Slovenská technická univerzita v Bratislave
Stavebná fakulta

Bakalárska práca

Akademický rok 2008/2009

Filtrácia geodetických dát na povrchu Zeme pomocou nelineárnych difúznych rovníc

Meno a priezvisko študenta:	Martin Tunega
Študijný program :	Matematicko-počítačové modelovanie
Vedúci práce:	Ing. Róbert Čunderlík, PhD.
Katedra:	KMDG SvF STU

Bratislava, máj 2009

Čestné prehlásenie

Vyhlasujem, že som bakalársku prácu vypracoval samostatne s použitím uvedenej odbornej literatúry a s odbornou pomocou vedúceho práce.

Bratislava 22. 5. 2009 ....

Vlastnoručný podpis

Poďakovanie

Ďakujem vedúcemu práce Ing. Róbertovi Čunderlíkovi, PhD. a Prof. RNDr. Karolovi Mikulovi, DrSc., za cenné rady, odbornú pomoc a konzultácie, ktoré mi poskytli pri vypracovaní bakalárskej práce.

Obsah

Úvod

V bakalárskej práci vytvoríme metódu konečných objemov na numerické riešenie parabolických parciálnych diferenciálnych rovníc na uzavretých plochách. Hlavná myšlienka je založená na aproximácii plochy ω, v našom prípade povrchu Zeme, konečným počtom trojuholníkov, pomocou ktorých zostrojíme systém konečných objemov. Využijeme Greenovu vetu pre Laplace-Beltramiho operátor na zadefinovanie slabej formulácie difúznej rovnice na konečnom objeme. Numerickou aproximáciou slabej formulácie dostaneme lineárny systém rovníc pre hodnoty riešenia na jednotlivých konečných objemoch, ktorý dokážeme efektívne vyriešiť numerickou metódou. Riešenie tiež rozšírime na Perona-Malikov model a budeme sa snažiť odfiltrovať šum z reálne nameraných dát. Obidva modely naprogramujeme v programovacom jazyku C.

1 Rovnica vedenia tepla na ploche

Vedenie tepla je jeden zo spôsobov šírenia tepla v prostredí, pri ktorom si pri vzájomných zrážkach častice materiálu navzájom odovzdajú časť svojej vnútornej energie. V dôsledku vedenia tepla prúdi energia vždy z oblastí s vyššou teplotou do chladnejších častí telesa. Bez vonkajších vplyvov (ohrev, ochladzovanie) je výsledkom vedenia tepla vždy rovnovážny stav, v ktorom má každá časť telesa rovnakú teplotu. V kvapalinách a v plynoch sa tiež uplatňuje prenos tepla prúdením. Takéto šírenie tepla uvažovať nebudeme. Diferenciálna rovnica vedenia tepla v našom prípade má nasledujúci tvar

$$\frac{\partial u(X,t)}{\partial t} - \Delta_s u(X,t) = 0, \tag{1}$$

pričom uvažujeme počiatočnú podmienku

$$u(X,0) = u_0(X). \tag{2}$$

Riešením je teplotné pole $u(X,t)$. Rovnicu riešime na uzavretej ploche ω, kde $X \in \omega$ predstavuje priestorovú premennú, $t \in [0,T]$ čas a Δ_s je Laplace-Beltramiho operátor, ktorý predstavuje zovšeobecnený Laplaceov operátor na zakrivenom povrchu ω. Rovnicu (1) budeme riešiť numericky, metódou konečných objemov. Metóda pozostáva z nasledujúcich krokov:

1. Diskretizácia - časová a priestorová, ktorá zahŕňa zostrojenie konečných objemov V_i na báze triangulácie plochy ω.
2. Zadefinovanie slabej formulácie diferenciálne rovnice (1) na konečnom objeme V_i a jej numerická aproximácia.
3. Zostavenie a vyriešenie lineárneho systému rovníc pre získanie hodnôt numerického riešenia v jednotlivých časových krokoch.

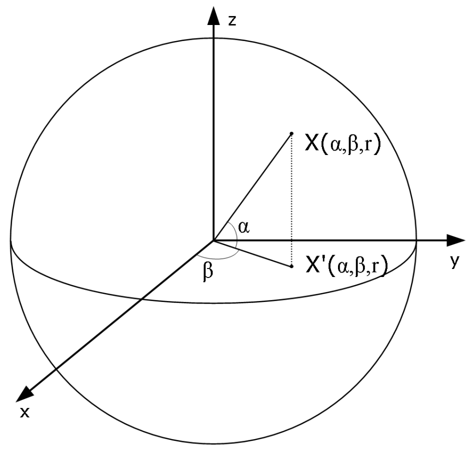
2 Metóda konečných objemov

2.1 Diskretizácia

2.1.1 Priestorová diskretizácia

Keďže v našich aplikáciach sa budeme zaoberať spracovaním dát daných na povrchu Zeme, vytvoríme priestorovú diskretizáciu jej sférickej aproximácie. Uvažujme povrch gule ω s polomerom r a stredom O v počiatku súradnicovej sústavy. Každý bod $X \in \omega$ máme určený trojicou sférických súradníc (α, β, r), kde α predstavuje uhol spojnice $\overrightarrow{XO}$ a jej priemetu v rovine xy, β uhol priemetu $\overrightarrow{XO}$ v rovine xy a osi x a r je polomer gule (Obrázok 1), pričom

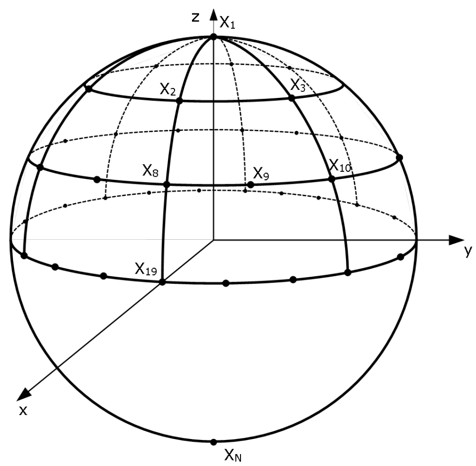
$$\alpha \in [-90°, 90°], \beta \in [0°, 360°], r > 0. \tag{3}$$



Obrázok 1: Sférické súradnice

Našou úlohou je nájsť konečný počet bodov $X_i \in \omega$, $i = 1, \ldots, N$ aproximujúcich ω tak, aby sme pomocou nich mohli čo najjednoduchšie popísať konečný počet konečných objemov V_i na ktorých budeme numericky riešiť rovnicu (1). Číslovanie $i = 1, \ldots, N$ predstavuje globálne číslovanie uzlových bodov X_i.

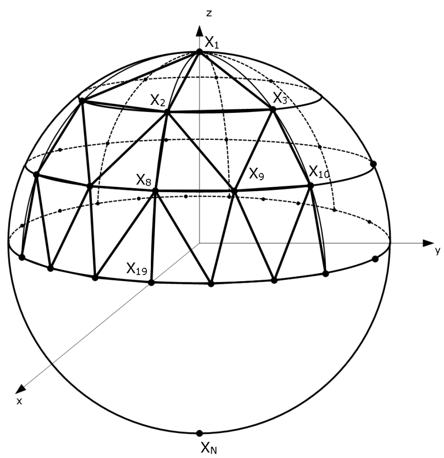
Na severnom póle umiestnime prvý bod X_1 a na južnom posledný X_N. Povrch gule rozdelíme na $2M-1$ rovnobežiek R_j, $j = 1, \ldots, (2M-1)$ (Obrázok 2). Rovnobežky sú číslované zo severu na juh. Na rovnobežkách R_j, $j = 1, \ldots, M$ bude $6j$ bodov a na rovnobežkách R_j, $j = M+1, \ldots, 2M-1$ bude $6(2M-j)$ bodov. Spolu budeme mať $N = 2 + \sum_{j=1}^{M} 6j + \sum_{j=M+1}^{2M-1} 6(2M-j)$ bodov. Napríklad pre $M = 3$ to bude $2+6+6*2+6*3+6*2+6 = 56$ bodov [2].



Obrázok 2: Priestorová diskretizácia

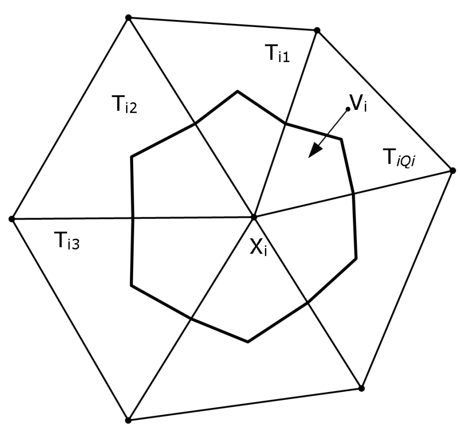
Rovnobežky budú vždy rovnomerne rozdelené a prvý bod bude začínať v nultom poludníku ($\beta = 0°$). Tak dostaneme sieť bodov X_i, $i = 1, \ldots, N$.

Aby sme mohli vytvoriť konečné objemy V_i, $i = 1, \ldots, N$ zostrojíme sieť trojuholníkov T_k. Pre každý bod X_i nájdeme Q_i najbližších susedov a pomocou nich zostrojíme sieť (Obrázok 3). Pre takto vybudovanú trianguláciu bude vo všeobecnosti Q_i rovné 6 a len pre šesť uzlových bodov na rovníku bude Q_i rovné 4. Trojuholníky s vrcholom v bode X_i označíme T_{iq}, $q = 1, \ldots, Q_i$.



Obrázok 3: Triangulácia

Pre každý bod X_i zadefinujeme konečný objem V_i ako mnohouholník, ktorého vrcholy budú vždy v ťažiskách trojuholníkov a v polovici spojnice bodu X_i a jeho susedov (Obrázok 4).



Obrázok 4: Konečný objem V_i

Pre potreby nášho programu ztransformujeme body X_i do priestoru $\mathbf{R}^3$. Využijeme transformáciu zo sférických do karteziánskych súradníc:

$$x = r\cos\alpha\cos\beta, \tag{4}$$
$$y = r\cos\alpha\sin\beta, \tag{5}$$
$$z = r\cos\alpha. \tag{6}$$

V prípade, že budeme uvažovať rotačný elipsoid s hlavnou poloosou a a excentricitou e, tak vzťahy (4)-(6) sa rozšíria o parameter $N_m = a/\sqrt{1-e^2\sin\alpha}$ a transformácia bude mať nasledujúci tvar:

$$x = N_m\cos\alpha\cos\beta, \tag{7}$$
$$y = N_m\cos\alpha\sin\beta, \tag{8}$$
$$z = N_m(1-e^2)\cos\alpha. \tag{9}$$

2.1.2 Časová diskretizácia

Časovú os $[0,T]$ si môžeme rozdeliť na konečný počet bodov t_k, $k = 0,\ldots,K$, ktoré budú od seba rovnomerne vzdialené o časový interval $\tau = t_k - t_{k-1}$, $k = 1,\ldots,K$. Potom funkcia $u(x,t_k)$ bude reprezentovať riešenie na k-tej časovej vrstve. Časovú deriváciu $\frac{\partial u}{\partial t}$ aproximujeme spätnou diferenciou

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u^k - u^{k-1}}{\tau}, k = 1,\ldots,K. \tag{10}$$

Pre sprehladnenie zavedieme označenie $u(x,t_k) = u^k$

2.2 Slabá formulácia a jej numerická aproximácia

Rovnicu (1), ktorá má tvar

$$\frac{\partial u(X,t)}{\partial t} - \Delta_s u(X,t) = 0 \tag{11}$$

zintegrujeme na konečnom objeme V_i [4],

$$\int_{V_i} \frac{\partial u}{\partial t} \mathrm{d}x - \int_{V_i} \Delta_s u \mathrm{d}x = 0, \tag{12}$$

využijeme Greenovu vetu [3] a dostaneme

$$\int_{V_i} \frac{\partial u}{\partial t} \mathrm{d}x - \int_{\partial V_i} \nabla_s u \cdot \vec{\eta}_i \mathrm{d}s = 0, \tag{13}$$

kde vektor $\vec{\eta}_i$ predstavuje vektor jednotkovej vonkajšej normály ku hranici konečného objemu V_i a $\nabla_s u$ povrchový gradient funkcie u na ploche ω.

Z geometrie V_i vyplýva, že druhý člen môžeme zapísať ako sumu cez jednotlivé časti ∂V_i a dostaneme tak slabú formuláciu úlohy na konečnom objeme V_i:

$$\int_{V_i} \frac{\partial u}{\partial t} \mathrm{d}x - \sum_{q=1}^{Q_i} \int_{\partial V_{iq}} \nabla_s u \cdot \vec{\eta}_{iq} \mathrm{d}s = 0, \tag{14}$$

kde $\vec{\eta}_{iq}$ predstavujú normály ku častiam hranice ∂V_{iq} (Obrázok 5).

Prvý člen rovnice (14) aproximujeme spätnou diferenciou (10) a pri jeho numerickej aproximácii na konečnom objeme V_i uvažujeme konštantnú reprezentáciu riešenia danú hodnotou u_i^k v bode X_i a časovom kroku k. Ak v druhom člene rovnice (14) uvažujeme riešenia na časovej vrstve k, dostaneme

$$m(V_i) \frac{u_i^k - u_i^{k-1}}{\tau} - \sum_{q=1}^{Q_i} \int_{\partial V_{iq}} \nabla_s u^k \cdot \vec{\eta}_{iq} \mathrm{d}s = 0, \tag{15}$$

kde $m(V_i)$ predstavuje mieru množiny V_i, v našom prípade plochu konečného objemu V_i.

Pri numerickej aproximácii druhého člena rovnice (15) uvažujeme lineárnu reprezentáciu riešenia u^k na jednotlivých trojuholníkoch, ktorých časti tvoria konečný objem V_i. V takom prípade je povrchový gradient konštantný a teda rovný svojej strednej hodnote, ktorú označíme $P_{T_{iq}}^k$. Potom

$$\nabla_s u^k \approx P_{T_{iq}}^k = \frac{1}{m(T_{iq})} \int_{T_{iq}} \nabla_s u^k \mathrm{d}x, \tag{16}$$

kde $m(T_{iq})$ predstavuje plochu trojuholníka T_{iq}. Využitím Greenovej vety dostaneme

$$P^k_{T_{iq}} = \frac{1}{m(T_{iq})} \int_{\partial T_{iq}} u^k \vec{n}_{iq} \mathrm{d}s, \tag{17}$$

kde $\vec{n}_{iq}$ predstavuje vektor jednotkovej normály na hranu trojuholníka T_{iq} (Obrázok 5). Pri lineárnej reprezentácii riešenia môžene tento integrál vypočítať ako súčet priemerov hodnôt riešenia na jednotlivých stranách a dostaneme

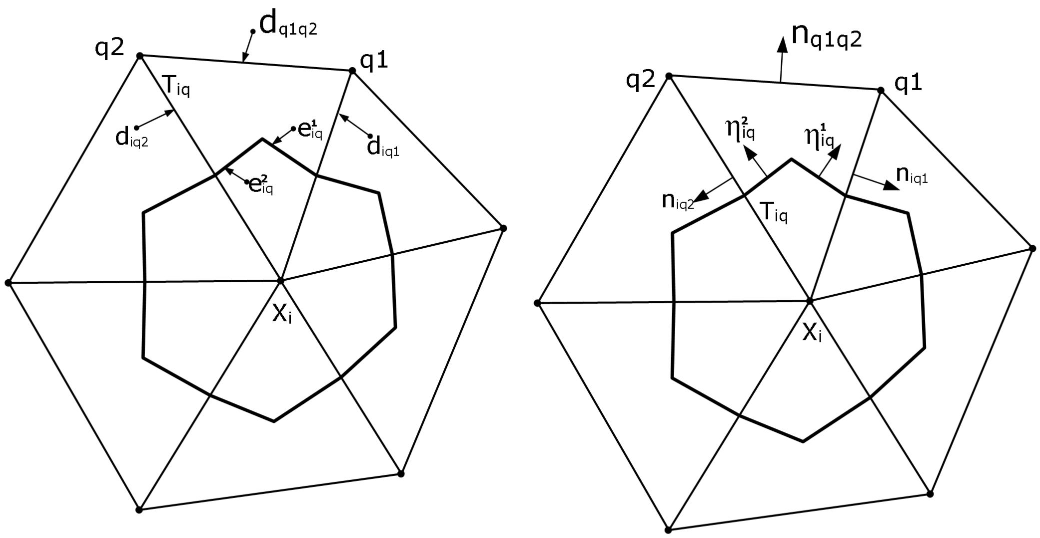
$$P^k_{T_{iq}} = \frac{1}{m(T_{iq})} \left(\frac{u^k_i + u^k_{q1}}{2} d_{iq1} \vec{n}_{iq1} + \frac{u^k_i + u^k_{q2}}{2} d_{iq2} \vec{n}_{iq2} + \frac{u^k_{q1} + u^k_{q2}}{2} d_{q1q2} \vec{n}_{q1q2} \right), \tag{18}$$

kde d_{iq1}, d_{iq2}, d_{q1q2} sú dĺžky strán trojuholníka T_{iq} a u^k_{q1}, u^k_{q2} sú hodnoty riešenia v bodoch $q1$, $q2$ trojuholníka T_{iq} (Obrázok 5). Rovnicu (15) môžeme potom zapísať v tvare

$$m(V_i) \frac{u^k_i - u^{k-1}_i}{\tau} - \sum_{q=1}^{Q_i} \int_{\partial V_{iq}} P^k_{T_{iq}} \cdot \vec{\eta}_{iq} \mathrm{d}s = 0. \tag{19}$$

Konštantný vektor $P^k_{T_{iq}}$ môžeme vybrať pred integrál a $\int_{\partial V_{iq}} \vec{\eta}_{iq} \mathrm{d}s$ vyjadriť ako $(m(e^1_{iq})\vec{\eta}^1_{iq} + m(e^2_{iq})\vec{\eta}^2_{iq})$, kde $m(e^1_{iq})$, $m(e^2_{iq})$ sú dĺžky príslušných hrán. Potom naša numerická aproximácia má tvar

$$m(V_i) \frac{u^k_i - u^{k-1}_i}{\tau} - \sum_{q=1}^{Q_i} (m(e^1_{iq})\vec{\eta}^1_{iq} \cdot P^k_{T_{iq}} + m(e^2_{iq})\vec{\eta}^2_{iq} \cdot P^k_{T_{iq}}) = 0. \tag{20}$$



Obrázok 5: Parametre končného objemu V_i

2.3 Zostavenie a vyriešenie lineárneho systému rovníc v jednotlivých časových krokoch

Úpravou rovnice (20) dostaneme

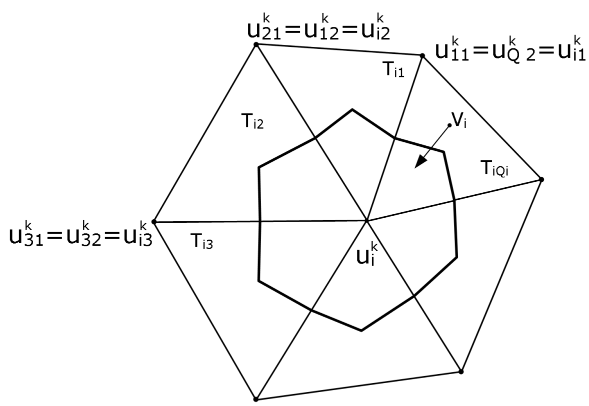
$$u_i^k - \frac{\tau}{m(V_i)} \sum_{q=1}^{Q_i} (m(e_{iq}^1)\vec{\eta}_{iq}^1 \cdot P_{T_{iq}}^k + m(e_{iq}^2)\vec{\eta}_{iq}^2 \cdot P_{T_{iq}}^k) = u_i^{k-1}. \qquad (21)$$

Vzhladom na tvar P_{iq}^k, v rovnici pre uzlový bod X_i vystupujú neznáme hodnoty u_i^k a u_{q1}^k, u_{q2}^k, $q = 1, \ldots, Q_i$ pre všetkých susedov uzlového bodu X_i.

Členy u_i^k, u_{q1}^k a u_{q2}^k reprezentujú lokálne označenie neznámych na trojuholníkoch T_{iq}. Z geometrie V_i vyplýva, že napríklad pre $Q_i = 6$

$$\begin{aligned} u_{11}^k = u_{62}^k = u_{i1}^k \\ u_{21}^k = u_{12}^k = u_{i2}^k \\ u_{31}^k = u_{22}^k = u_{i3}^k \\ u_{41}^k = u_{32}^k = u_{i4}^k \\ u_{51}^k = u_{42}^k = u_{i5}^k \\ u_{61}^k = u_{52}^k = u_{i6}^k \end{aligned}$$

kde u_{iq}^k je označenie pre neznáme hodnoty riešenia pri lokálnom číslovaní susedov vzhladom na uzol X_i (Obrázok 6).

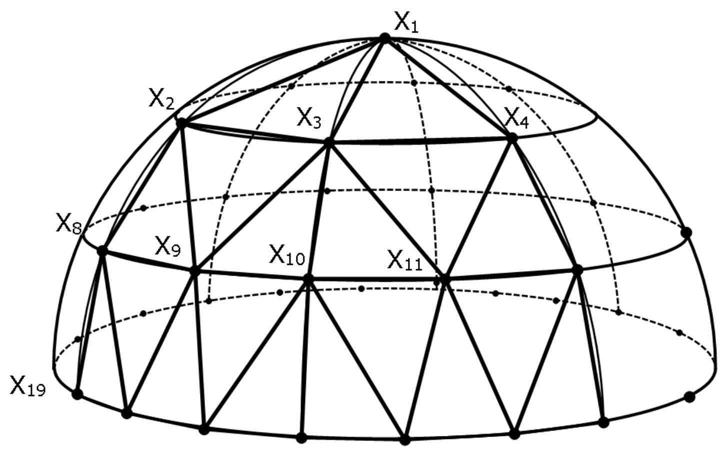


Obrázok 6: Neznáme hodnoty riešenia pri lokálnom číslovaní susedov

V rovnici pre každý uzlový bod X_i, $i = 1, \dots, N$, budeme mať teda $Q_i + 1$ neznámych $u_i^k, u_{i1}^k, \dots, u_{iQ_i}^k$. Z rovnice (21) si vyjmeme členy, ktoré stoja pri $u_i^k, u_{i1}^k, \dots, u_{iQ_i}^k$ a nazveme ich $a_{i0}, a_{i1}, \dots, a_{iQ_i}$. Tieto čísla budú tvoriť nenulové prvky i-teho riadku matice $\mathbf{A}$ rozmeru $N \times N$. Členy $a_{i0}, a_{i1}, \dots, a_{iQ_i}$ budeme ukladať do stĺpcov podľa globálneho číslovania neznámej, ktorej prislúchajú. Vektor pravej strany b bude daný vektorom riešenia u_i^{k-1} z predchádzajúceho časového kroku $k - 1$.

Napríklad pre $M = 2$ bude mať matica $\mathbf{A}$ rozmer 26×26 a pre bod X_3, ktorý má susedov $X_1, X_4, X_{11}, X_{10}, X_9, X_2$ (Obrázok 7) bude mať tretí riadok matice $\mathbf{A}$ tvar:

$$\mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} a_{31}^k & a_{32}^k & a_{30}^k & a_{36}^k & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{33}^k & a_{34}^k & a_{35}^k & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$



Obrázok 7: Susendé uzlové body bodu X_3

Vo všeobecnosti diagonálny člen bude mať tvar

$$\begin{aligned} a_{i0}^k = 1 \quad & - \quad \frac{\tau}{m(V_i)} \sum_{q=1}^{Q_i} \frac{1}{2m(T_{iq})} (m(e_{iq}^1)\vec{\eta}_{iq}^1 \cdot (d_{iq1}\vec{n}_{iq1} + d_{iq2}\vec{n}_{iq2}) + \\ & + \quad m(e_{iq}^2)\vec{\eta}_{iq}^2 \cdot (d_{iq1}\vec{n}_{iq1} + d_{iq2}\vec{n}_{iq2})) \end{aligned}$$

a napríklad jeden nediagonálny člen

$$\begin{aligned} a_{i1}^k = \quad & - \quad \frac{\tau}{m(V_i)} \frac{1}{2m(T_{i1})} (m(e_{i1}^1)\vec{\eta}_{i1}^1 \cdot (d_{i11}\vec{n}_{i11} + d_{1112}\vec{n}_{1112}) + \\ & + \quad m(e_{i6}^2)\vec{\eta}_{i6}^2 \cdot (d_{i62}\vec{n}_{i62} + d_{6162}\vec{n}_{6162})). \end{aligned}$$

Môžeme si všimnúť, že pre lineárnu rovnicu vedenia tepla na ploche ω koeficienty matice $\mathbf{A}$ nezávisia od času. Vplyv má len diskretizácia geometrie povrchu ω a veľkosť časového kroku τ, ktorý je v našom prípade konštantný. Pretože chceme lineárny systém $\mathbf{A}u = b$ riešiť SOR algoritmom matica musí byť diagonálne dominantná. Čiže absolútna hodnota diagonálneho člena musí byť väčšia alebo rovná sume absolútnych hodnôt nediagonálnych členov v danom riadku,

$$|\mathbf{A}_{ii}| \geq \sum_{j \neq i} |\mathbf{A}_{ij}| \qquad i = 1, \ldots, N. \tag{22}$$

Experimentálna skúsenosť ukazuje, že pri voľbe

$$\tau = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} m(V_i) \tag{23}$$

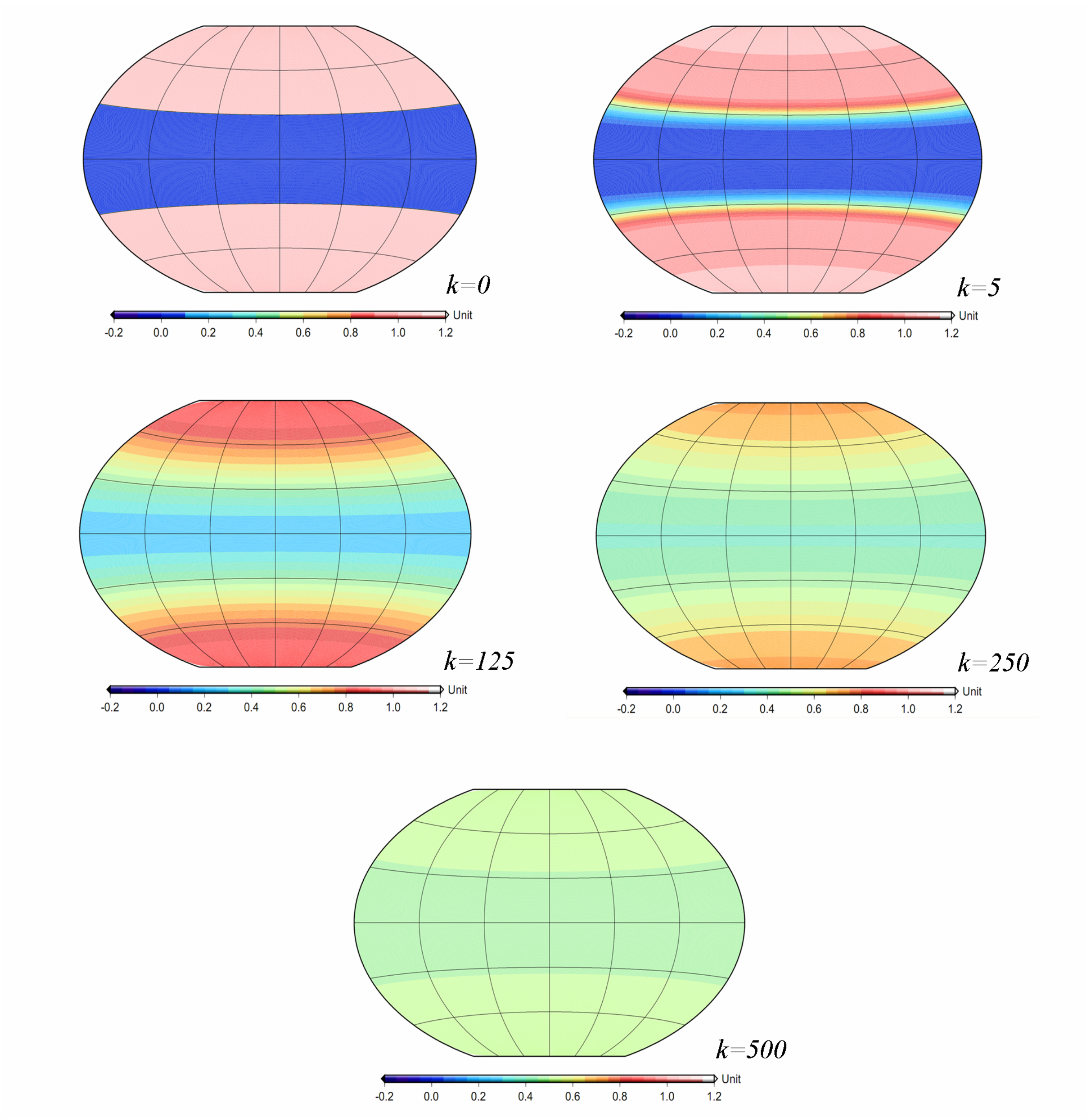
je táto podmienka splnená a SOR metóda konverguje, preto ju používame v praktických úlohách filtrácie v kapitole 4. Pre takúto volbu τ najskôr otestujeme podmienku (22) a pri jej splnení riešime lineárny systém SOR algoritmom. Pokiaľ by (22) nebola splnená zmenšili by sme τ na polovicu a vykonali test znova.

Pre každý čas k, $k = 1, \ldots, K$ riešime systém $\mathbf{A}u^k = u^{k-1}$, pričom u^0 predstavuje počiatočnú podmienku. Pre dostatočne velké K dospejeme k rovnovážnemu stavu, keď každý bod X_i má rovnakú teplotu u.

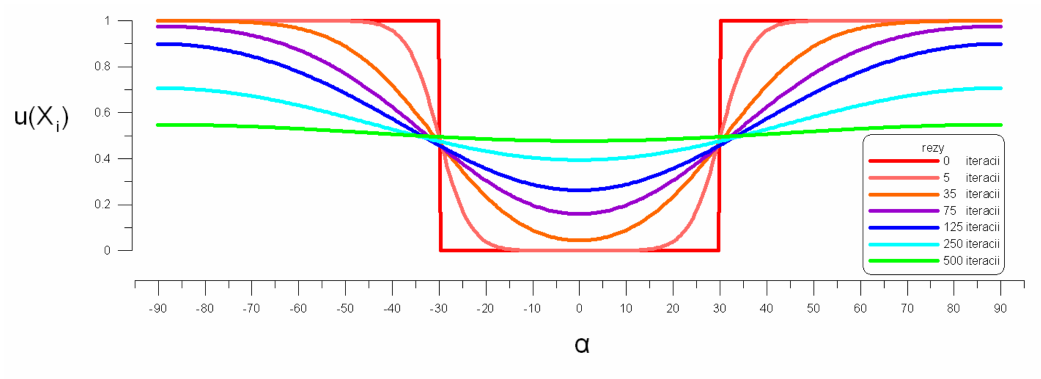
Tento fenomén si názorne ukážeme na modelovom príklade. Počiatočnú podmienku u_i^0 v jednotlivých uzlových bodoch X_i si určíme nasledovne:

$$u_i^0 = \begin{cases} 1 & |\beta| > 30^\circ \\ 0 & |\beta| \leq 30^\circ \end{cases}$$

Úlohu budeme riešiť pre $M = 200$, čiže 250002 uzlových bodov. Časový krok τ zvolíme pre tento príklad 0.001, t.j ešte väčší ako je v podmienke (23), pretože priemer plôch trojuholníkov je rovný 0.000157. Pre väčšie τ by už algoritmus SOR nekonvergoval a matica by už nebola diagonálne dominantná. Na obrázku 8 vidíme postupne výsledky pre k=0, 5, 125, 250, 500, vykreslené vizualizačným softvérom GMT.



Obrázok 8: Difúzia v jednotlivých časových krokoch.



Obrázok 9: Rezy v jednotlivých časových krokoch. Z obrázkov je zrejmé, že telpo sa začne šíriť z pólov smerom k rovníku až sa teplota ustáli. Rovnovážny stav nastane približne po 500 časových krokoch.

Kedže nemáme žiadne vnútorné zdroje a ani žiadne teplo neuniká z povrchu, celková energia na povrchu by mala byť konštantná. V každom časovom kroku budeme počítať veličinu $\sum_{i=1}^{N} u_i^k m(V_i)$, ktorá pre konštantné merné teplo c a hustotu ρ rovné 1, vyjadruje práve celkové množstvo tepla. Vzhľadom na analógiu s difúziou, kedy riešenie u vyjadruje koncentráciu látky, budeme túto veličinu volať masa. Táto hodnota by mala byť v každom čase rovnaká, meniť sa bude len vplyvom aproximačných chýb a diskretizácie.

k	masa, $M = 200$	masa, $M = 400$
0	6.297340	6.275565
5	6.297325	6.275556
75	6.297070	6.275422
125	6.296893	6.275331
250	6.296439	6.275096
500	6.295518	6.274616

Pre $M = 200$ sa masa z počiatočného stavu zmenila o 0.001822. Pre jemnejšiu sieť budeme riešiť lineárnu difúziu na 960002 bodoch ($M = 400$) s rovnakou počiatočnou podmienkou a časovým krokom. V tomto prípade sa masa zmenila o 0.000949, a teda pre jemnejšiu sieť dostávame presnejšie výsledky.

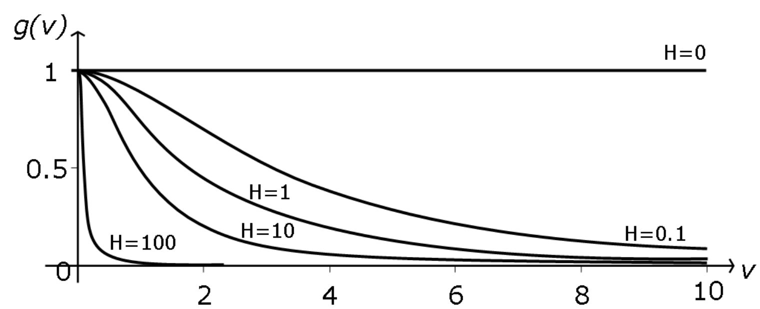
3 Rozšírenie pre Perona-Malikovu rovnicu

V tejto kapitole rozšírime metódu konečných objemov na riešenie úloh nelineárnej difúzie na plochách. Ako príklad uvažujeme regularizovaný Perona-Malikov model [7, 1, 6], ktorý sa využíva pri spracovaní obrazu. Je to technika zameraná na potlačenie šumu zo vstupných dát, pričom sa snaží v čo najväčšej možnej miere zachovať hrany obrazu. Budeme riešiť nelineárnu difúznu rovnicu

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla_s \cdot (g(v)\nabla_s u) = 0, \tag{24}$$

kde funkcia $g(v)$ reprezentuje difúzny koeficient, ktorý kontroluje mieru difúzie. V Perona-Malikovom modeli je závislá od absolútnej hodnoty gradientu funkcie u a reprezentuje takzvaný hranový indikátor. Funkcia $g(v)$ má tvar,

$$g(v) = \frac{1}{1+Hv}, H \geq 0, \qquad v = |\nabla_s u^\sigma|^2, \tag{25}$$



Obrázok 10: Priebeh funkcie $g(v)$

pričom u^σ reprezentuje riešenie lineárnej difúznej rovnice (1) za krátky časový okamih $\tau = \sigma$. Konštanta H kontroluje ako bude metóda citlivá na hrany. Pre väčšie H je metóda citlivejšia a hrany budú zachované vo väčšej miere. Zvyčajne sa H volí experimentálne.

Podobnými úvahami ako pri lineárnej difúznej rovnici získame slabú formuláciu rovnice (24), ktorú budeme riešiť metódou konečných objemov. V prípade

Perona-Malikovho modelu postupne dostaneme

$$\int_{V_i} \frac{\partial u}{\partial t} u \mathrm{d}x - \int_{V_i} \nabla_s \cdot (g \nabla_s u) \mathrm{d}x = 0, \tag{26}$$

$$\int_{V_i} \frac{u^k - u^{k-1}}{\tau} \mathrm{d}x - \int_{V_i} (g^{k-1} \nabla_s u^k) \vec{\eta}_i \mathrm{d}s = 0, \tag{27}$$

$$m(V_i) \frac{u_i^k - u_i^{k-1}}{\tau} - \sum_{q=1}^{Q_i} \int_{\partial V_{iq}} g^{k-1} \nabla_s u^k \vec{\eta}_{iq} \mathrm{d}s = 0, \tag{28}$$

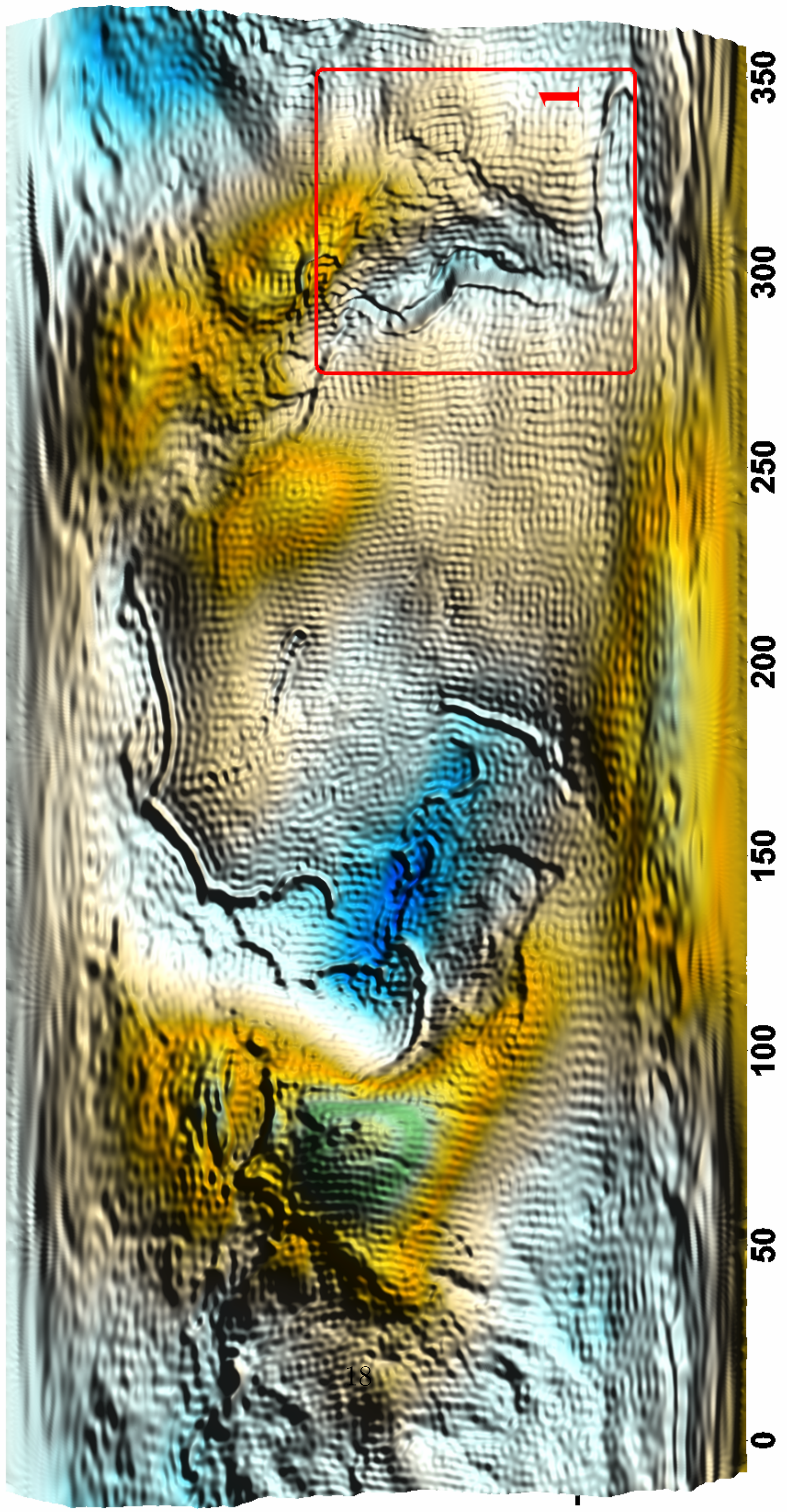
$$m(V_i) \frac{u_i^k - u_i^{k-1}}{\tau} - \sum_{q=1}^{Q_i} (m(e_{T_{iq}}^1) \vec{\eta_q^1} \cdot P_{T_{iq}}^k g(|P_{T_{iq}}^{\sigma,k-1}|) + m(e_{T_{iq}}^2) \vec{\eta_q^2} \cdot P_{T_{iq}}^k g(|P_{T_{iq}}^{\sigma,k-1}|)) = 0. \tag{29}$$

Člen $P_{T_{iq}}^{\sigma,k-1}$ predstavuje gradient riešenia z predchádzajúceho časového kroku zhladeného lineárnou difúziou s malým časovým krokom σ na jednotlivých trojuholníkoch. Keďže tento nelineárny člen berieme z predchádzajúceho kroku je naša numerická schéma konečných objemov semi-implicitná [6]. Rovnice (29) zostrojené pre všetky konečné objemy V_i opäť reprezentujú lineárny systém rovníc s rovnakou štruktúrou ako (21) a takisto ho môžeme riešiť SOR iteračnou metódou.

4 Filtrácia geodetických dát na povrchu Zeme

V záverečnej časti si ukážeme praktické uplatnenie lineárnej a nelineárnej difúzie. Našim cieľom bude odfiltrovať systematický šum z geodetických dát. Použijeme voľne dostupný model poruchového potenciálu zo satelitného geopotencionálneho modelu ITG-Grace03 [5] (Obrázok 11), ktorý je modelovaný pomocou plošných sférických harmonických funkcii do rádu a stupňa 180. Zanedbaním koeficientov vyšších rádov dochádza k tzv. *stripingu*, ktorý sa pokúsime pomocou našich filtračných metód odfiltrovať. Dáta máme dané pre 1215002 bodov na rotačnom elipsoide s hlavnou poloosou $a = 6378137$ m a prvou lineárnou excentricitou $e^2 = 6.67437999014 \cdot 10^{-3}$.

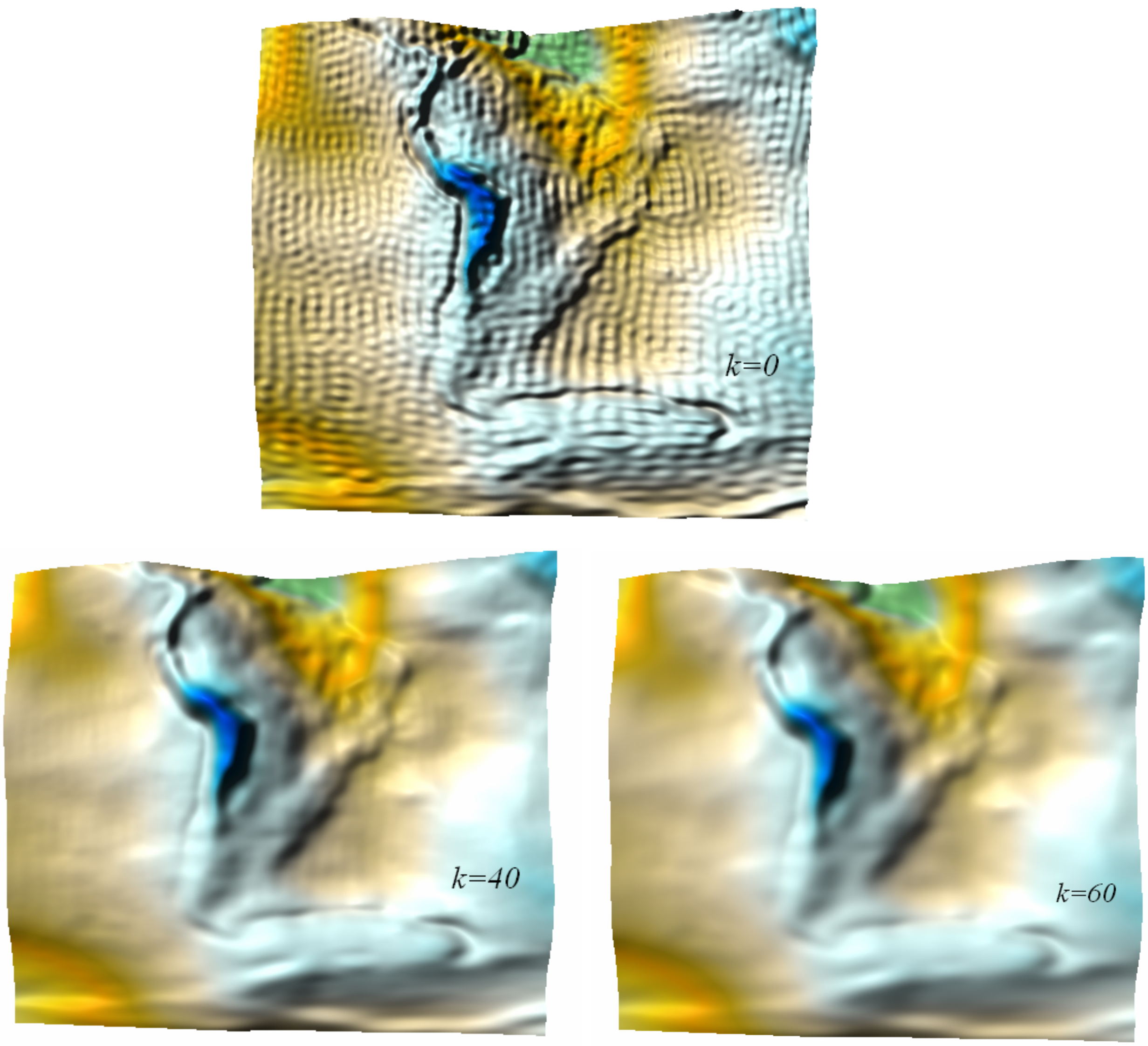
Zameriame sa na jednu podoblasť, na ktorej budeme testovať oba modely a pokúsime sa nájsť optimálny časový interval, po ktorom bude šum potlačený v čo najväčej miere pričom dáta budú skreslené minimálne. Pri Perona-Malikovom modeli budeme takisto hladať optimálnu hodnotu parametra H. Vybrali sme oblasť Južnej Ameriky, ktorú sme zvolili kvôli jej členitosti.



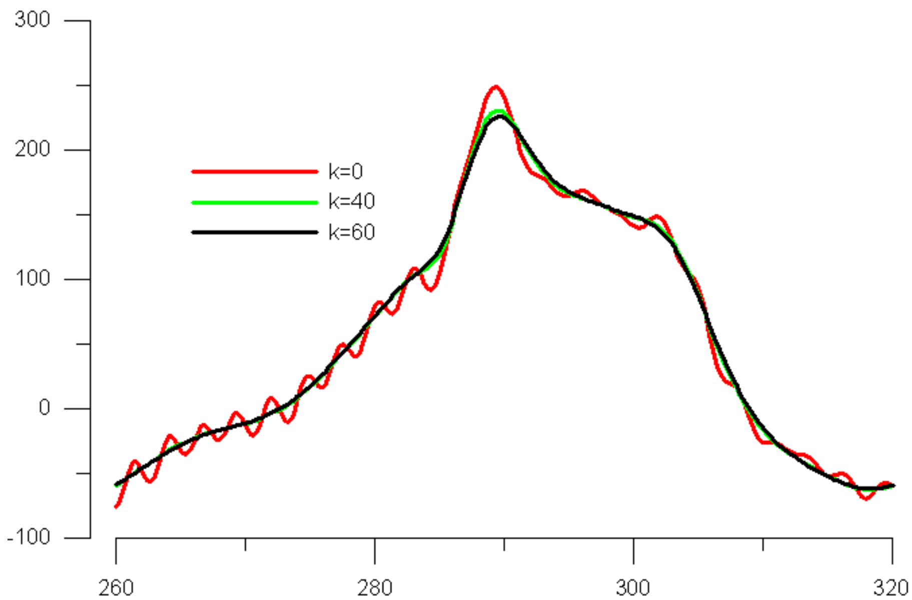
Obrázok 11: Poruchový potenciál na povrchu zeme

4.1 Filtrácia pomocou lineárnej difúzie

Ako prvé sa pokúsime šum odfiltrovať pomocou lineárnej difúzie. Na obrázku 12 vidíme detail originálnych dát a ich zhladenia po 40 a 60 časových krokoch. Vidíme, že *striping* je odstránený, pričom hrany tiež nie sú príliš zhladené. Obrázok 13 ukazuje originálne a zhladené dáta na jednej vybranej rovnobežke.



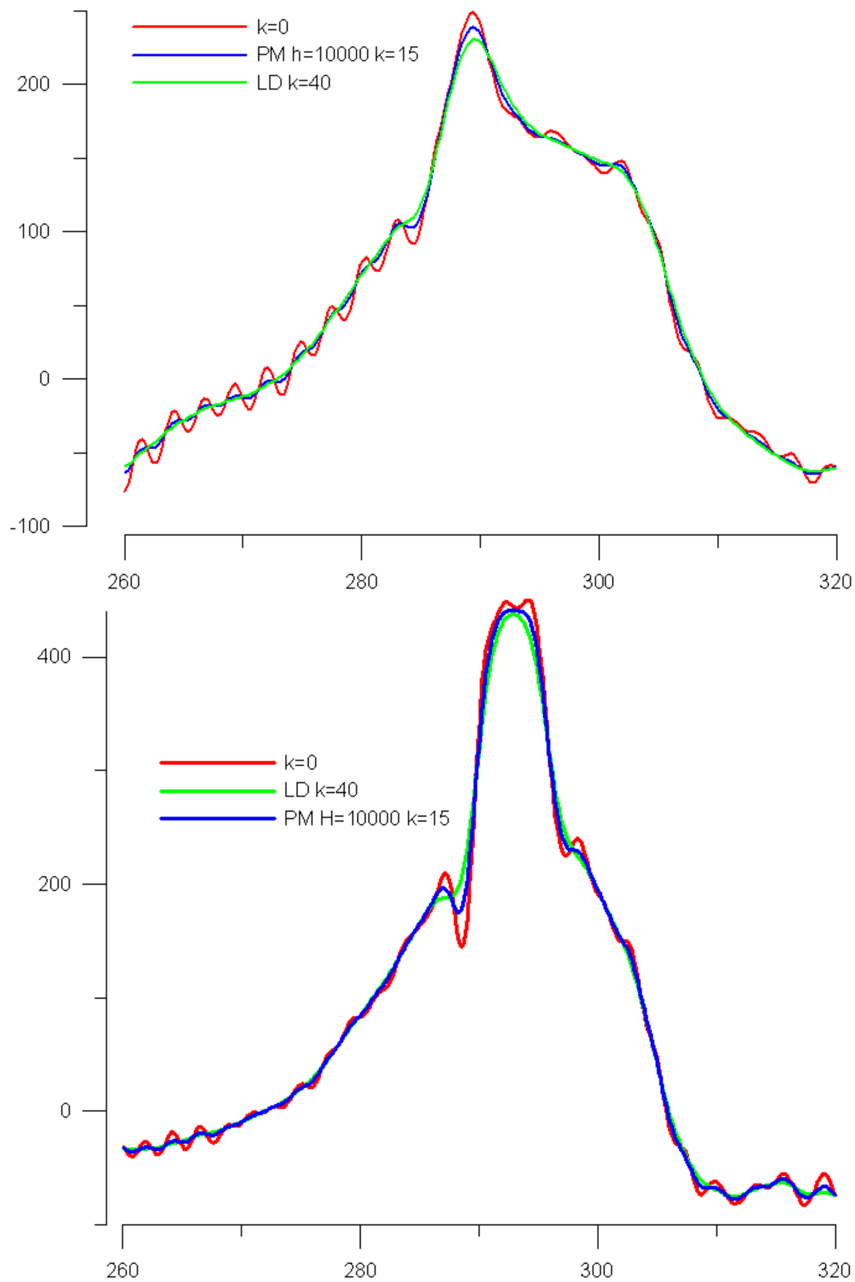
Obrázok 12: Poruchový potenciál zhladený lineárnou difúziou.



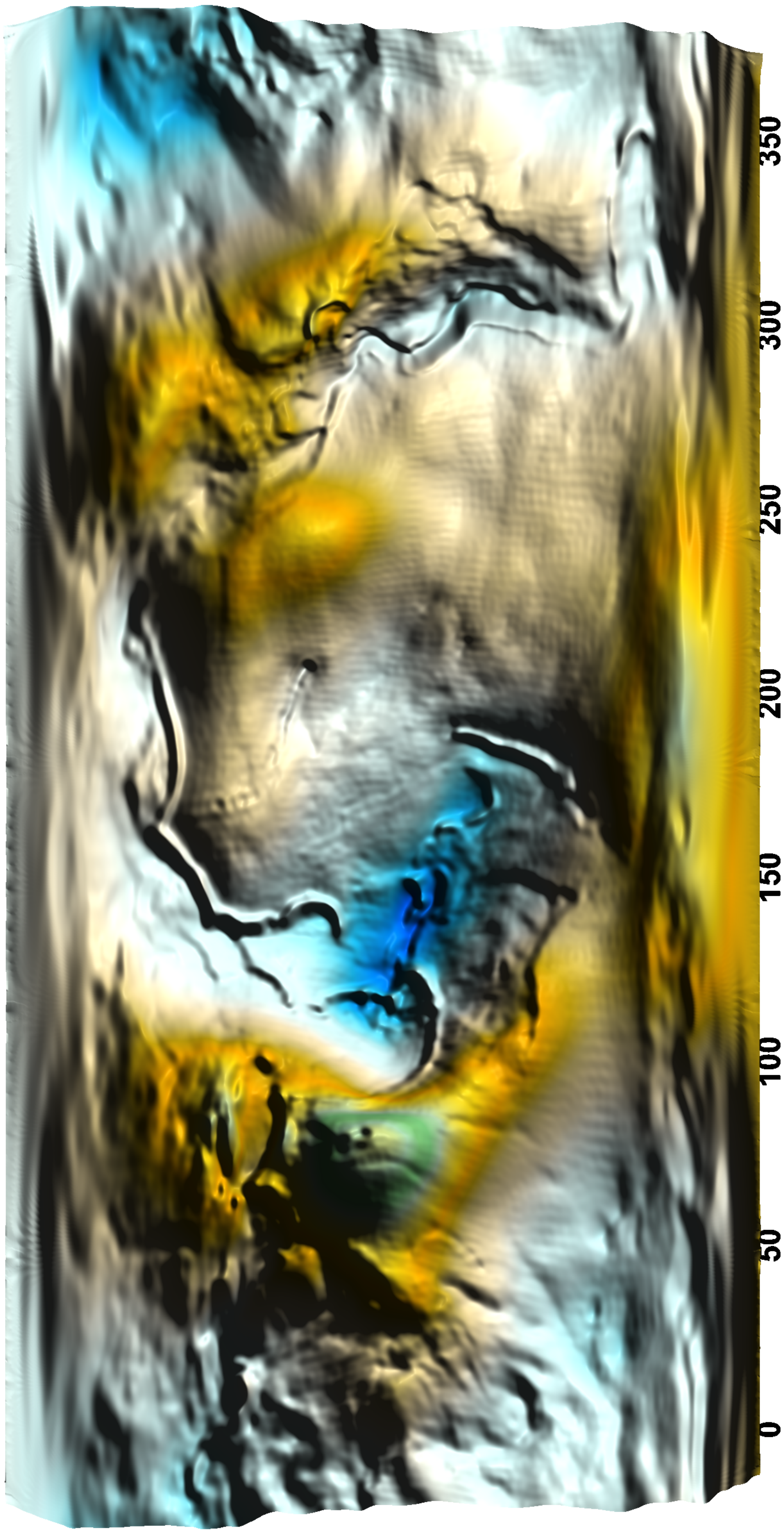
Obrázok 13: Rez rovnobežkou $\alpha = -38°$

4.2 Filtrácia pomocou Perona-Malikovho modelu

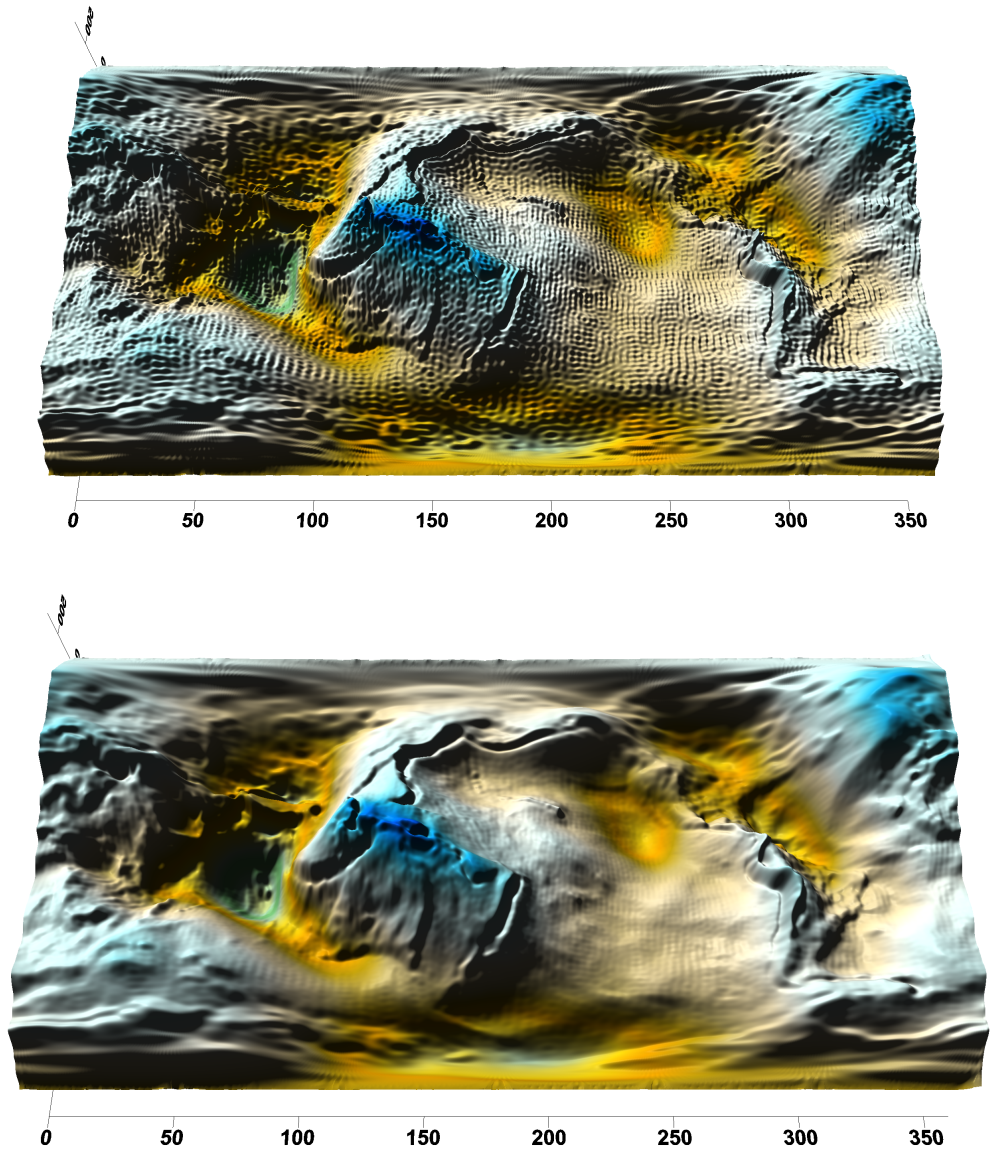
Následne budeme filtrovať šum pomocou Perona-Malikovho modelu. Numerickými testami sa nám podarilo získať výsledok zobrazený na obrázku 15. Experimentálne sme našli vhodné parametre $H = 10000$, $k = 15$, pri ktorých sa nám podarilo ešte vylepšiť výsledok lineárnej difúzie. Ich porovnanie na rovnobežkách $\alpha = -38°$ a $\alpha = -20°$ prezentujeme na obrázku 14. Na obrázku 16 ukazujeme globálne originálne a zhladené dáta z iného pohladu, z ktorého je vidno odstránenie šumu a zachovanie detailov podstatných pre správnu interpretáciu geodetických dát.



Obrázok 14: Rezy rovnobežkami $\alpha = -38^\circ$ a $\alpha = -20^\circ$



Obrázok 15: Poruchový potenciál zhladený nelineárnou difúziou.



Obrázok 16: Poruchový potenciál - originálne dáta (hore), zhladené nelineárnou difúziou (dole).

5 Záver

V bakalárskej práci sme vybudovali metódu konečných objemov na riešenie lineárnej a nelineárnej Perona-Malikovej difúznej rovnice na uzavretej ploche ω. Aproximáciou slabej formulácie difúznej rovnice na konečnom objeme sme získali v každom časovom kroku sústavu lineárnych rovníc, ktorú sme riešili SOR metódou. Numerické modely lineárnej a nelineárnej difúzie boli aplikované na geodetické dáta predstavujúce poruchový potenciál získaný zo satelitného modelu ITG-Grace03, ktoré obsahujú štrukturálny šum typu *striping*. Pre tento typ zašumených dát sa ako vhodný filter ukázala už lineárna (Gaussovská) filtrácia realizovaná na ploche reprezentujúcej elipsoidickú aproximáciu zemského povrchu. Výsledky lineárnej difúzie boli ešte vylepšené aplikáciou regularizovaného Perona-Malikovho modelu. Modely boli testované na vybranej oblasti Južnej Ameriky a výsledky prezentované formou globálnych a lokálnych grafických výstupov.

Na základe výsledkov prezentovaných v bakalárskej práci môžeme povedať, že filtrácia geodetických dát, ktorá uvažuje riešenie difúznych rovníc na ploche, na ktorej sú tieto dáta dané, je velmi prirodzeným prístupom, ktorý má velkú perspektívu. Testovanie a implementácia ďalších nelineárnych modelov bude predmetom našej ďalšej práce.

Súhrn

V práci sme sa zaoberali numerickým riešením lineárnej a nelineárnej difúznej rovnice na uzavretej ploche metódou konečných objemov. Uzavretú plochu sme popísali konečným počtom bodov, pomocou ktorých sme vytvorili trojuholníkovú sieť, na ktorej sme zadefinovali duálne konečné objemy. Rovnice sme diskretizovali v čase aplikáciou spätnej diferencie. Slabé formulácie difúznych rovníc na konečnom objeme sme previedli numerickou aproximáciou na lineárny systém, ktorý sme riešili SOR iteračnou metódou. Lineárnu aj nelineárnu Perona-Malikovu schému sme použili na filtráciu nežiadúcich artefaktov v geodetických dátach.

Summary

The bachelor thesis deals with a numerical solution of linear and nonlinear diffusion equations on closed 2D surfaces by the finite volume method. The closed 2D surface is represented by finite set of points, the nodes of triangulation by which we construct a dual finite volumes. The diffusion equations are discretized in time by a backward difference. The weak formulations of equations on finite volumes are aproximated by the finite volume method which lead to linear systems solved by SOR iterative solver. The linear and nonlinear Perona-Malik diffusion was used for filtering geodetic data representing disturbing potential given on the Earth surface by the ITG-Grace03 satellite geopotential model.

Literatúra

[1] F.Catté, P.L.Lions,J.M.Morel,T.Coll, *Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion*, SIAM J. Numer. Anal., Vol. 29 (1992) pp. 182-193

[2] R.Čunderlík, K.Mikula, M.Mojzeš, *Numerical solution of the linearized fixed gravimetric boundary value problem*, Journal of Geodesy, Vol. 82, No. 1 (2008) pp. 15-29

[3] G. Dziuk, C.M.Elliott, *Surface finite elements for parabolic equations*, Journal of Computational Mathematics, Vol. 25, No. 4 (2007) pp. 385-407

[4] R. Eymard, T. Gallouet, R. Herbin, *The finite volume method*, in: Handbook for Numerical Analysis, Vol.7 (Ph. Ciarlet, J.L. Lions, eds.), Elsevier, 2000

[5] T.Mayer-Gürr, *ITG-Grace03s: The latest GRACE gravity field solution computed in Bonn*, presentation at GSTM+SPP, 15-17 Oct 2007, Potsdam

[6] K.Mikula, N.Ramarosy, Semi-implicit finite volume scheme for solving nonlinear diffusion equations in image processing, Numerische Mathematik 89, No.3 (2001) 561-590

[7] P.Perona, J.Malik, *Scale space and edge detection using anisotropic diffusion*, Proceedings IEEE Society Workshop on Computer Vision, 1987