SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE
Stavebná fakulta

Evidenčné číslo: SvF-5343-56697

Numerické metódy na rekonštrukciu 3D scény z fotografií dvoch kamier

Diplomová práca

2017 **Bc. Natália Beranová**

SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE
Stavebná fakulta

Evidenčné číslo: SvF-5343-56697

Numerické metódy na rekonštrukciu 3D scény z fotografií dvoch kamier

Diplomová práca

Študijný program: matematicko–počítačové modelovanie
Študijný odbor: 9.1.9 aplikovaná matematika
Školiace pracovisko: Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie
Vedúci záverečnej práce: prof. RNDr. Karol Mikula, DrSc.
Konzultant záverečnej práce: Ing. Jozef Urbán, PhD.

Bratislava 2017 **Bc. Natália Beranová**

Slovenská technická univerzita v Bratislave
Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie

Stavebná fakulta
Akademický rok: 2016/2017
Evidenčné číslo: SvF-5343-56697

ZADANIE DIPLOMOVEJ PRÁCE

Študentka: **Bc. Natália Beranová**
ID študenta: 56697
Študijný program: matematicko-počítačové modelovanie
Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika
Vedúci práce: prof. RNDr. Karol Mikula, DrSc.

Názov práce: **Numerické metódy na rekonštrukciu 3D scény z fotografií dvoch kamier**

Jazyk, v ktorom sa práca vypracuje: slovenský jazyk

Špecifikácia zadania:

V rámci diplomovej práce sa študent oboznámi s matematickými metódami a numerickými algoritmami, používanými na rekonštrukciu 3D scén z dvoch fotografií, implementuje tieto metódy v softvéri Mathematica a otestuje ich na umelých a reálnych dátach z hľadiska efektívnosti a presnosti.

Riešenie zadania práce od: 01. 10. 2016
Dátum odovzdania práce: 18. 05. 2017

Bc. Natália Beranová
študentka

prof. RNDr. Radko Mesiar, DrSc.
vedúci pracoviska

prof. RNDr. Karol Mikula, DrSc.
garant študijného programu

Čestné prehlásenie

Vyhlasujem, že som diplomovú prácu vypracovala samostatne s použitím uvedenej odbornej literatúry a s odbornou pomocou vedúceho práce.

Bratislava, 18.05.2017

....

Vlastnoručný podpis

Poďakovanie

V prvom rade by som sa chcela poďakovať vedúcemu diplomovej práce prof. RNDr. Karolovi Mikulovi, DrSc. a konzultantovi diplomovej práce Ing. Jozefovi Urbánovi, PhD. za ich ochotu, odborné vedenie, pripomienky, návrhy a množstvo času venovaného spolupráci na mojej diplomovej práci.

Poďakovanie patrí aj pplk. Ing. Jánovi Kuljovskému z oddelenia analýzy dát, odvetvia kriminalistickej fotografie a videa, ktorý nám poskytol fotografie I.reálnej scény a II.reálnej scény.

Veľká vďaka tiež patrí mojej rodine, ktorá ma bezhranične podporovala počas celého štúdia a umožnila mi dostať sa až sem.

Abstrakt: Práca je zameraná na rekonštrukciu 3D scény z dvoch fotografií z rôznych pohľadov na scénu. V práci sú popísané základné numerické algoritmy na rekonštrukciu 3D scény: triangulačná metóda, normalizovaný osembodový algoritmus; a minimalizačné algoritmy určené na spresnenie získaných výsledkov: metóda gold standard, optimálna triangulačná metóda. Uvedené algoritmy sú implementované na jednu testovaciu a tri reálne scény. Implementáciou algoritmov na reálne scény sme dokázali získať výsledky s priemernou odchýlkou menšou ako 1%.

Kľúčové slová: stredová projekcia, epipolárna geometria, projekčná matica, fundamentálna matica, 3D rekonštrukcia, triangulačná metóda, optimálna triangulačná metóda, normalizovaný osembodový algoritmus, metóda gold standard

Abstract: This thesis is focused on the reconstruction of 3D scene using two photographs of the scene from two different views. In the thesis we describe basic numerical algorithms that are used to reconstruct 3D scene: the triangulation method, the normalized 8-point algorithm; and algorithms refining the obtained results: the gold standard method, the optimal triangulation method. These algorithms are implemented and tested on an artificially created scene and three different real-world scenes. By implementing algorithms on real-world scenes we were able to obtain results with an average deviation of less than 1%.

Key words: central projection, epipolar geometry, the camera matrix, the fundamental matrix, 3D reconstruction, the triangulation method, the optimal triangulation method, the normalized 8-point algorithm, the gold standard method

Obsah

Úvod **1**

1 Základné pojmy **2**
1.1 Geometria 2
1.1.1 Euklidovská geometria 2
1.1.2 Afinná geometria 3
1.1.3 Projektívna geometria 3
1.1.4 Homogénne súradnice 3
1.2 Rovinná geometria 4
1.2.1 Body a priamky 4
1.2.2 Nevlastné body a nevlastná priamka 5
1.3 Priestorová geometria 5
1.3.1 Body a projektívne transformácie 5
1.3.2 Rovina 6
1.4 Stredová projekcia 6

2 Kamerové modely a epipolárna geometria **8**
2.1 Kamerové modely 8
2.1.1 Projekčná matica $\boldsymbol{P}$ 10
2.1.2 Kalibračná matica $\boldsymbol{K}$ 10
2.2 Epipolárna geometria 12
2.2.1 Fundamentálna matica $\boldsymbol{F}$ 14
2.2.2 Esenciálna matica $\boldsymbol{E}$ 16
2.2.3 Výpočet projekčných matíc z fundamentálnej matice. . 17
2.3 Singulárny rozklad matice (SVD) 18

3 Numerické metódy na rekonštrukciu 3D scény **20**
3.1 Osembodový algoritmus pre výpočet fundamentálnej matice . 20

3.1.1 Normalizovaný osembodový algoritmus 21
3.2 Triangulačná metóda 22
3.3 Minimalizačné algoritmy 23
3.3.1 Metóda gold standard 23
3.3.2 Optimálna triangulačná metóda 25

4 Zostavenie algoritmu na rekonštrukciu 3D scény 28
4.1 Testovacia 3D scéna 28
4.2 Rekonštrukcia 28
4.2.1 Vyhodnotenie účinnosti aplikácie jednotlivých algoritmov 41
4.3 Rekonštrukcia reálnej scény 46
4.3.1 Reálna scéna I. 47
4.3.2 Reálna scéna II. 51
4.3.3 Reálna scéna III. 55

Záver 59

Úvod

Rekonštrukcia 3D scény z dvoch fotografií môže slúžiť k získaniu 3D informácií o objekte v scéne, ako napr. pozície objektov v priestore a vzdialenosti, či uhly medzi nimi.

Rekonštrukcia 3D scény má v praxi široké uplatnenie v rôznych odvetviach. V medicíne je napríklad možné zo zrekonštruovaných CT rezov pacienta zistiť rozsah poškodenia tkaniva. V kriminalistike sa 3D rekonštrukcia využíva na určenie totožnosti páchateľa zo snímkov získaných z priemyselných kamier. 3D rekonštrukcia sa tiež využíva v robotike pri humanoidných robotoch, ktoré dokážu rozpoznať okolité objekty alebo v automobilovom priemysle pri cúvacích senzoroch, takéto softvéry sú už však plne automatizované.

V práci sme sa snažili vytvoriť čo najzrozumiteľnejší postup na rekonštrukciu 3D scény a objasniť nejasnosti, s ktorými sme sa stretli.

Práca je štrukturovaná do štyroch kapitol. Kapitola 1 obsahuje charakteristiku geometrií spojených s danou problematikou, niektoré základné vlastnosti objektov v rovinnej a priestorovej geometrii. V kapitole 2 sú popísané pojmy, vzťahy a definície, ako napríklad stredová projekcia, projekčná matica, epipolárna geometria, fundamentálna matica, esenciálna matica a mnohé ďalšie, z ktorých pozostáva rekonštrukcia scény. V kapitole 3 sú popísané základné algoritmy na numerickú rekonštrukciu scény (osembodový algoritmus, triangulačná metóda) a minimalizačné algoritmy (metóda gold standard, optimálna triangulačná metóda). Napokon v kapitole 4 je podrobný popis zostavenia algoritmov na rekonštrukciu scény, samotná rekonštrukcia umelo vytvorenej testovacej scény a tri rekonštrukcie reálnych scén.

V celej práci vychádzame z knihy *Multiple View Geometry in Computer Vision* [1], zároveň sú z nej prebrané všetky implementované algoritmy.

Kapitola 1

Základné pojmy

1.1 Geometria

Vlastnosti objektov špecifikujeme na základe geometrie, v ktorej sa nachádzajú. Pre potreby tejto práce si priblížime základné vlastnosti Euklidovskej geometrie, afinnej geometrie a projektívnej geometrie.

1.1.1 Euklidovská geometria

Euklidovská geometria je intuitívna geometria. Základom Euklidovského priestoru $\mathbb{R}^3$ sú body, priamky a roviny. Euklidovský priestor vymedzuje Hilbertova axiomatická sústava, pozostávajúca z dvadsaťjeden axióm rozdelených do piatich skupín:

1. Axiómy incidencie. Opisujú vzťahy vzájomných polôh bodov, priamok a rovín.
2. Axiómy usporiadania. Vymedzujú vzťah, kedy bod leží medzi dvoma rôznymi bodmi .
3. Axiómy zhodnosti. Popisujú zhodnosť úsečiek a uhlov, na základe ktorej sú definované zhodnosti aj pre ďalšie geometrické útvary.
4. Axiómy spojitosti. Umožňujú meranie úsečiek, ktoré musí spĺňať určité prirodzené požiadavky.
5. Axióma rovnobežnosti. Až na dvojicu rovnobežných priamok sa dve priamky v rovine vždy pretnú v bode. [3].

V rozšírenom Euklidovskom priestore majú dve rovnobežné priamky priesečník v nekonečne, takýto bod voláme *nevlastný bod*.

1.1.2 Afinná geometria

Afinná geometria je geometria, v ktorej sú definované body, vektory a priamky, nie však uhly, vzdialenosti a kružnice. Modelom pre afinnú geometriu je obvykle afinný priestor spolu s množinou transformácií. Afinné transformácie zobrazujú priamky do priamok a zachovávajú pomery dĺžok úsečiek.

Afinný priestor je taký priestor, v ktorom sa dve rovnobežné priamky pretnú v jednom bode. Afinný priestor definuje usporiadaná trojica $\mathbb{A}(\mathcal{A}, \nu, f)$, kde $\mathcal{A}$ je neprázdna množina, ν je vektorový priestor a f je zobrazenie $f : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \nu$ [4].

1.1.3 Projektívna geometria

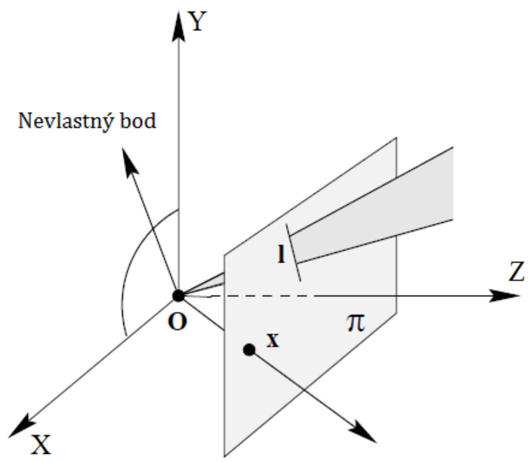
V projektívnej geometrii nerozlišujeme body v nekonečne od ostatných bodov. Projektívny priestor získame z Euklidovského priestoru pridaním nevlastnej priamky alebo roviny.

V Euklidovskom priestore $\mathbb{R}^N$ reprezentuje lineárnu transformáciu transformačná matica násobená súradnicami bodov. Rovnakým spôsobom je reprezentovaná projektívna transformácia v projektívnom priestore $\mathbb{P}^N$. Podľa takéhoto zobrazenia sa body v nekonečne zobrazujú do ľubovoľných iných bodov. Projektívna transformácia v projektívnom priestore $\mathbb{P}^N$ je reprezentovaná lineárnou transformáciou homogénnych súradníc $\boldsymbol{C}' = \boldsymbol{H}_{(n+1)\times(n+1)}\boldsymbol{X}$ [5].

1.1.4 Homogénne súradnice

Súradnice bodu v Euklidovskom 2D priestore sú reprezentované dvojicou reálnych čísel (x, y). Pridaním jednej jednotkovej súradnice získame homogénne súradnice reprezentované trojicou $(x, y, 1)$, ktorá deklaruje ten istý bod. Vo všeobecnosti teda platí, že bod (kx, ky, k) je rovnaký ako bod $(x, y, 1)$, pričom musí platiť, že $k \neq 0$. Reálne súradnice z homogénnych získame, ak všetky súradnice predelíme poslednou súradnicou a následne ju odstránime $(kx/k, ky/k)$. Ak je posledná súradnica nulová $(x, y, 0)$, jedná sa o nevlastný bod, bod ležiaci v nekonečne $(x/0, y/0)$, viď obr. 1.1.

Homogénne súradnice v spracovaní obrazu zjednodušujú operácie transformácií vektorov a matíc.



Obr. 1.1: Nevlastný bod je znázornený lúčom v homogénnych súradniciach $\boldsymbol{X}_\infty = (X, Y, Z, 0)$.

1.2 Rovinná geometria

Základom rovinnej geometrie sú body, priamky a ich vzájomné vzťahy. Napríklad bod je daný vektorom, pokiaľ sa jedná o bázové súradnice.

1.2.1 Body a priamky

Homogénna reprezentácia priamok. Priamka je v rovine reprezentovaná rovnicou $ax + by + c = 0$, no môže byť reprezentovaná aj vektorom $(a, b, c)^T$. Rovnice $ax + by + c = 0$, $kax + kby + kc = 0$ reprezentujú rovnakú priamku pre nenulovú konštantu k, teda jedna priamka môže byť reprezentovaná zdanlivo rôznymi vektormi $(a, b, c)^T$, $k(a, b, c)^T$.

Homogénna reprezentácia bodov. Bod $\boldsymbol{x} = (x, y)^T$ leží na priamke $\boldsymbol{l} = (a, b, c)^T$ práve vtedy, ak platí $ax + by + c = 0$, čo vieme zapísať aj ako $(x, y, 1)(a, b, c)^T = (x, y, 1)\boldsymbol{l} = 0$. Bod $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$ je reprezentovaný homogénnymi súradnicami.

Bod $\boldsymbol{x}$ *leží na priamke* $\boldsymbol{l}$ *práve vtedy, ak* $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{l} = 0$.

Priesečník priamok. Máme dané dve priamky $\boldsymbol{l} = (a, b, c)^T$ a $\boldsymbol{l}' = (a', b', c')^T$, pre ktoré vieme nájsť priesečník. Definujeme vektor $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{l} \times \boldsymbol{l}'$, kde $\times$ reprezentuje vektorový súčin. Platí, že $\boldsymbol{l}.(\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{l}') = \boldsymbol{l}'.(\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{l}') = 0$ a $\boldsymbol{l}^T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{l}'^T\boldsymbol{x} = 0$, teda $\boldsymbol{x}$ leží na oboch priamkach a je ich priesečník.

Priesečník dvoch priamok $\boldsymbol{l}$ *a* $\boldsymbol{l}'$ *je bod* $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{l} \times \boldsymbol{l}'$.

Priamka spájajúca body. Dané sú dva body $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}'$ a priamka $\boldsymbol{l}$, ktorú vieme definovať ako $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{x}'$, ak oba body ležia na priamke $\boldsymbol{l}$.

1.2.2 Nevlastné body a nevlastná priamka

Priesečník rovnobežiek. Dané sú dve rovnobežné priamky $ax+by+c = 0$ a $ax+by+c' = 0$, ich vektorová reprezentácia je $\boldsymbol{l} = (a, b, c)^T$ a $\boldsymbol{l}' = (a, b, c')^T$. Ich priesečník definujeme ako $\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{l}' = (c'-c)(b, -a, 0)^T$. Skalár $(c'-c)$ môžeme zanedbať. Nehomogénna reprezentácia bodu je $(b/0, -a/0)^T$. Rovnobežky sa stretnú v nekonečne, v nevlastnom bode.

Nevlastné body píšeme vo forme $\boldsymbol{x}_\infty = (x_1, x_2, 0)^T$ a priamku v nekonečne nazveme nevlastnou priamkou, ktorú zapíšeme vo forme vektora $\boldsymbol{l}_\infty = (0, 0, 1)^T$.

1.3 Priestorová geometria

V tejto časti sú popísané vlastnosti a útvary v projektívnom trojpriestore $\mathbb{P}^3$.

1.3.1 Body a projektívne transformácie

Bod $\boldsymbol{X}$ v 3D je reprezentovaný v homogénnych súradniciach ako 4-vektor. Vektor $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, X_3, X_4)^T$, kde $X_4 \neq 0$ reprezentuje homogénny bod.

Projektívna transformácia v $\mathbb{P}^3$ je lineárna transformácia homogénneho bodu $\boldsymbol{X}$ do homogénneho bodu $\boldsymbol{X}'$ reprezentovaná 4×4 nesingulárnou transformačnou maticou $\boldsymbol{H}$. Transformáciu teda vieme zapísať ako $\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{H}\boldsymbol{X}$.

Rovnako ako v prípade rovinných projektívnych transformácií je zobrazenie kolineárne (priamky sú zobrazené do priamok) a zachováva priesečník priamky s rovinou.

1.3.2 Rovina

Rovinu v 3D vieme zapísať formou

$$\pi_1 X + \pi_2 Y + \pi_3 Z + \pi_4 = 0,$$

pričom rovnicu neovplyvní násobenie nenulovým skalárom. Ak je homogénna reprezentácia bodu $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, X_3, X_4)^T$, kde $X_4 \neq 0$ a homogénna reprezentácia roviny je 4-vektor $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4)^T$, potom homogénnou substitúciou $X \mapsto X_1/X_4, Y \mapsto X_2/X_4, Z \mapsto X_3/X_4$ získame

$$\pi_1 X_1 + \pi_2 X_2 + \pi_3 X_3 + \pi_4 X_4 = 0,$$

resp. $\boldsymbol{\pi}^T \boldsymbol{X} = 0$.

Tri body definujú rovinu. Z predpokladu, že tri body $\boldsymbol{X}_i$ ležia v rovine $\boldsymbol{\pi}$ vyplýva, že $\boldsymbol{\pi}^T \boldsymbol{X}_i = 0, \ i = 1, 2, 3$.
Na začiatku máme maticu $\boldsymbol{M} = [\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{X}_3]$, ktorá pozostáva z bodu $\boldsymbol{X}$ a z troch bodov $\boldsymbol{X}_i$, ktoré definujú rovinu $\boldsymbol{\pi}$, pričom determinant $\det \boldsymbol{M} = 0$, kde $\boldsymbol{X}$ leží na $\boldsymbol{\pi}$, pričom bod $\boldsymbol{X}$ je výsledkom lineárnej kombinácie bodov $\boldsymbol{X}_i, i = 1, ..., 3$.

Determinanty prenásobíme prvkami bodu $\boldsymbol{X}$ a získame

$$\det \boldsymbol{M} = X_1 D_{234} - X_2 D_{134} + X_3 D_{124} - X_4 D_{123},$$

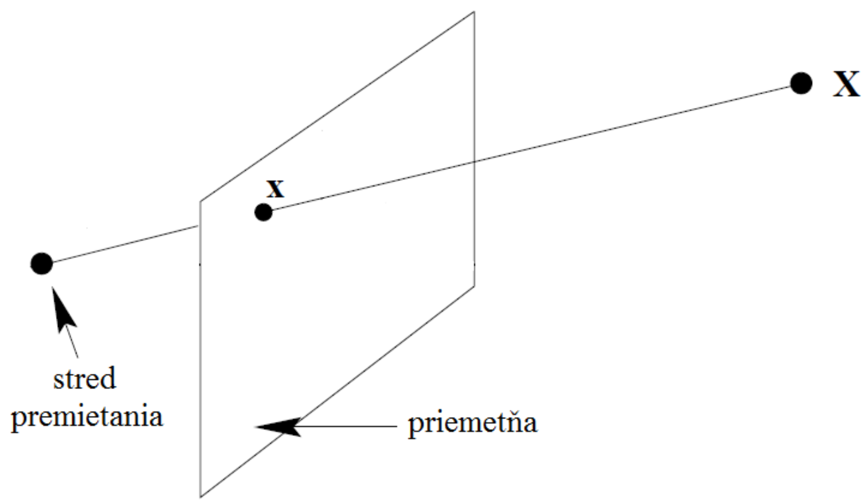
kde D_{ijk} determinant zostrojený z riadkov ijk matice 4×3 $[\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{X}_3]$. Rovinu získame

$$\boldsymbol{\pi} = (D_{234}, -D_{134}, D_{124}, -D_{123})^T.$$

1.4 Stredová projekcia

Za zobrazením z trojdimenzionálneho priestoru do 2D obrazu je projektívny proces, pri ktorom stratíme jednu dimenziu. Väčšinou sa tento proces modeluje pomocou stredovej projekcie, v ktorej lúč vychádzajúci z bodu v 3D priestore, prechádzajúci cez fixný bod, tzv. stred premietania, pretína špecifickú rovinu, tzv. priemetňu. Priesečník lúča s danou rovinou predstavuje bod v 2D obraze.

Pri projektívnej geometrii v spracovaní obrazu sa obvykle jedná o model priestoru ako 3D projektívny priestor, čo zodpovedá $\mathbb{R}^3$ spolu s bodmi v nekonečne. Podobne, model obrazu zodpovedá 2D projektívnemu priestoru. Teda môžeme stredovú projekciu jednoducho vnímať ako zobrazenie z $\mathbb{P}^3$ do $\mathbb{P}^2$.



Obr. 1.2: Stredová projekcia.

Kapitola 2

Kamerové modely a epipolárna geometria

2.1 Kamerové modely

Kamera zobrazuje 3D objekty na 2D obraz. Takýto kamerový model reprezentuje *stredová projekcia*. Stredová projekcia je teda zobrazenie bodov v priestore cez stred premietania $\boldsymbol{C}$ do roviny.

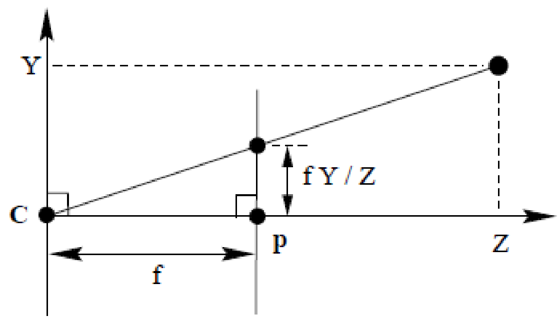
Predpokladajme *kalibrovaný model kamery*, teda umiestnime stred premietania do počiatku súradnicovej sústavy $\boldsymbol{O}$ a rovinu, do ktorej sú body premietané, možno vyjadriť ako $z = f$, pričom f reprezentuje ohniskovú vzdialenosť, teda najkratšiu vzdialenosť medzi stredom premietania a priemetňou. Bod v priestore $\boldsymbol{X} = (X, Y, Z)^T$ sa zobrazí do bodu $\boldsymbol{x}$ na priemetni, kde priamka spájajúca bod $\boldsymbol{X}$ v priestore a stred premietania $\boldsymbol{C}$ pretína priemetňu. Pri stredovej projekcii je veľmi dôležitá trojuholníková podobnosť, viď obr. 2.1.

Pomocou nej možno vypočítať zobrazenie z priestorového bodu $(X, Y, Z)^T$ do bodu $(fX/Z, fY/Z, f)^T$ na priemetni. Poslednú súradnicu zobrazeného bodu neberieme do úvahy, teda

$$(X, Y, Z)^T \longmapsto (fX/Z, fY/Z)^T,$$

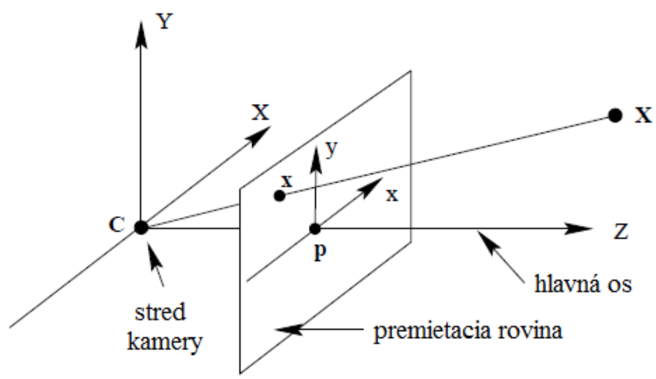
toto zobrazenie je z Euklidovského 3D priestoru $\mathbb{R}^3$ do Euklidovského 2D priestoru $\mathbb{R}^2$.

Stred premietania sa nazýva *stred kamery* $\boldsymbol{C}$, priamka zo stredu premietania kolmá na priemetňu sa nazýva *hlavná os* a bod, v ktorom hlavná os



Obr. 2.1: Podobnosť trojuholníkov.

pretína priemetňu, sa nazýva *hlavný bod* $\boldsymbol{p}$, ktorý je od stredu kamery v ohniskovej vzdialenosti f, viď obr.2.2.



Obr. 2.2: Kalibrovaný model kamery.

Stredová projekcia v homogénnych súradniciach.

Ak priestorový 3D bod $\boldsymbol{X}$ a premietnutý 2D bod $\boldsymbol{x}$ sú vyjadrené homogénnymi vektormi, potom lineárne zobrazenie v homogénnych súradniciach možno zapísať ako

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} fX \\ fY \\ Z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} f & & & 0 \\ & f & & 0 \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Takúto maticu je možné zapísať v tvare $\mathrm{diag}(f, f, 1)[\boldsymbol{I}|\boldsymbol{0}]$, kde $\mathrm{diag}(f, f, 1)$ je diagonálna matica a $[\boldsymbol{I}|\boldsymbol{0}]$ je jednotková matica 3×3 rozšírená o stĺpec nulového 3-vektora.

2.1.1 Projekčná matica $\boldsymbol{P}$

Ak je priestorový bod reprezentovaný homogénnym 4-vektorom $(X, Y, Z, 1)^T$, premietnutý bod je reprezentovaný homogénnym 3-vektorom, projekčná matica $\boldsymbol{P}$ má rozmery 3×4 a vzťah medzi nimi možno vyjadriť ako

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{X}. \tag{2.1}$$

Projekčnú maticu pre kalibrovaný model vieme vyjadriť ako

$$\boldsymbol{P} = \mathrm{diag}(f, f, 1)[\boldsymbol{I}|\boldsymbol{0}].$$

Hlavný bod $\boldsymbol{p}$ ovplyvní zobrazenie priestorového bodu do obrazu

$$(X, Y, Z)^T \longmapsto (fX/Z + p_x, fY/Z + p_y)^T,$$

pretože súradnice hlavného bodu $(p_x, p_y)^T$ posúvajú premietnutý bod v smere osí x a y. Maticový zápis zobrazenia

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} fX + Zp_x \\ fY + Zp_y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} f & & p_x & 0 \\ & f & p_y & 0 \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2.1.2 Kalibračná matica $\boldsymbol{K}$

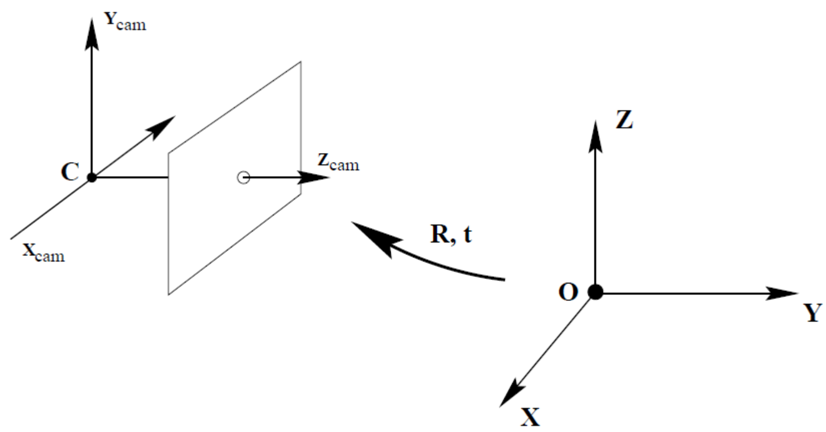
Kalibračnú maticu môžeme aplikovať len na priestorové 3D body kalibrovanej kamerovej sústavy. Kalibračnú maticu vieme vyjadriť ako

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} f & & p_x \\ & f & p_y \\ & & 1 \end{bmatrix},$$

stručná forma zápisu

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{K}[\boldsymbol{I}|\boldsymbol{0}]\boldsymbol{X}_{\mathrm{cam}}, \tag{2.2}$$

kde označenie $\boldsymbol{X}_{\mathrm{cam}}$ pre túto sekciu predstavuje homogénne súradnice bodu kalibrovanej kamerovej sústavy $(X, Y, Z, 1)^T$.



Obr. 2.3: Translácia a rotácia nekalibrovaného kamerového modelu do kalibrovaného modelu.

Nekalibrovanú sústavu možno kalibrovať pomocou rotácie a posunutia, viď obr. 2.3.

Ak $\widetilde{\boldsymbol{X}}$ reprezentuje 3-vektor nehomogénnych súradníc 3D bodu v priestore, potom $\widetilde{\boldsymbol{X}}_{\mathrm{cam}}$ reprezentuje rovnaký bod po kalibrácii v nehomogénnych súradniciach

$$\widetilde{\boldsymbol{X}}_{\mathrm{cam}} = \boldsymbol{R}(\widetilde{\boldsymbol{X}} - \widetilde{\boldsymbol{C}}),$$

kde $\widetilde{\boldsymbol{C}}$ pre túto sekciu predstavuje nehomogénne súradnice stredu kamery a $\boldsymbol{R}$ predstavuje maticu rotácie 3×3, ktorá zahŕňa rotácie okolo každej osi. Rotácia okolo osi X

$$\boldsymbol{R}_X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\varphi_x) & -sin(\varphi_x) \\ 0 & sin(\varphi_x) & cos(\varphi_x) \end{bmatrix},$$

rotácia okolo osi Y

$$\boldsymbol{R}_Y = \begin{bmatrix} cos(\varphi_x) & 0 & -sin(\varphi_x) \\ 0 & 1 & 0 \\ sin(\varphi_x) & 0 & cos(\varphi_x) \end{bmatrix},$$

rotácia okolo osi Z

$$\boldsymbol{R}_Z = \begin{bmatrix} cos(\varphi_x) & -sin(\varphi_x) & 0 \\ sin(\varphi_x) & cos(\varphi_x) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

potom rotáciu $\boldsymbol{R}$ možno vyjadriť ako

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_Z \boldsymbol{R}_Y \boldsymbol{R}_X.$$

Maticový zápis $\boldsymbol{X}_{\mathrm{cam}}$ v homogénnych súradniciach

$$\boldsymbol{X}_{\mathrm{cam}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R} & -\boldsymbol{R}\widetilde{\boldsymbol{C}} \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R} & -\boldsymbol{R}\widetilde{\boldsymbol{C}} \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{X}. \tag{2.3}$$

Kombináciou formulácií (2.2) a (2.3) získame zápis

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{K}[\boldsymbol{R}| - \boldsymbol{R}\widetilde{\boldsymbol{C}}]\boldsymbol{X},$$

kde $\boldsymbol{X}$ predstavuje homogénne súradnice priestorového 3D bodu.

Projekčnú maticu pre nekalibrovaný model vyjadríme ako

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{K}[\boldsymbol{R}|\boldsymbol{t}],$$

kde $\boldsymbol{t} = -\boldsymbol{R}\widetilde{\boldsymbol{C}}$. Projekčná matica $\boldsymbol{P}$ nehomogénnej sústavy má taktiež rozmery 3×4 .

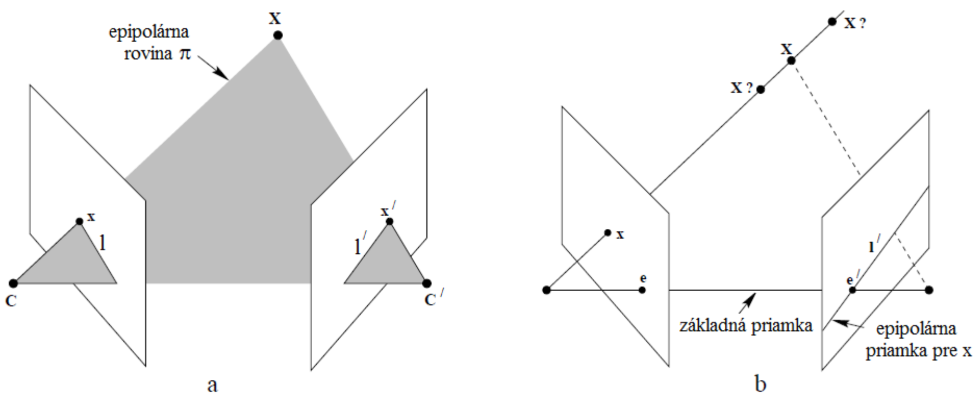
Zovšeobecnenie kalibračnej kamery $\boldsymbol{K}$. Kalibračná matica obsahuje vnútorné parametre fotoaparátu, ohniskovú vzdialenosť, veľkosť snímača a veľkosť obrazu, preto ak $m_x \neq 1, m_y \neq 1$ alebo $p_x \neq 0, p_y \neq 0$ kalibračná matica bude mať tvar

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} \alpha_x & & x_0 \\ & \alpha_y & y_0 \\ & & 1 \end{bmatrix}, \tag{2.4}$$

kde $\alpha_x = m_x f, \alpha_y = m_y f, x_0 = m_x p_x, y_0 = m_y p_y$. Bližší popis je v kapitole 4, definícia 4.3.

2.2 Epipolárna geometria

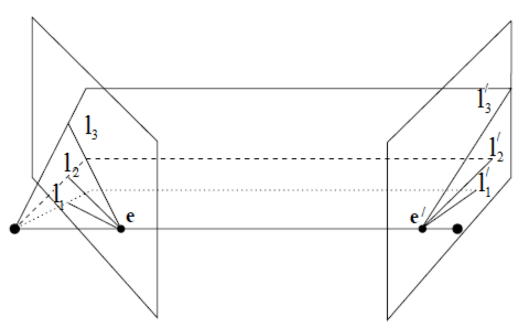
Epipolárna geometria je projektívna geometria medzi dvoma pohľadmi. Nie je závislá od scény, ale iba od parametrov kamier a ich relatívnej polohy.



Obr. 2.4: a) V epipolárnej rovine sú body $\boldsymbol{C}, \boldsymbol{C}'$ stredy kamier, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}'$ sú projekcie a $\boldsymbol{X}$ prislúchajúci priestorový bod. b) Základná priamka je iba jedna a spája stredy kamier. Počet epipolárnych priamok je rovný počtu bodov.

Základná priamka je spojnicou stredov premietania. Obrazové 2D body $\boldsymbol{x} \leftrightarrow \boldsymbol{x}'$, priestorový 3D bod $\boldsymbol{X}$ a stredy premietania $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{C}'$ ležia v jednej rovine. Takúto rovinu nazývame epipolárna rovina $\boldsymbol{\pi}$, viď obr. 2.4.

Predpokladajme, že je známy iba bod $\boldsymbol{x}$ a pozícia bodu $\boldsymbol{x}'$ je tým obmedzená na lúči prechádzajúcim bodmi $\boldsymbol{C}$ a $\boldsymbol{x}$. Rovina $\boldsymbol{\pi}$ je daná základnou priamkou, lúčom prechádzajúcim stredom premietania $\boldsymbol{C}$ a bodom $\boldsymbol{x}$. Bod $\boldsymbol{x}$ bude teda ležať na priamke $\boldsymbol{l}$, ktorá je priesekom premietacej roviny a epipolárnej roviny. Takáto priamka sa nazýva epipolárna priamka.



Obr. 2.5: Epipolárne priamky a epipóly.

- **Epipóly** $\boldsymbol{e}$ a $\boldsymbol{e}'$ sú body, v ktorých základná priamka pretína priemetne. Epipóly sú nezávislé od bodov $\boldsymbol{x}_i$, $\boldsymbol{x}'_i$ a $\boldsymbol{X}_i$.

- **Epipolárne roviny** sú pokračovaním základnej priamky, pričom jeden z bodov $\boldsymbol{x}_i$, $\boldsymbol{x}'_i$, $\boldsymbol{X}_i$ je známy a so základnou priamkou tvorí rovinu. Epipolárne roviny sa menia v závislosti od $\boldsymbol{x}_i$, $\boldsymbol{x}'_i$ a $\boldsymbol{X}_i$.
- **Epipolárna priamka** je priesek epipolárnej roviny s rovinou obrazu, každá epipolárna priamka prechádza epipólom. Epipolárne priamky sa taktiež menia v závislosti od $\boldsymbol{x}_i$, $\boldsymbol{x}'_i$ a $\boldsymbol{X}_i$.

2.2.1 Fundamentálna matica $\boldsymbol{F}$

Fundamentálna matica je algebraickou reprezentáciou epipolárnej geometrie. Fundamentálnu maticu vypočítame zo zobrazenia medzi bodom a epipolárnou priamkou. Daná je dvojica obrazov, pričom pre každý bod $\boldsymbol{x}$ v jednom obraze existuje na príslušnej epipolárnej priamke $\boldsymbol{l}'$ v druhom obraze bod $\boldsymbol{x}'$. Epipolárna priamka je projekcia lúča prechádzajúceho cez bod $\boldsymbol{x}$ a stred $\boldsymbol{C}'$ projektovaného do druhého obrazu. Teda zobrazenie $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{l}'$ z bodu v jednom obraze na príslušnú epipolárnu priamku v druhom obraze.

Algebraický výpočet $\boldsymbol{F}$

K získaniu fundamentálnej matice potrebujeme dve matice projektívnej transformácie $\boldsymbol{P}$ a $\boldsymbol{P}'$. Lúč spätnej projekcie z $\boldsymbol{x}$ pomocou $\boldsymbol{P}$ získame vyriešením $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{X}$.
Predpokladajme, že projekčné matice sú kalibrované

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{K}[\boldsymbol{I}|\boldsymbol{0}], \qquad \boldsymbol{P}' = \boldsymbol{K}'[\boldsymbol{R}|\boldsymbol{t}],$$

potom

$$\boldsymbol{P}^+ = \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}^{-1} \\ \boldsymbol{0}^T \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ 1 \end{pmatrix},$$

kde $\boldsymbol{P}^+$ je pseudo-inverz z $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^+ = \boldsymbol{I}$ a $\boldsymbol{C}$ je nulový vektor.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F} = [\boldsymbol{P}'\boldsymbol{C}]_\times \boldsymbol{P}'\boldsymbol{P}^+ = [\boldsymbol{K}'\boldsymbol{t}]_\times \boldsymbol{K}'\boldsymbol{R}\boldsymbol{K}^{-1} = \boldsymbol{K}'^{-T}[\boldsymbol{t}]_\times \boldsymbol{K}^{-1} = \\ = \boldsymbol{K}'^{-T}\boldsymbol{R}[\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{t}]_\times \boldsymbol{K}^{-1} = \boldsymbol{K}'^{-T}\boldsymbol{R}\boldsymbol{K}^T[\boldsymbol{K}\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{t}]_\times, \end{aligned}$$

kde zápis $[\boldsymbol{a}]_\times$ predstavuje 3×3 antisymetrickú maticu

$$[\boldsymbol{a}]_\times = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{2.5}$$

pričom $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)^T$ reprezentuje 3-vektor.

Epipóly získame ako

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{P}\begin{pmatrix} -\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{t} \\ 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{K}\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{t}, \qquad \boldsymbol{e}' = \boldsymbol{P}'\begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{K}'\boldsymbol{t}.$$

Teda môžeme písať

$$\boldsymbol{F} = [\boldsymbol{e}']_\times \boldsymbol{K}'\boldsymbol{R}\boldsymbol{K}^{-1} = \boldsymbol{K}'^{-T}[\boldsymbol{t}]_\times \boldsymbol{R}\boldsymbol{K}^{-1} = \boldsymbol{K}'^{-T}\boldsymbol{R}[\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{t}]_\times \boldsymbol{K}^{-1} = \boldsymbol{K}'^{-T}\boldsymbol{R}\boldsymbol{K}^T[\boldsymbol{e}]_\times.$$

Vlastnosti fundamentálnej matice

Doteraz sme sa zaoberali zobrazením $\boldsymbol{x} \rightarrow \boldsymbol{l}'$ definovaným podľa $\boldsymbol{F}$. Teraz môžeme zostaviť dôležité vlastnosti fundamentálnej matice.

Fundamentálna matica pre dvojicu zodpovedajúcich si bodov $\boldsymbol{x} \leftrightarrow \boldsymbol{x}'$ z dvoch obrazov spĺňa podmienku

$$\boldsymbol{x}'^T \boldsymbol{F}\boldsymbol{x} = 0. \tag{2.6}$$

Vzťah (2.6) platí, pretože body $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{x}'$ sú si prislúchajúce, keď $\boldsymbol{x}'$ leží na epipolárnej priamke $\boldsymbol{l}' = \boldsymbol{F}\boldsymbol{x}$, inak povedané $\boldsymbol{x}'^T\boldsymbol{l}' = \boldsymbol{x}'^T\boldsymbol{F}\boldsymbol{x} = 0$. Ak body v obraze spĺňajú vzťah (2.6), potom lúče definujúce tieto body sú kolineárne.

Máme dva obrazy získané kamerami s nezhodnými stredmi premietania, potom fundamentálna matica $\boldsymbol{F}$ je jednoznačná 3×3 homogénna matica s hodnosťou 2, čo vyjadruje vzťah (2.6) pre všetky prislúchajúce si body $\boldsymbol{x} \leftrightarrow \boldsymbol{x}'$.

Najdôležitejšie vlastnosti fundamentálnej matice:

Transponovanie. Ak je $\boldsymbol{F}$ fundamentálnou maticou podľa dvojice kamier $(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{P}')$, potom $\boldsymbol{F}^T$ je fundamentálna matica opačnej dvojice $(\boldsymbol{P}', \boldsymbol{P})$.

Epipolárne priamky. Epipolárna priamka $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{F}^T\boldsymbol{x}'$ v prvom obraze je zobrazením bodu $\boldsymbol{x}'$ v druhom obraze. Podobne, epipolárna priamka $\boldsymbol{l}' = \boldsymbol{F}^T\boldsymbol{x}$ v druhom obraze je zobrazením bodu $\boldsymbol{x}$ v prvom obraze.

Epipól. Pre bod $\boldsymbol{x}$ (rôzny od $\boldsymbol{e}$) epipolárna priamka $\boldsymbol{l}' = \boldsymbol{F}\boldsymbol{x}$ obsahuje epipól $\boldsymbol{e}'$ a vyhovuje pre všetky $\boldsymbol{x}$

$$\boldsymbol{e}'^T(\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{e}'^T\boldsymbol{F})\boldsymbol{x} = 0.$$

$\boldsymbol{F}$ má 7 stupňov voľnosti. 3×3 homogénna matica má 8 nezávislých parametrov, avšak $\boldsymbol{F}$ spĺňa tiež vlastnosť $\det\boldsymbol{F} = 0$, čo jej uberá jeden stupeň voľnosti.

Korelácia $\boldsymbol{F}$. Matica $\boldsymbol{F}$ transformuje bod $\boldsymbol{x}$ v prvom obraze projektívnym zobrazením na epipolárnu priamku v druhom obraze podľa vzťahu $\boldsymbol{l}' = \boldsymbol{F}\boldsymbol{x}$. Ak $\boldsymbol{l}$ a $\boldsymbol{l}'$ sú navzájom zodpovedajúce si epipolárne priamky, potom bod $\boldsymbol{x}$ na $\boldsymbol{l}$ je zobrazením na prislúchajúcu priamku $\boldsymbol{l}'$.

2.2.2 Esenciálna matica $\boldsymbol{E}$

Esenciálna matica je špeciálna forma fundamentálnej matice, v tomto prípade sú súradnice obrazu normalizované.

Normalizácia súradníc. Esenciálnu maticu vieme zostrojiť ako

$$\boldsymbol{E} = [\boldsymbol{t}]_\times \boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}[\boldsymbol{R}^T \boldsymbol{t}]_\times,$$

za predpokladu, že platí vzťah $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{X}$, kde $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{K}[\boldsymbol{R}|\boldsymbol{t}]$. Potom definícia esenciálnej matice je

$$\overline{\boldsymbol{x}}'^T \boldsymbol{E} \overline{\boldsymbol{x}} = 0,$$

kde $\overline{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{x}$ a $\overline{\boldsymbol{x}}' = \boldsymbol{K}'^{-1}\boldsymbol{x}'$. Substituujeme $\overline{\boldsymbol{x}} \leftrightarrow \overline{\boldsymbol{x}}'$ a získame

$$\boldsymbol{x}'^T \boldsymbol{K}'^{-T} \boldsymbol{E} \boldsymbol{K}^{-1} \boldsymbol{x} = 0.$$

Porovnaním so vzťahom $\boldsymbol{x}'^T \boldsymbol{F} \boldsymbol{x} = 0$ fundamentálnej matice získame vzťah medzi fundamentálnou a esenciálnou maticou

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{K}'^T \boldsymbol{F} \boldsymbol{K}. \tag{2.7}$$

Vlastnosti esenciálnej matice

Esenciálna matica $\boldsymbol{E} = [\boldsymbol{t}]_\times \boldsymbol{R}$ má iba päť stupňov voľnosti a je singulárna.

Tvrdenie. *Matica 3×3 je esenciálnou maticou práve vtedy, ak dve z jej vlastných čísel sú si rovné a tretie je nula.*

Dôkaz. Dôkaz plynie z dekompozície $\boldsymbol{E} = [\boldsymbol{t}]_\times \boldsymbol{R} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{R}$, kde $\boldsymbol{S}$ predstavuje antisymetrickú maticu podľa vzťahu (2.5). Ďalej použijeme matice

$$\boldsymbol{W} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad a \quad \boldsymbol{Z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

kde matica $\boldsymbol{W}$ je ortogonálna a matica $\boldsymbol{Z}$ je antisymetrická. Maticu $\boldsymbol{S}$ veľkosti 3×3 môžeme zapísať ako $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{U}^T$, kde $\boldsymbol{U}$ je ortogonálne, teda môžeme vyjadriť ako

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{U}\mathrm{diag}(1,1,0)\boldsymbol{W}\boldsymbol{U}^T,$$

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{R} = \boldsymbol{U}\mathrm{diag}(1,1,0)(\boldsymbol{W}\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{R}),$$

použitím singulárneho rozkladu matice (SVD) $\boldsymbol{E}$ (viď 2.3) s dvomi rovnakými singulárnymi hodnotami.

2.2.3 Výpočet projekčných matíc z fundamentálnej matice.

Projekčnú maticu $\boldsymbol{P}$ pre kalibrovaný model kamery vieme určiť, pretože nemá žiadne posunutie ani otočenie, takže stačí určiť projekčnú maticu $\boldsymbol{P}'$ druhej kamery. Ak je známa fundamentálna matica $\boldsymbol{F}$, potom pomocou metódy SVD vieme z $\boldsymbol{F}$ získať maticu $\boldsymbol{P}'$.

Fundamentálnu maticu $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{D}\boldsymbol{V}^T$ rozložíme podľa SVD (viď 2.3) na matice $\boldsymbol{U}, \boldsymbol{D} = \mathrm{diag}[1\ 1\ 0]$ a $\boldsymbol{V}$, ktoré majú rozmery 3×3. Pomocou nich možno zostrojiť 4 projekčné matice

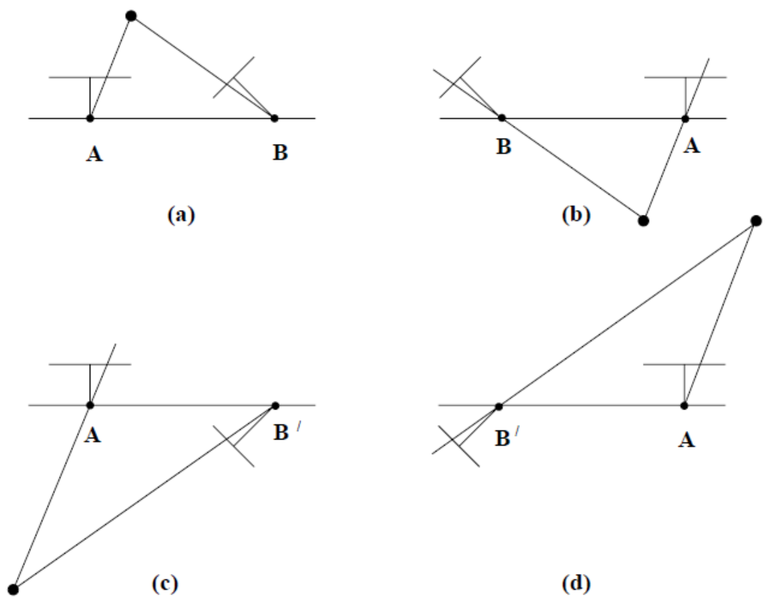
$$\boldsymbol{P}' = [\boldsymbol{U}\boldsymbol{W}\boldsymbol{V}^T|\boldsymbol{u}_3] \vee [\boldsymbol{U}\boldsymbol{W}^T\boldsymbol{V}^T|\boldsymbol{u}_3] \vee [\boldsymbol{U}\boldsymbol{W}\boldsymbol{V}^T|-\boldsymbol{u}_3] \vee [\boldsymbol{U}\boldsymbol{W}^T\boldsymbol{V}^T|-\boldsymbol{u}_3], \tag{2.8}$$

pričom $\boldsymbol{u}_3$ predstavuje 3. stĺpec matice $\boldsymbol{U}$ a matica $\boldsymbol{W}$ má tvar

$$\boldsymbol{W} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tvar matice $\boldsymbol{P}'$ volíme podľa rozloženia a orientácie natočenia scény, viď obr. 2.6.

Zo štyroch možných tvarov $\boldsymbol{P}'$ je pre scénu vhodný iba jeden tvar. V prípade stredovej projekcie, ktorá zodpovedá fotoaparátu je to možnosť, kedy sú obe priemetne i všetky 3D body scény pred stredmi premietania. Postup výpočtu je popísaný v kapitole 4 (Voľba matice $\boldsymbol{P}'$).



Obr. 2.6: Štyri možnosti rozloženia scény.

2.3 Singulárny rozklad matice (SVD)

Pre numerické výpočty je singulárny rozklad matice najpoužívanejšia dekompozičná technika. Najbežnejšie využitie SVD je pri riešení sústavy rovníc.

Maticu $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, m \geq n$ vieme rozložiť na súčin troch matíc

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{D}\boldsymbol{V}^T,$$

kde $\boldsymbol{U} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\boldsymbol{V} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ sú ortogonálne matice a $\boldsymbol{D} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je diagonálna matica so singulárnymi číslami na diagonále, usporiadanými vzostupne. Stĺpce matíc $\boldsymbol{U}$ a $\boldsymbol{V}$ sú ortonormálne, teda platí

$$\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{U} = \mathbf{1}, \quad \boldsymbol{V}^T\boldsymbol{V} = \mathbf{1}.$$

Predpokladajme štvorcovú maticu $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, teda matice $\boldsymbol{U}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{V}$ sú tiež štvorcové. Potom inverznú maticu k matici $\boldsymbol{A}$ vieme vyjadriť ako

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{V}\mathrm{diag}(1/\boldsymbol{\lambda})\boldsymbol{U}^T,$$

kde $\boldsymbol{\lambda}$ predstavuje diagonálne prvky matice D. Problém s touto konštrukciou by mohol nastať, ak by hodnota niektorého z diagonálnych prvkov λ_j

bola nulová alebo veľmi blízka nule. Ak tento problém nastáva pri viacerých prvkoch λ_j, potom riešenie SVD bude o to jednoznačnejšie, pretože sa tým potvrdzuje singularita matice $\boldsymbol{A}$.

Použijeme známy vzťah

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \tag{2.9}$$

ktorý definuje maticu $\boldsymbol{A}$ ako lineárne zobrazenie vektoru $\boldsymbol{x}$ na vektor $\boldsymbol{b}$. Ak je matica $\boldsymbol{A}$ singulárna, potom môžeme použiť upravenú, homogénnu formu

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}. \tag{2.10}$$

Riešenie homogénnej sústavy rovníc (2.10) metódou SVD predstavujú všetky stĺpce matice $\boldsymbol{V}$, ktorých prislúchajúci prvok λ_j je nulový.

Ak by vektor $\boldsymbol{b} \neq \mathbf{0}$, nehomogénnu sústavu rovníc (2.9) by sme metódou SVD riešili nasledovne

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{V}\,\mathrm{diag}(1/\boldsymbol{\lambda})(\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{b}),$$

kde v prípade $\lambda_j = 0$, nahradíme celý výraz $1/\lambda_j$ nulou [2].

Kapitola 3

Numerické metódy na rekonštrukciu 3D scény

3.1 Osembodový algoritmus pre výpočet fundamentálnej matice

Fundamentálnu maticu $\boldsymbol{F}$ vieme numericky určiť pomocou prislúchajúcich si dvojíc obrazových bodov $\boldsymbol{x} \leftrightarrow \boldsymbol{x}'$.

Fundamentálna matica je definovaná vzťahom

$$\boldsymbol{x}'^T \boldsymbol{F} \boldsymbol{x} = 0,$$

pre každú zodpovedajúcu si dvojicu bodov $\boldsymbol{x} \leftrightarrow \boldsymbol{x}'$ v dvoch obrazoch. Z niekoľkých dvojíc obrazových bodov (min.8 , pričom žiadne 4 z nich neležia v jednej rovine) vieme určiť maticu $\boldsymbol{F}$, pričom body $\boldsymbol{x} \leftrightarrow \boldsymbol{x}'$ sú reprezentované homogénnymi 2D súradnicami $\boldsymbol{x} = (x, y, 1)^T$, $\boldsymbol{x}' = (x', y', 1)^T$. Rovnicu pre dvojicu prislúchajúcich si bodov potom vyjadríme v tvare

$$x'xf_{11} + x'yf_{12} + x'f_{13} + y'xf_{21} + y'yf_{22} + y'f_{23} + xf_{31} + yf_{32} + f_{33} = 0,$$

kde prvky matice $\boldsymbol{F}$ sú reprezentované 9-prvkovým vektorom

$$\boldsymbol{f} = (f_{11}, f_{12}, f_{13}, f_{21}, f_{22}, f_{23}, f_{31}, f_{32}, f_{33})^T.$$

Potom môžeme vzťah zapísať v tvare

$$(x'x, x'y, x', y'x, y'y, y', x, y, 1)\boldsymbol{f} = 0.$$

Z n dvojíc bodov zostavíme lineárny systém rovníc vo forme

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} x'_1x_1 & x'_1y_1 & x'_1 & y'_1x_1 & y'_1y_1 & y'_1 & x_1 & y_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x'_nx_n & x'_ny_n & x'_n & y'_nx_n & y'_ny_n & y'_n & x_n & y_n & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}. \tag{3.1}$$

Takýto systém ďalej riešime pomocou singulárneho rozkladu (SVD), viď 2.3.

3.1.1 Normalizovaný osembodový algoritmus

Pred zostavením rovníc riešenia osembodového algoritmu je nutné normalizovať body. Normalizáciou sa obraz preškáluje a vycentruje, teda ťažisko bodov v obraze bude v počiatku, čo vedie k lepším a stabilnejším výsledkom.

Daných je $n \geq 8$ (min.8 , pričom žiadne 4 z nich neležia v jednej rovine) prislúchajúcich si dvojíc bodov $\boldsymbol{x}_i \leftrightarrow \boldsymbol{x}'_i$.

1. **Normalizácia:**
   Body normalizujeme transformáciami

   $$\hat{\boldsymbol{x}}_i = \boldsymbol{T}\boldsymbol{x}_i, \quad \hat{\boldsymbol{x}}'_i = \boldsymbol{T}'\boldsymbol{x}'_i,$$

   kde

   $$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/d & 0 & -\bar{x}\sqrt{2}/d \\ 0 & \sqrt{2}/d & -\bar{y}\sqrt{2}/d \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

   $$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \ \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i, \ d = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - \bar{x})^2 + (y_i - \bar{y})^2},$$

   kde $\boldsymbol{x}_i = (x_i, y_i)$. Podobne by sa definovala transformácia $\boldsymbol{T}'$.

2. **Hľadanie fundamentálnej matice:**
   Z normalizovaných dvojíc bodov $\hat{\boldsymbol{x}}_i \leftrightarrow \hat{\boldsymbol{x}}'_i$ skonštruujeme maticu $\boldsymbol{A}$ podľa vzťahu (3.1) a rozložíme ju pomocou SVD

   $$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}_1\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{V}_1^T,$$

   z posledného stĺpca matice $\boldsymbol{V}_1$ získame maticu $\hat{\boldsymbol{F}}$, ktorú znova rozložíme pomocou SVD

   $$\hat{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{U}_2\mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)\boldsymbol{V}_2^T,$$

posledný diagonálny prvok σ_3 nahradíme nulou

$$\hat{\boldsymbol{F}}_2 = \boldsymbol{U}_2 \mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2, 0) \boldsymbol{V}_2^T,$$

čím zaručíme, že fundamentálna matica bude mať hodnosť 2.

3. **Denormalizácia:**
   Napokon spravíme dekompozíciu fundamentálnej matice

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{T}'^T \hat{\boldsymbol{F}}_2 \boldsymbol{T}.$$

3.2 Triangulačná metóda

Pre každý pár zodpovedajúcich si 2D bodov $\boldsymbol{x} \leftrightarrow \boldsymbol{x}'$ vypočítame priestorový bod, ktorého projekcia v dvoch obrazoch zodpovedá danému páru bodov. Ak máme určené projekčné matice pre obe kamery, môžeme skonštruovať triangulačnú metódu.

Obrazové body vieme vyjadriť vzťahmi

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{X}, \quad \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{P}'\boldsymbol{X},$$

z ktorých vieme pre každý bod $\boldsymbol{x} = (x, y), \boldsymbol{x}' = (x', y')$ získať vzťah

$$\boldsymbol{x} \times (\boldsymbol{P}\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{0}$$

a rozpísať ho do troch rovníc

$$\begin{aligned} x(\boldsymbol{p}^{3T}\boldsymbol{X}) - (\boldsymbol{p}^{1T}\boldsymbol{X}) &= 0, \\ y(\boldsymbol{p}^{3T}\boldsymbol{X}) - (\boldsymbol{p}^{2T}\boldsymbol{X}) &= 0, \\ x(\boldsymbol{p}^{2T}\boldsymbol{X}) - y(\boldsymbol{p}^{1T}\boldsymbol{X}) &= 0, \end{aligned}$$

pričom dve z nich sú lineárne nezávislé, podobne by sme vyjadrili vzťahy pre $\boldsymbol{x}'$. Označenie $\boldsymbol{p}^{tT}$ reprezentuje riadok t matice $\boldsymbol{P}$.
Z každého obrazu vyberieme pre jednotlivé body vždy dve z týchto rovníc, čím získame pre každú dvojicu bodov $\boldsymbol{x} \leftrightarrow \boldsymbol{x}'$ sústavu štyroch rovníc o štyroch neznámych, z ktorých zostavíme maticu $\boldsymbol{A}$ v tvare

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} x\boldsymbol{p}^{3T} - \boldsymbol{p}^{1T} \\ y\boldsymbol{p}^{3T} - \boldsymbol{p}^{2T} \\ x'\boldsymbol{p}'^{3T} - \boldsymbol{p}'^{1T} \\ y'\boldsymbol{p}'^{3T} - \boldsymbol{p}'^{2T} \end{bmatrix}, \tag{3.2}$$

vo vzťahu $\boldsymbol{AX} = \mathbf{0}$. Takúto sústavu rovníc môžeme riešiť dvoma spôsobmi, homogénnou metódou alebo nehomogénnou metódou.

- *Homogénna metóda* predstavuje metódu, pri ktorej hľadáme riešenie sústavy singulárnym rozkladom (SVD), viď 2.3.
- *Nehomogénna metóda* je metóda, pri ktorej sa úloha redukuje na štyri rovnice o troch neznámych. Ďalej riešime tieto nehomogénne rovnice metódou najmenších štvorcov.

3.3 Minimalizačné algoritmy

Ak hodnoty získané aplikáciou normalizovaného osembodového algoritmu a triangulačnej metódy nie sú dostatočne presné, je možné použiť niektoré z minimalizačných algoritmov alebo ich kombináciu na spresnenie minimalizáciou vznikajúcej chyby.

3.3.1 Metóda gold standard

Metódou gold standard dokážeme spresniť odhad projekčnej matice $\boldsymbol{P}'$ a odhady priestorových bodov prislúchajúcich dvojiciam 2D bodov vstupujúcich do normalizovaného osembodového algoritmu.

Implementácia metódy gold standardu je náročnejšia, no zároveň je tento algoritmus považovaný za jeden z najlepších spresňujúcich algoritmov.

Metódou gold standard minimalizujeme vzdialenosť medzi zvolenými pozíciami obrazových bodov $\boldsymbol{x}_i \leftrightarrow \boldsymbol{x}'_i$ a ich optimálnymi pozíciami $\hat{\boldsymbol{x}}_i \leftrightarrow \hat{\boldsymbol{x}}'_i$ vo vzťahu

$$\sum_t d(\boldsymbol{x}_i, \hat{\boldsymbol{x}}_i)^2 + d(\boldsymbol{x}'_i, \hat{\boldsymbol{x}}'_i)^2,$$

kde $d(\cdot\,,\cdot)$ predstavuje vzdialenosť medzi bodmi v Euklidovskom zmysle. Pri absolútne presných odhadoch optimálnych pozícii bodov $\hat{\boldsymbol{x}}_i \leftrightarrow \hat{\boldsymbol{x}}'_i$ a fundamentálnej matice $\hat{\boldsymbol{F}}$ je splnená podmienka $\hat{\boldsymbol{x}}'^T_i \hat{\boldsymbol{F}} \hat{\boldsymbol{x}}_i = 0$. Našimi odhadmi sa chceme aspoň priblížiť k splneniu tejto podmienky, pričom matica $\hat{\boldsymbol{F}}$ musí mať hodnosť 2.

Postup algoritmu je nasledovný:

1. Vypočítame počiatočný odhad fundamentálnej matice $\hat{\boldsymbol{F}}$ s hodnosťou 2 pomocou osembodového algoritmu.

2. Vypočítame počiatočný odhad optimálnych pozícií bodov $\hat{\boldsymbol{x}}_i \leftrightarrow \hat{\boldsymbol{x}}'_i$ nasledovne:

   (a) Projekčnú maticu pre kalibrovanú kamerovú sústavu vieme určiť ako $\boldsymbol{P} = [\boldsymbol{I}|\boldsymbol{0}]$ a projekčnú maticu pre nekalibrovanú kamerovú sústavu odhadneme ako $\hat{\boldsymbol{P}}' = [[\boldsymbol{e}']_\times \hat{\boldsymbol{F}}|\boldsymbol{e}']$, kde $\boldsymbol{e}'$ získame z $\hat{\boldsymbol{F}}$, resp. podľa postupu 2.2.3.

   (b) Z dvojice bodov $\boldsymbol{x}_i \leftrightarrow \boldsymbol{x}'_i$ a odhadu fundamentálnej $\hat{\boldsymbol{F}}$ vypočítame odhad $\hat{\boldsymbol{X}}_i$ pomocou triangulačnej metódy.

   (c) Odhad optimálnych pozícií bodov potom vieme vypočítať ako $\hat{\boldsymbol{x}}_i = \boldsymbol{P}\hat{\boldsymbol{X}}_i, \hat{\boldsymbol{x}}'_i = \hat{\boldsymbol{P}}'\hat{\boldsymbol{X}}_i$.

3. Minimalizácia funkcie

$$\sum_i d(\boldsymbol{x}_i, \hat{\boldsymbol{x}}_i)^2 + d(\boldsymbol{x}'_i, \hat{\boldsymbol{x}}'_i)^2, \tag{3.3}$$

   optimalizáciou odhadov $\hat{\boldsymbol{F}}$ a $\hat{\boldsymbol{x}}_i \leftrightarrow \hat{\boldsymbol{x}}'_i, i = 1, ..., n$. Funkciu sumy minimalizujeme Levenberg–Marquardtovým iteračným algoritmom (popísaný nižšie) prostredníctvom $3n + 12$ parametrov $\boldsymbol{\theta}$, teda $3n$ pre n 3D bodov $\hat{\boldsymbol{X}}_i$ a 12 pre maticu $\hat{\boldsymbol{P}}' = [\boldsymbol{M}|\boldsymbol{t}]$. Potom vieme vyjadriť nové odhady ako $\hat{\boldsymbol{F}} = [\boldsymbol{t}]_\times \boldsymbol{M}$ a $\hat{\boldsymbol{x}}_i = \boldsymbol{P}\hat{\boldsymbol{X}}_i, \hat{\boldsymbol{x}}'_i = \hat{\boldsymbol{P}}'\hat{\boldsymbol{X}}'_i$.

Levenberg–Marquardtov iteračný algoritmus

Predpokladajme, že máme daný vzťah $Y = g(\boldsymbol{\theta})$, kde účelová funkcia $g(\boldsymbol{\theta})$ predstavuje sumu vzdialeností (3.3), $\boldsymbol{\theta}$ $(3n + 12)$-prvkový vektor parametrov a $Y = 0$, pretože pre presne odhadnuté obrazové body je suma vzdialeností nulová.

Počiatočný odhad parametrov $\boldsymbol{\theta}^0$ je daný a ďalej budeme odhad spresňovať za predpokladu, že funkcia g je lokálne lineárna.

Určíme počiatočné rezíduum ϵ^0 ako

$$\epsilon^0 = g(\theta^0) - Y = g(\theta^0).$$

Predpokladáme, že funkcia g je aproximovaná vektorom $\boldsymbol{\theta}^0$ ako

$$\begin{aligned} g(\boldsymbol{\theta}^0 + \boldsymbol{\Delta}) &= g(\boldsymbol{\theta}^0) + \boldsymbol{J}\boldsymbol{\Delta}, \\ \epsilon^1 &= \epsilon^0 + \boldsymbol{J}\boldsymbol{\Delta}, \end{aligned} \tag{3.4}$$

kde $\boldsymbol{J}$ predstavuje Jacobiho maticu $(1 \times (3n+12))$

$$\boldsymbol{J} = \left(\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\theta}_1}, ..., \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\theta}_{(3n+12)}}\right),$$

skrátená forma zápisu $\boldsymbol{J} = \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\theta}}$. Získame novú hodnotu $g(\boldsymbol{\theta}^1)$, kde $\boldsymbol{\theta}^1 = \boldsymbol{\theta}^0 + \boldsymbol{\Delta}$. Hodnoty vektora $\boldsymbol{\Delta}$ sú zatiaľ neznáme, hľadáme ich zostavením sústavy rovníc

$$(\boldsymbol{J}^T\boldsymbol{J} + \boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{I})\boldsymbol{\Delta} = -\boldsymbol{J}^T\epsilon,$$

kde $\boldsymbol{I}$ je matica identity a najčastejšia hodnota λ_j je 10^{-3}, pri ktorej dokáže funkcia rýchlejšie konvergovať. Súčinom $\boldsymbol{J}^T\boldsymbol{J}$ získame maticu veľkosti $(3n+12) \times (3n+12)$. Riešenie sústavy rovníc hľadáme pomocou SVD (viď 2.3). Vypočítané hodnoty $\boldsymbol{\Delta}$ dosadíme do vzťahu (3.4) a získame ϵ^1 pre prvú iteráciu. Ďalšie iterácie by sme robili podobne. Počet iterácií závisí od veľkosti počiatočnej chyby ϵ_0.

Výstupom je vektor $\boldsymbol{\theta}$ z poslednej iterácie, ktorý obsahuje n nových optimalizovaných 3D bodov $\hat{\boldsymbol{X}}_i'$ a nové optimalizované hodnoty prvkov matice $\boldsymbol{P}'$.

3.3.2 Optimálna triangulačná metóda

Optimálnou triangulačnou metódou dokážeme spresniť pozície prislúchajúcich si bodov v obrazoch $\boldsymbol{x}_i \leftrightarrow \boldsymbol{x}_i'$.

Body $\boldsymbol{x} \leftrightarrow \boldsymbol{x}'$ predstavujú zvolené pozície bodov a hľadáme ich optimálne pozície prostredníctvom dvojice bodov $\hat{\boldsymbol{x}} \leftrightarrow \hat{\boldsymbol{x}}'$, ktoré minimalizujeme funkciou

$$Q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = d(\boldsymbol{x}, \hat{\boldsymbol{x}})^2 + d(\boldsymbol{x}', \hat{\boldsymbol{x}}')^2, \tag{3.5}$$

s predpokladom splnenia podmienky

$$\hat{\boldsymbol{x}}'^T\boldsymbol{F}\hat{\boldsymbol{x}} = 0, \tag{3.6}$$

kde $d(\cdot\,, \cdot\,)$ predstavuje vzdialenosť medzi bodmi v Euklidovskom zmysle.

Optimálne pozície dvojice bodov $\hat{\boldsymbol{x}}_i \leftrightarrow \hat{\boldsymbol{x}}_i'$ by mali ležať na dvojici prislúchajúcich si epipolárnych priamok $\boldsymbol{l}_i \leftrightarrow \boldsymbol{l}_i'$ v dvoch obrazoch. Body $\boldsymbol{x}_\perp \leftrightarrow \boldsymbol{x}_\perp'$ predstavujú najbližšiu dvojicu ku dvojici zvolených bodov $\boldsymbol{x}_i \leftrightarrow \boldsymbol{x}_i'$, ležiacu na príslušných epipolárnych priamkach (viď obr. 3.1) a zároveň optimálne spĺňajú podmienku (3.6), potom považujeme tieto body za optimálne pozície bodov $\hat{\boldsymbol{x}}' = \boldsymbol{x}_\perp'$ a $\hat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}_\perp$. Teda platí vzťah $d(\boldsymbol{x}, \hat{\boldsymbol{x}}) = d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{l})$, kde $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{l})$ reprezentuje kolmú vzdialenosť z bodu $\boldsymbol{x}$ na priamku $\boldsymbol{l}$. Optimálnu triangulačnú

Obr. 3.1: Najbližšia pozícia na epipolárnej priamke zo zvoleného bodu $\boldsymbol{x}$ je optimálna pozícia bodu $\hat{\boldsymbol{x}}$, podobne pre $\boldsymbol{x}', \hat{\boldsymbol{x}}'$.

metódu potom môžeme formulovať aj ako minimalizáciu $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{l})^2 + d(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{l}')^2$.

Postup optimálnej triangulačnej metódy:
Dané sú zvolené body $\boldsymbol{x}_i \leftrightarrow \boldsymbol{x}'_i$ a odhad fundamentálnej matice $\hat{\boldsymbol{F}}$, cieľom je dopočítať optimálne pozície bodov $\hat{\boldsymbol{x}}_i \leftrightarrow \hat{\boldsymbol{x}}'_i$, ktoré minimalizujú chybu vzdialenosti (3.5) pri optimálnom dodržaní podmienky $\hat{\boldsymbol{x}}'^T \hat{\boldsymbol{F}} \hat{\boldsymbol{x}} = 0$.

- Transformáciou zabezpečíme, že obrazové body $\boldsymbol{x}_i = (x, y, 1), \boldsymbol{x}'_i = (x', y', 1)$ budú vycentrované k počiatku súradnicovej sústavy. Transformačné matice sú v tvare

$$\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} 1 & & -x \\ & 1 & -y \\ & & 1 \end{pmatrix} \quad a \quad \boldsymbol{T}' = \begin{pmatrix} 1 & & -x' \\ & 1 & -y' \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

- Odhad fundamentálnej matice $\hat{\boldsymbol{F}}$ nahradíme za transformovaný tvar $\hat{\boldsymbol{F}}_{\text{new}} = \boldsymbol{T}'^{-T} \hat{\boldsymbol{F}} \boldsymbol{T}^{-1}$.

- Vypočítame pozície epipólov pre oba obrazy $\boldsymbol{e} = (e_1, e_2, e_3), \boldsymbol{e}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$, pre ktoré platí vzťah $\boldsymbol{e}'^T \hat{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{0}, \boldsymbol{e}\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$. Epipól $\boldsymbol{e}$ normalizujeme $e_1 + e_2 = 1$, podobne normalizujeme aj $\boldsymbol{e}'$.

- Zostrojíme rotačné matice

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \\ -e_2 & e_1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \quad a \quad \boldsymbol{R}' = \begin{pmatrix} e'_1 & e'_2 & \\ -e'_2 & e'_1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

- Transformovaný odhad fundamentálnej matice $\hat{\boldsymbol{F}}_{\text{new}}$ opäť transformujeme $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{R}'\hat{\boldsymbol{F}}_{\text{new}}\boldsymbol{R}^T$ a vyjadríme ako

$$\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} ff'd & -f'c & -f'd \\ -fb & a & b \\ -fd & c & d \end{pmatrix}.$$

- Definujeme $f = e_3, f' = e_3$.

- Celková vzdialenosť je daná ako

$$s(t) = \frac{t^2}{1 + f^2t^2} + \frac{(ct + d)^2}{(at + b)^2 + f'^2(ct + d)^2}.$$

  Našou úlohou je nájsť minimum funkcie $s(t)$. Extrémy funkcie $s(t)$ nájdeme, ak jej deriváciu položíme rovnú nule $s'(t) = 0$, preto vypočítame deriváciu funkcie $s(t)$,

$$s'(t) = \frac{2t}{(1 + f^2t^2)^2} - \frac{2(ad - bc)(at + b)(ct + d)}{((at + b)^2 + f'^2(ct + d)^2)^2}.$$

  Po úprave $s'(t)$ dostaneme polynóm

$$g(t) = t((at+b)^2+f'^2(ct+d)^2)^2-(ad-bc)(1+f^2t^2)^2(at+b)(ct+d) = 0.$$

  Extrémy funkcie $s(t)$ budú dané koreňmi polynómu $g(t)$. Jedná sa o polynóm šiestich stupňov voľnosti, teda obsahuje 6 koreňov, 3 maximá a 3 minimá funkcie $s(t)$. Po vylúčení komplexných koreňov zvolíme z reálnych koreňov $t_{\min}$.

- Po určení $t_{\min}$ vieme zadefinovať epipolárne priamky $\boldsymbol{l}$ a $\boldsymbol{l}'$ ako

$$\boldsymbol{l}(t) = (tf, 1, -t),$$
$$\boldsymbol{l}'(t) = \boldsymbol{F}(0, t, 1)^T = (-f'(ct + d), at + b, ct + d)^T.$$

  Prostredníctvom nich hľadáme body $\hat{\boldsymbol{x}}_i \leftrightarrow \hat{\boldsymbol{x}}'_i$ ako najbližšie body na priamkach od pôvodných $\boldsymbol{x}_i \leftrightarrow \boldsymbol{x}'_i$ bodov. Pre vzorový tvar priamky (λ, μ, ν) je najbližším bodom na priamke bod $(-\lambda\nu, -\mu\nu, \lambda^2 + \mu^2)$.

- Novú spresnenú dvojicu musíme ešte spätne transformovať, $\hat{\boldsymbol{x}}_i$ nahradíme $\hat{\boldsymbol{x}}_i^{\text{new}} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{R}^T\hat{\boldsymbol{x}}_i$ a $\hat{\boldsymbol{x}}'_i$ nahradíme $\hat{\boldsymbol{x}}_i'^{\text{new}} = \boldsymbol{T}'^{-1}\boldsymbol{R}'^T\hat{\boldsymbol{x}}'_i$.

- Zo spresnenej dvojice $\hat{\boldsymbol{x}}_i^{\text{new}} \leftrightarrow \hat{\boldsymbol{x}}_i'^{\text{new}}$ vypočítame triangulačnou metódou 3.2 priestorový bod $\hat{\boldsymbol{X}}_i$.

Kapitola 4

Zostavenie algoritmu na rekonštrukciu 3D scény

4.1 Testovacia 3D scéna

Zostrojíme si vlastnú 3D scénu s testovacími dátami, ktorá pozostáva z dvoch kamerových stredov, pričom jeden z nich je umiestnený v počiatku súradnicovej sústavy $(0, 0, 0)$ (kalibrovaný model) a druhý kdekoľvek mimo počiatku (nekalibrovaný model). Ďalej do scény umiestnime dve priemetne, jednu v zmysle kalibrovaného modelu kolmo na z-ovú os vo vzdialenosti f a druhú priemetňu umiestnime pred stred premietania vo vzdialenosti f'. Napokon do scény pridáme 3D objekt pozostávajúci z 3D bodov tak, aby bol umiestnený pred priemetňami (obr. 4.1).

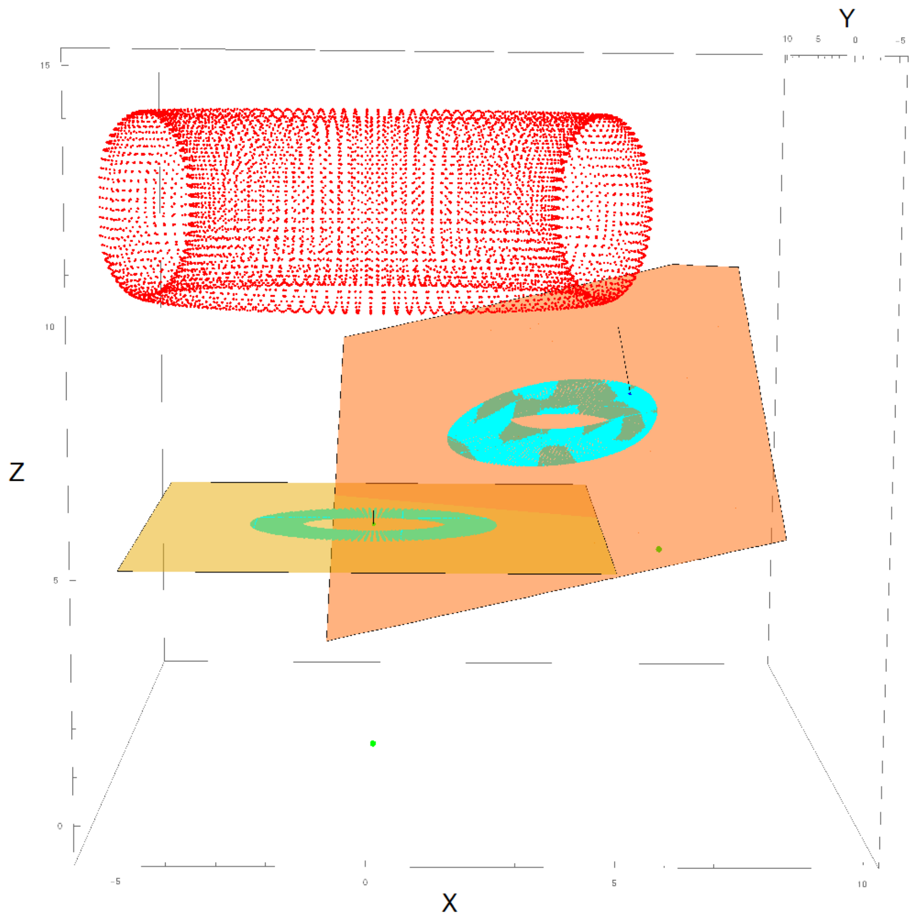
Z 3D scény získame presné projekcie 2D bodov využitím vzťahu (2.1) pre obe projekčné matice $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{P}'$.

Získané 2D body z dvoch pohľadov využijeme na rekonštrukciu 3D scény použitím numerických metód popisovaných v kapitole 3.

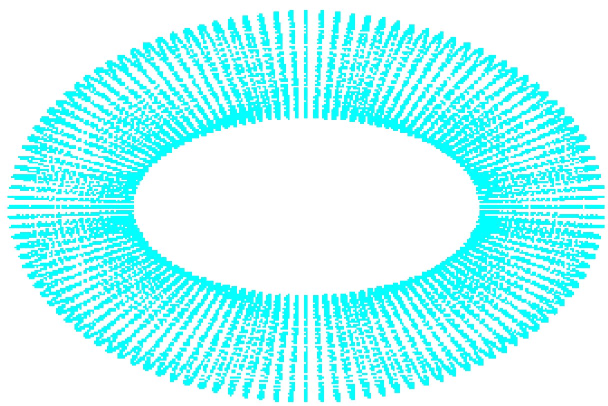
4.2 Rekonštrukcia

Nutnými vstupmi na rekonštrukciu 3D scény sú dvojice obrazových bodov $\boldsymbol{x} \leftrightarrow \boldsymbol{x}'$, ohniskové vzdialenosti f, f' a jedna reálna vzdialenosť medzi dvomi 3D bodmi.

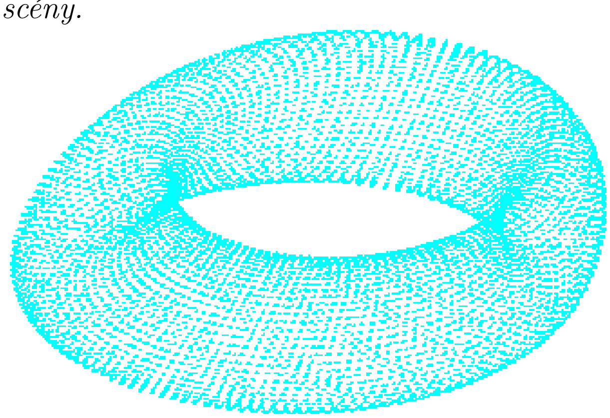
Normalizovaným osembodovým algoritmom popísaným v kapitole 3 získame fundamentálnu maticu $\boldsymbol{F}$. Pri voľbe bodov vstupujúcich do algoritmu



Obr. 4.1: Pohľad na scénu zboku. Zelené body sú stredy premietania, červené body predstavujú objekt, ktorý je premietaný. Žltá priemetňa je priemetňa kalibrovaného modelu a oranžová priemetňa je súčasťou nekalibrovaného modelu, tyrkysové body sú priemety bodov objektu na tieto priemetne.



Obr. 4.2: Projekcia na priemetňu kalibrovanej scény.



Obr. 4.3: Projekcia na priemetňu nekalibrovanej scény.

je dôležité dodržať podmienku, aby štyri body neležali v jednej rovine, inak 8 bodov nie je postačujúcich na výpočet fundamentálnej matice. Pre danú testovaciu scénu nadobúda vzťah $\boldsymbol{x}'\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}$ nulové hodnoty, resp. hodnoty veľmi blízke nule (výpočtami v softvéroch vznikajú numerické chyby, preto hodnoty nemusia byť rovné nule ale napr. 10^{-20}).

Implementácia normalizovaného osembodového algoritmu v softvéri Mathematica:

```
(* Vstupom sú všetky 2D body v 1. obraze x a v 2. obraze x' *)
getNumericF[x1_List, x2_List] :=
 Module[{x̂1, x̂2, T1, T2, n, A, U1, D1, V1, U2, D2, V2, σ1, σ2, σ3, F̂, F̂2}
  n = Length[x1];
  (* 1. Normalizácia: *)
  {T1, x̂1} = NormalizePts[x1];
  {T2, x̂2} = NormalizePts[x2];
  (* 2. Hľadanie fundamentálnej matice: *)
  A = Table[getEquation[x̂1[[i, 1 ;; 2]], x̂2[[i, 1 ;; 2]]], {i, 1, n}];
  {U1, D1, V1} = SingularValueDecomposition[A];
  F̂ = Partition[V1[[1 ;; 9, 9]], 3, 3];
  {U2, D2, V2} = SingularValueDecomposition[F̂];
  {σ1, σ2, σ3} = Diagonal[D2];
  F̂2 = U2.DiagonalMatrix[{σ1, σ2, 0}].Transpose[V2];
  (* 3. Denormalizácia: *)
  Return[Transpose[T2].F̂2.T1];
 ]
(* Podľa vzťahu (3.1). *)
getEquation[{x1_, y1_}, {x2_, y2_}] := Module[{},
  Return[{x2 x1, x2 y1, x2 , y2 x1, y2 y1 , y2 , x1 , y1, 1}];
 ]
```

```
(* Normalizácia 2D bodov. *)
NormalizePts[x_List] := Module[{x̄, ȳ, d, x̂, n, T},
  n = Length[x];
  x̄ = Sum[x[[i, 1]], {i, 1, n}] / n;
  ȳ = Sum[x[[i, 2]], {i, 1, n}] / n;
  d = Sqrt[Sum[(x[[i, 1]] - x̄) ^2 + (x[[i, 2]] - ȳ) ^2, {i, 1, n}] / n];
  T = {{√2 / d, 0, -x̄ √2 / d}, {0, √2 / d, -ȳ / d}, {0, 0, 1}};
  x̂ = Table[(T.x[[i]]), {i, 1, n}];
  Return[{T, x̂}];
 ]
```

Ak ohniskové vzdialenosti f, f' nie sú jednotkové, je potrebné z fundamentálnej matice $\boldsymbol{F}$ získať esenciálnu maticu $\boldsymbol{E}$ podľa vzťahu (2.7) a ďalej používame miesto matice $\boldsymbol{F}$ maticu $\boldsymbol{E}$. Tiež je nutné pretransformovať body $\boldsymbol{x} \leftrightarrow \boldsymbol{x}'$ podľa vzťahov

$$\overline{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{x}, \quad \overline{\boldsymbol{x}}' = \boldsymbol{K}'^{-1}\boldsymbol{x}',$$

kde $\boldsymbol{K}, \boldsymbol{K}'$ sú kalibračné matice dané vzťahom (2.4) a body $\boldsymbol{x} \leftrightarrow \boldsymbol{x}'$ sú v homogénnom tvare.

Z fundamentálnej matice $\boldsymbol{F}$, resp. z esenciálnej matice $\boldsymbol{E}$ získame projekčnú maticu $\boldsymbol{P}'$.

Implementácia výpočtu štyroch tvarov $\boldsymbol{P}'$ v softvéri Mathematica:

```
(* Funkcia vytvorí 4 možné tvary matice P' podľa vzťahu (2.8). *)
getAllP'[matrix_List] := Module[{U, D, V, W, P1', P2', P3', P4'},
  {U, D, V} = SingularValueDecomposition[matrix];
  W = {{0, -1, 0}, {1, 0, 0}, {0, 0, 1}};
  P1' = AddColumn[U.W.Transpose[V], U[[1 ;; 3, 3]]];
  P2' = AddColumn[U.Transpose[W].Transpose[V], U[[1 ;; 3, 3]]];
  P3' = AddColumn[U.W.Transpose[V], -U[[1 ;; 3, 3]]];
  P4' = AddColumn[U.Transpose[W].Transpose[V], -U[[1 ;; 3, 3]]];
  (* U[[1;;3,3]] je 3. stĺpec matice U. *)
  Return[{P1', P2', P3', P4'}];
 ]
```

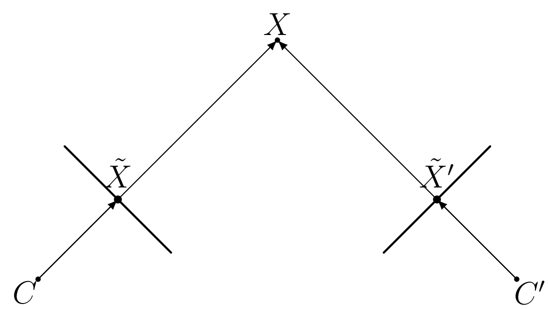
Voľba matice $\boldsymbol{P}'$

Zo štyroch možných tvarov $\boldsymbol{P}'$ (2.8) je pre danú scénu vhodný iba jeden tvar. V prípade danej scény je to možnosť, kedy sú obe priemetne pred stredmi premietania a všetky 3D body scény pred priemetňami, viď obr. 2.6.

Stredy premietania označíme $\boldsymbol{C}, \boldsymbol{C}'$, zvolíme si ľubovoľný 3D bod $\boldsymbol{X}$ zo scény (získaný triangulačnou metódou, pre každé zo štyroch možných tvarov $\boldsymbol{P}'$, vypočítame aspoň jeden priestorový bod $\boldsymbol{X}$ na overenie scény) a vypočítame 3D pozície bodu $\boldsymbol{X}$ zobrazeného na priemetne $\tilde{\boldsymbol{X}}, \tilde{\boldsymbol{X}}'$,

$$\tilde{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{x}\boldsymbol{R} + \boldsymbol{C} \quad \text{a} \quad \tilde{\boldsymbol{X}}' = \boldsymbol{x}'\boldsymbol{R}' + \boldsymbol{C}',$$

kde $\boldsymbol{x} \leftrightarrow \boldsymbol{x}'$ sú homogénne 2D súradnice prislúchajúce danému 3D bodu $\boldsymbol{X}$. $\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R}'$ sú rotačné matice, pričom $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{I}$ a $\boldsymbol{R}' = \boldsymbol{P}'_{3\times 3}$ (prvé 3 stĺpce matice $\boldsymbol{P}'$). $\boldsymbol{C}, \boldsymbol{C}'$ sú stredy premietania $\boldsymbol{C} = (0,0,0)$, $\boldsymbol{C}' = -\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{P}'_4$, kde $\boldsymbol{P}'_4$ je štvrtý stĺpec matice $\boldsymbol{P}'$.



Obr. 4.4: Kamerová sústava s vektormi.

Parametre

$$\lambda = \frac{\tilde{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{C}}{\boldsymbol{X} - \boldsymbol{C}} \text{ a } \lambda' = \frac{\tilde{\boldsymbol{X}}' - \boldsymbol{C}'}{\boldsymbol{X}' - \boldsymbol{C}'},$$

vyjadrujú pomer vektorov, viď obr. 4.4. Ak sú oba parametre λ, λ' z intervalu $[0,1]$ jedná sa o správny tvar projekčnej matice $\boldsymbol{P}'$.

Po určení správneho tvaru $\boldsymbol{P}'$ môžeme aplikovať triangulačnú metódu na všetky obrazové dvojice 2D bodov a získame priestorové 3D body $\hat{\boldsymbol{X}}$.

Implementácia triangulačnej metódy v softvéri Mathematica:

```
(* Výpočet 3D bodov triangulačnou metódou použitím homogénnej
 metódy na hľadanie riešenia sústavy. *)
(* Do funkcie vstupujú projekčné matice P,P' a dvojica 2D bodov xi,
x'i, ktorú je nutné pred vstupom do funcie transformovať,
ak ohnisková vzdialenosť f nie je jednotková. *)
Get3DPtHomogenous[x1_, x2_, P1_List, P2_List] := Module[{U, W, V, X, A},
  A = linearTriangulation[P1, P2, x1, x2];
  (* Hľadanie riešenia metódou SVD. *)
  {U, W, V} = SingularValueDecomposition[A];
  X = V[[1 ;; 4, 4]]; (* homogénne súradnice 3D bodu*)
  (* Výstupom sú nehomogénne súradnice 3D bodu.*)
  Return[homBack[X]];
 ]
(* Zostavenie matice A podľa vzťahu (3.2) *)
linearTriangulation[P1_List, P2_List, {x1_, y1_}, {x2_, y2_}] :=
 Module[{},
  Return[{x1 P1[[3]] - P1[[1]], y1 P1[[3]] - P1[[2]], x2 P2[[3]] - P2[[1]],
     y2 P2[[3]] - P2[[2]]}];
 ]
```

Škálovanie

Získané priestorové body $\hat{\boldsymbol{X}}$ je nutné preškálovať, pretože takto získané priestorové body zodpovedajú iba metrickej rekonštrukcii, kedy je medzi získanou a pôvodnou 3D scénou podobnosť. Body preškálujeme pomocou známej reálnej vzdialenosti medzi bodmi $\boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{X}_j$.

Faktor škálovania

$$S = \frac{|d(\boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{X}_j)|}{|d(\hat{\boldsymbol{X}}_i^S, \hat{\boldsymbol{X}}_j^S)|}, \tag{4.1}$$

kde $d(\cdot, \cdot)$ predstavuje vzdialenosť medzi bodmi v Euklidovskom zmysle. Všetky priestorové body $\hat{\boldsymbol{X}}$ vynásobíme faktorom škálovania S, získame preškálované body $\hat{\boldsymbol{X}}^S$ a teda presnú scénu.

Chyba vyjadrená $\boldsymbol{L}_1$ normou. Ak sú pôvodné body $\boldsymbol{X}$ a získané preškálované body $\hat{\boldsymbol{X}}^S$, chybu odhadu priestorových bodov vyjadríme ako priemerný rozdiel vzdialeností reálnych bodov $\boldsymbol{X}$ a vzdialeností odhadnutých bodov $\hat{\boldsymbol{X}}^S$, napr. L_1 normou, ktorú možno vyjadriť ako

$$L_1 = \frac{2}{N(N-1)} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} |d(\hat{\boldsymbol{X}}_i, \hat{\boldsymbol{X}}_j) - d(\boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{X}_j)|. \tag{4.2}$$

L_1 norma pre daný prípad je nulová resp. veľmi blízka 0 (výpočtami v softvéroch vznikajú numerické chyby, preto hodnoty nemusia byť rovné nule ale napr. 10^{-20}).

Ak by sme však uvažovali dáta z reálnej scény, chyba by narástla vzhľadom na chybu pri určovaní prislúchajúcej si dvojice bodov v obrazoch.

Zašumenie

Aby sme vedeli akej maximálnej chyby sa pri určovaní bodov v obrazoch môžeme dopustiť a mať zároveň dostatočne presné výsledky, zašumíme 2D súradnice náhodným posunutím do určitej vzdialenosti v x-ovom aj y-ovom smere. Zašumenie je vyjadrené v percentách. Na predstavu pre obrázok so šírkou 5000px, roztrasenie 0.1% predstavuje nepresnosť do 5px do oboch smerov.

Keďže predpokladáme, že získané priestorové body nebudú úplne presné, je možné zapojiť do postupu aj minimalizačné algoritmy popísané v kapitole 3.

Získame fundamentálnu maticu $\boldsymbol{F}$ a zvolíme vhodný tvar projekčnej matice $\boldsymbol{P}'$. Ďalej máme niekoľko možností ako postupovať.

1. Aplikácia triangulačnej metódy bude v texte označená skratkou **T**.

2. Aplikácia metódy gold standard, do ktorej vstupuje triangulačná metóda, bude v texte označená skratkou **GS(T)**.

3. Aplikácia optimálnej triangulačnej metódy na hodnoty z **GS(T)** bude v texte označená skratkou **GS(T)+OT**.

4. Aplikácia optimálnej triangulačnej metódy bude v texte označená skratkou **OT**.

5. Aplikácia metódy gold standard, do ktorej vstupuje metóda optimálnej triangulácie, bude v texte označená skratkou **GS(OT)**.

1. Aplikácia triangulačnej metódy, T

Pomocou triangulačnej metódy vypočítame priestorový bod $\boldsymbol{X}_i$ prislúchajúci dvojici obrazových bodov $\boldsymbol{x}_i \leftrightarrow \boldsymbol{x}'_i$. Potrebujeme poznať pozície bodov $\boldsymbol{x}_i \leftrightarrow \boldsymbol{x}'_i$ v obraze a projekčné matice $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{P}'$. Postupujeme presne podľa popisu v kapitole 3.

Rekonštrukcia scény implementáciou normalizovaného osembodového algoritmu a triangulačného algoritmu je základnou formou rekonštrukcie a často ňou dokážeme získať dostatočne presné hodnoty.

2. Aplikácia metódy gold standard s triangulačnou metódou, GS(T)

Algoritmus zostavíme podľa postupu popísaného v kapitole 3. Do algoritmu vstupuje iba n bodov vstupujúcich aj do normovaného osembodového algoritmu.

1. Výpočet fundamentálnej matice $\hat{\boldsymbol{F}}$, čo sme už vyššie vykonali.
2. Počiatočný odhad optimálnych pozícií bodov $\hat{\boldsymbol{x}}_i \leftrightarrow \hat{\boldsymbol{x}}'_i$
   (a) Projekčné matice $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{P}'$ sme už určili.
   (b) Vypočítajú sa odhady priestorových bodov $\hat{\boldsymbol{X}}$ triangulačnou metódou, ako je popísané vyššie v aplikácii triangulačnej metódy.
   (c) Získame prvé odhady optimálnych pozícií bodov v obraze $\hat{\boldsymbol{x}} \leftrightarrow \hat{\boldsymbol{x}}'$.
3. Minimalizujeme funkciu sumy Levenberg-Marquardtovým iteračným algoritmom. Počet nutných iteračných krokov závisí od veľkosti rezídua a od rýchlosti akou konverguje. Výstupom algoritmu je optimalizovaný odhad projekčnej matice $\hat{\boldsymbol{F}}_{\text{new}}$ a n priestorových bodov $\hat{\boldsymbol{X}}_{\text{new}}$.

Zvyšné priestorové body dopočítame triangulačnou metódou, pri ktorej využijeme nový tvar projekčnej matice.

Implementácia metódy gold standard v softvéri Mathematica:

```
(* Do funkcie vstupujú všetky dvojice 2D bodov x, x',
ktoré je nutné pred vstupom do funcie transformovať,
ak ohnisková vzdialenosť f nie je jednotková. Ďalším vstupm je
 n odhadnutých 3D bodov X̂,
odhad projekčnej matice matice P̂' a počet iterácií.*)
GoldStandard[x1_List, x2_List, X̂_List, P̂2_List, iterN_] :=
 Module[{P1, P2, n, m11, m12, m13, m21, m22, m23, m31, m32, m33, t1,
   t2, t3, X, Xθ, θ, θestimate, g, J, ϵ, Jestimate, λ, A, b, u, v, s,
   Δ, iter, θestimateNew },
  n = Length[X̂];
  P1 = {{1, 0, 0, 0}, {0, 1, 0, 0}, {0, 0, 1, 0}};
  (* Zostavenie vektora parametrov θ. *)
  P2 = {{m11, m12, m13, t1}, {m21, m22, m23, t2}, {m31, m32, m33, t3}};
  Xθ = Table[Append[Array[X, {n, 3}][[i]], 1], {i, n}];
  θ = Flatten[Join[Xθ[[1 ;; n, 1 ;; 3]], P2]];
  (* Vektor s hodnotami parametrov θ. *)
  θestimate = Flatten[Join[X̂, P̂2]];
  (* Zostavenie funkcie podľa vzťahu (3.3).*)
  g = Sum[((homBack[x1[[i]]] - homBack[(P1.Xθ[[i]])])[[1]])^2 +
     ((homBack[x1[[i]]] - homBack[(P1.Xθ[[i]])])[[2]])^2 +
     ((homBack[x2[[i]]] - homBack[(P2.Xθ[[i]])])[[1]])^2 +
     ((homBack[x2[[i]]] - homBack[(P2.Xθ[[i]])])[[2]])^2,
    {i, n}];
  (* Jacobiho matica *)
  J = Table[D[g, θ[[i]]], {i, Length[θ]}];
  ϵ = g /. Table[θ[[i]] → θestimate[[i]], {i, Length[θ]}];
  λ = 10^(-3);
```

```
iter = 0;
While[iter < iterN,
 Jestimate = J /. Table[θ[[i]] → θestimate[[i]], {i, Length[θ]}];
 ϵ = g /. Table[θ[[i]] → θestimate[[i]], {i, Length[θ]}];
 (* Hľadáme riešenie sústavy metódou  SVD. *)
 A = Table[Jestimate[[i]] Jestimate[[j]], {i, Length[J]},
    {j, Length[J]}] + DiagonalMatrix[Table[λ, {i, Length[J]}]];
 b = -Jestimate ϵ;
 {u, s, v} = SingularValueDecomposition[A];
 Δ = v.PseudoInverse[s].Transpose[u].b;
 (* Získame nové optimalizované hodnoty vektora parametrov. *)
 θestimateNew = θestimate + Δ ;
 θestimate = θestimateNew;
 iter++;
];
Return[θestimateNew];
]
```

3. Aplikácia optimálnej triangulačnej metódy na metódu gold standard, GS(T)+OT

Celý postup aplikácie metódy gold standard s triangulačnou metódou ostáva rovnaký, až na dopočítanie priestorových bodov.

Do algoritmu optimálnej triangulačnej metódy bude vstupovať optimalizovaný odhad fundamentálnej matice $\hat{\boldsymbol{F}}_{\text{new}}$ získaný metódou gold standardu a zadané pozície obrazových bodov $\boldsymbol{x} \leftrightarrow \boldsymbol{x}'$.

Zostrojíme algoritmus podľa postupu popísaného v kapitole 3 pre optimálnu triangulačnú metódu a získame optimalizované pozície obrazových bodov $\hat{\boldsymbol{x}}^{\text{new}} \leftrightarrow \hat{\boldsymbol{x}}'^{\text{new}}$.

Napokon vypočítame priestorové body $\hat{\boldsymbol{X}}$ triangulačnou metódou z optimalizovaných obrazových bodov.

Implementácia optimálnej triangulačnej metódy v softvéri Mathematica:

```
(* Do funkcie vstupuje dvojica 2D bodov xᵢ, x'ᵢ,
ktorú je nutné pred vstupom do funcie transformovať,
ak ohnisková vzdialenosť f nie je jednotková. Ďalším vstupom je
 odhad fundamentálnej matice F̂, projekčná matica P', rozmery pixla mₓ,
mᵧ, súradnice hlavného bodu v prvom obraze a v druhom obraze.
*)
OptimalTriangulation[x1_List, x2_List, F̂_List, P2_List, mx_, my_,
  px1_, py1_, px2_, py2_] :=
 Module[{f, F, Rot, trans, C2, T1, T2, Fnew, e1, e2, eN1, eN2, R1, R2, f1, f2,
   tt, t, s, a, b, c, d, g, l1, l2, x̂, x̂1New, x̂2New},
  f = 1; (*ohnisková vzdialenosť*)
  Rot = P2[[1 ;; 3, 1 ;; 3]]; (* rotačná matica *)
  trans = P2[[1 ;; 3, 4]]; (* vektor posunutia *)
  C2 = -Inverse[Rot].trans;
  (* stred premietania pre nekalibrovanú kamerovú sústavu *)
  (* epipóly *)
  e1 = hom[getEpipol1[f, C2, Rot, mx, my, px1, py1]];
  e2 = hom[getEpipol2[f, C2, Rot, mx, my, px2, py2]];
  (* transformačné matice*)
  T1 = {{1, 0, -x1[[1]]}, {0, 1, -x1[[2]]}, {0, 0, 1}};
  T2 = {{1, 0, -x2[[1]]}, {0, 1, -x2[[2]]}, {0, 0, 1}};
  (* transformácia F̂ *)
  F̂new = Transpose[Inverse[T2]].F̂.Inverse[T1];
  (* Normalizácia epipólov. *)
  eN1 = Normalize[e1[[1 ;; 2]]];
  eN2 = Normalize[e2[[1 ;; 2]]];
  (* rotačné matice *)
  R1 = {{eN1[[1]], eN1[[2]], 0}, {-eN1[[2]], eN1[[1]], 0}, {0, 0, 1}};
  R2 = {{eN2[[1]], eN2[[2]], 0}, {-eN2[[2]], eN2[[1]], 0}, {0, 0, 1}};
```

```
(* Transformácia F̂new. *)
F = R2.F̂ new.Transpose[R1];
a = F[[2, 2]]; b = F[[2, 3]]; c = F[[3, 2]]; d = F[[3, 3]];
f1 = e1[[3]]; f2 = e2[[3]];
g[t_] := t ((a t + b) ^2 + f2^2 (c t + d) ^2) ^2 -
  (a d - b c) (1 + f1^2 t^2) ^2 (a t + b) (c t + d);
(* HIadanie reálnych koreňov. *)
tt = Solve[g[t] == 0, t, Reals];
s[t_] := t^2 / (1 + f1^2 t^2) + (c t + d) ^2 / ((a t + b) ^2 + f2^2 (c t + d) ^2);
(* HIadanie minima. *)
If[s[tt[[1, 1, 2]]] < s[tt[[2, 1, 2]]],
 t = tt[[1, 1, 2]];,
 t = tt[[2, 1, 2]];];
(* epipolárne priamky *)
l1 = {t f1, 1, -t};
l2 = {-f2 (c t + d), a t + b, c t + d};
x̂[{λ_, μ_, ν_}] := {-λ ν, -μ ν, λ^2 + μ^2};
x̂1 New = hom[homBack[Inverse[T1].Transpose[R1].x̂[l1]]];
x̂2 New = hom[homBack[Inverse[T2].Transpose[R2].x̂[l2]]];
Return[{x̂1 New, x̂2 New}];
]
```

4. Aplikácia optimálnej triangulačnej metódy, OT

Do algoritmu optimálnej triangulačnej metódy bude vstupovať fundamentálna matica $\boldsymbol{F}$ získaná normalizovaným osembodovým algoritmom a zadané pozície obrazových bodov $\boldsymbol{x} \leftrightarrow \boldsymbol{x}'$. Získame optimalizované pozície obrazových bodov $\hat{\boldsymbol{x}} \leftrightarrow \hat{\boldsymbol{x}}'$.

Napokon vypočítame priestorové body $\hat{\boldsymbol{X}}$ triangulačnou metódou z optimalizovaných obrazových bodov $\hat{\boldsymbol{x}} \leftrightarrow \hat{\boldsymbol{x}}'$.

5. Aplikácia metódy gold standard s optimálnou triangulačnou metódou, GS(OT)

Budeme postupovať rovnako ako pri predošlej aplikácii metódy gold standard, až na 2.(b), kde sa vypočítajú odhady priestorových bodov $\hat{\boldsymbol{X}}$ optimálnou triangulačnou metódou, ako je popísané vyššie v aplikácii optimálnej triangulačnej metódy.

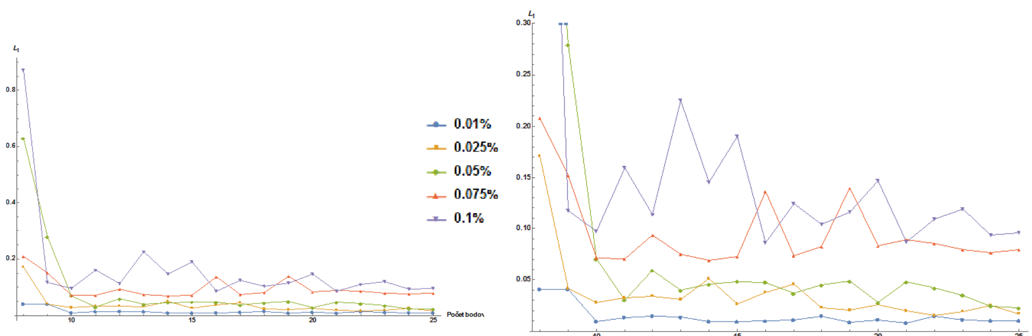
Zvyšné priestorové body dopočítame triangulačnou metódou, pri ktorej využijeme nový tvar projekčnej matice a obrazové body získané optimálnou triangulačnou metódou.

Získané výsledky zo všetkých konštrukcií algoritmov je nutné na záver preškálovať podľa vzťahu (4.1).

4.2.1 Vyhodnotenie účinnosti aplikácie jednotlivých algoritmov

Pre jednotlivé konštrukcie algoritmov zvyšujeme počet vstupných bodov do normalizovaného osembodového algoritmu a mieru maximálneho zašumenia bodov v obrazoch. Presnosť, akou dokážu jednotlivé algoritmy zrekonštruovať priestorovú scénu pri rôznej miere zašumenia a pri rôznom počte vstupných bodov, vyjadríme L_1 normou, ktorú vypočítame podľa schémy (4.2).

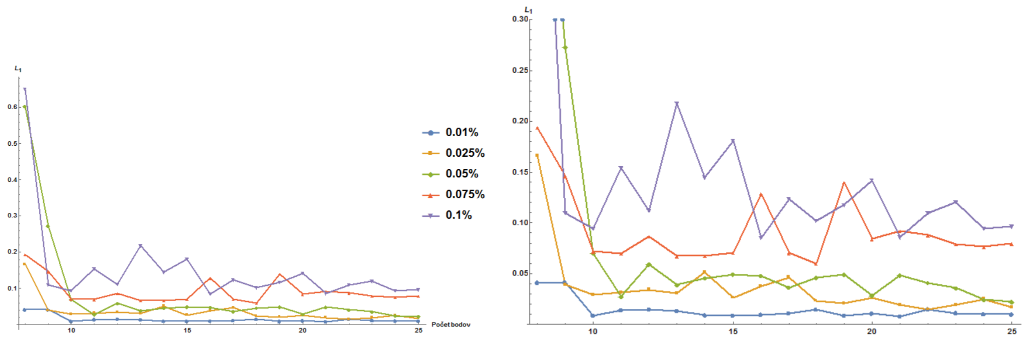
Priemerná vzdialenosť medzi bodmi v pôvodnej testovacej 3D scéne je 6.64 mm. Priemerná chyba vyjadrená L_1 normou je v grafoch taktiež uvádzaná v milimetroch. Ako vidieť z grafu 4.5 pri väčšom zašumení priemerná



(a) (b)

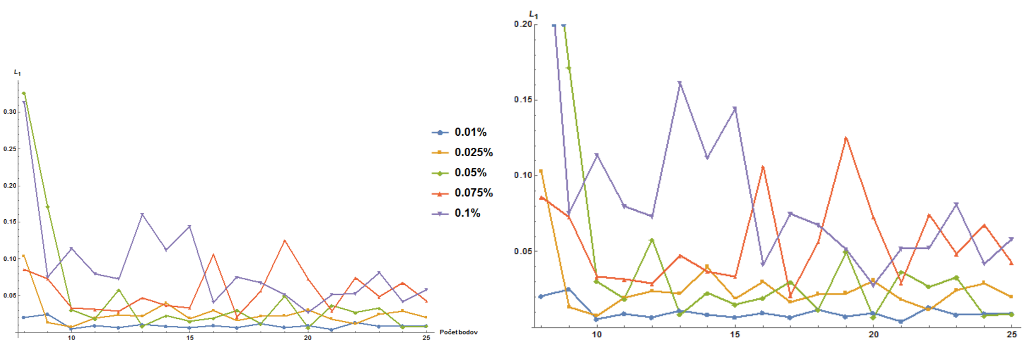
Obr. 4.5: Grafy priemernej chyby vypočítanej L_1 normou pre konštrukciu algoritmu $\boldsymbol{T}$. (a) Graf celého rozsahu.(b) Detail grafu pre hodnoty L_1 od 0 do 0.3 mm.

chyba narastá, no zo zvyšujúcim sa počtom vstupných bodov sa chyba zmenšuje. Teda aj pri bodoch definovaných s väčšou nepresnosťou sa zvýšením počtu vstupných bodov dajú získať dostatočne presné výsledky. V grafe 4.10 vidieť účinok jednotlivých algoritmov pri maximálnom zašumení 0.05%.



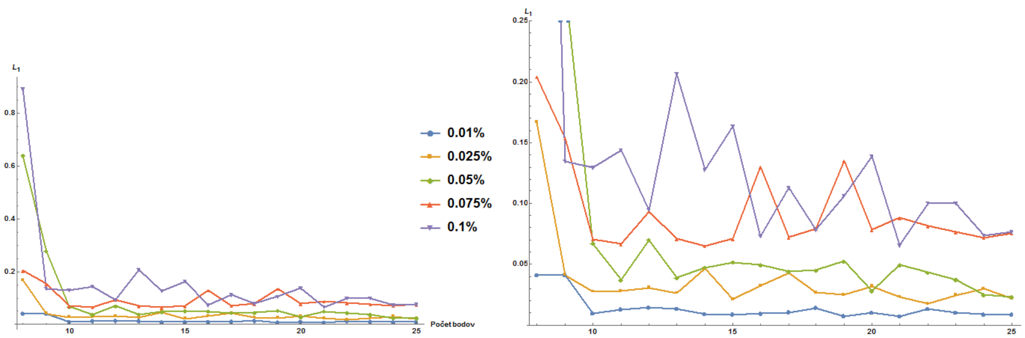
(a) (b)

*Obr. 4.6: Grafy priemernej chyby vypočítanej L_1 normou pre konštrukciu algoritmu **GS(T)**. (a) Graf celého rozsahu.(b) Detail grafu pre hodnoty L_1 od 0 do 0.3 mm.*



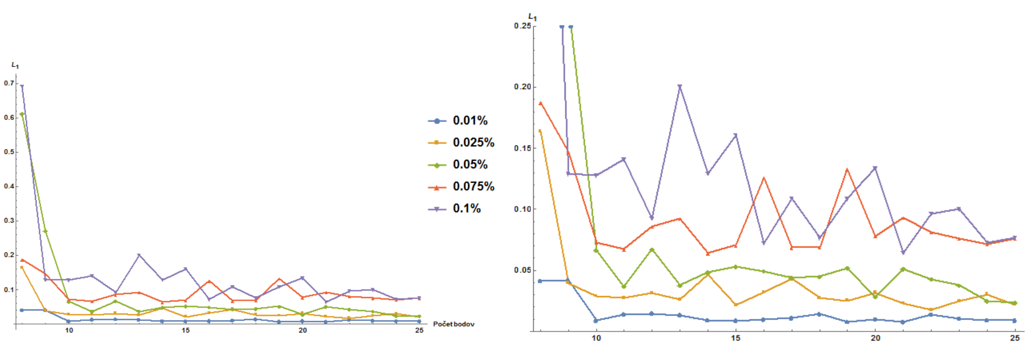
(a) (b)

*Obr. 4.7: Grafy priemernej chyby vypočítanej L_1 normou pre konštrukciu algoritmu **GS(T)+OT**. (a) Graf celého rozsahu.(b) Detail grafu pre hodnoty L_1 od 0 do 0.2 mm.*



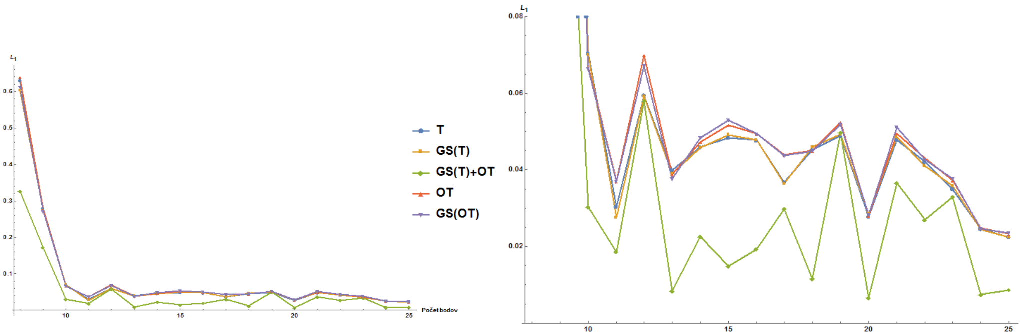
(a) (b)

*Obr. 4.8: Grafy priemernej chyby vypočítanej L_1 normou pre konštrukciu algoritmu **OT**. (a) Graf celého rozsahu.(b) Detail grafu pre hodnoty L_1 od 0 do 0.25 mm.*



(a) (b)

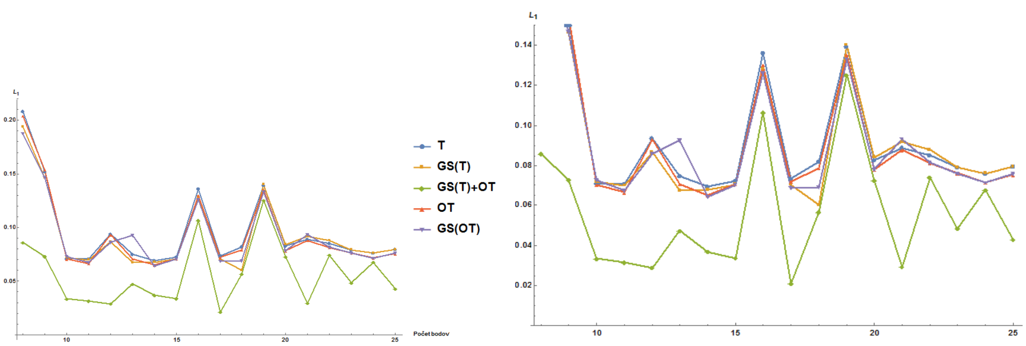
*Obr. 4.9: Grafy priemernej chyby vypočítanej L_1 normou pre konštrukciu algoritmu **GS(OT)**. (a) Graf celého rozsahu.(b) Detail grafu pre hodnoty L_1 od 0 od 0.25 mm.*



(a) (b)

Obr. 4.10: Porovnanie priemerných chýb vypočítaných L_1 normou pre jednotlivé algoritmy pri 0.05% zašumení. (a) Graf celého rozsahu.(b) Detail grafu pre hodnoty L_1 od 0 do 0.08 mm.

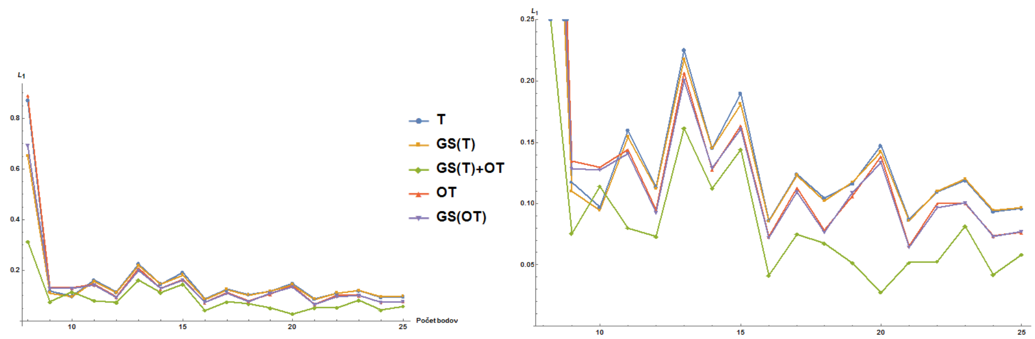
Jedine algoritmus **GS(T)+OT** sa prejavil ako viditeľne lepší. Ostatné algoritmy majú chyby približne rovnaké ako základný algoritmus **T**, pri niektorých bodoch priniesli algoritmy **GS(T), OT, GS(OT)** zlepšenie, inde však naopak zhoršenie. V grafe 4.11 vidieť účinok jednotlivých algoritmov pri ma-



(a) (b)

Obr. 4.11: Porovnanie priemerných chýb vypočítaných L_1 normou pre jednotlivé algoritmy pri 0.075% zašumení. (a) Graf celého rozsahu.(b) Detail grafu pre hodnoty L_1 od 0 do 0.15 mm.

ximálnom zašumení 0.075%. Opäť jedine algoritmus **GS(T)+OT** sa prejavil ako viditeľne lepší. Ostatné algoritmy sú približne rovnako účinné. V grafe 4.11 vidieť účinok jednotlivých algoritmov pri maximálnom zašumení 0.1%.



(a) (b)

Obr. 4.12: Porovnanie priemerných chýb vypočítaných L_1 normou pre jednotlivé algoritmy pri 0.1% zašumení. (a) Graf celého rozsahu.(b) Detail grafu pre hodnoty L_1 od 0 do 0.25 mm.

Aj v tomto prípade je algoritmus **GS(T)+OT** ako jediný viditeľne lepší. No aj algoritmy **GS(T), OT, GS(OT)** priniesli určité zlepšenie v porovnaní s algoritmom **T**.

Vo všetkých grafoch je vidno, že už pre 9, 10 vstupných bodov sú chyby pomerne malé a veľkosť chyby už iba osciluje vzhľadom na presnosť vstupných bodov, tj. pre maximálne zašumenie 0.1% môžu vstupovať aj body s menším zašumením.

Ak vezmeme do úvahy aj náročnosť zostavenia konštrukcií algoritmov **GS(T), GS(T)+OT, OT, GS(OT)** v porovnaní zo základným algoritmom **T**, možno ho považovať za najlepší algoritmus na rekonštrukciu, napriek tomu, že algoritmus **GS(T)+OT** sa prejavil vzhľadom na priemernú chybu ako najúčinnejší.

4.3 Rekonštrukcia reálnej scény

Pri rekonštrukcii reálnych dát potrebujeme dve fotografie získané z dvoch pohľadov na danú scénu, rozmery fotografií, minimálne 8 prislúchajúcich bodov, ohniskové vzdialenosti, veľkosť snímača (CCD) a jednu reálnu vzdialenosť.

Pri zhotovovaní fotografií scény je dôležité si uvedomiť, či sa jedná o statickú alebo dynamickú scénu. Ak sa jedná o statickú scénu, t.j. žiadny z objektov v scéne nemení svoju polohu (reálna scéna I. (4.3.1) a reálna scéna II. (4.3.1)), fotografie nemusia byť zhotovené v ten istý časový okamih. Pri dynamickej scéne, t.j. scéne v ktorej sa nachádzajú pohybujúce sa objekty alebo ľudia (reálna scéna III. (4.3.3)), musíme zhotoviť fotografie v tom istom časovom okamihu použitím dvoch kamier. Kvôli obmedzeným možnostiam boli fotografie III. reálnej scény (4.3.3) zhotovené jednou kamerou v rôznych časových okamihoch, čo by mohlo byť jedným z faktorov nepresných výsledkoch, napriek tomu, že osoba pri zhotovovaní fotografií stála nehybne.

Keďže fotografie sú v pixeloch, aj súradnice zvolených bodov sú v pixeloch, no ohniskové vzdialenosti sú väčšinou vyjadrené v milimetroch, preto musíme premeniť pixely na milimetre. To zabezpečíme kalibračnou maticou

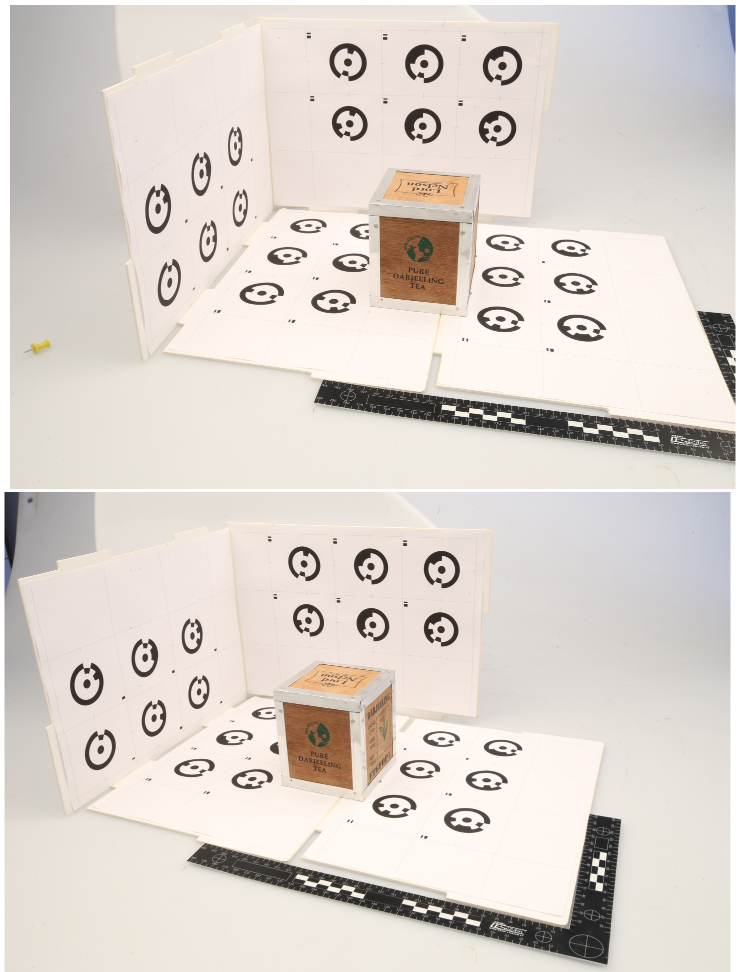
$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} \alpha_x & & x_0 \\ & \alpha_y & y_0 \\ & & 1 \end{bmatrix}, \tag{4.3}$$

kde $\alpha_x = m_x f, \alpha_y = m_y f, x_0 = m_x p_x, y_0 = m_y p_y$, pričom parametre m_x a m_y reprezentujú veľkosť pixela v x-ovom a y-ovom smere, tj. $m_x = \frac{\mathrm{CCD}_x}{l_x}, m_y = \frac{\mathrm{CCD}_y}{l_y}$, kde l_x = šírka fotografie, l_y = výška fotografie a CCD_x = šírka snímača, CCD_y = výška snímača. Maticou $\boldsymbol{K}$ tiež zabezpečíme, aby bol hlavný bod $\boldsymbol{p} = (p_x, p_y)$ (bod, v ktorom hlavná os pretína priemetňu) správne umiestnený, konkrétne parametrami x_0, y_0, ktoré posúvajú počiatok súradnicovej sústavy fotografie. Zvyčajne umiestnime hlavný bod, počiatok súradnicovej sústavy do stredu fotografie, teda $p_x = l_x/2, p_y = l_y/2$.

Po nastavení popísaných vstupov je už ďalší postup rovnaký ako pri testovacej scéne. Dôležité je čo najpresnejšie určiť prislúchajúce si vstupné body.

Aplikujeme všetky vyššie popísané kombinácie zostavenia algoritmov na rekonštrukciu scény pre testovacie dáta.

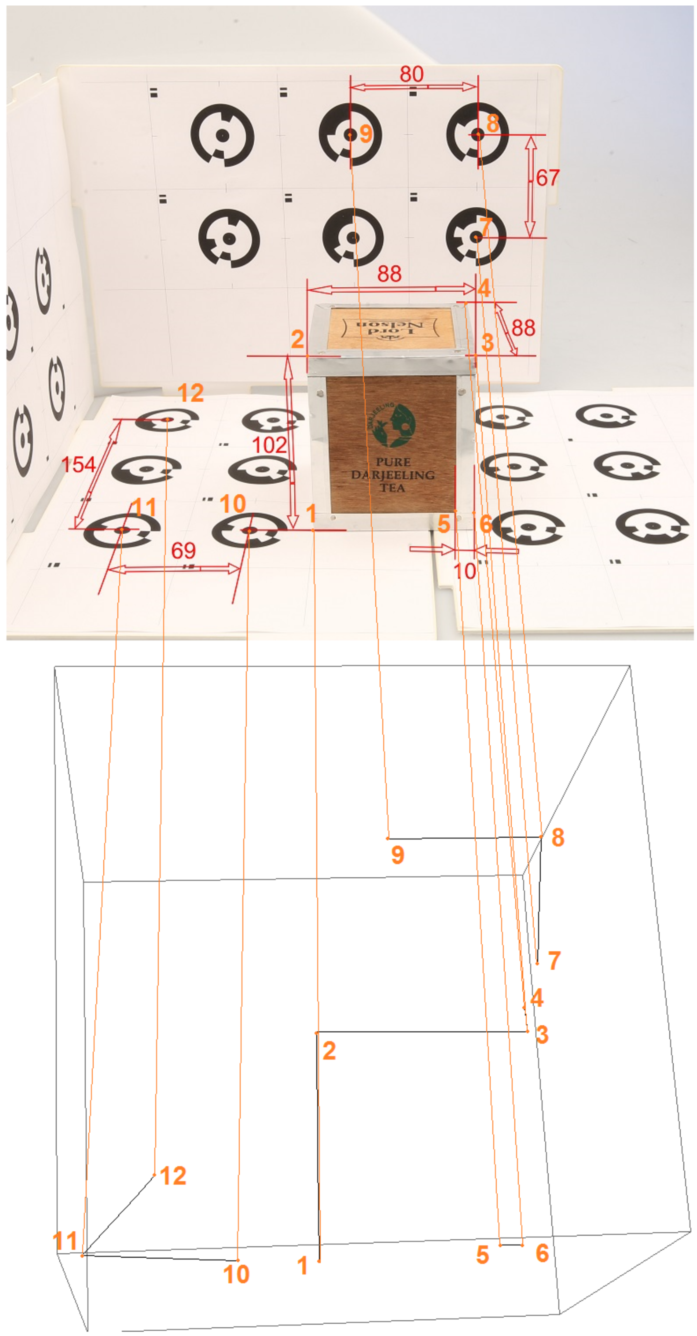
4.3.1 Reálna scéna I.



Obr. 4.13: Dva pohľady na scénu. Fotografie majú rozmery 5472×3648 px, ohniskovú vzdialenosť 35mm a CCD=(36mm,24mm).

V zrekonštruovanej scéne na obr. 4.14 sú vykreslené úsečky, ktorých reálne vzdialenosti poznáme. Tieto úsečky sú v tabuľke 4.1 vyjadrené číslami bodov vyznačenými v scéne.

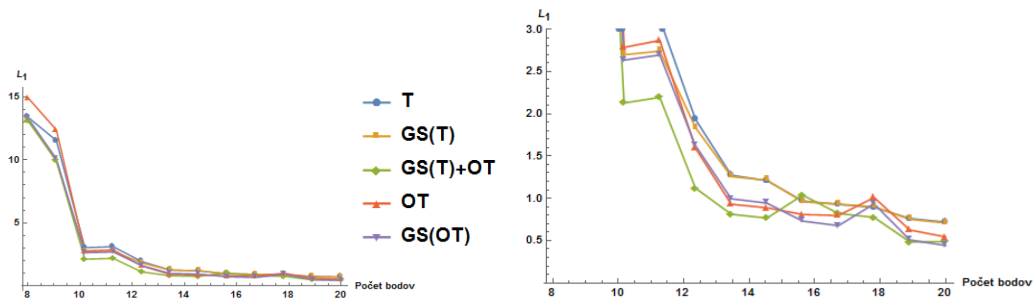
Vypočítané priestorové body sú škálované podľa reálnej vzdialenosti medzi bodmi 2 a 3.



Obr. 4.14: V spodnej časti obr. sú vykreslené úsečky medzi zrekonštruovanými bodmi I. reálnej scény, ktorých reálne vzdialenosti sú známe.

Vyhodnotenie výsledkov

Výsledky sú vyhodnocované L_1 normou podľa schémy (4.2), na základe známych vzdialeností v scéne.



(a) (b)

Obr. 4.15: Graf priemernej chyby vypočítanej L_1 normou pre reálnu scénu I. (a) Graf celého rozsahu.(b) Detail grafu pre hodnoty L_1 od 0 do 3 mm.

V grafe 4.15 sú vyjadrené hodnoty priemernej chyby vzhľadom na počet vstupných bodov pre kombinácie algoritmov. Pri desiatich bodoch chyba prudko klesne a ďalej už klesá veľmi pomaly.

Pri dostatočne presnom zadaní pozícií bodov a ich vhodnom rozmiestnení (maximálne 3 body v jednej rovine) môžeme získať veľmi dobré výsledky už pre 10 vstupných bodoch.

Z grafu tiež vidno, že najúčinnejší algoritmus výpočtu je GS(T)+OT.

Body	T	GS(T)	GS(T)+OT	OT	GS(OT)	Reálne
1-2	99.8 (2.10 %)	100.0 (1.94 %)	100.3 (1.70 %)	100.2 (1.80 %)	99.9 (2.03 %)	102
3-4	85.19 (3.19 %)	85.23 (3.15 %)	87.4 (0.65 %)	86.7 (1.47 %)	86.4 (1.82 %)	88
5-6	9.57 (4.33%)	9.56 (4.36 %)	9.729 (2.713 %)	9.727 (2.731 %)	9.68 (3.14 %)	10
7-8	66.82 (0.27 %)	67.08 (0.12 %)	67.007 (0.01 %)	66.74 (0.38 %)	66.72 (0.42 %)	67
8-9	80.78 (0.97 %)	80.82 (1.02 %)	81.2 (1.54 %)	80.79 (0.99 %)	80.51 (0.63 %)	80
10-11	71.21 (3.19 %)	71.26 (3.27 %)	70.96 (2.84 %)	70.97 (2.85 %)	70.75 (2.54 %)	69
11-12	152.37 (1.058 %)	152.29 (1.108 %)	154.2 (0.16 %)	153.29 (0.46 %)	152.57 (0.92 %)	154

Tabuľka 4.1: Vzdialenosti a ich percentuálne vyjadrenie odchýlky vypočítanej a reálnej vzdialenosti pre I. reálnu scénu.

V tabuľke 4.1 sú rozpísané vzdialenosti medzi bodmi, ktoré majú na obr. 4.14 kótu a teda vieme vypočítané vzdialenosti overiť a vyhodnotiť.

Hodnoty v tabuľke 4.1 sú získané pri vstupe 12 bodov.

Percentuálne najmenšia vzniknutá odchýlka je medzi bodmi 7 a 8 pre algoritmus **GS(T)+OT** iba 0.01%, čo predstavuje odchýlku 0.007 mm. Naopak najväčšia medzi bodmi 5 a 6 pre algoritmus **GS(T)** 4.36%, čo predstavuje odchýlku iba 0.44 mm a takej chyby sa môžme dopustiť aj pri meraní vzdialeností v reálnej scéne.

os	T	GS(T)	GS(T)+OT	OT	GS(OT)
X	1.14	1.17	1.16	0.86	0.86
Y	1.16	1.03	0.87	1.04	1.18
Z	2.22	2.24	0.41	1.00	1.51
celkom	1.27	1.26	0.81	0.93	0.99

Tabuľka 4.2: Priemerné chyby vzhľadom na osi x, y, z.

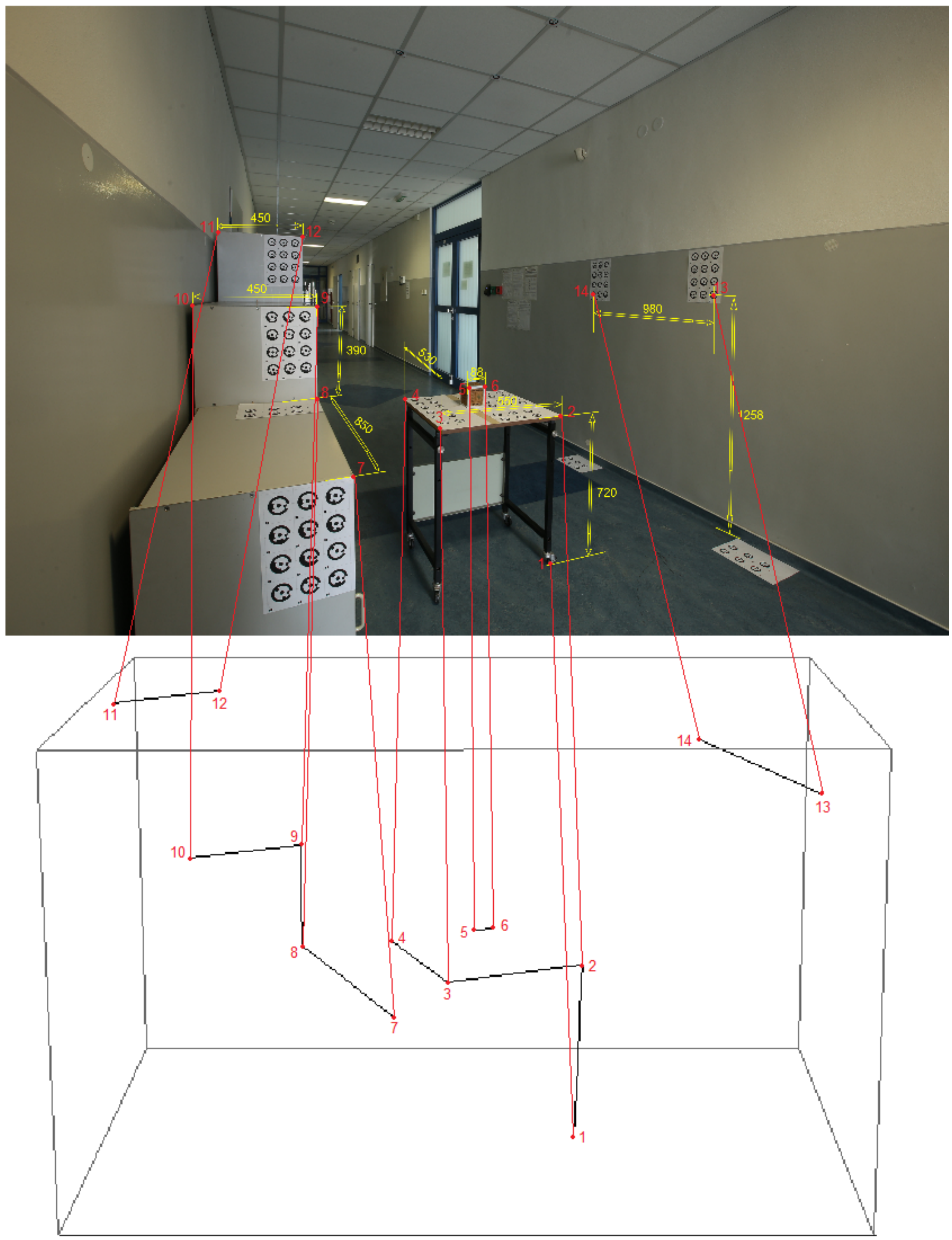
Podľa tabuľky 4.2 sa nedá jednoznačne povedať, v smere ktorej osi vzniká najväčšia, resp. najmenšia chyba, pretože pre jednotlivé algoritmy sa to líši.

4.3.2 Reálna scéna II.

Obr. 4.16: Dva pohľady na scénu. Fotografie majú rozmery 5472×3648 px, ohniskovú vzdialenosť 16mm a CCD=(36mm,24mm).

V zrekonštruovanej scéne na obr. 4.17 sú vykreslené úsečky, ktorých reálne vzdialenosti poznáme. Tieto úsečky sú v tabuľke 4.3 vyjadrené číslami bodov vyznačenými v scéne.

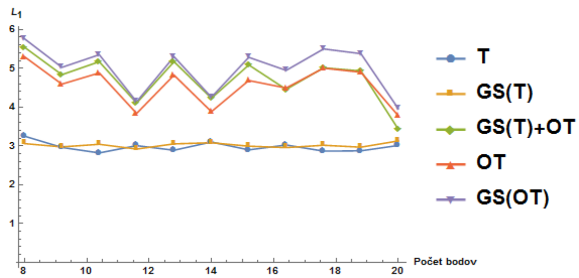
Vypočítané priestorové body sú škálované podľa reálnej vzdialenosti medzi bodmi 2 a 3.



Obr. 4.17: V spodnej časti obr. sú vykreslené úsečky medzi zrekonštruovanými bodmi II. reálnej scény, ktorých reálne vzdialenosti sú známe.

Vyhodnotenie výsledkov

Výsledky sú vyhodnocované L_1 normou podľa schémy (4.2), na základe známych vzdialeností v scéne.



(a)

Obr. 4.18: Graf priemernej chyby vypočítanej L_1 normou pre reálnu scénu II.

V grafe 4.18 sú vyjadrené hodnoty priemernej chyby vzhľadom na počet vstupných bodov pre kombinácie algoritmov. Už pri ôsmych vstupných bodoch je priemerná chyba veľmi mála a ďalej iba osciluje. Z grafu tiež vidieť, že algoritmy **T** a **GS(T)** sú účinnejšie než zvyšné algoritmy.

Body	T	GS(T)	GS(T)+OT	OT	GS(OT)	Reálne
1-2	717.9 (0.29 %)	720.3 (0.04 %)	724.2 (0.58 %)	721.7 (0.24 %)	723.9 (0.55 %)	720
3-4	532.1 (0.40 %)	532.83 (0.534 %)	531.02 (0.19 %)	532.79 (0.527 %)	533.6 (0.68 %)	530
5-6	87.82 (0.206 %)	87.81 (0.219 %)	87.48 (0.59 %)	87.49 (0.58 %)	87.46 (0.62 %)	88
7-8	858.4 (0.99 %)	858.8 (1.03 %)	863.2 (1.56 %)	865.6 (1.83 %)	866.2 (1.90 %)	850
8-9	395.3 (1.36 %)	396.5 (1.67 %)	397.6 (1.94%)	396.4 (1.64 %)	397.6 (1.94%)	390
9-10	451.1 (0.24 %)	450.7 (0.15 %)	454.9 (1.09 %)	454.9 (1.08 %)	454.7 (1.05 %)	450
11-12	450.7 (0.15 %)	450.8 (0.17 %)	453.9 (0.86 %)	453.2 (0.72 %)	453.7 (0.82 %)	450
13-14	973.8 (0.63 %)	975.5 (0.45 %)	970.9 (0.92 %)	972.7 (0.74 %)	974.1 (0.60 %)	980

Tabuľka 4.3: Vzdialenosti a ich percentuálne vyjadrenie odchýlky vypočítanej a reálnej vzdialenosti pre II. reálnu scénu.

V tabuľke 4.3 sú rozpísané vzdialenosti medzi bodmi, ktoré majú na obr. 4.17 kótu a teda vieme vypočítané vzdialenosti overiť a vyhodnotiť.

Hodnoty v tabuľke 4.3 sú získané pri vstupe 8 bodov.

Percentuálne najmenšia vzniknutá odchýlka je medzi bodmi 1 a 2 pre algoritmus **GS(T)** iba 0.04%, čo predstavuje odchýlku 0.3 mm. Naopak najväčšia medzi bodmi 8 a 9 pre algoritmy **GS(T)+OT** a **GS(OT)** 1.94%, čo predstavuje odchýlku 7.6 mm. Určitej chyby sa však môžme dopustiť aj pri meraní vzdialeností v reálnej scéne a skutočná odchýlka potom môže byť menšia.

os	T	GS(T)	GS(T)+OT	OT	GS(OT)
X	0.64	0.54	3.10	2.98	2.98
Y	5.56	5.34	7.77	8.55	8.54
Z	3.71	3.41	5.87	4.07	5.75
celkovo	3.25	3.06	5.54	5.30	5.76

Tabuľka 4.4: Priemerné chyby vzhľadom na osi X, Y, Z.

Z tabuľky 4.4 je zjavné, že najväčšie chyby vznikajú v smere osi Y, zatiaľ čo najmenšie chyby vznikajú v smere osi X.

4.3.3 Reálna scéna III.

Daná scéna so stojacou postavou predstavuje jednu z reálnych možností využitia algoritmu, kedy chceme zistiť výšku postavy. V zrekonštruovanej scéne na obr. 4.20 sú vykreslené úsečky, ktorých reálne vzdialenosti poznáme. Tieto úsečky sú v tabuľke 4.5 vyjadrené číslami bodov vyznačenými v scéne. Vypočítané priestorové body sú škálované podľa reálnej vzdialenosti medzi bodmi 1 a 11.

Vyhodnotenie výsledkov

Výsledky sú vyhodnocované L_1 normou podľa schémy (4.2), na základe známych vzdialeností v scéne. V grafe 4.21 sú vyjadrené hodnoty priemernej chyby vzhľadom na počet vstupných bodov pre kombinácie algoritmov. Veľkosť chyby zo začiatku postupne klesá, pri 13 bodoch sa ustáli a ďalej sa už výraznejšie nemení.

Z grafu tiež vidno, že najúčinnejší algoritmus je kombinácia **GS(T)+OT**. V tabuľke 4.5 sú rozpísané vzdialenosti medzi bodmi, ktoré majú na obr. 4.20

Body	T	GS(T)	GS(T)+OT	OT	GS(OT)	Reálne
2-3	1085.7 (0.53 %)	1087.1 (0.65 %)	1088.9 (0.82 %)	1086.2 (0.57 %)	1087.5 (0.69 %)	1080
4-5	686.8 (0.46%)	688.3 (0.25%)	688.2 (0.26 %)	686.3 (0.54 %)	687.7 (0.33 %)	690
6-7	694.4 (2.12 %)	693.9 (2.04 %)	687.6 (1.12 %)	693.5 (1.99 %)	693.0 (1.91 %)	680
2-8	750.7 (0.57%)	751.6 (0.45 %)	752.2 (0.38 %)	751.0 (0.53 %)	751.8 (0.42 %)	755
9-12	996.0 (0.61 %)	995.3 (0.53 %)	994.4 (0.44 %)	996.1 (0.62 %)	995.4 (0.54 %)	990
10-13	858.1 (0.79 %)	857.5 (0.87 %)	850.0 (1.73 %)	857.6 (0.86 %)	857.0 (0.93 %)	865
15-16	473.9 (0.83 %)	474.0 (0.86 %)	470.6 (0.13 %)	474.7 (0.99 %)	474.8 (1.01 %)	470
14-17	1836.1 (0.33 %)	1837.7 (0.42 %)	1838.9 (0.49 %)	1836.5 (0.35 %)	1838.1 (0.44 %)	1830

Tabuľka 4.5: Vzdialenosti a ich percentuálne vyjadrenie odchýlky vypočítanej a reálnej vzdialenosti pre III. reálnu scénu.

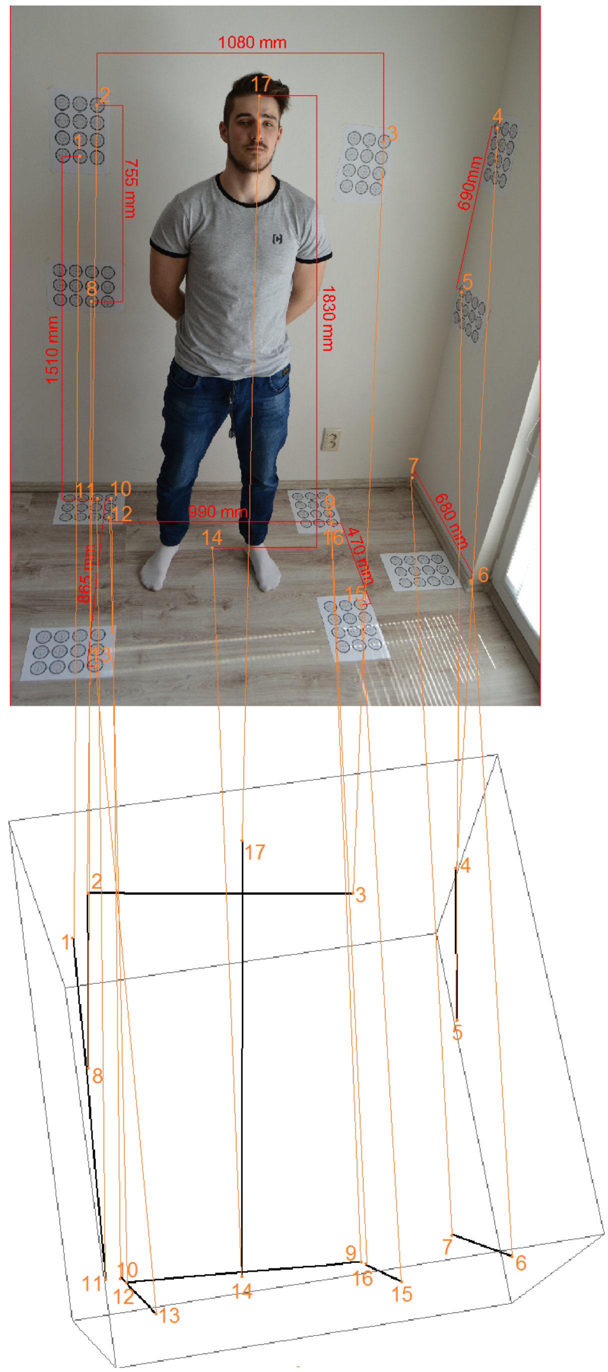
kótu a teda vieme vypočítané vzdialenosti overiť a vyhodnotiť.

Hodnoty v tabuľke 4.5 sú získané pri vstupe 13 bodov, kedy sa veľkosť chyby ustálila, viď graf 4.21.

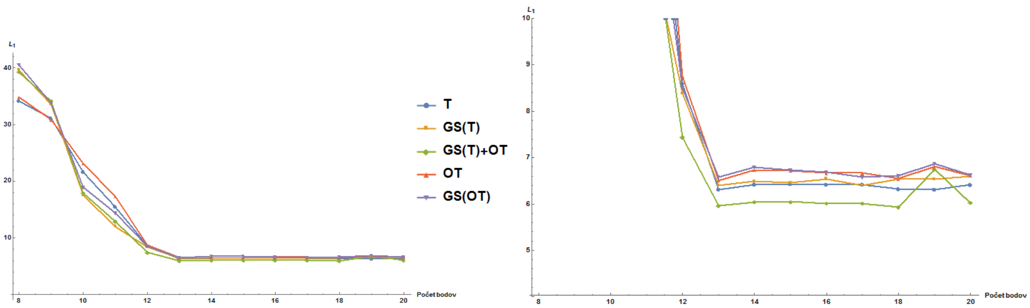
Percentuálne najmenšia vzniknutá odchýlka je medzi bodmi 15 a 16 pre algoritmus **GS(T)+OT** 0.13%, čo predstavuje odchýlku 0.6 mm. Naopak najväčšia chyba je medzi bodmi 6 a 7 pre algoritmus **T** 2.12%, čo predstavuje odchýlku 14.4 mm. Určitej chyby sa však môžme dopustiť aj pri meraní vzdialeností v reálnej scéne a skutočná odchýlka potom môže byť ešte menšia.

Ak by naším cieľom bolo, čo najpresnejšie určiť výšku postavy (úsečka medzi bodmi 14 a 17), mohli by sme použiť akýkoľvek z daných algoritmov

Obr. 4.19: Dva pohľady na scénu. Fotografie majú rozmery 6016×4000 px, ohniskovú vzdialenosť 18mm a CCD=(23.2mm,15.4mm).



Obr. 4.20: V spodnej časti obr. sú vykreslené úsečky medzi zrekonštruovanými bodmi III. reálnej scény, ktorých reálne vzdialenosti sú známe.



(a) (b)

Obr. 4.21: Graf priemernej chyby vypočítanej L_1 normou pre III. reálnu scénu. (a) Graf celého rozsahu.(b) Detail grafu pre hodnoty L_1 od 4 do 10 mm.

a získali by sme spoľahlivé výsledky, pretože pre všetky algoritmy vychádza chyba menšia ako 0.5%. Najmenšia chyba vychádza pre algoritmus **T** iba 0.33%, čo predstavuje odchýlku 6.1 mm.

os	T	GS(T)	GS(T)+OT	OT	GS(OT)
X	5.85	6.17	6.63	6.12	6.44
Y	8.40	8.47	7.71	8.52	8.59
Z	4.54	4.26	4.52	4.75	4.51
celkovo	6.31	6.31	6.24	6.51	6.52

Tabuľka 4.6: Priemerné chyby vzhľadom na osi X, Y, Z.

Z tabuľky 4.6 vidno, že najväčšie odchýlky vznikajú v smere osi Y a naopak najmenšie v smere osi Z.

Záver

Cieľom diplomovej práce bolo pochopiť a implementovať algoritmy na rekonštrukciu 3D scény, ktoré sú používané aj v komerčných softvéroch.

Dôležitým faktorom pre rekonštrukciu 3D scény, postupom popísaným v práci, je voľba prislúchajúcich si dvojíc bodov vo fotografiách. Pri nepresne zadaných dvojiciach 2D bodov budú získané 3D pozície bodov nezodpovedajúce reálnej 3D scéne a pri minimalizačných algoritmoch môže dôjsť dokonca k celkovému zhoršeniu výsledkov. V mnohých komerčných softvéroch je tento problém ošetrený ďalšími algoritmami a užívateľovi stačí zadať približné pozície bodov.

Ako sme mohli vidieť z výsledkov testovacej scény a reálnych scén, minimalizačné algoritmy (metóda gold standard a optimálna triangulačná metóda) nedokázali vždy zmenšiť priemernú chybu. Dôvody, prečo je tomu tak, treba hľadať v samotnom princípe týchto algoritmov.

Princípom metódy gold stanadrd je minimalizovať funkciu rozdielu pre n odhadovaných súradníc 2D bodov a optimálnych súradníc 2D bodov. Keď hľadáme korešpondujúce si body, tak najskôr hľadáme tie, ktoré vieme určiť ľahko a potom tie obtiažnejšie. Scény nemusia byť natoľko členité, aby sme vedeli zadať dostatočne presne potrebný počet bodov. Preto pridávaním bodov do výpočtu môže prísť k zhoršeniu výsledkov. Ďalším faktorom je, že v algoritme sa optimalizuje n bodov a na základe nich projekčná matica $\boldsymbol{P}'$. Zvyšné body sú dopočítané na základe týchto optimalizácií získanou projekčnou maticou $\boldsymbol{P}'$, ktorá nemusí byť optimálna aj pre ne a môže tým dôjsť k zhoršeniu priemernej chyby.

Princípom optimálnej triangulačnej metódy je nájsť najbližší bod na príslušnej epipolárnej priamke od počiatočne zvolenej pozície bodu. Keďže epipóly a epipolárne priamky sú počítané z odhadovaných pozícií 2D bodov, nemusia byť dostatočne presné a tým sa nezlepšia ani nové pozície 2D bodov získané touto metódou. Ak by sme poznali presné súradnice epipólov, metóda by bola rozhodne účinnejšia.

Jednou z ďalších problematík spojených s rekonštrukciou 3D scény je kalibrácia kamery. Pri fotografiách získaných kamerou s väčším zakrivením šošovky nie je možné získať dobré výsledky bez použitia niektorej z kalibračných techník. Táto problematika je veľmi obšírna a pre každú scénu individuálna. Keďže pri našich reálnych scénach nebolo nutné kalibrovať fotografie, bližšie sme sa tejto problematike nevenovali.

Výsledky uvedené v kapitole 4 sú dôkazom, že ak užívateľ zadáva dostatočne presné pozície dvojíc 2D bodov a nemá veľké zakrivenie šošovky, je možné získať 3D body veľmi blízke reálnym pozíciám v scéne aj postupom popísaným v tejto práci.

Literatúra

[1] R. Hartley, A. Zisserman: *Multiple View Geometry in Computer Vision*, Cambridge University Press, ISBN: 0521540518, 2003

[2] W. Press, B. Flannery, S. Teukolsky, and W. Vetterling: *Numerical Recipes in C*, Cambridge University Press, 1988

[3] *http://www.evlm.stuba.sk/* ∼ *velichova/Geometria/PREDNASKY/predB1.htm*

[4] *https://en.wikipedia.org/wiki/Affine_geometry*

[5] *https://en.wikipedia.org/wiki/Projective_ geometry*