenciálu, B^η a B^τ sú dva skalárne a nezávislé viacdimeznionálne Brownove šumy. Aplikovaním Itôovej formuly na anizotropický model dostaneme zmenu jasú definovanú ako:

$$dm(X_t, t) = \left(\frac{\partial m}{\partial t} + \nabla m \cdot v + \frac{\nabla m^T \nabla^2 m \nabla m}{2|\nabla m|^2} (\sigma_\eta^2 - \sigma_\tau^2) + \frac{\sigma_\tau^2 \Delta m}{2} \right) dt + \sigma_\eta \|\nabla m\| dB_t^\eta + \sigma_\tau \nabla m^T \tau dB_t^\tau \quad (13)$$

Odvodenie pre získanie zmeny jasú v tvare (13) môžete nájsť v Appendixe B.

5 Numerické aproximácie

Numerické riešenie hľadáme na diskretizovanej oblasti L . Pre časovú aj priestorovú diskretizáciu použijeme metódu konečných diferencií.

5.1 Časová diskretizácia

Z hľadiska našej metódy je čas medzi F a G rovný 1, preto si môžeme dovoliť časovú deriváciu diskretizujeme doprednou diferenciou v tvare:

$$\partial_t m \approx G(x_1, X_2) - F(x_1, x_2)$$

5.2 Priestorová diskretizácia

Derivácie nahradzujeme diferenciami. Keďže v práci používame aj druhé derivácie tak musíme diskretizovať aj tie. Na aproximovanie použijeme priestorovú diskretizáciu a pre jednotlivé smery dostaneme:

$$\begin{aligned}\partial_{x_1} m &\approx \frac{F(x_1 + 1, x_2) - F(x_1 - 1, x_2)}{2h} \\ \partial_{x_1 x_1} m &\approx \frac{F(x_1 + 1, x_2) - 2F(x_1, x_2) + F(x_1 - 1, x_2)}{h^2} \\ \partial_{x_2} m &\approx \frac{F(x_1, x_2 + 1) - F(x_1, x_2 - 1)}{2h} \\ \partial_{x_2 x_2} m &\approx \frac{F(x_1, x_2 + 1) - 2F(x_1, x_2) + F(x_1, x_2 - 1)}{h^2}\end{aligned}$$

kde h predstavuje priestorový krok.

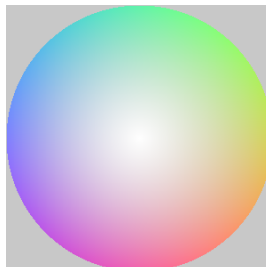
5.3 Konvolúcia

Pri riešení konvolúcie počítame integrál, ktorý pri diskretizácii nahradzame sumou. Zvolíme si bod \mathbf{x} a prechádzame všetky body oblasti $l \in L$ a ich hodnoty intenzít $F(l)$ konvolvujeme s Gaussovským jadrom sústredeným v strede \mathbf{x} . Pre každý bod dostaneme:

$$\sum_{l \in L} g(l_1 - x_1, l_2 - x_2) \cdot F(l)$$

6 Numerické experimenty

V tejto kapitole sa budeme venovať výsledkom numerických experimentov. A všetky vektorové polia kódujeme podľa Obr.6



Obr. 6: Farebné kódy rovinných vektorov.

6.1 Posun štvorcov

Metódy sme testovali na jednoduchom príklade dvoch štvorcov. Vychádzame z počiatočného snímku F , na ktorom sa nachádzajú dva štvorce, zobrazeného na Obr.7. Na nasledujúcom snímku G zobrazenom na Obr.8 sa posunie ľavý štvorec nadol a pravý do prava. Medzi snímkami F a G sa snažíme nájsť rýchlostné pole.

Rýchlostné pole nájdené pomocou metódy Lucasa a Kanadeho je zobrazené na Obr.9 a bolo nájdené po 95-tich iteráciách. Celkový čas výpočtu bol 752.828003 sekúnd. Výsledný obrázok, ktorý sme nechali unášať v protismere rýchlostného poľa je zobrazený na Obr.11. Prírastky vektorového poľa pozdĺž iterácií sú znázornené na Obr.10.

6.2 Pohyb vetvičky

Zaujímavým príkladom je pohyb vetvičky na strome, ktorý sa pohne smerom nadol, ako to je vidieť na dvoch po sebe idúcich snímkoch F a G , zobrazených na Obr.13 a Obr.14.

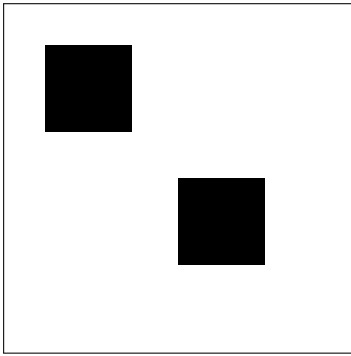
Výsledné rýchlostné pole zobrazené na Obr.15 získané metódou Lucasa a Kanadeho bolo nájdené pri 22 iterácii s časom výpočtu 500.807007 sekúnd. Prírastky vektorového poľa pozdĺž iterácií sú zobrazené na Obr.16 a výsledný obrázok na Obr.17.

6.3 Slniečko na rukavičke

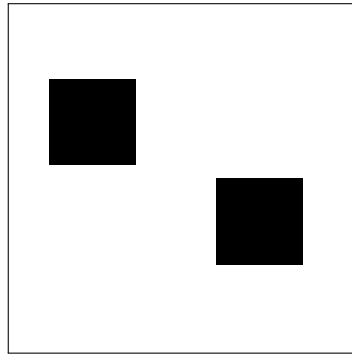
Veľmi pekným experimentom je slniečko na rukavičke. Jedná sa o jednoduchý objekt, ktorý má ale náročný pohyb. Rýchlostné pole medzi snímkom F zobrazeného na Obr.19 a snímkom G zobrazeného na Obr.20. Tento príklad sme riešili obidvomi metódami.

Výsledky metódy Lucasa a Kanadeho môžete vidieť na obrázkoch Obr.21 a Obr.22.

Výsledky metódy Mémina a Corpettiho môžete vidieť na obrázkoch Obr.24 a Obr.25.



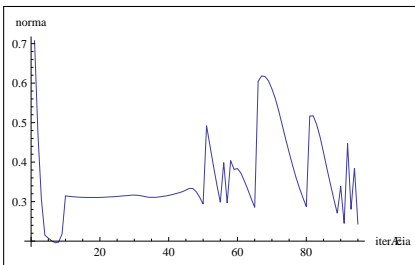
Obr. 7: Snímok F



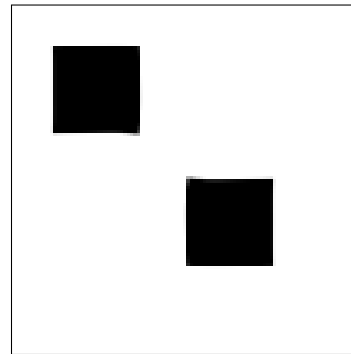
Obr. 8: Snímok G



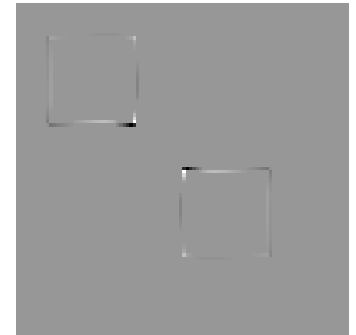
Obr. 9: Výsledné rýchlostné pole.



Obr. 10: Prírastky vektorového poľa v pozdlž iterácií.



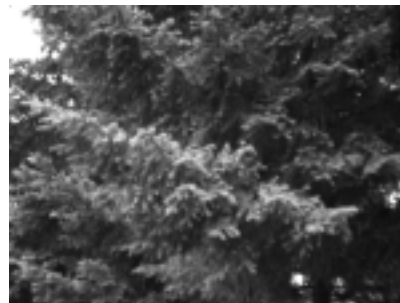
Obr. 11: Výsledný snímok.



Obr. 12: Diferencia medzi F a nájdenou deformáciou G .



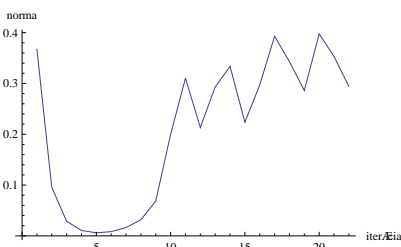
Obr. 13: Snímok F



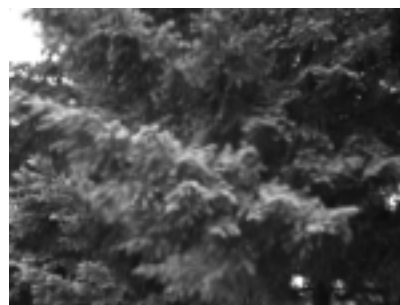
Obr. 14: Snímok G



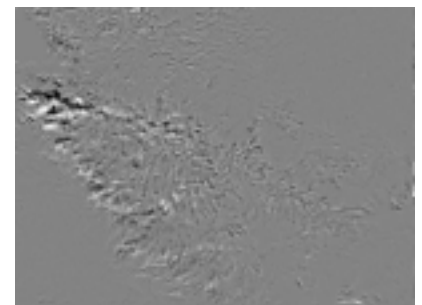
Obr. 15: Výsledné rýchlostné pole.



Obr. 16: Prírastky vektorového poľa v pozdlž iterácií.



Obr. 17: Výsledná snímka.



Obr. 18: Diferencia medzi F a nájdenou deformáciou G .



Obr. 19: Snímok F



Obr. 20: Snímok G



Obr. 21: Výsledné rýchlostné pole.



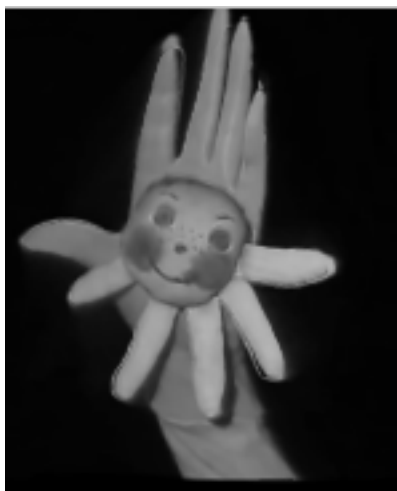
Obr. 22: Výsledná snímka.



Obr. 23: Diferencia medzi F a nájdenou deformáciou G .



Obr. 24: Výsledné rýchlostné pole.



Obr. 25: Výsledná snímka.



Obr. 26: Diferencia medzi F a nájdenou deformáciou G .

Zoznam použitých symbolov

- \mathbb{R} množina reálnych čísiel
- \mathbb{Z} množina prirodzených čísiel
- f matematický model obrazu, $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
- d deformácia roviny, $d: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
- m video, $m: \mathbb{R}^2 \times T \rightarrow \mathbb{R}$
- h homotópia, $h: \mathbb{R}^2 \times T \rightarrow \mathbb{R}^2$
- v rýchlostné pole, $v: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
- T množina časov, $T = \mathbb{R}_+^0$
- L diskretná dvojrozmerná mriežka, $L = \mathbb{Z}_k \times \mathbb{Z}_l$
- F funkcia intenzity predchádzajúceho snímku v čase t v diskretnej oblasti, $F: L \rightarrow \mathbb{R}$
- G funkcia intenzity nasledujúceho snímku v čase $t + 1$ v diskretnej oblasti, $F: L \rightarrow \mathbb{R}$
- V rýchlostné pole v diskretnej oblasti, $V: L \rightarrow \mathbb{R}^2$
- B Brownov pohyb

Literatúra

- [1] B. Horn, B. Schunck: Determining optical flow. *Artificial Intelligence*, **17** (1981) 185-203
- [2] P. E. Kloeden, E. Platen: *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*. Springer (1995) New-York Berlin Heidelberg.
- [3] B. Lucase, T. Kanade: An interative image registration technique with an application to stereovision. In *Int. Joint Conf. on Artificial Intel*, (1981) 674–679
- [4] G. Maruyama: Continuous Markov processes and stochastic equation. *Rend. Circ. Math. Palermo*, **4** (1955) 48–90
- [5] E. Mémin, T. Corpetti, P. Pérez: Estimating fluid optical flow. In *Proc. Int. Conf. Pattern Recognition*, **3** (2000) 1045–1049,
- [6] B. Øksendal: *Stochastic Differential Equations*. Springer (2010) Heidelberg New-York.

7 Appendix A

Dôkaz pre nájdenie rýchlostného poľa v z rovnice (6).

Upravenie a prepísanie rovnice (6) do tvaru:

$$\arg \min_v \int_{\mathbb{R}^2} g_\sigma(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \cdot ((v \cdot \nabla m(\mathbf{x}', t))^2 + (\partial_t m(\mathbf{x}', t))^2 + 2v \cdot \nabla m(\mathbf{x}', t) \partial_t m(\mathbf{x}', t)) d\mathbf{x}'$$

Keďže hľadáme minimálnu rýchlosť, tak derivujeme rovnicu (6) podľa jednotlivých zložiek rýchlosti a tieto derivácie postavíme rovné 0.

Derivácia podľa prvej zložky rýchlostného poľa v_x :

$$\int_{\mathbb{R}^2} g_\sigma(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \cdot (2v_1(\partial_{x_1} m(\mathbf{x}', t))^2 + 2v_2 \partial_{x_1} m(\mathbf{x}', t) \partial_{x_2} m(\mathbf{x}', t) + 2\partial_{x_1} m(\mathbf{x}', t) \partial_t m(\mathbf{x}', t)) d\mathbf{x}' = 0$$

Derivácia podľa druhej zložky rýchlostného poľa v_y :

$$\int_{\mathbb{R}^2} g_\sigma(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \cdot (2v_2(\partial_{x_2} m(\mathbf{x}', t))^2 + 2v_1 \partial_{x_1} m(\mathbf{x}', t) \partial_{x_2} m(\mathbf{x}', t) + 2\partial_{x_2} m(\mathbf{x}', t) \partial_t m(\mathbf{x}', t)) d\mathbf{x}' = 0$$

Po úprave:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^2} g_\sigma(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \cdot v_1(\partial_{x_1} m(\mathbf{x}', t))^2 d\mathbf{x}' + \int_{\mathbb{R}^2} g_\sigma(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \cdot v_2 \partial_{x_1} m(\mathbf{x}', t) \partial_{x_2} m(\mathbf{x}', t) d\mathbf{x}' + \\ & \quad + \int_{\mathbb{R}^2} g_\sigma(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \cdot \partial_{x_1} m(\mathbf{x}', t) \partial_t m(\mathbf{x}', t) d\mathbf{x}' = 0 \\ & \int_{\mathbb{R}^2} g_\sigma(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \cdot v_1 \partial_{x_1} m(\mathbf{x}', t) \partial_{x_2} m(\mathbf{x}', t) d\mathbf{x}' + \int_{\mathbb{R}^2} g_\sigma(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \cdot v_2 (\partial_{x_2} m(\mathbf{x}', t))^2 d\mathbf{x}' + \\ & \quad + \int_{\mathbb{R}^2} g_\sigma(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \cdot \partial_{x_2} m(\mathbf{x}', t) \partial_t m(\mathbf{x}', t) d\mathbf{x}' = 0 \end{aligned}$$

V maticovom tvare:

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_i \\ B_j \end{pmatrix}$$

kde

$$A_{i,j} = \int_{\mathbb{R}^2} g_\sigma(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \cdot \partial_{x_i} m(\mathbf{x}', t) \partial_{x_j} m(\mathbf{x}', t) d\mathbf{x}'$$

a

$$B_i = \int_{\mathbb{R}^2} g_\sigma(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \cdot \partial_{x_i} m(\mathbf{x}', t) \partial_t m(\mathbf{x}', t) d\mathbf{x}'$$

pre $i, j = 1, 2$.

8 Appendix B

Odvođenje rovníc izotropického a anizotropického modelu metody Mémina a Corpettiho.

8.1 Izotropický model

Základné rovnice:

- Ítoova lemma v 2D v tvare (9)
- Stochastická funkcia jasu v tvare (8)
- kovariančná matic v tvare (10)
- kovariančnú maticu budeme označovať σ

V samotnom odvození budeme počítat' jednotlivé sumy osobitne.

Pre prvú sumu dostaneme:

$$\sum_{i=(1,2)} \frac{\partial m(X_t, t)}{\partial x_i} dX_t^i = \frac{\partial m(X_t, t)}{\partial x_1} dX_t^1 + \frac{\partial m(X_t, t)}{\partial x_2} dX_t^2$$

Po dosadení dostaneme:

$$\sum_{i=(1,2)} \frac{\partial m(X_t, t)}{\partial x_i} dX_t^i = \frac{\partial m(X_t, t)}{\partial x_1} (v_1(X_{t-1}, t-1)dt + \sigma dB_t) + \frac{\partial m(X_t, t)}{\partial x_2} (v_2(X_{t-1}, t-1)dt + \sigma dB_t)$$

A po rozpísaní:

$$\begin{aligned} \sum_{i=(1,2)} \frac{\partial m(X_t, t)}{\partial x_i} dX_t^i &= \frac{\partial m(X_t, t)}{\partial x_1} v_1(X_{t-1}, t-1)dt + \frac{\partial m(X_t, t)}{\partial x_2} v_2(X_{t-1}, t-1)dt + \\ &+ \frac{\partial m(X_t, t)}{\partial x_1} \sigma dB_t + \frac{\partial m(X_t, t)}{\partial x_2} \sigma dB_t \end{aligned}$$

V skrátenej forme:

$$\begin{aligned} \frac{\partial m(X_t, t)}{\partial x_1} v_1(X_{t-1}, t-1)dt + \frac{\partial m(X_t, t)}{\partial x_2} v_2(X_{t-1}, t-1)dt &= \nabla m \cdot v dt \\ \frac{\partial m(X_t, t)}{\partial x_1} \sigma dB_t + \frac{\partial m(X_t, t)}{\partial x_2} \sigma dB_t &= \sigma \nabla m \cdot dB_t \end{aligned}$$

Pre druhú sumu dostaneme:

$$\sum_{(i,j)=(1,2) \times (1,2)} \frac{\partial m(X_t, t)}{\partial x_i \partial x_j} d\langle X_t^i, X_t^j \rangle = \frac{\partial^2 m(X_t, t)}{\partial x_1 \partial x_1} d\langle X_t^1, X_t^1 \rangle + 2 \cdot \frac{\partial^2 m(X_t, t)}{\partial x_1 \partial x_2} d\langle X_t^1, X_t^2 \rangle + \frac{\partial^2 m(X_t, t)}{\partial x_2 \partial x_2} d\langle X_t^2, X_t^2 \rangle$$

Po dosadení a rozpísaní:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 m(X_t, t)}{\partial x_1 \partial x_1} d\langle X_t^1, X_t^1 \rangle &= \frac{\partial^2 m(X_t, t)}{\partial x_1 \partial x_1} d\langle v_1(X_{t-1}, t-1)dt + \sigma dB_t, v_1(X_{t-1}, t-1)dt + \sigma dB_t \rangle = \\ &= \frac{\partial^2 m(X_t, t)}{\partial x_1 \partial x_1} d\langle v_1(X_{t-1}, t-1)dt, v_1(X_{t-1}, t-1)dt \rangle + \\ &+ \frac{\partial^2 m(X_t, t)}{\partial x_1 \partial x_1} d\langle v_1(X_{t-1}, t-1)dt, \sigma dB_t \rangle + \\ &+ \frac{\partial^2 m(X_t, t)}{\partial x_1 \partial x_1} d\langle \sigma dB_t, v_1(X_{t-1}, t-1)dt \rangle + \\ &+ \frac{\partial^2 m(X_t, t)}{\partial x_1 \partial x_1} d\langle \sigma dB_t, \sigma dB_t \rangle \\ \frac{\partial^2 m(X_t, t)}{\partial x_2 \partial x_2} d\langle X_t^2, X_t^2 \rangle &= \frac{\partial^2 m(X_t, t)}{\partial x_2 \partial x_2} d\langle v_2(X_{t-1}, t-1)dt + \sigma dB_t, v_2(X_{t-1}, t-1)dt + \sigma dB_t \rangle = \\ &= \frac{\partial^2 m(X_t, t)}{\partial x_2 \partial x_2} d\langle v_2(X_{t-1}, t-1)dt, v_2(X_{t-1}, t-1)dt \rangle + \\ &+ \frac{\partial^2 m(X_t, t)}{\partial x_2 \partial x_2} d\langle v_2(X_{t-1}, t-1)dt, \sigma dB_t \rangle + \\ &+ \frac{\partial^2 f(X_t, t)}{\partial x_2 \partial x_2} d\langle \sigma dB_t, v_2(X_{t-1}, t-1)dt \rangle + \\ &+ \frac{\partial^2 m(X_t, t)}{\partial x_2 \partial x_2} d\langle \sigma dB_t, \sigma dB_t \rangle \\ \frac{\partial^2 m(X_t, t)}{\partial x_1 \partial x_2} d\langle X_t^1, X_t^2 \rangle &= \frac{\partial^2 m(X_t, t)}{\partial x_1 \partial x_2} d\langle v_1(X_{t-1}, t-1)dt + \sigma dB_t, v_2(X_{t-1}, t-1)dt + \sigma dB_t \rangle = \\ &= \frac{\partial^2 m(X_t, t)}{\partial x_1 \partial x_2} d\langle v_1(X_{t-1}, t-1)dt, v_2(X_{t-1}, t-1)dt \rangle + \\ &+ \frac{\partial^2 m(X_t, t)}{\partial x_1 \partial x_2} d\langle v_1(X_{t-1}, t-1)dt, \sigma dB_t \rangle + \\ &+ \frac{\partial^2 m(X_t, t)}{\partial x_1 \partial x_2} d\langle \sigma dB_t, v_2(X_{t-1}, t-1)dt \rangle + \\ &+ \frac{\partial^2 m(X_t, t)}{\partial x_1 \partial x_2} d\langle \sigma dB_t, \sigma dB_t \rangle \end{aligned}$$

Použijeme nasledovné pravidlá pre $\langle X_t^i, X_t^j \rangle$:

- $\langle B^i, B^j \rangle = \delta_{ij}t$

– $\delta_{ij} = 1$ if $i = j$

– $\delta_{ij} = 0$ inak

- $\langle h(t), B^i \rangle = \langle B^j, h(t) \rangle = 0$

- $\langle h(t), h(t) \rangle = 0$

A pre jednotlivé členy dostaneme:

$$\frac{\partial^2 m(X_t, t)}{\partial x_1 \partial x_1} d\langle X_t^1, X_t^1 \rangle = \frac{\partial^2 m(X_t, t)}{\partial x_1 \partial x_1} d\sigma^2 d\langle B_t, B_t \rangle = \frac{\partial^2 m(X_t, t)}{\partial x_1 \partial x_1} d\sigma^2 dt$$

$$\frac{\partial^2 m(X_t, t)}{\partial x_2 \partial x_2} d\langle X_t^2, X_t^2 \rangle = \frac{\partial^2 m(X_t, t)}{\partial x_2 \partial x_2} d\sigma^2 d\langle B_t, B_t \rangle = \frac{\partial^2 m(X_t, t)}{\partial x_2 \partial x_2} d\sigma^2 dt$$

$$\frac{\partial^2 m(X_t, t)}{\partial x_1 \partial x_2} d\langle X_t^1, X_t^2 \rangle = 0$$

$$\sum_{(i,j)=(1,2) \times (1,2)} \frac{\partial^2 m(X_t, t)}{\partial x_i \partial x_j} d\langle X_t^i, X_t^j \rangle = \frac{\partial^2 m(X_t, t)}{\partial x_1 \partial x_1} d\sigma^2 dt + \frac{\partial^2 m(X_t, t)}{\partial x_2 \partial x_2} d\sigma^2 dt = \sigma^2 \Delta m dt$$

Po odvodení dostaneme celkovú rovnicu v tvare:

$$\begin{aligned} dm(X_t, t) &= \frac{\partial m}{\partial t} dt + \sum_{i=(1,2)} \frac{\partial m(X_t, t)}{\partial x_i} dX_t^i + \frac{1}{2} \sum_{(i,j)=(1,2) \times (1,2)} \frac{\partial^2 m(X_t, t)}{\partial x_i \partial x_j} d\langle X_t^i, X_t^j \rangle = \\ &= \frac{\partial m}{\partial t} dt + \nabla m \cdot v dt + \sigma \nabla m \cdot dB_t + \frac{1}{2} \sigma^2 \Delta m dt = \\ &= \left(\frac{\partial m}{\partial t} + \nabla m \cdot v + \frac{1}{2} \sigma^2 \Delta m \right) dt + \sigma \nabla m \cdot dB_t \end{aligned}$$

8.2 Anizotropický model

Základné rovnice:

- Ítoova lemma v 2D v tvare (9)
- Stochastická funkcia jasú v tvare (8)
- kovariančná matica v tvare (12)
- pre vektory η a τ platí

$$\eta = \frac{1}{|\nabla m|} \begin{pmatrix} \partial_{x_1} m \\ \partial_{x_2} m \end{pmatrix}$$

$$\tau = \frac{1}{|\nabla m|} \begin{pmatrix} -\partial_{x_2} m \\ \partial_{x_1} m \end{pmatrix}$$

- pre B_t^1, B_t^2 a Σ platí:

$$B_t^1 = (\eta_1 B^\eta, \tau_1 B^\tau)$$

$$B_t^2 = (\eta_2 B^\eta, \tau_2 B^\tau)$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_\eta \\ \sigma_\tau \end{pmatrix}$$

Ďalej budeme používať nasledovné pravidlá pre $\langle X_t^i, X_t^j \rangle$:

- $\langle B^i, B^j \rangle = \delta_{ij} t$
 - $\delta_{ij} = 1$ if $i = j$
 - $\delta_{ij} = 0$ inak
- $\langle h(t), B^i \rangle = \langle B^j, h(t) \rangle = 0$
- $\langle h(t), h(t) \rangle = 0$

Najskôr odvodíme jednotlivé vzt'ahy $d\langle X_t^i, X_t^j \rangle$.

Pre $d\langle X_t^1, X_t^1 \rangle$ platí:

$$\begin{aligned} d\langle X_t^1, X_t^1 \rangle &= \langle v_1 dt + \Sigma dB_t^1, v_1 dt + \Sigma dB_t^1 \rangle = \\ &= \langle v_1, v_1 \rangle dt + \langle v_1 dt, \Sigma dB_t^1 \rangle + \langle \Sigma dB_t^1, v_1 dt \rangle + \langle \Sigma dB_t^1, \Sigma dB_t^1 \rangle = \\ &= 0 + 0 + 0 + \langle \Sigma dB_t^1, \Sigma dB_t^1 \rangle = \\ &= d\langle \sigma_\eta \eta_1 B^\eta + \sigma_\tau \tau_1 B^\tau, \sigma_\eta \eta_1 B^\eta + \sigma_\tau \tau_1 B^\tau \rangle = \\ &= d\langle \sigma_\eta \eta_1 B^\eta, \sigma_\eta \eta_1 B^\eta \rangle + d\langle \sigma_\eta \eta_1 B^\eta, \sigma_\tau \tau_1 B^\tau \rangle + \\ &+ d\langle \sigma_\tau \tau_1 B^\tau, \sigma_\eta \eta_1 B^\eta \rangle + d\langle \sigma_\tau \tau_1 B^\tau, \sigma_\tau \tau_1 B^\tau \rangle = \\ &= d\langle \sigma_\eta \eta_1 B^\eta, \sigma_\eta \eta_1 B^\eta \rangle + 0 + 0 + d\langle \sigma_\tau \tau_1 B^\tau, \sigma_\tau \tau_1 B^\tau \rangle = \\ &= \sigma_\eta^2 \eta_1^2 d\langle B^\eta, B^\eta \rangle + \sigma_\tau^2 \tau_1^2 d\langle B^\tau, B^\tau \rangle = \\ &= \sigma_\eta^2 \eta_1^2 dt + \sigma_\tau^2 \tau_1^2 dt = \\ &= \sigma_\eta^2 \left(\frac{1}{|\nabla m|} \partial_{x_1} m \right)^2 dt + \sigma_\tau^2 \left(\frac{1}{|\nabla m|} (-\partial_{x_1} m) \right)^2 dt = \\ &= \frac{1}{|\nabla m|^2} (\sigma_\eta^2 (\partial_{x_1} m)^2 + \sigma_\tau^2 (\partial_{x_2} m)^2) dt \end{aligned}$$

Pre $d\langle X_t^2, X_t^2 \rangle$ platí:

$$\begin{aligned}
d\langle X_t^2, X_t^2 \rangle &= \langle v_2 dt + \Sigma dB_t^2, v_2 dt + \Sigma dB_t^2 \rangle = \\
&= \langle v_2, v_2 \rangle t + \langle v_2 dt, \Sigma dB_t^2 \rangle + \langle \Sigma dB_t^2, v_2 dt \rangle + \langle \Sigma dB_t^2, \Sigma dB_t^2 \rangle = \\
&= 0 + 0 + 0 + \langle \Sigma dB_t^2, \Sigma dB_t^2 \rangle = \\
&= d\langle \sigma_\eta \eta_2 B^\eta + \sigma_\tau \tau_2 B^\tau, \sigma_\eta \eta_2 B^\eta + \sigma_\tau \tau_2 B^\tau \rangle = \\
&= d\langle \sigma_\eta \eta_2 B^\eta, \sigma_\eta \eta_2 B^\eta \rangle + d\langle \sigma_\eta \eta_2 B^\eta, \sigma_\tau \tau_2 B^\tau \rangle + \\
&+ d\langle \sigma_\tau \tau_2 B^\tau, \sigma_\eta \eta_2 B^\eta \rangle + d\langle \sigma_\tau \tau_2 B^\tau, \sigma_\tau \tau_2 B^\tau \rangle = \\
&= d\langle \sigma_\eta \eta_2 B^\eta, \sigma_\eta \eta_2 B^\eta \rangle + 0 + 0 + d\langle \sigma_\tau \tau_2 B^\tau, \sigma_\tau \tau_2 B^\tau \rangle = \\
&= \sigma_\eta^2 \eta_2^2 d\langle B^\eta, B^\eta \rangle + \sigma_\tau^2 \tau_2^2 d\langle B^\tau, B^\tau \rangle = \\
&= \sigma_\eta^2 \eta_2^2 dt + \sigma_\tau^2 \tau_2^2 dt = \\
&= \sigma_\eta^2 \left(\frac{1}{|\nabla m|} \partial_{x_2} m \right)^2 dt + \sigma_\tau^2 \left(\frac{1}{|\nabla m|} \partial_{x_1} m \right)^2 dt = \\
&= \frac{1}{|\nabla m|^2} (\sigma_\eta^2 (\partial_{x_2} m)^2 + \sigma_\tau^2 (\partial_{x_1} m)^2) dt
\end{aligned}$$

Pre $d\langle X_t^1, X_t^2 \rangle$ platí:

$$\begin{aligned}
d\langle X_t^1, X_t^2 \rangle &= \langle v_1 dt + \Sigma dB_t^1, v_2 dt + \Sigma dB_t^2 \rangle = \\
&= \langle v_1, v_2 \rangle dt + \langle v_1 dt, \Sigma dB_t^2 \rangle + \langle \Sigma dB_t^1, v_2 dt \rangle + \langle \Sigma dB_t^1, \Sigma dB_t^2 \rangle = \\
&= 0 + 0 + 0 + \langle \Sigma dB_t^1, \Sigma dB_t^2 \rangle = \\
&= d\langle \sigma_\eta \eta_1 B^\eta + \sigma_\tau \tau_1 B^\tau, \sigma_\eta \eta_2 B^\eta + \sigma_\tau \tau_2 B^\tau \rangle = \\
&= d\langle \sigma_\eta \eta_1 B^\eta, \sigma_\eta \eta_2 B^\eta \rangle + d\langle \sigma_\eta \eta_1 B^\eta, \sigma_\tau \tau_2 B^\tau \rangle + \\
&+ d\langle \sigma_\tau \tau_1 B^\tau, \sigma_\eta \eta_2 B^\eta \rangle + d\langle \sigma_\tau \tau_1 B^\tau, \sigma_\tau \tau_2 B^\tau \rangle = \\
&= d\langle \sigma_\eta \eta_2 B^\eta, \sigma_\eta \eta_2 B^\eta \rangle + 0 + 0 + d\langle \sigma_\tau \tau_2 B^\tau, \sigma_\tau \tau_2 B^\tau \rangle = \\
&= \sigma_\eta^2 \eta_1 \eta_2 d\langle B^\eta, B^\eta \rangle + \sigma_\tau^2 \tau_1 \tau_2 d\langle B^\tau, B^\tau \rangle = \\
&= \sigma_\eta^2 \eta_1 \eta_2 dt + \sigma_\tau^2 \tau_1 \tau_2 dt = \\
&= \sigma_\eta^2 \frac{1}{|\nabla m|} \partial_{x_1} m \frac{1}{|\nabla m|} \partial_{x_2} m dt + \sigma_\tau^2 \frac{1}{|\nabla m|} (-\partial_{x_2} m) \frac{1}{|\nabla m|} \partial_{x_1} m dt = \\
&= \sigma_\eta^2 \frac{1}{|\nabla m|^2} \partial_{x_1} m \partial_{x_2} m dt - \sigma_\tau^2 \frac{1}{|\nabla m|^2} \partial_{x_1} m \partial_{x_2} m dt = \\
&= \frac{1}{|\nabla m|^2} \partial_{x_1} m \partial_{x_2} m (\sigma_\eta^2 - \sigma_\tau^2) dt
\end{aligned}$$

Pre prvú sumu dostaneme:

$$\sum_{i=(1,2)} \frac{\partial m(X_t, t)}{\partial x_i} dX_t^i = \frac{\partial m(X_t, t)}{\partial x_1} dX_t^1 + \frac{\partial m(X_t, t)}{\partial x_2} dX_t^2$$

Po dosadení dostaneme:

$$\sum_{i=(1,2)} \frac{\partial m(X_t, t)}{\partial x_i} dX_t^i = \frac{\partial m(X_t, t)}{\partial x_1} (v_1(X_{t-1}, t-1)dt + \Sigma dB_t^1) + \frac{\partial m(X_t, t)}{\partial x_2} (v_2(X_{t-1}, t-1)dt + \Sigma dB_t^2)$$

A po rozpísaní:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=(1,2)} \frac{\partial m(X_t, t)}{\partial x_i} dX_t^i &= \frac{\partial m(X_t, t)}{\partial x_1} v_1(X_{t-1}, t-1)dt + \frac{\partial m(X_t, t)}{\partial x_2} v_2(X_{t-1}, t-1)dt + \\
&+ \frac{\partial m(X_t, t)}{\partial x_1} \sigma_\eta \eta_1 dB_t^\eta + \frac{\partial m(X_t, t)}{\partial x_2} \sigma_\eta \eta_2 dB_t^\eta + \\
&+ \frac{\partial m(X_t, t)}{\partial x_1} \sigma_\tau \tau_1 dB_t^\tau + \frac{\partial m(X_t, t)}{\partial x_2} \sigma_\tau \tau_2 dB_t^\tau
\end{aligned}$$

V skrátenej forme:

$$\frac{\partial m(X_t, t)}{\partial x_1} v_1(X_t, t)dt + \frac{\partial m(X_t, t)}{\partial x_2} v_2(X_t, t)dt = \nabla m \cdot v dt$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial m(X_t, t)}{\partial x_1} \sigma_\eta \eta_1 dB_t^\eta + \frac{\partial m(X_t, t)}{\partial x_2} \sigma_\eta \eta_2 dB_t^\eta &= \sigma_\eta \|\nabla m\| dB_t^\eta \\ \frac{\partial m(X_t, t)}{\partial x_1} \sigma_\tau \tau_1 dB_t^\tau + \frac{\partial m(X_t, t)}{\partial x_2} \sigma_\tau \tau_2 dB_t^\tau &= \sigma_\tau \nabla m^T \tau dB_t^\tau = 0\end{aligned}$$

Pre druhú sumu dostaneme:

$$\sum_{(i,j)=(1,2) \times (1,2)} \frac{\partial^2 m(X_t, t)}{\partial x_i \partial x_j} d\langle X_t^i, X_t^j \rangle = \frac{\partial^2 m(X_t, t)}{\partial x_1 \partial x_1} d\langle X_t^1, X_t^1 \rangle + 2 \frac{\partial^2 m(X_t, t)}{\partial x_1 \partial x_2} d\langle X_t^1, X_t^2 \rangle + \frac{\partial^2 m(X_t, t)}{\partial x_2 \partial x_2} d\langle X_t^2, X_t^2 \rangle$$

Po dosadení a rozpísaní:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 m(X_t, t)}{\partial x_1^2} d\langle X_t^1, X_t^1 \rangle &= \frac{\partial^2 m(X_t, t)}{\partial x_1^2} \frac{1}{|\nabla m|^2} (\sigma_\eta^2 m_x^2 + \sigma_\tau^2 m_y^2) dt \\ \frac{\partial^2 m(X_t, t)}{\partial x_2^2} d\langle X_t^2, X_t^2 \rangle &= \frac{\partial^2 m(X_t, t)}{\partial x_2^2} \frac{1}{|\nabla m|^2} (\sigma_\eta^2 m_y^2 + \sigma_\tau^2 m_x^2) dt \\ \frac{\partial^2 m(X_t, t)}{\partial x_1 \partial x_2} d\langle X_t^1, X_t^2 \rangle &= \frac{\partial^2 m(X_t, t)}{\partial x_2^2} \frac{1}{|\nabla m|^2} m_x m_y (\sigma_\eta^2 - \sigma_\tau^2) dt\end{aligned}$$

Po odvodení dostaneme celkovú rovnicu v tvare:

$$\begin{aligned}dm(X_t, t) &= \frac{\partial m}{\partial t} dt + \sum_{i=(1,2)} \frac{\partial m(X_t, t)}{\partial x_i} dX_t^i + \frac{1}{2} \sum_{(i,j)=(1,2) \times (1,2)} \frac{\partial^2 m(X_t, t)}{\partial x_i \partial x_j} d\langle X_t^i, X_t^j \rangle = \\ &= \left(\frac{\partial m}{\partial t} + \nabla m \cdot v + \frac{\nabla m^T \nabla^2 m \nabla m}{2|\nabla m|^2} (\sigma_\eta^2 - \sigma_\tau^2) + \frac{\sigma_\tau^2 \Delta m}{2} \right) dt + \sigma_\eta \|\nabla m\| dB_t^\eta + \sigma_\tau \nabla m^T \tau dB_t^\tau\end{aligned}$$