

**SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE
STAVEBNÁ FAKULTA**

**MATEMATICKÉ A NUMERICKÉ MODELOVANIE
BIOMECHANIKY MEDZISTAVCOVEJ PLATNIČKY**

BAKALÁRSKA PRÁCA

SvF-5342-67678

Študijný program: Matematicko-počítačové modelovanie

Číslo a názov študijného odboru: 9.1.9.Aplikovaná matematika

Školiace pracovisko: Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie

Vedúci záverečnej práce/školiťel': RNDr. Mária Minárová, PhD.

Bratislava 2012

Mária Tješšová

ZADANIE BAKALÁRSKEJ PRÁCE

Evidenčné číslo: SvF-5342-67678
ID študenta: 67678
Autorka práce: Mária Tješšová (67678)
Študijný program: matematicko-počítačové modelovanie
Študijný odbor: 9.1.9 aplikovaná matematika

Vedúci práce: RNDr. Mária Minárová, PhD.

Názov témy: **Matematické a numerické modelovanie biomechaniky medzistavcovej platničky**

Rozsah práce: 25-30 strán

Špecifikácia zadania:

Tvorba parametrického modelu medzistavcovej platničky a statické pevnostné výpočty na nej. Výpočty sa realizujú v konečnoprvkovom softvéri ANSYS. Okrajové podmienky zodpovedajú fyziologickému zaťaženiu pri bežných druhoch námahy.

Dátum zadania bakalárskej práce: **07. 10. 2011**

Termín odovzdania bakalárskej práce: **18. 05. 2012**

Mária Tješšová
študentka

prof. RNDr. Radko Mesiar, DrSc.
vedúci pracoviska

prof. RNDr. Karol Mikula, DrSc.
garant študijného programu

POKYNY

na vypracovanie bakalárskej práce

Úvodné ustanovenie

V zmysle zákona č. 131/2002 Z. z. o vysokých školách a o zmene a doplnení niektorých zákonov v znení neskorších predpisov je súčasťou štúdia podľa každého študijného programu aj záverečná práca. Jej obhajoba patrí medzi štátne skúšky. Záverečnou prácou pri štúdiu podľa bakalárskeho študijného programu je bakalárska práca. Podkladom na vypracovanie bakalárskej práce je zadanie bakalárskej práce

Štruktúra záverečnej práce

- titulný list,
- zadanie záverečnej práce,
- pokyny na vypracovanie,
- vyhlásenie autora,
- abstrakt v slovenskom aj anglickom jazyku (v rozsahu jednej strany),
- obsah s očíslovaním kapitol,
- zoznam skratiek a značiek,
- text samotnej práce (odporúčané členenie),
 - úvod,
 - súčasný stav problematiky,
 - ciele záverečnej práce,
 - vlastné riešenie členené na kapitoly podľa charakteru práce,
 - zhodnotenie dosiahnutých výsledkov resp. navrhnutých riešení,
 - záver,
- zoznam použitej literatúry,
- prílohy (výkresy, tabuľky, mapy, náčrty) vrátane postra.

Rozsah a forma

1. Obsah a forma záverečnej práce musí byť spracovaná v zmysle Metodického usmernenia č. 14/2009-R o náležitostiach záverečných prác.
2. Vyžadovaný rozsah bakalárskej práce je 20 až 30 strán. Práca sa odovzdáva vo viazanej podobe, v dvoch vyhotoveniach. Rozsiahle grafické prílohy možno v prípade súhlasu vedúceho práce odovzdať v jednom vyhotovení. Autor práce je povinný vložiť prácu v elektronickej forme do akademického informačného systému.

3. Odporúčaný typ písma je Times New Roman, veľkosť 12 a je jednotný v celej práci. Odporúčané nastavenie strany - riadkovanie 1,5, okraje zľava 3,5 cm, sprava 2 cm, zhora a zdola 2,5 cm, orientácia na výšku, formát A4
4. Obrázky a vzorce sa čísloujú v rámci jednotlivých kapitol (napr. obr. 3.1 je obrázok č. 1 v kapitole 3). Vzorce sa čísloujú na pravom okraji riadku v okrúhlych zátvorkách - napr. (3.1).
5. Všetky výpočty musia byť usporiadané tak, aby bolo možné preveriť ich správnosť.
6. Pri všetkých prevzatých vzorcoch, tabuľkách, citovaných častiach textu musí byť uvedený prameň.
7. Citovanie literatúry sa uvádza podľa STN ISO 690 (01 0197) Dokumentácia. Bibliografické odkazy. Obsah, forma a štruktúra. 1998.
8. Príklad zoznamu bibliografických odkazov:
 - ABELOVIČ. J. a kol.: Meranie v geodetických sieťach. Bratislava, Alfa 1990, s. 35-36.
 - MICHALČÁK, O. – ADLER, E.: Výskum stability dunajských hrádzí. In: Zborník vedeckých prác Stavebnej fakulty SVŠT, Bratislava, Edičné stredisko SVŠT 1976, s. 203-214.
 - ŠŮTTI, J.: Určovanie priestorových posunov stavebných objektov. Geodetický kartografický obzor, 35 (77), 1987, č. 2, s. 35-37.

STN 73 0405 Meranie posunov stavebných objektov. 1986.

Zákon NR SR č. 215/1995 Z. z. o geodézii a kartografii.

Vyhláška Úradu geodézie, kartografie a katastra SR č. 178/1996 Z. z., ktorou sa vykonáva zákon NR SR č. 215/1995 Z. z. o geodézii a kartografii
6. Elektronické materiály treba citovať podľa ISO 690-2:2000: Information and documentation - Bibliographic references - Part 2: Electronic documents or parts thereof. Príklady bibliografických odkazov na elektronické dokumenty sa uvádza v: MEŠKO, D. – KATUŠČÁK, D. – FINDRA, J.: Akademická príručka. 2., upravené a doplnené vydanie. Martin, Osveta, 2005, s. 233. ISBN 80-8063-200-6.
9. Za jazykovú a terminologickú správnosť bakalárskej práce zodpovedá študent.

.....
vedúci pracoviska

Ustanovenia týchto pokynov som vzal na vedomie. Som si vedomý(á), že ak nebude moja bakalárska práca vypracovaná v súlade s týmito pokynmi, nebude prijatá na obhajobu.

V Bratislave

.....
podpis študenta

ČESTNÉ PREHLÁSENIE

Čestne prehlasujem, že na bakalárskej práci som pracovala samostatne na základe vlastných teoretických a praktických poznatkov, konzultácii a štúdia odbornej literatúry, ktorej úplný prehľad je uvedený v zozname použitej literatúry.

v Bratislave, 5.5.2012

.....

POĎAKOVANIE

Chcela by som sa poďakovať vedúcej mojej práce RNDr. Márii Minárovej, PhD. Za odbornú pomoc a pripomienky pri jej vypracovaní.

SÚHRN

Práca je venovaná matematickému modelovaniu biomechanických javov pohybového segmentu lumbálnej časti ľudskej chrbtice. Počet ochorení tejto časti chrbtice v posledných rokoch stále stúpa, preto je téme venovaná veľká pozornosť. Na začiatku práce sú zhrnuté teoretické poznatky. Sú tu stručne popísané poznatky z anatómie chrbtice, ktorých poznanie bolo potrebné pre túto prácu. Ďalej sú zhrnuté poznatky z teórie pružnosti, ktoré sú odvodené v cylindrických súradniciach. Ako matematický prostriedok je použitý variačný počet na minimalizovanie celkovej potenciálnej energie. V praktickej časti je na riešenie využitý konečnoprvkový softvérový aparát. Celý model je kompletne parametrizovaný, preto môže byť využitý aj na modelovanie inej časti chrbtice. Sú skúmané tri zaťažujúce stavy - zaťaženie vlastnou váhou vo vzpriamenej polohe s 5 kg bremenom v predpažených rukách, zaťaženie pri predklone/ záklone a rotácia okolo vertikálnej osi stavca. Výsledkom skúmania sú zistenia, v ktorých častiach je medzistavcová platnička najviac namáhaná.

ABSTRAKT

The work is devoted to the mathematical modelling of biomechanical effects in the lumbar motion segment of the human spine. The number of diseases of the spine in recent years continues to increase, so the issue received a lot of attention. At the beginning of the work the theoretical knowledge is summarized. The necessary knowledge of spinal anatomy is briefly described. Evidence of the theory of elasticity is presented, which is derived in cylindrical coordinates. A calculus of variations to minimize the total potential energy is used as a mathematical tool. The practical part uses a finite element software. The whole model is completely parameterized, so it can also be used to model other parts of the spine. Three onerous conditions are investigated - load of its own weight in an upright position with a 5 kg load in the hands with stretched arms, load when reclining /tilt and rotation around the vertical axis vertebra. The result of the investigation finds out, which parts of the intervertebral discs are the most stressed.

OBSAH

1	ÚVOD	10
2	SÚČASNÝ STAV	10
3	CIELE PRÁCE	10
4	ZÁKLADNÉ POZNATKY	11
4.1	ANATÓMIA CHRBTICE	11
4.2	BIOMECHANICKÝ MODEL	13
4.3	MECHANIKA- ZÁKLADNÉ ROVNICE	17
4.4	PRINCÍP MINIMÁLNEJ ENERGIE	21
4.5	METÓDA KONEČNÝCH PRVKOV	23
5	SIMULÁCIE A VÝSLEDKY	26
5.1	ROVNOMERNÉ ZAŤAŽENIE	27
5.1.1	OKRAJOVÉ PODMIENKY	27
5.1.2	VÝSLEDKY	28
5.2	NEROVNOMERNÉ ZAŤAŽENIE	30
5.2.1	OKRAJOVÉ PODMIENKY	30
5.2.2	VÝSLEDKY	31
5.3	ROTÁCIA	33
5.3.1	OKRAJOVÉ PODMIENKY	33
5.3.2	VÝSLEDKY	33
6	ZÁVER	35
	POUŽITÁ LITERATÚRA	36

ZOZNAM SKRATIEK A ZNAČIEK

r	radiálna súradnica ($r \geq 0$)
z	axiálna súradnica
θ	obvodová súradnica
DD	výpočet x-ovej súradnice bodu platničky
DD1	výpočet x-ovej súradnice bodu kosti
E1	hrúbka endplate tela stavca
E2	hrúbka endplate tela disku
HT	výška platničky
QU	konštanta na výpočet súradnice bodu
RB	polomer hornej podstavy stavca
RD	polomer disku
RN	polomer nuklea platničky
RV	vertikálna krivosť tela stavca
RV1	vnútorný polomer-spongio
T	ťažisko človeka
Tmax	maximálna záťaž
Tmin	minimálna záťaž
UL	upper level
VT	vzdialenosť ťažiska od platničky
XW	x-ová súradnica bodu

1 ÚVOD

Biomechanike chrbtice je v posledných rokoch venovaná veľká pozornosť, hlavne jej bedrovej časti. Súhrnný popis mechanickej odozvy chrbtice prispeje nie len k poznaniu vplyvu gravitačného preťaženia tela na deformabilitu medzistavcovej platničky, ale taktiež prispeje k príprave a návrhu vhodných náhrad stavca a medzistavcovej platničky. Štúdium biomechaniky chrbtice je dôležité aj preto, lebo poruchy bedrovej chrbtice spôsobujú asi u 7% populácie dlhodobé vyradenie z pracovnej činnosti. V rade lekárskeho problémov je porozumenie mechanickým vlastnostiam medzistavcovej platničky taktiež závažné. Medzi tieto problémy patrí štúdium vzniku a vývoja degenerácie platničky a jej poruchy, posuv platničky a štúdium vzniku i korekcie deformability chrbtice.[9]

Biomechanika je úzko spojená s inžinierstvom, pretože pomerne často využíva tradičné inžinierske vedy na analyzovanie biologických systémov. Biologické systémy sú však viac komplexné ako ľuďmi postavené systémy. Numerické metódy sú preto aplikované v skoro všetkých biomechanických štúdiách. Výskum sa vykonáva v opakovaných procesoch hypotéz a overovania, zahŕňajúc niekoľko krokov modelovania, počítačových simulácií a experimentálnych meraní. [2]

2 SÚČASNÝ STAV

Problematika biomechaniky chrbtice je v súčasnej dobe veľmi aktuálna téma, o čom svedčia aj mnohé vedecké práce, ktoré sú publikované v rôznych vedeckých časopisoch a zborníkoch. Veľká časť týchto prác sa venuje biomechanike v oblasti lumbálnej chrbtice, pričom autori sa prevažne zaoberajú mechanickými vlastnosťami medzistavcovej platničky a vplyvom jej degenerácie na zmenu celkovej pohyblivosti chrbtice. Taktiež skúmajú, v ktorých miestach je platnička namáhaná najviac pri rôznych fyziologických zaťaženiach.

3 CIELE PRÁCE

Ciele tejto práce sú zostavenie vhodného matematického modelu na opísanie biomechaniky medzistavcovej platničky a tvorba parametrického modelu medzistavcovej platničky a výpočty premiestnení a napätí na nej. Výpočty sa realizujú

v konečnoprvkovom softvéri ANSYS. Okrajové podmienky zodpovedajú fyziologickému zaťaženiu pri bežných druhoch námahy.

4 ZÁKLADNÉ POZNATKY

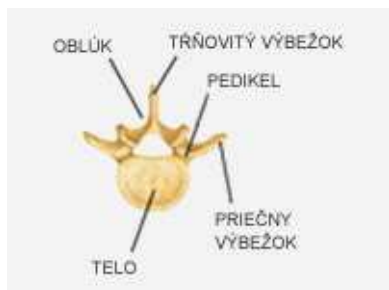
4.1 ANATÓMIA CHRBTICE

Chrbtica (Obr. 1) človeka je zložená zo siedmich krčných stavcov, označovaných C1 až C7, dvanástich hrudných stavcov označovaných T1 až T12, piatich bedrových stavcov (L1 až L5), piatich krížových stavcov (S1 až S5) zarastených do krížovej kosti a štyroch až piatich kostrčových stavcov (Co1 až Co4/5), zrastajúcich do kostrčovej kosti.[9]

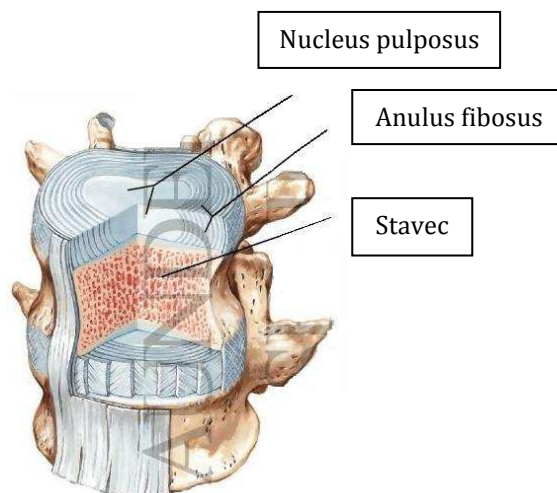


Obr.1 Anatomia chrbtice

Telo stavca (corpus vertebrae) je mohutnejšia časť stavca. (Obr.2) V podstate je to nízky valec, zakončený dvoma skoro rovnými plôškami, na ktoré je pripojená chrupavkovitá medzistavcová platnička (discus intervertebralis), ktorá sa tvarovo podobá týmto plôškam. (Obr. 3) Platničiek je celkom 23. Každá táto platnička má okrajové vrstvičky hyalínnej (sklovitej) chrupavky, ktoré priliehajú ku kosti tiel oboch stavcov. [9] Všetky platničky človeka sú iné. Majú tvar podobný svojim dvom susediacim stavcom a tiež jej skladba je rôzna. Veľkosť jadra platničky, ako aj jeho mechanické vlastnosti sú rozmanité, závisia od veku a pohlavia človeka.

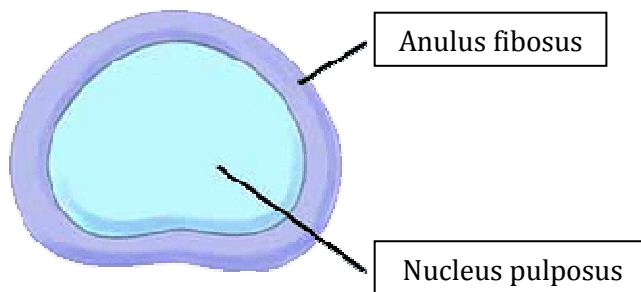


Obr. 2 Anatomia stavca



Obr. 3 Časť chrbtice - zloženie

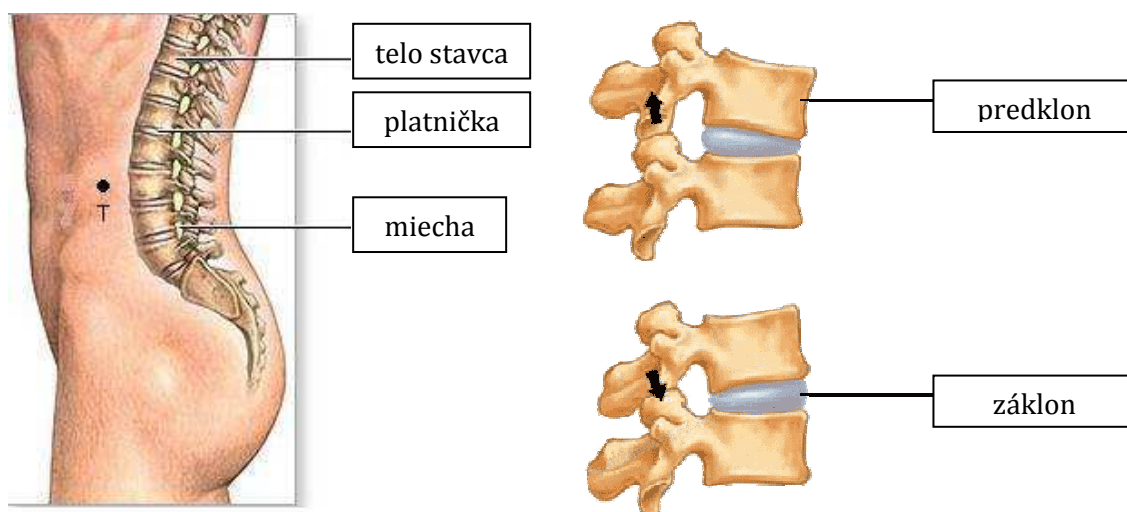
Obvod medzistavcovej platničky tvorí väzivový prstenec (anulus fibrosus), zložený z lamiel kolagénnych fibríl. Vo vnútri platničky je vodnaté jadro (nucleus pulposus), ktoré má guľovitý tvar a je málo stlačiteľné.(Obr. 4)[9]



Obr.4 Zloženie medzistavcovej platničky

Lumbálna časť chrbtice človeka (Obr. 5) je najviac zaťažovanou časťou chrbtice a tiež miestom najväčšieho výskytu množstva ochorení chrbtice. Preto sa moja pozornosť zameriava práve na túto časť chrbtice.

Základnou pohybovou jednotkou chrbtice je tzv. pohybový segment (Obr. 6) (systém stavec- platnička - stavec), ktorého skúmaniu sa v tejto práci venujem.

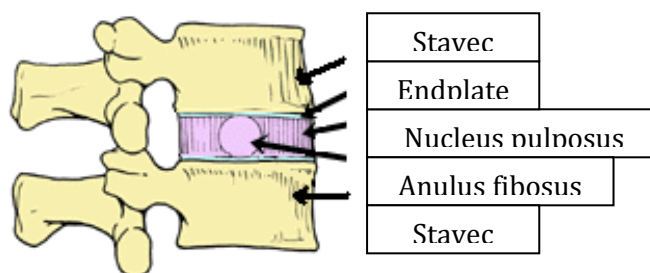


Obr.5 Chrbtica v ľudskom tele a pozícia ťažiska

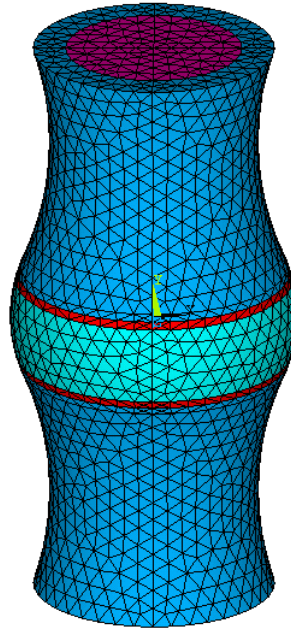
Obr. 6 Pohyblivá časť chrbtice

4.2 BIOMECHANICKÝ MODEL

Model, ktorý je simulovaný je zjednodušený. Bola vybraná medzistavcová platnička a horný endplate a dva stavce - jeden nad platničkou a druhý pod platničkou (Obr. 7) Tvar pohybového segmentu sme zobrali ako rotačné teleso a je modelovaný v cylindrických súradniciach. (Obr. 8) Nás najviac zaujímala plocha podstavy stavca. Experimentálne bolo dokázané, že tvar plochy podstavy stavca môže byť opísaný ako kruh, ktorý má takmer rovnakú veľkosť plochy.



Obr.7 časť chrbtice, ktorá je modelovaná



Obr. 8 zjednodušený model pohybového segmentu a jeho rozdelenie na konečné prvky

V nasledujúcej tabuľke sa nachádzajú mechanické vlastnosti materiálov, ktoré boli použité pri modelovaní problému[6](Tab. 1):

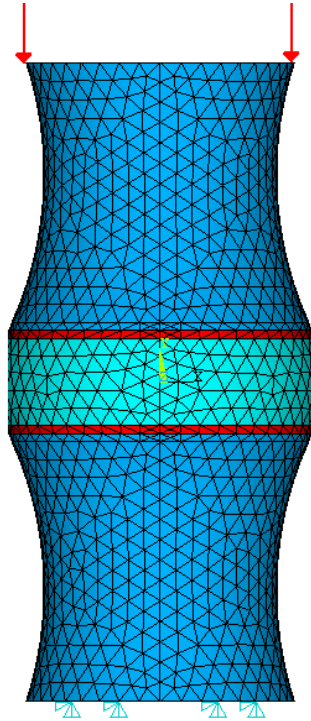
Tab.1 mechanické vlastnosti jednotlivých zložiek

	Anulus fibrosus	Nucleus pulposus	Endplate	Kortikálna kosť	Spongiózna kosť
Youngov modul[MPa]	4.20	1	24.3	12000	100
Poissonovo číslo[-]	0.45	0.499999	0.40	0.3	0.2

Odozvu medzistavcovej platničky na mechanické zaťaženie sme skúmali v troch modifikáciách troch zaťažovacích stavov označených A,B,C.

Okrajové podmienky boli zadané nasledovne:

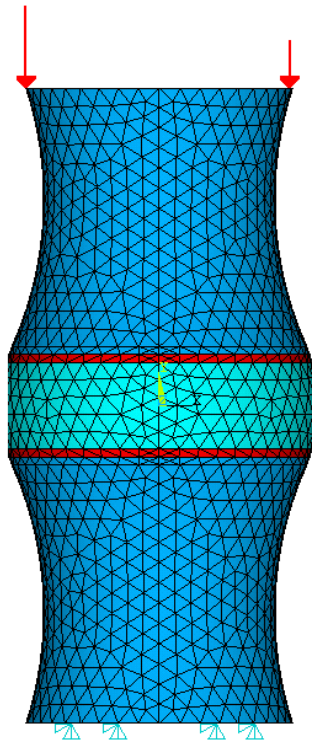
- A. Pre rovnomerné zaťaženie (Obr. 9): spojité zaťaženie spôsobené vlastnou váhou človeka v polohe stojacej a držiacej 5 kg bremeno.



Obr. 9 zadanie podmienok pre rovnomerné zaťaženie

Teda na hornú plochu je zadaný konštantný tlak a na spodnej ploche sú odobrané všetky stupne voľnosti. Výpočet premiestnení robíme vzhľadom na túto plochu.

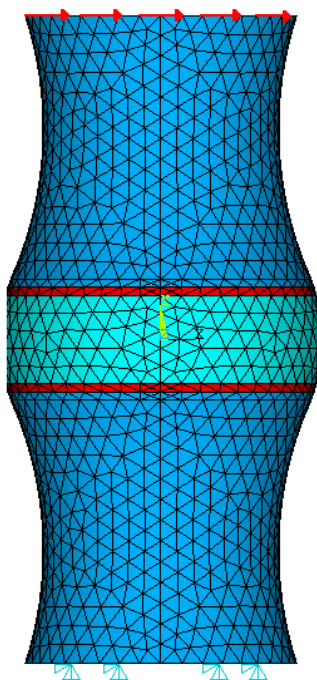
- B. Nerovnomerné zaťaženie (Obr. 10): zaťažovací stav predstavuje predklon resp. záklon človeka. Je reprezentovaný lineárnou funkciou, ktorá je podrobne popísaná v kapitole 2.2 a zobrazená na Obr. 18.



Obr. 10 zaťaženie pri predklone a záklone

Preto na hornú plochu bolo zadané nerovnomerné zaťaženie a na spodnej ploche sú odobrané všetky stupne voľnosti. Vzhľadom k tejto ploche boli počítané premiestnenia.

- C. Rotácia (Obr. 11): tento zaťažovací stav predstavuje otáčaniu sa človeka doprava alebo doľava. Je reprezentovaný momentu sily okolo osi tela človeka.

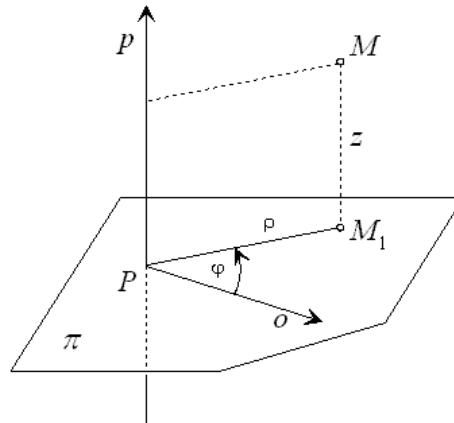


Obr. 11 Zadanie podmienok pri rotácii

Do bodov hornej kružnice stavca bol zadaný moment sily a na spodnej ploche, vzhľadom na ktorú sa počítali posunutia boli odobrané všetky stupne voľnosti.

4.3 MECHANIKA - ZÁKLADNÉ ROVNICE

Všetky rovnice sú odvodené v cylindrických súradniciach .(Obr. 12)



Obr. 12 cylindrická súradnicová sústava

V modelovaní nášho biologického systému využívame zákony mechaniky. Opíšeme základné statické zákony pružnosti v cylindrických súradniciach potrebné pre naše skúmanie. Uvažujeme o pružnom deformovanom telese, ktoré sa nachádza v rovnovážnom stave účinkom vonkajších a objemových síl. Keď teleso rozrežeme myslenným rezom, pridáme na plochu rezu každej z oboch častí plošné sily, aby bola každá v rovnovážnom stave. Nech $d\mathbf{F}$ je sila pôsobiaca z jednej časti telesa na druhú na plošný element dA plochy rezu. Silu pôsobiacu na jednotku plochy

$$\frac{d\mathbf{F}}{dA} = \mathbf{s} \quad (1)$$

nazývame napätím a jej zložku v smere normály rezu normálovým napätím. Zložku ležiacu v rovine rezu tangenciálnym napätím alebo šmykovým napätím. Chceme vyjadriť stav napätia v bode M uvažovaného telesa, ktorého cylindrické súradnice sú r , θ , z . Napätia $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3$, ktoré sú v danom bode M uvažované vzhľadom na roviny kolmé na súradnicové osi, sa dajú v cylindrických súradniciach rozložiť na zložky:

$$\begin{aligned}
\mathbf{s}_1 &= (\sigma_{rr}, \sigma_{rz}, \sigma_{r\theta}) \\
\mathbf{s}_2 &= (\sigma_{zr}, \sigma_{zz}, \sigma_{z\theta}) \\
\mathbf{s}_3 &= (\sigma_{\theta r}, \sigma_{\theta z}, \sigma_{\theta\theta}) .
\end{aligned}
\tag{2}$$

Tieto zložky zapisujeme ako tenzor napätia, kde zložky s rovnakými indexmi sú normálové napätia a ostatné sú šmykové napätia:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{rz} & \sigma_{r\theta} \\ \sigma_{zr} & \sigma_{zz} & \sigma_{z\theta} \\ \sigma_{\theta r} & \sigma_{\theta z} & \sigma_{\theta\theta} \end{bmatrix}
\tag{3}$$

Tenzor napätia je symetrický, Z praktických dôvodov používame namiesto, maticového zápisu zápis vektorový:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{rz} \\ \sigma_{r\theta} \\ \sigma_{\theta z} \end{bmatrix}
\tag{4}$$

kde $\sigma_{rz} = \sigma_{zr}$, $\sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta r}$, $\sigma_{z\theta} = \sigma_{\theta z}$.

Tento fakt vyjadrujú rovnice rovnováhy. Súčet všetkých síl (vonkajších aj vnútorných) v telese v ťažisku sa rovná nule. Pre objemový element dostávame rovnice rovnováhy vzhľadom napätia v cylindrických súradniciach:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\sigma_{rr}) + \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{rz} - \frac{\sigma_{\theta\theta}}{r} + b_r &= 0 \\
\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\sigma_{zr}) + \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{zz} + b_z &= 0 \\
\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2\sigma_{\theta r}) + \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{\theta z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \sigma_{\theta\theta} + b_\theta &= 0
\end{aligned}
\tag{5}$$

kde b_θ, b_r, b_z sú zložky sily, ktoré pôsobia na objemovú jednotku, tzv. objemové sily.

Zoberieme do úvahy bod nezaťaženeného pružného telesa určeného súradnicami r , θ , z . Pôsobením vonkajších síl, nastávajú zmeny vzdialeností (posunutia), ktoré možno vyjadriť vektorom posunutia \mathbf{v} v smere súradnicových osí:

$$\mathbf{v}(r,z,\theta) = \begin{bmatrix} v_r(r,z,\theta) \\ v_z(r,z,\theta) \\ v_\theta(r,z,\theta) \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Deformačné veličiny – pomerné deformácie v cylindrických súradniciach možno vyjadriť takto:[3]

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial v_r}{\partial r}, & \varepsilon_{rz} = \varepsilon_{zr} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right), \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r}, & \varepsilon_{\theta z} = \varepsilon_{z\theta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right), \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial v_z}{\partial z}, & \varepsilon_{r\theta} = \varepsilon_{\theta r} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Hovoríme, že deformačné veličiny vyjadrujú stav deformácie telesa a tvoria zložky deformačného tenzora [4]:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{rr} & \varepsilon_{rz} & \varepsilon_{r\theta} \\ \varepsilon_{zr} & \varepsilon_{zz} & \varepsilon_{z\theta} \\ \varepsilon_{\theta r} & \varepsilon_{\theta z} & \varepsilon_{\theta\theta} \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Pri malých deformáciách môžeme položiť:

$$\varepsilon_{rz} = \varepsilon_{zr}, \quad \varepsilon_{\theta z} = \varepsilon_{z\theta}, \quad \varepsilon_{r\theta} = \varepsilon_{\theta r},$$

zavedieme nové premenné:

$$\begin{aligned} \gamma_{rz} &= \varepsilon_{zr} + \varepsilon_{rz} = 2\varepsilon_{rz} \\ \gamma_{r\theta} &= \varepsilon_{r\theta} + \varepsilon_{\theta r} = 2\varepsilon_{r\theta} \\ \gamma_{z\theta} &= \varepsilon_{z\theta} + \varepsilon_{\theta z} = 2\varepsilon_{z\theta} \end{aligned} \quad (9)$$

kde γ_{rz} , $\gamma_{r\theta}$, $\gamma_{z\theta}$ sú veľkosti uhlov medzi dvoma dĺžkovými elementmi, ktoré boli pôvodne rovnobežné s osami.

Pre ďalšie výpočty bude výhodnejšie symetrický tenzor napätia D zapisovať v tvare vektora so šiestimi zložkami[4]:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \gamma_{rz} \\ \gamma_{r\theta} \\ \gamma_{\theta z} \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Relatívna zmena objemu V po deformácii sa nazýva objemová dilatácia. V cylindrických súradniciach ju môžeme vyjadriť nasledovne :[3]

$$\varepsilon = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz} = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}. \quad (11)$$

Vzťah (7) medzi posunutiami a deformáciami kinematických rovniciach môžeme sumarizovať v[4]:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \gamma_{rz} \\ \gamma_{r\theta} \\ \gamma_{\theta z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ \frac{1}{r} & 0 & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & 0 & \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \\ 0 & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_r \\ v_z \\ v_\theta \end{bmatrix} = \mathbf{B} \mathbf{v}. \quad (12)$$

Fyzikálnu závislosť medzi napätiami a deformáciami popisuje Hookov zákon, ktorý v prípade anizotropného materiálu vyzerá nasledovne:[4]

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{rz} \\ \sigma_{r\theta} \\ \sigma_{\theta z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{21} & E_{31} & E_{41} & E_{51} & E_{61} \\ E_{12} & E_{22} & E_{32} & E_{42} & E_{52} & E_{62} \\ E_{13} & E_{23} & E_{33} & E_{43} & E_{53} & E_{63} \\ E_{14} & E_{24} & E_{34} & E_{44} & E_{54} & E_{64} \\ E_{15} & E_{25} & E_{35} & E_{45} & E_{55} & E_{65} \\ E_{16} & E_{26} & E_{36} & E_{46} & E_{56} & E_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \gamma_{rz} \\ \gamma_{r\theta} \\ \gamma_{\theta z} \end{bmatrix} = \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (13)$$

Pre izotropný materiál má matica \mathbf{E} zjednodušený tvar:

$$\mathbf{E} = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 1-\mu & \mu & \mu & 0 & 0 & 0 \\ \mu & 1-\mu & \mu & 0 & 0 & 0 \\ \mu & \mu & 1-\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\mu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\mu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\mu) \end{bmatrix}$$

kde E je Youngov modul pružnosti izotropického materiálu a μ je Poissonovo číslo a G modul pružnosti v šmyku.[4]

Zavedením (12) a (13) do (5) dostávame základné rovnice pružnosti pre izotropné prostredie v cylindrických súradniciach[3]:

$$\begin{aligned} G(\Delta_{r\theta z} v_r - \frac{1}{r^2} v_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{1-2\mu} \frac{\partial \varepsilon}{\partial r}) + b_r &= 0 \\ G(\Delta_{r\theta z} v_\theta - \frac{1}{r^2} v_\theta - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{1}{1-2\mu} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta}) + b_z &= 0 \\ G(\Delta_{r\theta z} v_z + \frac{1}{1-2\mu} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z}) + b_\theta &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Použitý Laplaceov operátor je tvaru:

$$\Delta_{r\theta z} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}. \quad (15)$$

4.4 PRINCÍP MINIMÁLNEJ ENERGIE

Variačný počet nachádza široké uplatnenie v mechanike kontinua, najmä v moderných numerických metódach. Veľa fyzikálnych dejov je opísaných funkcionálmi a riešením daného problému je nájsť funkciu, pre ktorú funkcionál nadobúda extrémnu

hodnotu(minimum alebo maximum). Príkladmi funkcionálov sú potenciálna energia a deformačná energia.[5] V mojom probléme minimalizujem celkovú potenciálnu energiu.

Funkcionál celkovej potenciálnej energie ako hlavná oblasť je v tvare:

$$\Pi[\mathbf{v}] = U[\mathbf{v}] - W[\mathbf{v}] \quad (16)$$

kde $U[\mathbf{v}]$ je funkcionál deformačnej energie všeobecne zapisujeme nasledovne[4]:,

$$U[\mathbf{v}] = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} dV = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon} dV \quad (17)$$

$$U[\mathbf{v}] = \frac{1}{2} \int_V \begin{bmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \gamma_{rz} \\ \gamma_{r\theta} \\ \gamma_{\theta z} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} E_{11} & E_{21} & E_{31} & E_{41} & E_{51} & E_{61} \\ E_{12} & E_{22} & E_{32} & E_{42} & E_{52} & E_{62} \\ E_{13} & E_{23} & E_{33} & E_{43} & E_{53} & E_{63} \\ E_{14} & E_{24} & E_{34} & E_{44} & E_{54} & E_{64} \\ E_{15} & E_{25} & E_{35} & E_{45} & E_{55} & E_{65} \\ E_{16} & E_{26} & E_{36} & E_{46} & E_{56} & E_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \gamma_{rz} \\ \gamma_{r\theta} \\ \gamma_{\theta z} \end{bmatrix} dV \quad (18)$$

v prípade izotropného materiálu:

$$U[\mathbf{v}] = \frac{1}{2} \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \int_V \begin{bmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \gamma_{rz} \\ \gamma_{r\theta} \\ \gamma_{\theta z} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1-\mu & \mu & \mu & 0 & 0 & 0 \\ \mu & 1-\mu & \mu & 0 & 0 & 0 \\ \mu & \mu & 1-\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\mu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\mu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\mu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \gamma_{rz} \\ \gamma_{r\theta} \\ \gamma_{\theta z} \end{bmatrix} dV \quad (19)$$

$W[\mathbf{v}]$ je potenciál vonkajšej práce, ktorý môže byť zapísaný ako suma príspevkov objemových síl a príspevkov z povrchových síl:

$$W[\mathbf{v}] = W_b[\mathbf{v}] + W_t[\mathbf{v}] \quad (20)$$

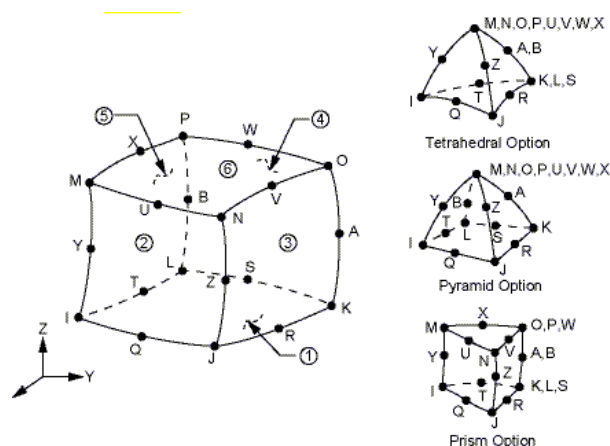
$$W_b[\mathbf{v}] = \int_V \mathbf{b}^T \mathbf{v} dV = \int_V [b_r \quad b_z \quad b_\theta] \begin{bmatrix} v_r \\ v_z \\ v_\theta \end{bmatrix} dV \quad (21)$$

$$\mathbf{W}_t[\mathbf{v}] = \int_{S_t} \mathbf{t}^T \mathbf{v} dV = \int_{S_t} [t_r \quad t_z \quad t_\theta] \begin{bmatrix} v_r \\ v_z \\ v_\theta \end{bmatrix} dS. \quad (22)$$

4.5 METÓDA KONEČNÝCH PRVKOV

Metóda sa začala vyvíjať súčasne v matematike, fyzike a v inžinierstve. V dnešnej dobe patrí medzi najrozšírenejšie, najuniverzálnejšie a najefektívnejšie numerické metódy riešenia inžinierskych úloh. Táto metóda sa však najprv rozvíjala len pre oblasť mechaniky pevných a poddajných telies, neskôr sa metóda začala používať aj na riešenie úloh pre prúdenie kvapalín a plynov, teplotné pole, žiarenie a prenos hmoty, elektrinu a magnetizmus a ďalšie.[6]

Prvý krok metódy konečných prvkov je diskretizácia oblasti. Pretože potrebujem počítať premiestnenia, pre diskretizáciu jednotlivých častí platničky som zvolila element SOLID186. Je to 20 uzlový element tvaru kvádra (Obr. 13). Element je definovaný 20 uzlami majúcimi tri stupne voľnosti: posun v uzlových x, y a z smeroch. Prvok podporuje plasticitu, hyperelasticitu, tečenie, napät'ové vystuženie, veľké deformácie a veľké deformačné schopnosti. Tiež má schopnosť zmiešanej formulácie pre simuláciu takmer nestlačiteľných elastoplastických materiálov a úplne nestlačiteľných hyperelastických materiálov. Aproximačné funkcie budú polynómy druhého stupňa. [1]



Obr. 13 element SOLID186

Charakterizácia elementu s n uzlami je [4]:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ r \\ z \\ \theta \\ v_r \\ v_z \\ v_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ r_1 & r_2 & \dots & r_n \\ z_1 & z_2 & \dots & z_n \\ \theta_1 & \theta_2 & \dots & \theta_n \\ v_{r1} & v_{r2} & \dots & v_{rn} \\ v_{z1} & v_{z2} & \dots & v_{zn} \\ v_{\theta 1} & v_{\theta 2} & \dots & v_{\theta n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ \vdots \\ N_{n-1} \\ N_n \end{bmatrix} \quad (23)$$

Predošlé posledné tri riadky v predchádzajúcej rovnici (23) vyjadrujú interpoláciu premiestnenia:

$$\begin{bmatrix} v_r \\ v_z \\ v_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \dots & N_n & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \dots & 0 & N_n & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & \dots & 0 & 0 & N_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{r1} \\ v_{z1} \\ u_{\theta 1} \\ \vdots \\ v_{rn} \\ v_{zn} \\ v_{\theta n} \end{bmatrix} = \mathbf{N} \mathbf{v}^e \quad (24)$$

kde \mathbf{v}^e – vektor uzlových posunutí

N- matica tvarovej funkcie.[4]

Potom vektor deformácií bude mať tvar:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \gamma_{rz} \\ \gamma_{r\theta} \\ \gamma_{\theta z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial r} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial r} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial N_n}{\partial z} & 0 \\ \frac{N_1}{r} & 0 & \frac{1}{r} \frac{\partial N_1}{\partial \theta} & \frac{N_2}{r} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial \theta} & 0 & \frac{1}{r} \frac{\partial N_n}{\partial \theta} \\ \frac{\partial N_1}{\partial r} & \frac{\partial N_1}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial r} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial r} & \frac{\partial N_n}{\partial z} & 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial N_1}{\partial \theta} & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial \theta} - \frac{N_1}{r} & \frac{1}{r} \frac{\partial N_2}{\partial \theta} & \dots & \frac{1}{r} \frac{\partial N_n}{\partial \theta} & 0 & \frac{\partial N_n}{\partial \theta} - \frac{N_n}{r} \\ 0 & \frac{1}{r} \frac{\partial N_1}{\partial \theta} & \frac{\partial N_1}{\partial z} & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{r} \frac{\partial N_n}{\partial \theta} & \frac{\partial N_n}{\partial z} \end{bmatrix} \mathbf{v}^e = \mathbf{B} \mathbf{v}^e \quad (25)$$

kde \mathbf{B} – matica deformácií posunutí.[4]

Závislost napětí, deformací a posunutí[4]:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{E} \mathbf{B}\mathbf{v}^e \quad (26)$$

Funkcionál celkové potenciální energie v terminologii interpolačních funkcí bude v tvare:

$$\Pi^e = \frac{1}{2} \mathbf{v}^{eT} \mathbf{K}^e \mathbf{v}^e - \mathbf{v}^{eT} \mathbf{f}^e \quad (27)$$

kde \mathbf{K}^e – lokální matice tuhosti

\mathbf{v}^e – vektor uzlových posunutí

\mathbf{f}^e – silový vektor na elemente, který je součtem objemové síly a účinků povrchových sil má tvar[4]:

$$\mathbf{f}^e = \mathbf{f}_b^e + \mathbf{f}_t^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{r} \mathbf{N}^T \mathbf{b} \, d\Omega + \int_{\Gamma^e} \mathbf{r} \mathbf{N}^T \mathbf{t} \, d\Gamma \quad (28)$$

Nevyhnutnou podmínkou pro minimální potenciální energii, tedy pro minimalizaci funkcionálu Π je rovnost jeho variace nule:

$$\delta\Pi = (\delta\mathbf{v}^e)^T (\mathbf{K}^e \mathbf{v}^e - \mathbf{f}^e) = 0. \quad (29)$$

Keďže $\delta\mathbf{v}$ je ľubovoľné, musí byť výraz v zátvorke rovný nule. Týmto dostávame systém rovníc na elemente[4]:

$$\mathbf{K}^e \mathbf{v}^e = \mathbf{f}^e \quad (30)$$

a následným spojením lokálních elementových systémů, lineárních rovnic dostávame globální systém rovnic[4]:

$$\mathbf{K}\mathbf{v} = \mathbf{f}. \quad (31)$$

5 SIMULÁCIE A VÝSLEDKY

Modelovanie biomechaniky medzistavcovej platničky bolo robené v konečnoprvkovom softvéri ANSYS. Pohybový segment je modelovaný ako rotačné teleso, ktoré najlepšie vystihuje tvar. Model je robený v cylindrických súradniciach a je diskretizovaný množinou trojuholníkov. Model je kompletne parametrizovaný a rozmery tohto modelu sú:

HT	= 12E-03m,
RD	= 2.2E-02m ,
RN	= 0.11806m,
E1	= 1.1E-0.3m ,
E2	= 1.2E-03m,
RV	= 1.4E-02 m,
RB	=XW+DD1-RV,
RV	= 5E-2m ,
RV1	= 5.5E-2m ,
VT	= 0.1m,
T	= 2RB+VT,
Tmax	
Tmin	
QU	= 1/3 ,
DD	= Sqrt(RD*RD-HD*HD),
DD1	= Sqrt(RV*RV-HT*HT) ,
UL	= HD+E1+E2+HT ,
XW	= DD-QU*(E1+E2) ,

Materiály použité v týchto experimentoch sú zapísané v tabuľke(Tab.1).

5.1 ROVNOMERNÉ ZAŤAŽENIE

V prvom experimente som na platničku zadávala rovnomerné A. zaťaženie, čo zodpovedá napríklad polohe človeka, ktorý stojí a v predpažených rukách drží 5kg bremeno ($F=1950\text{N}$). Pri zadávaní sa táto sila aplikuje na plochu hornej podstavy modelu, $F/\pi R^2$, čo predstavuje spojité zaťaženie.[8]

5.1.1 OKRAJOVÉ PODMIENKY

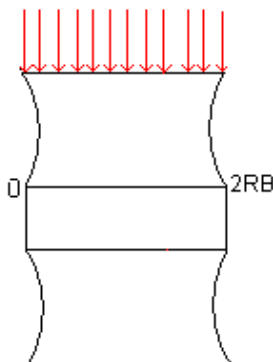
Okrajové podmienky boli zadávané na hranici $\delta\Omega$ nasledovne:

- pozdĺž celej spodnej plochy, vzhľadom na ktorú sa počítali deformácie a napätia všetkých ostatných uzlov:

$$\begin{aligned}z = -(E1+E2+HD+2HT): \quad & v_z(r,z,\theta) = 0 \\ & v_r(r,z,\theta) = 0 \\ & v_\theta(r,z,\theta) = 0\end{aligned}$$

- na hornej podstave stavca bolo distribuované zaťaženie (Obr. 14) zodpovedajúce zaťaženiu v stoji s bremenom v rukách:

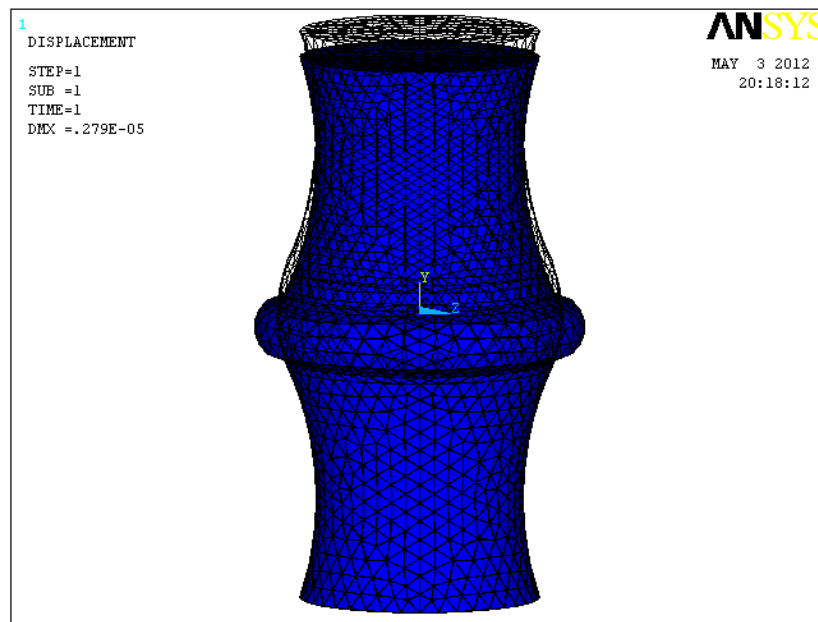
$$z = E1+E2+HD+2HT: \quad p = F/\text{plocha}$$



Obr. 14 Rovnomerné zaťaženie

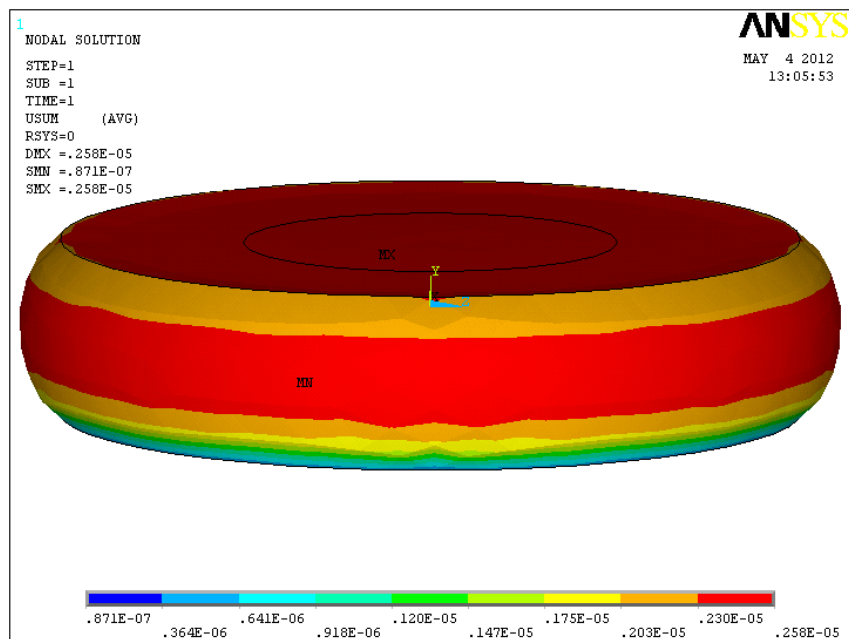
5.1.2 VÝSLEDKY

Platnička sa pod vplyvom rovnomerného zaťaženia deformovala (Obr. 15), pričom pružný anulus fibrosus ustúpil do priestoru v smere kladnej súradnice r nukleus pulposus je tvorený takmer nestlačiteľnou tekutinou teda zachováva objem nie však tvar. Stavec sa pri tomto fyziologickom zaťažení deformuje len zanedbateľne. Horný stavec sa posunul iba smerom dole.



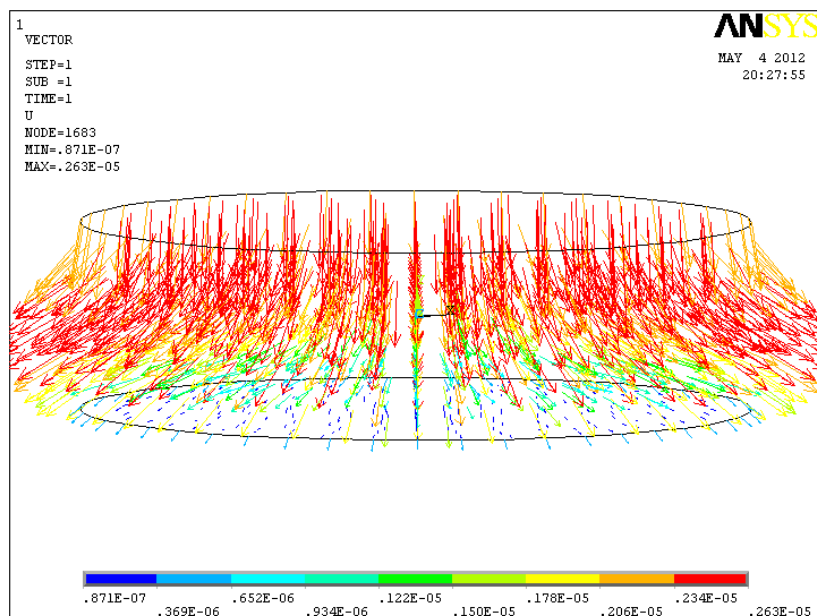
Obr.15 Deformovaný a nedeformovaný stav pri rovnomernom zaťažení

Mňa najviac zaujíma medzistavcová platnička. K najväčším deformáciám logicky došlo v strede anulus fibrosus.(Obr.16)



Obr.16 Celkové posunutie na platničke - rovnomerné zaťaženie

Obrázok ilustruje posuvy uzlov konečnoprvkovej siete. Je vidieť, že uzly platničky sa posúvajú smerom nadol.



Obr.17 Zobrazenie posunutí uzlov konečnoprvkovej siete – rovnomerné zaťaženie

5.2 NEROVNOMERNÉ ZAŤAŽENIE

V druhom experimente je zadávané B. zaťaženie, ktoré zodpovedá predklonu alebo záklonu. Bola použitá funkcia, ktorá modeluje rozloženie záťaže na platničke.

5.2.1 OKRAJOVÉ PODMIENKY

Okrajové podmienky boli zadávané na hranici $\delta\Omega$ nasledovne:

- pozdĺž celej spodnej plochy , vzhľadom na ktorú sa počítali deformácie a napätia všetkých ostatných uzlov úplné ukotvenia

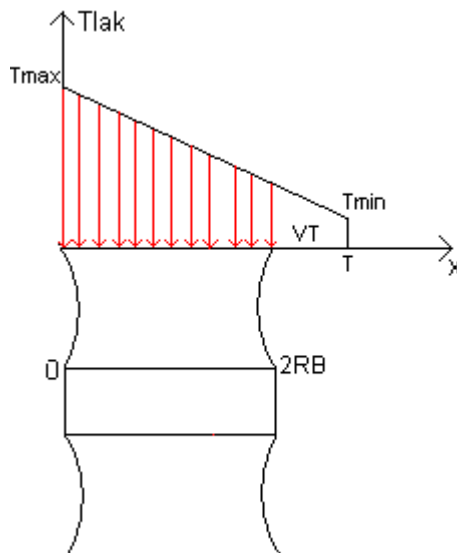
$$z = -(E1+E2+HD+2HT): \quad v_z(r,z,\theta) = 0$$

$$v_r(r,z,\theta) = 0$$

$$v_\theta(r,z,\theta) = 0$$

- na hornej postave stavcaje použitá funkcia(Obr.18), reprezentujúca nerovnomerné zaťaženie s minimálnou hodnotou

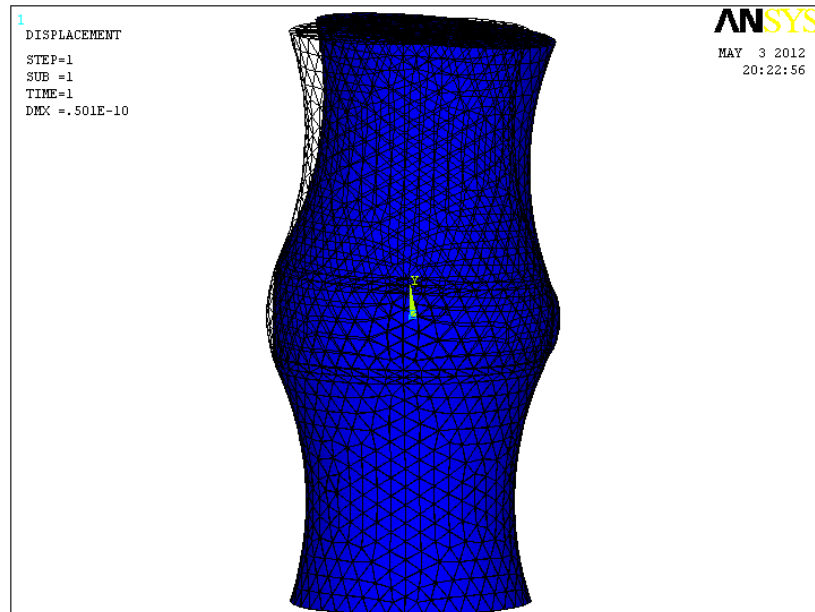
$$z = E1+E2+HD+2HT: \quad p = (T_{min}-T_{lak})/(2*RB + VT)*X + T_{lak}$$



Obr.18 Odvodenie funkcie tlaku

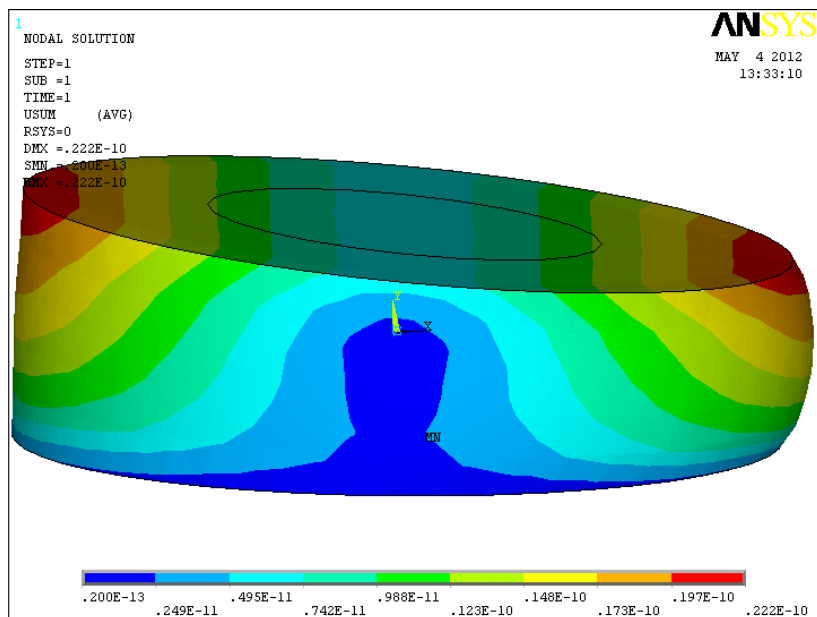
5.2.2 VÝSLEDKY

Platnička na strane ťažiska sa stačila a na strane ďalej od ťažiska sa vytiahla v smere osi z (Obr. 19), čo je dôsledok nerovnomerného zaťaženia. To je spôsobené tým , že nucleus pulposus si zachováva objem, ale nie tvar. Stavec sa deformoval len zanedbateľne, nastal iba posun stavca smerom dole k ťažisku človeka.



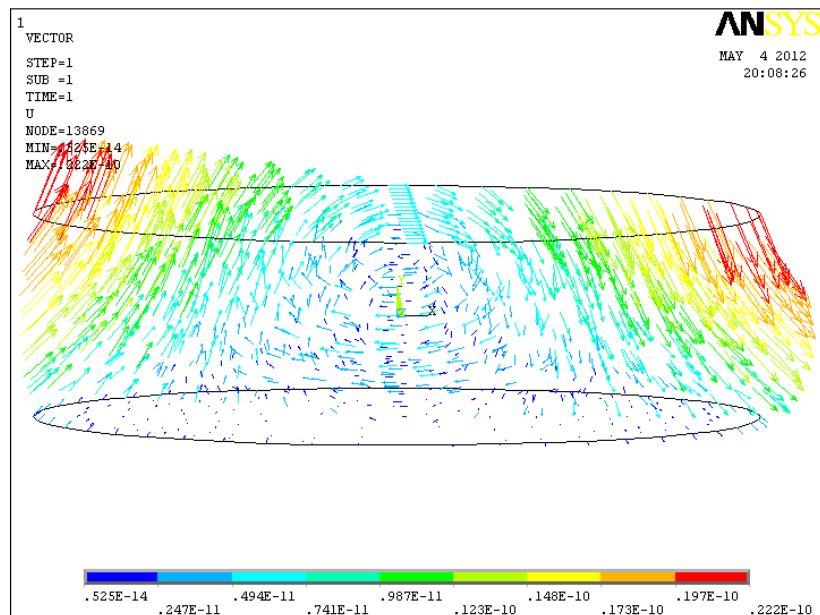
Obr.19 Deformovaný a nedeformovaný stav pri nerovnomernom zaťažení

Znovu ma zaujímala iba platnička. K najväčším premiestneniam logicky došlo v miestach najbližšie k ťažisku a v miestach najďalej od ťažiska, čo je spôsobené nerovnomerným zaťažením.(Obr. 20)



Obr. 20 Zobrazené najväčšie posunutia na platničke – nerovnomerné zaťaženie

Je vidieť ako sa uzly konečnoprvkovej siete na jednej strane posúvajú smerom nadol a na druhej smerom nahor.(Obr. 21)



Obr.21 Zobrazenie posunutí uzlov konečnoprvkovej siete – nerovnomerné zaťaženie

5.3 ROTÁCIA

V treťom experimente som na platničku zadávala rotáciu C, čo zodpovedá napríklad polohe človeka, ktorý sa otáča na stranu okolo svojej vertikálnej osi. Pri zadávaní sa aplikuje moment sily do bodov na hornej kružnici podstavy stavca.

5.3.1 OKRAJOVÉ PODMIENKY

Okrajové podmienky boli zadávané na hranici $\delta\Omega$ nasledovne:

- pozdĺž celej spodnej plochy, vzhľadom na ktorú sa počítali deformácie a napätia všetkých ostatných uzlov:

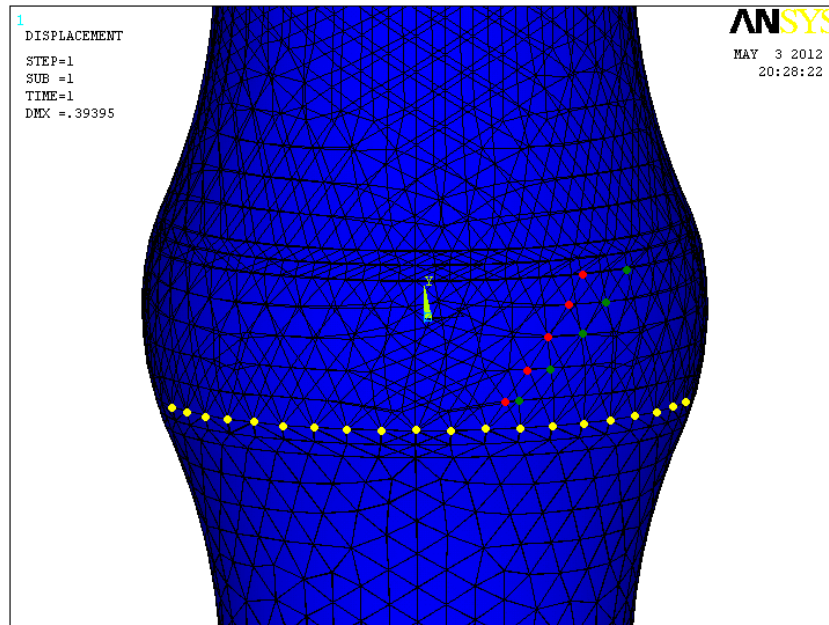
$$\begin{aligned} z = -(E1+E2+HD+2HT): \quad & v_z(r,z,\theta) = 0 \\ & v_r(r,z,\theta) = 0 \\ & v_\theta(r,z,\theta) = 0 \end{aligned}$$

- na hornej kružnici podstavy stavca boli zadané momenty:

$$\begin{aligned} z = E1+E2+HD+2HT: \quad & FX = -100000N \\ & FX = 100000N \\ & FZ = -100000N \\ & FZ = 100000N \end{aligned}$$

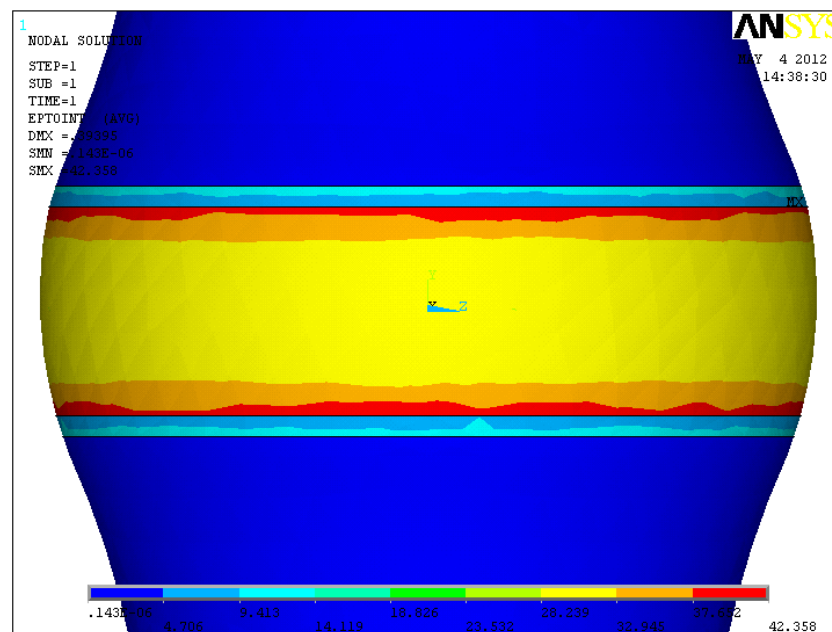
5.3.2 VÝSLEDKY

Pri rotácii sa najviac deformovala platnička, horný stavec a dolný stavec sa deformovali zanedbateľne. Spodný stavec ostal v podstate na mieste. Body anulus fibrosus pripojené na spodný stavec ostali na mieste (žlté body), body v „strede“ anulus fibrosus sa posunuli (pôvodné body - červené, posunuté body - zelené) a body anulus fibrosus pripojené na horný stavec sa posunuli spolu s ním (horný stavec je vzhľadom na anulus fibrosus oveľa tuhší omnoho menej pružný). (Obr. 22)



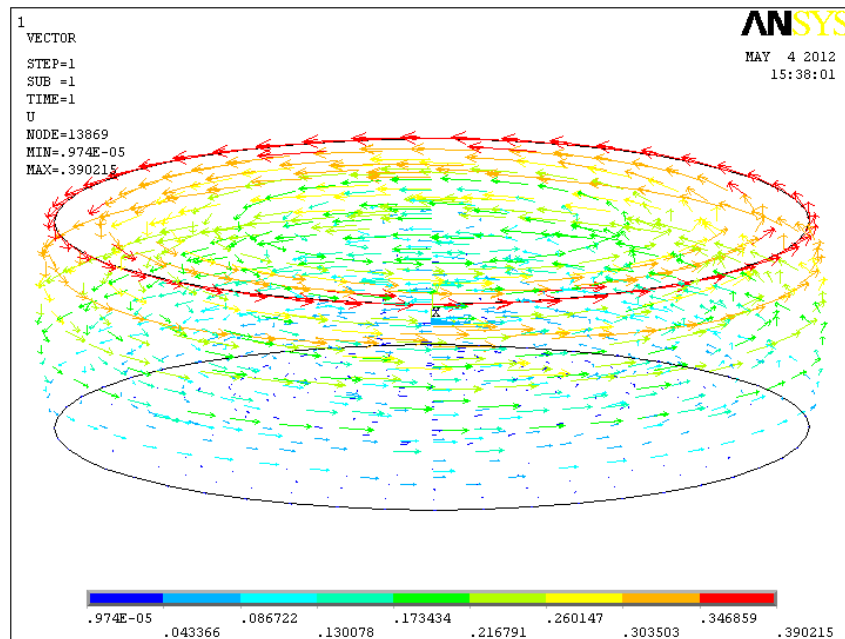
Obr 22 Deformácia pohybového segmentu pri rotácii

Znovu sa zameriavam na platničku. Najväčšie napätia zaznamenávame podľa očakávania v mieste pripojenia pružného prstenca anulus fibrosus na omnoho tuhšie stavce.(Obr. 23)



Obr. 23 Zobrazené napätia pri rotácii

Nasledujúci obrázok (Obr. 24) ilustruje posuvy jednotlivých uzlov konečnoprvkovej siete.



Obr. 24 Zobrazenie posunutí uzlov konečnoprvkovej siete – rotácia

6 ZÁVER

Cieľom práce bolo matematické a numerické modelovanie medzistavcovej platničky. Na začiatku práce bola uskutočnená štúdia anatómie chrbtice, ktorá je dôležitá pri riešení daného problému. Ďalej boli odvodené základné vzorce teórie pružnosti.

Model medzistavcovej platničky je kompletne parametrizovaný, preto môže byť využitý aj pri riešení záťaže na medzistavcovú platničku v inej časti chrbtice. Pre výpočtové riešenie bola zvolená metóda konečných prvkov použitím programu ANSYS. Boli robené len fyziologické zaťaženia – posunutia a napätia, pri namáhaní v pri vzpriamenej pozícii, pri predklone alebo záklone a pri otáčaní sa na stranu okolo vertikálnej osi tela.

Do budúcnosti by som ešte chcela urobiť presnejšiu geometriu modelu, na modelovať zaťaženie ešte iné zaťaženia skúsiť namodelovať celú lumbálnu časť.

POUŽITÁ LITERATÚRA

- [1] ANSYS- help
- [2] <http://en.wikipedia.org/wiki/Biomechanics>
- [3] Kneschke,A.: Používanie diferenciálnych rovníc v praxi, Nakladateľstvo ALFA, Bratislava, 1969, 1. vyd., 472 s., ISBN 63-078-69
- [4] Minárová M., Sumec J.: Mechanics of lumbar part of the human spine, mathematical model and computations; Acta of Bioengineering and Biomechanics; Publisher:Wroclaw University of Technology, Poland.(In press)
- [5] Murín, J., Élesztos, P.: Mechanika kontinua, Edičné stredisko SVŠT, Bratislava, 1986, 1.vyd., 210s.,ISBN 85-238-86
- [6] Panis,V.: Deformačne – napet'ová analýza páterných segmentú, diplomová práca, Brno, Vysoké učení technické v Brne, 2009, 80 s.
- [7] Reddy, J.: An introduction to the Finite Element, McGraw-Hill, New York,1993,1. vyd.,684 s., ISBN 0-07-112799-2
- [8] Sumec Jozef, Stehlík Milan, Minárová Mária: A discussion on lumbar spine reconstruction: a semi stochastic processes approach, JAMSI , 2009 Vol 5, No. 2
- [9] Valenta,J.: Biomechanika, Academia, 1985,1.vyd., 539s., ISBN 80-246-0306